

ΣΗΜΜΥ
Μαθηματική Ανάλυση
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων (υποδείξεις)

Ασκηση 1. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός α τέτοιος ώστε $\alpha^2 = 3$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m^2}{n^2} = 3.$$

Τότε $m^2 = 3n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισχυριζόμαστε ότι τότε και ο m είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν αυτό δεν συμβαίνει τότε ο m θα είναι της μορφής $3k+1$ ή $3k+2$. Τότε όμως $(3k+1)^2 = 3(3k^2+2k)+1$ ή $(3k+2)^2 = 3(3k^2+4k+1)+1$ αντίστοιχα. Δηλαδή ο m^2 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, άτοπο!

Επομένως $m = 3k$, για κάποιον φυσικό k , απ' όπου έπεται ότι $m^2 = 9k^2$. Τότε $n^2 = 3k^2 \rightarrow$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 3. 'τοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι m, n δεν έχουν κοινό παράγοντα. $\square$

Ασκηση 2. (α) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη: (α) Έστω ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί m, n (μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν έχουν κοινό παράγοντα) τέτοιοι ώστε

$$\frac{m}{n} = \sqrt{6}.$$

Τότε $m^2 = 6n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. Τότε ο m είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3. 'ρα $m = 6k$, για κάποιον φυσικό $k \Rightarrow m^2 = 36k^2$. Συνεπώς, $n^2 = 6k^2 \Rightarrow$ ο n^2 άρα και ο n θα είναι πολλαπλάσια του 6. 'τοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι οι m, n δεν έχουν κοινό παράγοντα.

(β) Αν υποθέσουμε ότι ο $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι ρητός, τότε και το τετράγωνό του θα είναι ρητός. Δηλαδή $2 + 3 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τότε $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. $\square$

Ασκηση 3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ταυτότητα

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ η ζητούμενη ταυτότητα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για τον φυσικό n . Θα δείξουμε ότι ισχύει για τον $n+1$, δηλ.

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής συμπεραίνουμε ότι η ταυτότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Άσκηση 4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n+1} - 2$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη: (α) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 \geq 2\sqrt{2} - 2$, δηλαδή $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ που ισχύει διότι $2 \leq 9/4 = (3/2)^2$.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq 2\sqrt{k+1} - 2$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 2\sqrt{k+2} - 2.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq 2\sqrt{k+2} - 2$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \leq \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Όμως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση βλέπουμε ότι

$$2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) = \frac{2}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

(β) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$, η οποία ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geq 1$ έχουμε $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1 + \frac{3}{3k+1} = \frac{3k+4}{3k+1} \leq \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2 = \frac{4k^2+8k+4}{4k^2+4k+1} = 1 + \frac{4k+3}{4k^2+4k+1}$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $3(4k^2+4k+1) \leq (3k+1)(4k+3)$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $12k^2 + 12k + 3 < 12k^2 + 13k + 3$, η οποία ισχύει αφού $k > 0$. $\square$

Άσκηση 5. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι, για κάθε πραγματικό αριθμό x και για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει η ανισότητα

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

Υπόδειξη: Για $n = 1$ ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n . Θα δείξουμε ότι ισχύει για την τιμή $n+1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} |\sin(n+1)x| &= |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \\ &\leq |\sin nx| |\cos x| + |\cos nx| |\sin x| \\ &\leq |\sin nx| + |\sin x| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin x| \\ &= (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 6. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή αποδείξτε ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι ίσο με 2^n .

Υπόδειξη: Θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S . Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1} . Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T , δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k . Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Άσκηση 7. Αποδείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη: Αφού ο n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $N^2 < n < (N+1)^2$. Υποθέτουμε ότι $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, όπου $p, q \in \mathbb{N}$ και ο q είναι ο μικρότερος δυνατός.

Θέτουμε $q_1 = p - qN = q(\sqrt{n} - N)$ και $p_1 = p(\sqrt{n} - N) = qn - pN$. Τότε, $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ διότι είναι ακέραιοι και θετικοί (αφού $\sqrt{n} - N > 0$) και $q_1 = p - qN < q$ διότι $\frac{p}{q} = \sqrt{n} < N+1$. Όμως,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p(\sqrt{n} - N)}{q(\sqrt{n} - N)} = \frac{p}{q} = \sqrt{n},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $q_1 < q$. □