

Η ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ και οι συνέπειές της

Ορισμός 1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το A είναι άνω φραγμένο αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\forall a \in A, a \leq M \quad (1)$$

Κάθε πραγματικός αριθμός M που ικανοποιεί την (1) θα καλείται άνω φράγμα του A .

Παρατηρήστε ότι αν το A είναι άνω φραγμένο από κάποιο $M \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $M' \geq M$ είναι πάλι άνω φράγμα του A . Άρα δεν υπάρχει το μεγαλύτερο άνω φράγμα του A .

Ορισμός 2. Ένας αριθμός $M \in \mathbb{R}$ θα καλείται supremum του A ή ελάχιστο άνω φράγμα του A αν (α) Ο M είναι άνω φράγμα του A και (β) αν M' άνω φράγμα του A τότε $M \leq M'$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το supremum ενός συνόλου αν υπάρχει είναι μοναδικό. Πράγματι έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με supremum M_1, M_2 . Τότε $M_1 \leq M_2$ και $M_2 \leq M_1$ οπότε $M_1 = M_2$. Στην συνέχεια το supremum ενός συνόλου A θα συμβολίζεται με $\sup A$.

Σχετική (αλλά όχι ταυτόσημη) με την έννοια του supremum είναι η έννοια του μεγίστου ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Ένα στοιχείο a_0 του A θα καλείται μέγιστο του A αν $\forall a \in A, a \leq a_0$.

Με άλλα λόγια το μέγιστο του A είναι ένα άνω φράγμα του A που ανήκει στο A . Είναι εύκολο να δούμε ότι, όπως και με το supremum το μέγιστο ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ αν υπάρχει είναι μοναδικό. Το μέγιστο ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ θα συμβολίζεται με $\max A$.

Πρόταση 1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A έχει μέγιστο στοιχείο τότε $\max A = \sup A$.

Απόδειξη. Έστω $M = \max A$. Το M είναι άνω φράγμα του A (ως το μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία του A). Επίσης, έστω M' άνω φράγμα του A . Τότε $M' \geq a$ για όλα τα $a \in A$. Ειδικότερα $M' \geq M$ (αφού $M \in A$). Άρα το M είναι το supremum του A . $\square$

Δεν έχουν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ μέγιστο στοιχείο ακόμα και αν είναι άνω φραγμένα. Για παράδειγμα το $A = (0, 1)$ είναι άνω φραγμένο, $\sup A = 1$ και δεν έχει μέγιστο στοιχείο, αφού για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει $a' \in A$ με $a' > a$ (πχ. το στοιχείο $a' = \frac{a+1}{2}$).

Δεχόμαστε ότι το $\mathbb{R}$ έχει την παρακάτω ιδιότητα.

Ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$: Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει supremum.

Η ιδιότητα αυτή έχει πολύ σημαντικές συνέπειες για την δομή των πραγματικών αριθμών τις οποίες αναφέρουμε στην συνέχεια.

1. Συνέπειες στους φυσικούς

Πρόταση 2. (Αρχιμήδεια Ιδιότητα του $\mathbb{N}$) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > x$. Ισοδύναμα, το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η πρόταση δεν είναι αληθής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \leq x$. Με άλλα λόγια το x είναι ένα άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ υπάρχει το supremum του $\mathbb{N}$. Έστω $s = \sup \mathbb{N}$.

Θεωρούμε τώρα τον αριθμό $s - 1$. Επειδή $s - 1 < s$ και το s είναι το supremum του A (το **μικρότερο** άνω φράγμα του A) ο $s - 1$ ως γνήσια μικρότερος του s δεν είναι άνω φράγμα του A . Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$s - 1 < n_0$$

Αλλά τότε $s < n_0 + 1$ και επειδή $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, το s δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο. $\square$

Πόρισμα 3. Έστω $\delta > 0$. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n\delta > x$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Αρχιμήδεια Ιδιότητα για " $x = x/\delta$ " και παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > \frac{x}{\delta} \Rightarrow n\delta > x$$

$\square$

Πόρισμα 4. (Ιδιότητα του Ευδόξου) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Απόδειξη. Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα για $x = 1/\varepsilon$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n}$$

$\square$

2. Συνέπειες στους ακεραίους

Πρόταση 5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με $k < x$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον αντίθετο $-x$ του x . Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$n > -x \Rightarrow -n < x$$

Άρα ο $k = -n$ ικανοποιεί το συμπέρασμα της πρότασης. $\square$

Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $k_1 < k_2$ ακέραιοι αριθμοί τότε ο $k_2 - k_1$ είναι θετικός ακέραιος και άρα φυσικός, οπότε $k_2 - k_1 \geq 1$. Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι η απόσταση δύο διαφορετικών ακεραίων είναι τουλάχιστον 1 ή σε ένα διάστημα μήκους¹ γνήσια μικρότερου του 1 δεν χωράνε δύο ακέραιοι.

Πρόταση 6. Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}$ άνω φραγμένο και έστω $s = \sup A$. Αρκεί να δειχθεί ότι $s \in A$ γιατί τότε το s θα είναι το μέγιστο στοιχείο του A . Ας υποθέσουμε ότι $s \notin A$. Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2 θεωρούμε τον αριθμό $s - 1$. Επειδή ο $s - 1$ είναι γνήσια μικρότερος του s και ο s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A , ο $s - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του A και συνεπώς υπάρχει ένα στοιχείο $k_1 \in A$ τέτοιο ώστε

$$s - 1 < k_1 \quad (2)$$

Επειδή $s = \sup A$ έχουμε $k_1 \leq s$. Επειδή $k_1 \in A$ και υποθέσαμε ότι $s \notin A$ αποκλείεται να έχουμε $k_1 = s$ και άρα

$$k_1 < s \quad (3)$$

Συνεπώς και ο k_1 δεν είναι άνω φράγμα του A . Άρα υπάρχει $k_2 \in A$ τέτοιος ώστε

$$k_1 < k_2 \quad (4)$$

Επειδή $k_2 \in A$ και $s = \sup A$ έχουμε ότι $k_2 \leq s$ και όπως και με τον k_1 , επειδή $k_2 \in A$ και $s \notin A$,

$$k_2 < s \quad (5)$$

Από τις (1) – (5) έχουμε

$$s - 1 < k_1 < k_2 < s$$

που σημαίνει ότι

$$0 < k_2 - k_1 < 1$$

άτοπο, αφού k_1, k_2 ακέραιοι. □

Πόρισμα 7. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω $k_0 = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$ (ισοδύναμα, ο k_0 είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος του x). Τότε ο k_0 είναι ο μοναδικός ακέραιος με την ιδιότητα

$$k_0 \leq x < k_0 + 1 \quad (6)$$

Απόδειξη. Ο ακέραιος k_0 είναι καλά ορισμένος. Πράγματι, το σύνολο

$$A = \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

¹το **μήκος** ενός φραγμένου διαστήματος του $\mathbb{R}$ ορίζεται να είναι η απόλυτος τιμή της διαφοράς των άκρων του. Αν το διάστημα δεν είναι φραγμένο τότε λέμε ότι έχει *άπειρο μήκος*).

είναι μη κενό (από Πρόταση 5) και άνω φραγμένο (εξ ορισμού του, από το x). Συνεπώς, από την Πρόταση 6 έχει μέγιστο στοιχείο.

Έχουμε $k_0 \in A$ και άρα εθ ορισμού του A , $k_0 \leq x$. Επίσης, $k_0 + 1 \notin A$ και άρα, πάλι εξ ορισμού του A , $k_0 + 1 > x$. Τέλος, δεν υπάρχει άλλος ακέραιος που να ικανοποιεί την (6). Πράγματι, η (6) δίνει

$$x - 1 < k_0 \leq x \quad (7)$$

Αν λοιπόν υπήρχαν δύο διαφορετικοί ακέραιοι έστω $k_0 < k'_0$ που να ικανοποιούσαν την (6) αυτοί θα ικανοποιούσαν και την (7), οπότε θα είχαμε $x - 1 < k_0 < k'_0 \leq x$ που δίνει ότι $0 < k'_0 - k_0 < 1$ άτοπο, αφού $k_0, k'_0 \in \mathbb{Z}$. $\square$

Ορισμός 4. (Ακέραιο μέρος) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε ακέραιο μέρος του x τον μεγαλύτερο ακέραιο k που είναι μικρότερος ή ίσος του x ή ισοδύναμα τον μοναδικό ακέραιο k με την ιδιότητα

$$k \leq x < k + 1$$

Το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού υπάρχει πάντα από το Πρόσμμα 7 και συμβολίζεται με $[x]$.

3. Συνέπειες στους ρητούς

Λήμμα 8. Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Αν $b - a > 1$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$$a < k < b$$

Με άλλα λόγια, κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ με μήκος γνήσια μεγαλύτερο του 1 περιέχει κάποιον ακέραιο.

Απόδειξη. Επειδή

$$[a] \leq a < [a] + 1 \leq a + 1 < b$$

ο ακέραιος $k = [a] + 1$ ικανοποιεί το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση 9. Η Πρόταση 8 δεν ισχύει αν $b - a \leq 1$. Πχ. το ανοικτό διάστημα $(1, 2)$ έχει μήκος 1 και δεν περιέχει κανένα ακέραιο.

Μια από τις σημαντικότερες συνέπειες της Ιδιότητας της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ είναι η εξής.

Πρόταση 10. (Πυκνότητα ρητών στο $\mathbb{R}$) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε

$$a < q < b$$

Με άλλα λόγια κάθε ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ περιέχει κάποιον ρητό.

Απόδειξη. Αν $b - a > 1$ το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 8. Έστω λοιπόν ότι $b - a \leq 1$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$nb - na > 1 \quad (8)$$

Αυτό είναι εφικτό από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα (Πρόταση 2). Πράγματι, για τον πραγματικό αριθμό $\frac{1}{b-a}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow n(b-a) = nb - na > 1$$

Από την (9) και το Λήμμα 8 (για " $a = na$ " και " $b = nb$ "), υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ με

$$na < k < nb \Rightarrow a < \frac{k}{n} < b$$

και άρα ο ρητός $q = \frac{k}{n}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα. $\square$

4. Ύπαρξη τετραγωνικών ριζών και αρρήτων αριθμών

Πρόταση 11. Για κάθε $a > 0$ υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός s τέτοιος ώστε $s^2 = a$.

Ως γνωστόν ο θετικός αριθμός s με την ιδιότητα $s^2 = a$ είναι μοναδικός, καλείται τετραγωνική ρίζα του a και συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.

Θα χρειασθούμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 12. Έστω $s, a > 0$ τέτοια ώστε $s^2 \neq a$.

1. Αν $s^2 < a$ τότε υπάρχει αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(s + \epsilon)^2 < a$.
2. Αν $s^2 > a$ τότε υπάρχει αρκετά μικρό $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $s - \epsilon > 0$ και $(s - \epsilon)^2 > a$

Απόδειξη. (1) Έστω $s^2 < a$. Επιλέγουμε

$$0 < \epsilon < 1 \quad (9)$$

τέτοιο ώστε

$$\epsilon < \frac{a - s^2}{2s + 1} \quad (10)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (s + \epsilon)^2 &= s^2 + 2s\epsilon + \epsilon^2 \\ &= s^2 + (2s + \epsilon)\epsilon \\ &\stackrel{(9)}{<} s^2 + (2s + 1)\epsilon \\ &\stackrel{(10)}{<} s^2 + (a - s^2) = a \end{aligned}$$

(2) Έστω $s^2 > a$. Επιλέγουμε

$$0 < \epsilon < \frac{s^2 - a}{2s} \quad (11)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (s - \epsilon)^2 &= s^2 - 2s\epsilon + \epsilon^2 \\ &> s^2 - 2s\epsilon \\ &\stackrel{(11)}{>} s^2 - (s^2 - a) = a \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της Πρότασης 10. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < a\}$. Το A είναι μη κενό, ($0 \in A$) και άνω φραγμένο (πχ. από τον $a + 1$). Άρα, από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$, υπάρχει το $s = \sup A$. Έχουμε ότι $s > 0$. Πράγματι, από το Πόρισμα 4, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < a$. Επειδή

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n} < a$$

έπεται ότι $\frac{1}{n} \in A$ και άρα $s = \sup A \geq \frac{1}{n} > 0$.

Θα δείξουμε ότι $s^2 = a$ αποκλείοντας τις περιπτώσεις $s^2 < a$ και $s^2 > a$. Πράγματι, αν $s^2 < a$ από το Λήμμα 12 θα υπήρχε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό με $(s + \epsilon)^2 < a$. Αλλά τότε από τον ορισμό του A θα είχαμε $s + \epsilon \in A$, άτοπο αφού $s + \epsilon > s = \sup A$. Αντίστοιχα, αν $s^2 > a$, πάλι από το Λήμμα 12 θα υπήρχε $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό με $s - \epsilon > 0$ και $(s - \epsilon)^2 > a$. Άρα $(s - \epsilon)^2 > a > x^2$ για κάθε $x \in A$ που σημαίνει ότι $s - \epsilon > |x| \geq x$ για κάθε $x \in A$. Άρα το $s - \epsilon$ είναι άνω φράγμα του A , άτοπο αφού $s - \epsilon < s = \sup A$. □

Ορισμός 5. Ένας πραγματικός αριθμός που δεν είναι ρητός καλείται **άρρητος**.

Πρόταση 13. Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (και άρα υπάρχουν άρρητοι αριθμοί).

Απόδειξη. Από την Πρόταση 15 υπάρχει $s > 0$ με $s^2 = 2$. Επειδή δεν υπάρχει ρητός που το τετράγωνό του να είναι το 2, έπεται ότι ο s θα είναι αναγκαστικά άρρητος. □

Πρόταση 14. Έστω $q \in \mathbb{Q}$ με $q \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$ άρρητος. Τότε οι αριθμοί qa , $\frac{q}{a}$, $\frac{a}{q}$ είναι άρρητοι.

Απόδειξη. Αν ο $qa = q' \in \mathbb{Q}$ τότε $a = \frac{q'}{q} \in \mathbb{Q}$ ως πηλίκο ρητών, άτοπο. Ομοίως και για τους $\frac{q}{a}$ και $\frac{a}{q}$. □

Πρόταση 15. (Πυκνότητα αρρητών στο $\mathbb{R}$) Έστω $a < b$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε υπάρχει ξ άρρητος τέτοιος ώστε

$$a < \xi < b$$

Απόδειξη. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τους $a' = \sqrt{2}a$ και $b' = \sqrt{2}b$. Έχουμε $a' < b'$ και άρα από την Πυκνότητα των ρητών αριθμών (Πρόταση 10) υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $a' < q < b'$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \neq 0$ (αν $q = 0$ επιλέγουμε έναν άλλο ρητό q' με $a' < q' < 0 < b'$). Άρα

$$\sqrt{2}a < q < \sqrt{2}b \Rightarrow a < \frac{q}{\sqrt{2}} < b$$

Επειδή ο q είναι ρητός διάφορος του 0 και ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, από Πρόταση 14, ο $\frac{q}{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος. Συνεπώς, ο $\xi = \frac{q}{\sqrt{2}}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα της πρότασης. $\square$

5. Κάτω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και infimum

Ορισμός 6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι το A είναι κάτω φραγμένο αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\forall a \in A, m \leq a \quad (12)$$

Κάθε πραγματικός αριθμός m που ικανοποιεί την (1) θα καλείται κάτω φράγμα του A .

Παρατηρήστε ότι αν το A είναι κάτω φραγμένο από κάποιο $m \in \mathbb{R}$ τότε κάθε αριθμός $m' \leq m$ είναι πάλι κάτω φράγμα του A . Άρα δεν υπάρχει το μικρότερο κάτω φράγμα του A .

Ορισμός 7. Ένας αριθμός $m \in \mathbb{R}$ θα καλείται infimum του A ή μέγιστο κάτω φράγμα του A αν (α) Ο m είναι κάτω φράγμα του A και (β) αν m' κάτω φράγμα του A τότε $m' \leq m$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το infimum ενός συνόλου αν υπάρχει είναι μοναδικό. Πράγματι έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με supremum M_1, M_2 . Τότε $M_1 \leq M_2$ και $M_2 \leq M_1$ οπότε $M_1 = M_2$. Στην συνέχεια το supremum ενός συνόλου A θα συμβολίζεται με $\inf A$.

Σχετική (αλλά όχι ταυτόσημη) με την έννοια του infimum είναι η έννοια του ελαχίστου ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 8. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Ένα στοιχείο a_0 του A θα καλείται ελάχιστο του A αν $\forall a \in A, a_0 \leq a$.

Με άλλα λόγια το ελάχιστο του A είναι ένα κάτω φράγμα του A που ανήκει στο A . Είναι εύκολο να δούμε ότι το ελάχιστο στοιχείο ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ αν υπάρχει είναι μοναδικό. Το ελάχιστο ενός $A \subseteq \mathbb{R}$ θα συμβολίζεται με $\min A$.

Πρόταση 16. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό. Αν το A έχει ελάχιστο στοιχείο τότε $\min A = \inf A$.

Απόδειξη. Έστω $m = \min A$. Το m είναι κάτω φράγμα του A (ως το μικρότερο από όλα τα στοιχεία του A). Επίσης, έστω m' κάτω φράγμα του A . Τότε $m' \leq a$ για όλα τα $a \in A$. Ειδικότερα $m' \leq m$ (αφού $m \in A$). Άρα το m είναι το infimum του A . $\square$

Δεν έχουν όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ελάχιστο στοιχείο ακόμα και αν είναι κάτω φραγμένα. Για παράδειγμα το $A = (0, 1)$ είναι κάτω φραγμένο, $\inf A = 0$ αλλά το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο, αφού για κάθε $a \in (0, 1)$ υπάρχει $a' \in A$ με $a' < a$ (πχ. το στοιχείο $a' = \frac{a}{2}$).

Η Ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$ (παρόλο που αναφέρεται στο supremum) μας δίνει ως συνέπεια την ύπαρξη του infimum.

Πρόταση 17. Κάθε μη κενό και κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχει infimum.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μη κενό και κάτω φραγμένο και έστω B το σύνολο των κάτω φραγμάτων του A . Από υπόθεση το B είναι μη κενό. Επίσης, το B είναι άνω φραγμένο. Πράγματι, για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$, έχουμε $b \leq a$ και άρα κάθε $a \in A$ είναι άνω φράγμα του B . Συνεπώς ως μη κενό και άνω φραγμένο, από την ιδιότητα της Πληρότητας του $\mathbb{R}$, το B έχει supremum.

Έστω $s = \sup B$. Ισχυριζόμαστε ότι το s είναι το infimum του A . Για να το δείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το s είναι κάτω φράγμα του A , δηλαδή $s \in B$ (γιατί τότε ως supremum του B θα είναι και το μεγαλύτερο στοιχείο του B δηλαδή (από τον ορισμό του B) θα είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του A). Πράγματι, αν το s δεν ήταν κάτω φράγμα του A θα υπήρχε $a \in A$ με $a < s$. Αλλά τότε το a δεν θα ήταν άνω φράγμα του B (ως μικρότερο από το $s = \sup B$) και άρα θα υπήρχε $b \in B$ με $a < b$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το b ως στοιχείο του B είναι κάτω φράγμα του A και αναγκαστικά είναι μικρότερο ή ίσο από όλα τα στοιχεία του A . $\square$