ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Προσδιορίστε το supremum των παρακάτω συνόλων:

(α) $\left\{\dfrac{n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

(β) $\left\{\dfrac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N} \text{ και } n+m \leq 10\right\}$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: (α) Θα δείξουμε ότι το supremum είναι ο $\dfrac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι ο $\dfrac{1}{2}$ είναι άνω φράγμα του συνόλου αφού

$$\frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\,.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{n}{2n+1} > \frac{1}{2} - \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\,.$$

Τέτοιος $n \in \mathbb{N}$ όμως υπάρχει λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας. Συνεπώς το συμπέρασμα έπεται από τον τον ε-χαρακτηρισμό του supremum.

(β) Το supremum είναι το 9 αφού είναι το μέγιστο του συνόλου. Πράγματι, αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n+m \leq 10$ τότε $1 \leq n, m \leq 9$, άρα $\frac{n}{m} \leq \frac{9}{1} = 9$. □

Ασκηση 2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή ή λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

(α) Ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ περιέχει πάντα το supremum του.

(β) Αν $x < M$ για κάθε στοιχείο του μη κενού συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$, τότε $\sup A < M$.

(γ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\alpha < \beta$ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε $\sup A < \inf B$.

(δ) Αν A και B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\sup A \leq \sup B$, τότε υπάρχει στοιχείο του B που είναι άνω φράγμα του συνόλου A.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Υπόδειξη: (α) Σωστή, αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο είναι και το supremum του.

(β) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup\,[0,1) = 1$. Αν επιλέξουμε $M = 1$ τότε $x < M$ για κάθε $x \in [0,1)$, όμως $\sup\,[0,1) = 1 = M$.

γ) Λάθος, αφού για παράδειγμα $\sup[0,1) = 1 = \inf(1,2]$ ενώ για κάθε $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ ισχύει ότι $\alpha < 1 < \beta$.

(δ) Λάθος. Παίρνουμε για παράδειγμα $A = B = [0,1)$. Έχουμε $\sup A = 1 = \sup B$ αλλά δεν υπάρχει στοιχείο του $B = A$ που να είναι άνω φράγμα του A.

Ασκηση 3. (α) Έστω $A \neq \varnothing$ κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\alpha = \inf A$ αν και μόνο αν

(i) το α είναι κάτω φράγμα του A και

(ii) για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \epsilon$.

(β) Αποδείξτε ότι $\inf\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0$.

[*Υπόδειξη:* για το (β) να χρησιμοποιήσετε το (α) και την Αρχιμήδεια ιδιότητα.]

Υπόδειξη: (α) Αν $\alpha = \inf A$ τότε προφανώς το α είναι κάτω φράγμα του A. Επίσης κάθε μεγαλύτερος αριθμός από το α δεν είναι κάτω φράγμα του A και συνεπώς για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < \alpha + \varepsilon$.

Αντίστροφα, αν $\beta > \alpha$ και θέσουμε $\varepsilon = \beta - \alpha$ τότε από το (ii) υπάρχει $x \in A$ ώστε

$$x < \alpha + \varepsilon = \alpha + (\beta - \alpha) = \beta\,.$$

Συνεπώς ο β δεν είναι κάτω φράγμα του A και αφού από το (i) ο α είναι κάτω φράγμα του A έχουμε ότι $\alpha = \inf A$.

(β) Εφόσον $\dfrac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο 0 είναι κάτω φράγμα του συνόλου. Επιπλέον, αν $\varepsilon > 0$, τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ και συνεπώς από το (α) προκύπτει το συμπέρασμα. □

Ασκηση 4. Έστω $A \neq \varnothing$, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα θεωρώντας το σύνολο

$$-A = \{-\alpha : \alpha \in A\}\ .$$

και τον $s = -\sup(-A)$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $-A = \{-\alpha : \alpha \in A\}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $-A$ είναι μη κενό: υπάρχει $\alpha \in A$ και τότε $-\alpha \in -A$. Επίσης, το $-A$ άνω φραγμένο: το A είναι κάτω φραγμένο και αν θεωρήσουμε τυχόν κάτω φράγμα t του A μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ο $-t$ είναι άνω φράγμα του $-A$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup(-A)$ του $-A$. Όπως πριν, αφού ο s είναι άνω φράγμα του $-A$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A. Αν $y > -s$, τότε $-y < s$. Αφού $s = \sup(-A)$, υπάρχει $b \in -A$ τέτοιο ώστε $-y < b$. Τότε, $-b \in A$ και $-b < y$. Δηλαδή, ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A και αν $y > -s$ τότε ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A. Έπεται ότι $-s = \inf A$. □

Ασκηση 5. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $\sup A = \inf B$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τέτοια ώστε $\beta - \alpha < \varepsilon$.

[*Υπόδειξη:* να χρησιμοποιήσετε τον χαρακτηρισμό για τα supremum και infimum ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.]

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό για τα sup και inf ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ υπάρχουν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ τέτοια ώστε

$$\alpha > \sup A - \varepsilon/2 \text{ και } \beta < \inf B + \varepsilon/2\,.$$

Οπότε, αφού $\sup A = \inf B$, έχουμε ότι $\beta - \alpha < \varepsilon$. □

Ασκηση 6 (Αρχή του κιβωτισμού)**.** Δίνεται η οικογένεια

$$\{[\alpha_n, \beta_n] : n \in \mathbb{N}\}$$

κλειστών διαστημάτων πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα

$$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subseteq [\alpha_n, \beta_n]$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άνω φραγμένο.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε β_n είναι άνω φράγμα του A.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n] \neq \varnothing \,.$$

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_1$. Συνεπώς, το A είναι άνω φραγμένο από τον β_1.

(β) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Αν $k \leq n$ τότε από την $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq [\alpha_k, \beta_k]$ (που ισχύει γιατί τα διαστήματα είναι κιβωτισμένα) έχουμε ότι

$$\alpha_n \leq \alpha_k \leq \beta_k \leq \beta_n \implies \alpha_k \leq \beta_n .$$

Αν $k > n$ τότε από την $[\alpha_k, \beta_k] \subseteq [\alpha_n, \beta_n]$ (που ισχύει γιατί τα διαστήματα είναι κιβωτισμένα) έχουμε ότι

$$\alpha_k \leq \alpha_n \leq \beta_n \leq \beta_k \implies \alpha_k \leq \beta_n .$$

Συνεπώς, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\alpha_k \leq \beta_n$. Σηλαδή, ο β_n είναι άνω φράγμα του A.

(γ) Αφού το σύνολο A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, σύμφωνα με την ιδιότητα της πληρότητας του $\mathbb{R}$, θα έχει supremum. Έστω $x = \sup A$. Θα δείξουμε ότι

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n] \,.$$

Πράγματι για κάθε $n \in N$, $x \geq \alpha_n$ (ως supremum είναι προφανώς άνω φράγμα του A). Από την άλλη μεριά $x \leq \beta_n$ γιατί, από το (β), κάθε β_n είναι άνω φράγμα του A και το x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A. Συνεπώς, $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n] \neq \emptyset \,.$$

$\square$

Ασκηση 7. Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα maximum, minimum, supremum και infimum του συνόλου

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} \,:\, x \in A \right\} .$$

Υπόδειξη: Αν $y \in B$ τότε $y = \frac{x}{x+1}$ για κάποιο $x \in A$. Αφού $A \subset (0, +\infty)$, βλέπουμε ότι $y > 0$. Συνεπώς, το B είναι κάτω φραγμένο από το 0.

Δείχνουμε ότι $\inf B = 0$ με τον ε-χαρακτηρισμό του infimum. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\inf A = 0$, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < \varepsilon$. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} < x < \varepsilon$ (είναι $x + 1 > 1$ αφού $x > 0$).

Παρατηρούμε ότι ο 1 είναι άνω φράγμα του B: αν $y \in B$ τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = \frac{x}{x+1} < 1$. Δείχνουμε ότι $\sup B = 1$ με τον ε-χαρακτηρισμό του supremum. Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $x \in A$ ώστε $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$, δηλαδή $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Αφού το A δεν είναι άνω φραγμένο, τέτοιο $x \in A$ υπάρχει. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$.

Το B δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο: θα έπρεπε να υπάρχει $x > 0$ που να ικανοποιεί την $\frac{x}{x+1} = 0$ ή την $\frac{x}{x+1} = 1$ αντίστοιχα (κάτι που δεν γίνεται). $\square$