

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Οι μιγαδικοί αριθμοί, αν και δεν τους συναντάμε άμεσα στην πραγματική ζωή, είναι το ίδιο σημαντικοί με τους πραγματικούς αριθμούς στην επιστημονική περιγραφή του φυσικού κόσμου. Στη Γραμμική Άλγεβρα, κρίνεται απαραίτητη μία σύντομη εισαγωγή σε αυτούς, κυρίως για τη θεωρητική πληρότητα της μελέτης των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων (Κεφάλαιο 9). Σε αυτό το πρώτο κεφάλαιο, αρχικά θα ορίσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς έχοντας ως κίνητρο την επίλυση μίας δευτεροβάθμιας πολυωνυμικής εξίσωσης. Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των πράξεων μεταξύ μιγαδικών αριθμών και τη γεωμετρική αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών στο μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, θα ορίσουμε το μέτρο και το όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού που θα μας οδηγήσουν στην τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών και στην εύρεση των ριζών ανώτερης τάξης της μονάδας. Τέλος, θα μελετήσουμε πολυωνυμικές εξισώσεις, με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, και τις μιγαδικές λύσεις τους, και θα παρουσιάσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας.

1.1 Μιγαδικοί Αριθμοί

Ας θεωρήσουμε μία δευτεροβάθμια εξίσωση

$$at^2 + \beta t + \gamma = 0, \quad (1.1.1)$$

με γνωστούς πραγματικούς συντελεστές α, β, γ ($\alpha \neq 0$) και άγνωστο t . Από το σχολείο γνωρίζουμε ότι, αν η διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ είναι θετική, τότε η (1.1.1) έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες (λύσεις), τις $\tau_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $\tau_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, και το τριώνυμο $at^2 + \beta t + \gamma$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$at^2 + \beta t + \gamma = \alpha(t - \tau_1)(t - \tau_2) = \alpha \left(t - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right) \left(t - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \right),$$

ενώ αν η διακρίνουσα Δ είναι μηδενική, τότε η (1.1.1) έχει μία διπλή πραγματική ρίζα, την $\tau_1 = \tau_2 = \frac{-\beta}{2\alpha}$, (θεωρούμε τη διπλή ρίζα ως δύο ίσες ρίζες) και το τριώνυμο $at^2 + \beta t + \gamma$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$at^2 + \beta t + \gamma = \alpha(t - \tau_1)(t - \tau_2) = \alpha \left(t + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι αν η διακρίνουσα Δ είναι αρνητική, τότε η (1.1.1) δεν έχει πραγματικές ρίζες και το τριώνυμο $at^2 + \beta t + \gamma$ δεν παραγοντοποιείται όπως παραπάνω. Στην περίπτωση αυτή, προκειμένου να κατασκευάσουμε ρίζες της (1.1.1) και να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο (σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων), ορίζουμε ένα φανταστικό αριθμό i που ικανοποιεί την ισότητα $i^2 = -1$ και είναι ρίζα της εξίσωσης $t^2 + 1 = 0$. Ο συγκεκριμένος αριθμός είναι μία θεμελιώδης μαθηματική έννοια (που δεν συναντούμε στην πραγματική ζωή), η οποία ονομάζεται *φανταστική μονάδα* (*imaginary unit*). Πράγματι, αν δεχθούμε την ύπαρξη

της φανταστικής μονάδας, τότε η αρνητική διακρίνουσα γράφεται $\Delta = (-1)|\Delta| = i^2 \left(\sqrt{|\Delta|}\right)^2 = \left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2$ (με βάση τις ιδιότητες των πράξεων που θα αναλύσουμε στη συνέχεια), κι έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha \left(t - \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \left(t - \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) &= \alpha t^2 - \alpha \left(\frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} + \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) t \\ &\quad + \alpha \left(\frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \left(\frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \right) \\ &= \alpha t^2 - \alpha \left(\frac{-\beta}{2\alpha} + \frac{-\beta}{2\alpha} \right) t + \alpha \left(\frac{\beta^2 - \Delta}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha t^2 + \beta t + \gamma. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το τριώνυμο $\alpha t^2 + \beta t + \gamma$ έχει δύο μη πραγματικές διακεκριμένες ρίζες

$$\tau_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad \tau_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}.$$

Τελικά λοιπόν, με τον ορισμό της φανταστικής μονάδας, μπορούμε να έχουμε μία πλήρη διερεύνηση κι επίλυση της εξίσωσης (1.1.1). Για παράδειγμα, η δευτεροβάθμια εξίσωση $3t^2 + 4t + 5 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = -44$ και δύο μη πραγματικές λύσεις

$$\tau_1 = \frac{-4 + i\sqrt{44}}{6} = -\frac{2}{3} + i\frac{\sqrt{11}}{3} \quad \text{και} \quad \tau_2 = \frac{-4 - i\sqrt{44}}{6} = -\frac{2}{3} - i\frac{\sqrt{11}}{3}.$$

Όλοι οι αριθμοί της μορφής ib ($b \in \mathbb{R}$) ονομάζονται *φανταστικοί αριθμοί* (*imaginary numbers*) και όλοι οι αριθμοί της μορφής $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί* (*complex numbers*). Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών συμβολίζεται με

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

και περιέχει το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και το σύνολο $i\mathbb{R} = \{z = ib : b \in \mathbb{R}\}$ των φανταστικών αριθμών. (Σημείωση. Ο μοναδικός αριθμός που είναι και πραγματικός και φανταστικός είναι το 0.) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται *πραγματικό μέρος* (*real part*) του z και συμβολίζεται με $a = \operatorname{Re}(z)$, ενώ ο φανταστικός αριθμός b ονομάζεται *φανταστικό μέρος* (*imaginary part*) του z και συμβολίζεται με $b = \operatorname{Im}(z)$ (Σημείωση. Στο φανταστικό μέρος, δεν συμπεριλαμβάνουμε τον παράγοντα i .) Για παράδειγμα, ο $z = 2 - i3$ είναι μιγαδικός αριθμός με πραγματικό μέρος $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(2 - i3) = 2$ και φανταστικό μέρος $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(2 - i3) = -3$.

Δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a_1 + ib_1$ ($a_1, b_1 \in \mathbb{R}$) και $z_2 = a_2 + ib_2$ ($a_2, b_2 \in \mathbb{R}$) είναι ίσοι αν και μόνο αν $a_1 = a_2$ και $b_1 = b_2$, δηλαδή κάθε μιγαδικός αριθμός γράφεται κατά μοναδικό τρόπο με τη βοήθεια του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του. Γράφοντας $0 = 0 + i0$, είναι προφανές ότι ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + ib$ είναι ίσος με το 0 αν και μόνο αν $a = 0$ και $b = 0$.

Για δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$, μπορούμε να ορίσουμε τις ακόλουθες πράξεις:

- Την πρόσθεση

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

- Την αφαίρεση

$$z_1 - z_2 = (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2).$$

- Τον πολλαπλασιασμό

$$z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

- Τη διαίρεση (για $z_2 \neq 0$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Όπως είναι αναμενόμενο, τα αποτελέσματα των παραπάνω πράξεων καλούνται *άθροισμα*, *διαφορά*, *γινόμενο* και *πηλίκο* των αριθμών z_1 και z_2 , αντίστοιχα, όπως στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών. Επίσης, οι ακέραιες δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ορίζονται όπως ακριβώς οι ακέραιες δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = 3 + i4$ και $z_2 = 5 - i2$, τότε ισχύει

$$z_1 + z_2 = 3 + i4 + 5 - i2 = 8 + i2,$$

$$z_1 - z_2 = 3 + i4 - (5 - i2) = -2 + i6,$$

$$z_1 z_2 = (3 + i4)(5 - i2) = 15 - i6 + i20 + 8 = 23 + i14,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + i4}{5 - i2} = \frac{(3 + i4)(5 + i2)}{(5 - i2)(5 + i2)} = \frac{15 + i6 + i20 - 8}{5^2 + 2^2} = \frac{7}{29} + i \frac{26}{29},$$

$$z_1^3 = (3 + i4)(3 + i4)(3 + i4) = (-7 + i24)(3 + i4) = -117 + i44$$

$$z_1^2 z_2^2 = (3 + i4)(3 + i4)(5 - i2)(5 - i2) = (-7 + i24)(21 - i20) = 333 + i644.$$

Από την πράξη της διαίρεσης γίνεται σαφές ότι, για ένα μιγαδικό αριθμό $z = a + ib$, ιδιαίτερο ρόλο παίζουν ο μιγαδικός αριθμός $a - ib$ ο οποίος ονομάζεται *συζυγής* (*conjugate*) του z και συμβολίζεται με

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib,$$

και ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$ ο οποίος ονομάζεται *μέτρο* (*modulus*) του z και συμβολίζεται με

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Επιπλέον, είναι προφανές ότι $\overline{\bar{z}} = z$, ο αριθμός 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ο αριθμός 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, ο αντίθετος ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$ είναι ο $-z = -a - ib$, και ο αντίστροφος ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$ είναι ο

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Από τη συγκεκριμένη γραφή του αντιστρόφου, προκύπτει η χρήσιμη ταυτότητα

$$z \bar{z} = |z|^2.$$

Ως παράδειγμα, για το μιγαδικό αριθμό $z = 3 - i4$, έχουμε

$$\bar{z} = \overline{3 - i4} = 3 + i4, \quad |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{και} \quad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{3 + i4}{25} = \frac{3}{25} + i \frac{4}{25}.$$

$$\text{Εύκολα επαληθεύουμε ότι } zz^{-1} = (3 - i4) \left(\frac{3}{25} + i \frac{4}{25} \right) = \frac{3^2 + 4^2}{25} + i \frac{12 - 12}{25} = 1.$$

Παρατήρηση 1.1.1. Από τον ορισμό τους, οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών ικανοποιούν την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική και την επιμεριστική ιδιότητα. Δηλαδή, για κάθε $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, ισχύει

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1, & z_1 z_2 &= z_2 z_1, \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), & (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3), \\ (z_1 + z_2) z_3 &= z_1 z_3 + z_2 z_3, & z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι μιγαδικοί αριθμοί ικανοποιούν όλες τις γνωστές ταυτότητες που βασίζονται σε αυτές τις ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z^n z^m &= z^{n+m}, & \frac{z^n}{z^m} &= z^{n-m} \quad (z \neq 0), \\ (z^n)^m &= z^{nm}, & (z_1 z_2)^n &= z_1^n z_2^n, \\ (z_1 \pm z_2)^2 &= z_1^2 \pm 2z_1 z_2 + z_2^2, & (z_1 \pm z_2)^3 &= z_1^3 \pm 3z_1^2 z_2 + 3z_1 z_2^2 \pm z_2^3, \\ z_1^2 - z_2^2 &= (z_1 - z_2)(z_1 + z_2), & z_1^3 - z_2^3 &= (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2), \quad \text{κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.1.2. Αν θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a_1 + i b_1$ και $z_2 = a_2 + i b_2$, τότε μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - i b_1) + (a_2 - i b_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)} = (a_1 - a_2) - i(b_1 - b_2) = (a_1 - i b_1) - (a_2 - i b_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) = \dots = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \end{aligned}$$

και

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - i \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} = \dots = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Για n μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \dots, z_n$, ισχύει

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \quad \text{και} \quad \overline{z_1 z_2 \dots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n,$$

ενώ στην ειδική περίπτωση που $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$, έχουμε $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

Παρατήρηση 1.1.3. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + i b$. Είναι φανερό ότι

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + i b + a - i b}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$$

και

$$\frac{z - \bar{z}}{i2} = \frac{a + i b - (a - i b)}{i2} = \frac{i2b}{i2} = b = \operatorname{Im}(z).$$

Παρατήρηση 1.1.4. Οι δυνάμεις της φανταστικής μονάδας i εμφανίζουν την ακόλουθη περιοδικότητα:

$$\begin{aligned} i^1 &= i, & i^2 &= i \cdot i = -1, & i^3 &= i^2 \cdot i = -i, & i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = 1, \\ i^5 &= i^4 \cdot i = i, & i^6 &= i^4 \cdot i^2 = -1, & i^7 &= i^4 \cdot i^3 = -i, & i^8 &= i^4 \cdot i^4 = 1, \\ i^9 &= i^8 \cdot i = i, & i^{10} &= i^8 \cdot i^2 = -1, & i^{11} &= i^8 \cdot i^3 = -i, & i^{12} &= i^8 \cdot i^4 = 1, \quad \dots \end{aligned}$$

Δηλαδή, για κάθε φυσικό αριθμό k , ισχύει

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = i^2 = -1 \quad \text{και} \quad i^{4k+3} = i^3 = -i.$$

Επίσης, είναι φανερό ότι

$$\frac{1}{i} = i^{-1} = i^3 = -i, \quad \frac{1}{i^2} = i^{-2} = i^2 = -1, \quad \frac{1}{i^3} = i^{-3} = i, \quad \frac{1}{i^4} = i^{-4} = 1, \quad \dots$$

Εφαρμογή 1.1.1. Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $\frac{1-i3}{5+i}$ και $\left(\frac{1-i7}{6+i5}\right)^2$ στη μορφή $a+ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Λύση. Έχουμε

$$\frac{1-i3}{5+i} = \frac{(1-i3)(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{5-i-i15-3}{25+1} = \frac{2-i16}{26} = \frac{1}{13} - i \frac{8}{13}$$

και

$$\left(\frac{1-i7}{6+i5}\right)^2 = \left(\frac{(1-i7)(6-i5)}{(6+i5)(6-i5)}\right)^2 = \left(\frac{-29-i47}{36+25}\right)^2 = \frac{-1368+i2726}{3721} = -\frac{1368}{3721} + i \frac{2726}{3721}. \quad \square$$

Εφαρμογή 1.1.2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $i^7+i^{15}+i^{38}+i^{40}+i^{57}+i^{101}$ και $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^{11}}+\frac{1}{i^{13}}$.

Λύση. Σύμφωνα με την περιοδικότητα που εμφανίζουν οι δυνάμεις της φανταστικής μονάδας (Παρατήρηση 1.1.4), έχουμε

$$\begin{aligned} i^7+i^{15}+i^{38}+i^{40}+i^{57}+i^{101} &= i^{4+3}+i^{4\cdot3+3}+i^{4\cdot9+2}+i^{4\cdot10}+i^{4\cdot14+1}+i^{4\cdot25+1} \\ &= i^3+i^3+i^2+1+i+i = -i-i-1+1+i+i = 0. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^8}+\frac{1}{i^{11}}+\frac{1}{i^{13}} &= \frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^{4\cdot2}}+\frac{1}{i^{4\cdot2+3}}+\frac{1}{i^{4\cdot3+1}} = \frac{1}{i}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{i}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{1}+\frac{1}{-i}+\frac{1}{i} = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.1.3. Να αποδείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$, ισχύει

$$(1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} = 0.$$

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned} (1+i)^{4n} - (1-i)^{4n} &= [(1+i)^2]^{2n} - [(1-i)^2]^{2n} \\ &= (1+i^2-1)^{2n} - (1-i^2-1)^{2n} \\ &= (i^2)^{2n} - (-i^2)^{2n} = (i^2)^{2n} - (i^2)^{2n} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.1.4. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^2 = i8$.

Λύση. Γράφουμε τον άγνωστο μιγαδικό αριθμό στη μορφή $z = a + ib$ κι έχουμε

$$z^2 = i8 \Leftrightarrow (a + ib)^2 = i8 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + i2ab = i8 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 8 \end{cases}.$$

Αφού το γινόμενο ab είναι θετικό, οι πραγματικοί αριθμοί a και b πρέπει να είναι ομόσημοι, κι επομένως $a = b$ και $a^2 = 4$. Αυτό σημαίνει ότι $a = b = \pm 2$ και οι λύσεις της εξίσωσης είναι $z_1 = 2 + i2$ και $z_2 = -2 - i2 = -z_1$. $\square$

Εφαρμογή 1.1.5. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^2 = \bar{z}$.

Λύση. Γράφοντας το μιγαδικό αριθμό z στη μορφή $z = a + ib$, έχουμε

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow (a + ib)^2 = a - ib \Leftrightarrow a^2 - b^2 + i2ab = a - ib \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases}.$$

Αν $b = 0$, τότε $a^2 = a$ και λαμβάνουμε τις λύσεις $z_1 = 0$ και $z_2 = 1$. Αν $b \neq 0$, τότε από τη δεύτερη εξίσωση του παραπάνω συστήματος, συμπεραίνουμε ότι $a = -\frac{1}{2}$, κι επομένως,

$$a^2 - b^2 = a \Leftrightarrow b^2 = a^2 - a = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Τελικά λοιπόν, οι λύσεις της εξίσωσης είναι $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ και $z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\square$

Εφαρμογή 1.1.6. Έστω δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 με ίσα μέτρα. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$ είναι πραγματικός.

Λύση. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $|z_1| = |z_2|$. Τότε ισχύει

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_1 = z_2 \bar{z}_2 \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}.$$

Σύμφωνα με τις Παρατηρήσεις 1.1.2 και 1.1.3, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} + \frac{z_2}{z_1} = \overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} + \frac{z_2}{z_1} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)$$

είναι πραγματικός. $\square$

Εφαρμογή 1.1.7. Βρείτε τις δύο ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης $z + \frac{2}{z} = 2$, $z \neq 0$. Έπειτα, να αποδείξετε ότι $z_1^{2022} + z_2^{2022} = 0$.

Λύση. Αφού $z \neq 0$, έχουμε την ισοδύναμη δευτεροβάθμια εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$, της οποίας η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$. Συνεπώς, οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 + i2}{2} = 1 + i \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha} = \frac{2 - i2}{2} = 1 - i = \bar{z}_1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$z_1^2 = (1 + i)^2 = 1 + i2 + i^2 = i2 \quad \text{και} \quad z_2^2 = (\bar{z}_1)^2 = \overline{(z_1^2)} = \overline{i2} = -i2.$$

Επομένως,

$$z_1^{2022} + z_2^{2022} = (z_1^2)^{1011} + (z_2^2)^{1011} = (i2)^{1011} + (-i2)^{1011} = (i2)^{1011} - (i2)^{1011} = 0. \quad \square$$

Εφαρμογή 1.1.8. Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z μέτρου 1, για τους οποίους το πηλίκο $\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση. Το παραπάνω πηλίκο είναι πραγματικός αριθμός για κάποιο μιγαδικό αριθμό z μέτρου 1 αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} &= \overline{\left(\frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} \right)} = \frac{\bar{z}^4 - \bar{z}^2 - 1}{\bar{z}^4 + \bar{z}^2 - 1} \\ \Leftrightarrow \frac{z^4 - z^2 - 1}{z^4 + z^2 - 1} &= \frac{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^2} - 1}{\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^2} - 1} = \frac{1 - z^2 - z^4}{1 + z^2 - z^4} \quad \left(\text{διότι } \bar{z} = \frac{1}{z} \right) \\ \Leftrightarrow (z^4 - z^2 - 1)(1 + z^2 - z^4) &= (z^4 + z^2 - 1)(1 - z^2 - z^4) \\ \Leftrightarrow 4z^6 - 4z^2 = 0 &\Leftrightarrow 4z^2(z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow z = 0 & \text{ (αδύνατη τιμή) } \quad \text{ή} \quad z^2 = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 = -1. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι ζητούμενοι μιγαδικοί αριθμοί είναι $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = i$ και $z_4 = -i$. □

1.2 Μέτρο και Όρισμα Μιγαδικού Αριθμού

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) μπορεί να αναπαρασταθεί ως το σημείο $M(z) = (a, b)$ ενός επιπέδου με καρτεσιανό σύστημα αξόνων xOy , όπου η τετμημένη $a = \operatorname{Re}(z)$ είναι το πραγματικό μέρος του z και η τεταγμένη $b = \operatorname{Im}(z)$ είναι το φανταστικό μέρος του z , όπως στο Σχήμα 1.1. Το συγκεκριμένο επίπεδο ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* (*complex plane*). Κάθε πραγματικός αριθμός $z = a + i0$ αναπαριστάνεται ως το σημείο $(a, 0)$ του άξονα $x'x$, ο οποίος ονομάζεται *πραγματικός άξονας* (*real axis*), και κάθε φανταστικός αριθμός $z = 0 + ib$ αναπαριστάνεται ως το σημείο $(0, b)$ του άξονα $y'y$, ο οποίος ονομάζεται *φανταστικός άξονας* (*imaginary axis*). Η αναπαράσταση του συζυγή αριθμού $\bar{z} = a - ib$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το συμμετρικό σημείο $M(\bar{z}) = (a, -b)$ του $M(z) = (a, b)$ ως προς τον πραγματικό άξονα $x'x$, και η αναπαράσταση του αντίθετου αριθμού $-z = -a - ib$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το συμμετρικό σημείο $M(-z) = (-a, -b)$ του $M(z) = (a, b)$ ως προς την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$. Επιπλέον, το μέτρο $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ του z ισούται με το μέτρο του διανύσματος θέσης του σημείου $M(z) = (a, b)$, δηλαδή

$$(OM) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

και το μέτρο του z ισούται με την απόσταση του $M(z)$ από την αρχή των αξόνων. Επίσης, είναι φανερό ότι

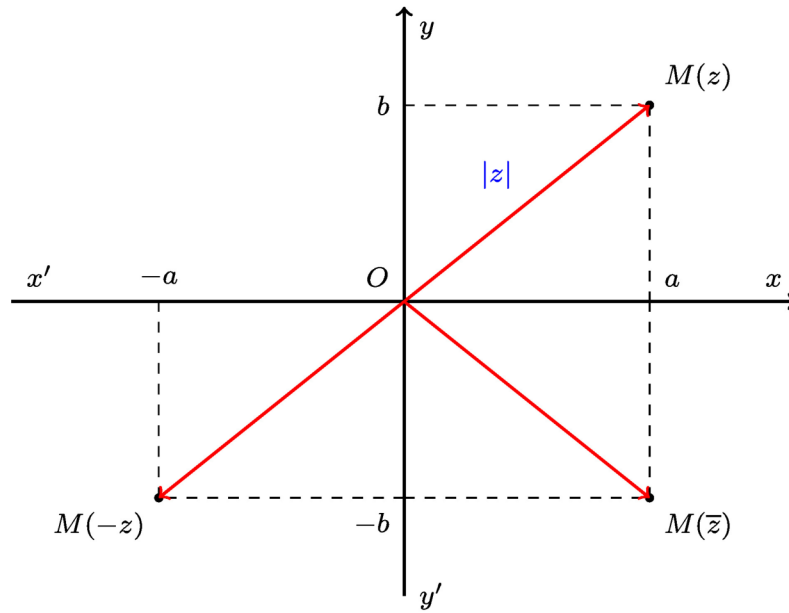
$$|z| = |\bar{z}| = |-z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού ως σημείο του μιγαδικού επιπέδου επιτρέπει μία γεωμετρική διαχείριση των μιγαδικών αριθμών. Για παράδειγμα, δεδομένου ενός μιγαδικού αριθμού $z_0 = a_0 + ib_0$ ($a_0, b_0 \in \mathbb{R}$) κι ενός πραγματικού αριθμού $r \geq 0$, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) που ικανοποιούν την ισότητα

$$|z - z_0| = r \Leftrightarrow |(x - a_0) + i(y - b_0)|^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r^2$$

είναι ο κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο $M(z_0) = (a_0, b_0)$ και ακτίνα r . Επιπλέον, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) που ικανοποιούν την ανισότητα

$$|z - z_0| \leq r \Leftrightarrow |(x - a_0) + i(y - b_0)|^2 \leq r^2 \Leftrightarrow (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 \leq r^2$$



Σχήμα 1.1: Γεωμετρική αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού z , του $\bar{z}$ και του $-z$.

είναι ο κλειστός κυκλικός δίσκος στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο $M(z_0) = (a_0, b_0)$ και ακτίνα r . Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a_1 + i b_1$ και $z_2 = a_2 + i b_2$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$), τότε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + i y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) που ικανοποιούν την ισότητα

$$\begin{aligned} |z - z_1| = |z - z_2| &\Leftrightarrow |(x - a_1) + i(y - b_1)|^2 = |(x - a_2) + i(y - b_2)|^2 \\ &\Leftrightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \\ &\Leftrightarrow (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + \frac{a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

είναι μία ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο, και συγκεκριμένα, η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $M(z_1) = (a_1, b_1)$ και $M(z_2) = (a_2, b_2)$.

Παρατήρηση 1.2.1. (Τριγωνική ανισότητα) Αν θεωρήσουμε δύο οποιουσδήποτε μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = a_1 + i b_1$ και $z_2 = a_2 + i b_2$ ($a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$), τότε είναι φανερό ότι

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$

και

$$|z_1 + z_2|^2 = (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 a_2 + b_1 b_2).$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\right)^2 &= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = a_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \\ &\geq a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + 2(a_1 a_2)(b_1 b_2) = (a_1 a_2 + b_1 b_2)^2, \end{aligned}$$

έχουμε την *τριγωνική ανισότητα* (triangle inequality)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.2.1)$$

Από την ισότητα $z_2 = z_1 + (z_2 - z_1)$ και την τριγωνική ανισότητα (1.2.1), προκύπτει ότι

$$|z_2| = |z_1 + (z_2 - z_1)| \leq |z_1| + |z_2 - z_1| \Leftrightarrow |z_2 - z_1| \geq |z_2| - |z_1|,$$

ενώ από την ισότητα $z_1 = z_2 + (z_1 - z_2)$ και την τριγωνική ανισότητα (1.2.1), προκύπτει ότι

$$|z_1| = |z_2 + (z_1 - z_2)| \leq |z_2| + |z_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|,$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||. \quad (1.2.2)$$

Ενοποιώντας τις ανισότητες (1.2.1) και (1.2.2), καταλήγουμε στη γενικευμένη μορφή της τριγωνικής ανισότητας:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Πρόταση 1.2.1. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 , ισχύει

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad \text{και} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0).$$

Απόδειξη. Με απλές πράξεις και σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.1.2, έχουμε

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

και

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 = \frac{z_1}{z_2} \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{z_1}{z_2} \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_1}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}. \quad \square$$

Πόρισμα 1.2.2. Για n μιγαδικούς αριθμούς $z_1, z_2, \dots, z_n$, ισχύει

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|,$$

ενώ στην ειδική περίπτωση που $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, έχουμε

$$|z^n| = |z|^n.$$

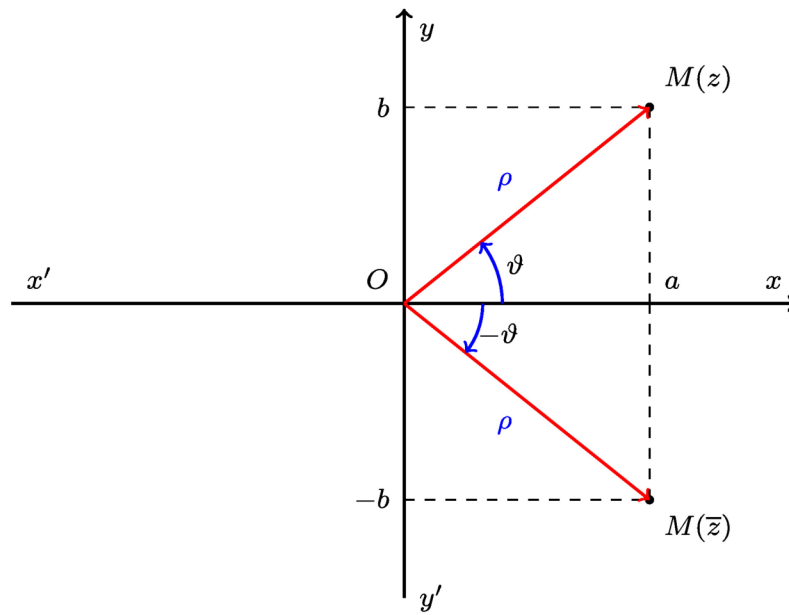
Ορισμός 1.2.1. Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = a + ib$, ο οποίος αναπαριστάνεται στο μιγαδικό επίπεδο με το σημείο $M(z) = (a, b)$. Οποιαδήποτε γωνία, με κορυφή την αρχή των αξόνων, έχει αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία OM ονομάζεται *όρισμα* (*argument*) του z (όπου, κατά τα γνωστά από το σχολείο, η γωνία θεωρείται θετική αν έχει αντίθετη φορά από τους δείκτες του ρολογιού και αρνητική αν έχει ίδια φορά με τους δείκτες του ρολογιού). Από όλα τα όρια του μιγαδικού αριθμού z , ακριβώς ένα ανήκει στο πραγματικό διάστημα $(-\pi, \pi]$. Το όρισμα αυτό ονομάζεται *πρωτεύον όρισμα* (*principal value of the argument*) του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$. (Σημείωση. Ο μιγαδικός αριθμός 0 δεν έχει όρισμα. Για το λόγο αυτό, όταν αναφέρουμε όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού, θεωρούμε ότι αυτός είναι μη μηδενικός.)

Από τον ορισμό αυτό και το Σχήμα 1.2, είναι προφανές ότι για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό z που δεν ανήκει στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα (δηλαδή, δεν είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός), ισχύει

$$\text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z) \quad \text{και} \quad \text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \text{Arg}\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right) = \text{Arg}(\bar{z}) = -\text{Arg}(z).$$

Αν το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$ είναι $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ κι ένα όρισμα του z (όχι κατ' ανάγκη το πρωτεύον όρισμα) είναι $\vartheta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\rho} \Leftrightarrow a = \rho \cos \vartheta \quad \text{και} \quad \sin \vartheta = \frac{b}{\rho} \Leftrightarrow b = \rho \sin \vartheta.$$



Σχήμα 1.2: Μέτρο και πρωτεύον όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού z και του $\bar{z}$.

Επομένως, ο z γράφεται στη μορφή

$$z = a + ib = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

η οποία ονομάζεται *τριγωνομετρική μορφή* (*trigonometric form*) του μιγαδικού αριθμού z . Το μέτρο $\rho = |z|$ και το πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}(z)$ ενός μιγαδικού αριθμού z ονομάζονται *πολικές συντεταγμένες* (*polar coordinates*) του z και ορίζουν κατά μοναδικό τρόπο τον z . Ο μιγαδικός αριθμός $\cos \vartheta + i \sin \vartheta$ που έχει μέτρο 1 και όρισμα ϑ συμβολίζεται με $e^{i\vartheta}$, κι έτσι ο μιγαδικός αριθμός z γράφεται $z = \rho e^{i\vartheta} = |z|e^{i\text{Arg}(z)}$. Η γραφή αυτή ονομάζεται *πολική μορφή* (*polar form*, *exponential form*, *εκθετική μορφή*) του z . Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι για οποιοδήποτε όρισμα ϑ του μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$, ισχύει

$$\tan \vartheta = \frac{b}{a}.$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το μιγαδικό αριθμό $z = a + ib = 2 - i2\sqrt{3}$, τότε αυτός έχει μέτρο

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

και κάθε όρισμα $\vartheta \in \mathbb{R}$ του z ικανοποιεί τις ισότητες

$$\cos \vartheta = \frac{a}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \sin \vartheta = \frac{b}{\rho} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το πρωτεύον όρισμα του z είναι $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$ και η τριγωνομετρική (πολική) μορφή του z είναι

$$z = 2 - i2\sqrt{3} = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{b}{a} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} = -\tan \left(\frac{\pi}{3} \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right),$$

από το οποίο επαληθεύεται ότι $\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$.

Πρόταση 1.2.3. Για δύο μιγαδικούς αριθμούς σε τριγωνομετρική (πολική) μορφή

$$z_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) = |z_1| e^{i\vartheta_1} \quad \text{και} \quad z_2 = \rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) = |z_2| e^{i\vartheta_2},$$

ισχύει

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

και

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos (\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \quad (z_2 \neq 0).$$

Απόδειξη. Με απλές πράξεις και γνωστές από το σχολείο τριγωνομετρικές ταυτότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \vartheta_1)(\cos \vartheta_2) - (\sin \vartheta_1)(\sin \vartheta_2) + i((\cos \vartheta_1)(\sin \vartheta_2) + (\sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_2))] \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos (\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 + \vartheta_2)) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)}{\rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)} = \frac{\rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) (\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2)}{\rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) (\cos \vartheta_2 - i \sin \vartheta_2)} \\ &= \frac{\rho_1 (\cos \vartheta_1)(\cos \vartheta_2) + (\sin \vartheta_1)(\sin \vartheta_2) + i((\sin \vartheta_1)(\cos \vartheta_2) - (\cos \vartheta_1)(\sin \vartheta_2))}{\rho_2 (\cos \vartheta_2)^2 + (\sin \vartheta_2)^2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos (\vartheta_1 - \vartheta_2) + i \sin (\vartheta_1 - \vartheta_2)). \quad \square \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς

$$z_1 = 2 + i2\sqrt{3} = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \quad \text{και} \quad z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right),$$

τότε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + i2\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = i8 = 8 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 + i2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(2 + i2\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = \frac{4\sqrt{3} + i4}{4} = \sqrt{3} + i \\ &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{4}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right). \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.2. (Γεωμετρική ερμηνεία πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μιγαδικών αριθμών) Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.3, πολλαπλασιασμός ενός μιγαδικού αριθμού $z_1 = \rho_1 (\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ με ένα μιγαδικό αριθμό $z_2 = \rho_2 (\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$ σημαίνει στροφή του z_1 κατά γωνία ϑ_2 και στη συνέχεια, πολλαπλασιασμό του αποτελέσματος με ρ_2 , ενώ διαίρεση του z_1 με το z_2 ($\neq 0$) σημαίνει στροφή του z_1 κατά γωνία $-\vartheta_2$ και στη συνέχεια, διαίρεση του αποτελέσματος με ρ_2 ($\neq 0$).

Με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής, η Πρόταση 1.2.3 μας δίνει το ακόλουθο θεώρημα που φέρει το όνομα του Γάλλου μαθηματικού Abraham de Moivre (1667–1754).

Θεώρημα 1.2.4. (Θεώρημα De Moivre) Έστω ένας μιγαδικός αριθμός σε τριγωνομετρική (πολική) μορφή $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = |z| e^{i\vartheta}$. Για κάθε φυσικό αριθμό n , ισχύει

$$z^n = [\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = |z|^n e^{in\vartheta}.$$

Απόδειξη. Όπως ήδη αναφέραμε, η απόδειξη θα γίνει με μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$, προφανώς ισχύει η ισότητα $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = |z| e^{i\vartheta}$. Υποθέτουμε ότι για $n = k$, ισχύει η ισότητα $z^k = \rho^k (\cos(k\vartheta) + i \sin(k\vartheta))$. Τότε, από την Πρόταση 1.2.3, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k z = \rho^k (\cos(k\vartheta) + i \sin(k\vartheta)) \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ &= \rho^{k+1} [\cos((k\vartheta) + \vartheta) + i \sin((k\vartheta) + \vartheta)] \\ &= \rho^{k+1} [\cos((k+1)\vartheta) + i \sin((k+1)\vartheta)]. \end{aligned}$$

Επομένως, η επιθυμητή ισότητα ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n . □

Παρατήρηση 1.2.3. Το Θεώρημα De Moivre (Θεώρημα 1.2.4) ισχύει και για αρνητικούς ακέραιους εκθέτες. Πράγματι, για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό σε τριγωνομετρική (πολική) μορφή $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) = |z| e^{i\vartheta}$ και αρνητικό ακέραιο αριθμό $-n$ ($n \in \mathbb{N}$), ισχύει

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1}{[\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n} = \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)}{\rho^n (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n} = \frac{1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)}{\rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta))} \\ &= \rho^{-n} (\cos(0 - n\vartheta) + i \sin(0 - n\vartheta)) = \rho^{-n} (\cos(-n\vartheta) + i \sin(-n\vartheta)). \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.2.1. Έστω δύο μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 . Να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ αν και μόνο αν $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$.

Λύση. Από την τριγωνική ανισότητα (Παρατήρηση 1.2.1), γνωρίζουμε ότι $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Συμβολίζουμε $\vartheta_1 = \text{Arg}(z_1)$ και $\vartheta_2 = \text{Arg}(z_2)$, και θεωρούμε την τριγωνομετρική μορφή των δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2)$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\Leftrightarrow |(\rho_1 \cos \vartheta_1 + \rho_2 \cos \vartheta_2) + i(\rho_1 \sin \vartheta_1 + \rho_2 \sin \vartheta_2)| = \rho_1 + \rho_2 \\ &\Leftrightarrow (\rho_1 \cos \vartheta_1 + \rho_2 \cos \vartheta_2)^2 + (\rho_1 \sin \vartheta_1 + \rho_2 \sin \vartheta_2)^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 \\ &\Leftrightarrow \rho_1^2 (\cos \vartheta_1)^2 + 2\rho_1 \rho_2 (\cos \vartheta_1) (\cos \vartheta_2) + \rho_2^2 (\cos \vartheta_2)^2 + \rho_1^2 (\sin \vartheta_1)^2 \\ &\quad + 2\rho_1 \rho_2 (\sin \vartheta_1) (\sin \vartheta_2) + \rho_2^2 (\sin \vartheta_2)^2 = \rho_1^2 + 2\rho_1 \rho_2 + \rho_2^2 \\ &\Leftrightarrow 2\rho_1 \rho_2 ((\cos \vartheta_1) (\cos \vartheta_2) + (\sin \vartheta_1) (\sin \vartheta_2)) = 2\rho_1 \rho_2 \\ &\Leftrightarrow (\cos \vartheta_1) (\cos \vartheta_2) + (\sin \vartheta_1) (\sin \vartheta_2) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 1 = \cos 0. \end{aligned}$$

Αφού $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (-\pi, \pi]$, καταλήγουμε ότι $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$, ή ισοδύναμα, $\vartheta_1 = \vartheta_2$. □

Εφαρμογή 1.2.2. Έστω τρεις μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, z_3 τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ και $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Λύση. Από την υπόθεση, γνωρίζουμε ότι $z_2 = -z_1 - z_3$. Η επιθυμητή ισότητα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$

γράφεται

$$\begin{aligned}
 |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| &\Leftrightarrow |z_1 - (-z_1 - z_3)|^2 = |-z_1 - z_3 - z_3|^2 \Leftrightarrow |2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2 \\
 &\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(\overline{2z_1 + z_3}) = (z_1 + 2z_3)(\overline{z_1 + 2z_3}) \\
 &\Leftrightarrow (2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3) \\
 &\Leftrightarrow 4|z_1|^2 + 2z_1\bar{z}_3 + 2z_3\bar{z}_1 + |z_3|^2 = |z_1|^2 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1z_3 + 4|z_3|^2 \\
 &\Leftrightarrow 3|z_1|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_3|.
 \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει, κι επομένως, ισχύει η ισοδύναμη ισότητα $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$. Ομοίως αποδεικνύεται και η ισότητα $|z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$. $\square$

Εφαρμογή 1.2.3. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|z - 1| = |z + i2|$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned}
 |z - 1| = |z + i2| &\Leftrightarrow |x - 1 + iy|^2 = |x + i(y + 2)|^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y + 2)^2 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 2x + 4y + 3 = 0.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το ζητούμενο σύνολο είναι η ευθεία $2x + 4y + 3 = 0$ (στο μιγαδικό επίπεδο), η οποία είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα 1 και $-i2$. $\square$

Εφαρμογή 1.2.4. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|2z - 1| = |z + i2|$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned}
 |2z - 1| = |z + i2| &\Leftrightarrow |2x - 1 + i2y|^2 = |x + i(y + 2)|^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + (2y)^2 = x^2 + (y + 2)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 4y = 3 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{2}{3}x \pm \frac{4}{9} + y^2 - 2\frac{2}{3}y \pm \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς, το ζητούμενο σύνολο είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ και ακτίνα $r = \frac{\sqrt{17}}{3}$. $\square$

Εφαρμογή 1.2.5. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|4z + 3| = |3z - i2|$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned}
 |4z + 3| = |3z - i2| &\Leftrightarrow |4x + 3 + i4y|^2 = |3x + i(3y - 2)|^2 \\
 &\Leftrightarrow (4x + 3)^2 + (4y)^2 = (3x)^2 + (3y - 2)^2 \\
 &\Leftrightarrow 7x^2 + 24x + 7y^2 + 12y + 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2\left(\frac{12}{7}\right)x \pm \left(\frac{12}{7}\right)^2 + y^2 + 2\left(\frac{6}{7}\right)y \pm \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \frac{5}{7} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{7}\right)^2 = \frac{145}{49}.
 \end{aligned}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των ζητούμενων σημείων στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{12}{7}, -\frac{6}{7}\right)$ και ακτίνα $r = \frac{\sqrt{145}}{7}$. $\square$

Εφαρμογή 1.2.6. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ ($\neq -1$) στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $\operatorname{Arg} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{\pi}{3}$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} = \frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2} + i \frac{2y}{(x+1)^2+y^2},$$

δηλαδή το πραγματικό μέρος του $\frac{z-1}{z+1}$ είναι $\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2}$ και το φανταστικό μέρος του $\frac{z-1}{z+1}$ είναι $\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$. Το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού $\frac{z-1}{z+1}$ ισούται με $\frac{\pi}{3}$ αν και μόνο αν

$$\begin{cases} \frac{\operatorname{Im} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)}{\operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} = \tan \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \\ \operatorname{Im} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y}{x^2-1+y^2} = \sqrt{3} \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{4}{3} \\ y > 0 \end{cases}.$$

Συνεπώς, ο γεωμετρικός τόπος των ζητούμενων σημείων στο μιγαδικό επίπεδο είναι το τμήμα (τόξο) του κύκλου με κέντρο $K \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ και ακτίνα $r = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ που βρίσκεται πάνω από τον πραγματικό άξονα. $\square$

Εφαρμογή 1.2.7. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $5z\bar{z} + 2z^2 + 2\bar{z}^2 = 36$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned} 5z\bar{z} + 2z^2 + 2\bar{z}^2 = 36 &\Leftrightarrow 5|z|^2 + 2z^2 + 2\bar{z}^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow 5(x^2 + y^2) + 2(x+iy)^2 + 2(x-iy)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 5y^2 + 2(x^2 + i2xy - y^2) + 2(x^2 - i2xy - y^2) = 36 \\ &\Leftrightarrow 9x^2 + y^2 = 36. \end{aligned}$$

Επομένως, ο γεωμετρικός τόπος των ζητούμενων σημείων στο μιγαδικό επίπεδο είναι η έλλειψη $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$ με εστίες $(0, 4\sqrt{2})$ και $(0, -4\sqrt{2})$. $\square$

Εφαρμογή 1.2.8. Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Arg} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right) = \frac{\pi}{12}$ και να βρείτε το $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$ και το $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} &= \sqrt{2} \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right), \end{aligned}$$

και επομένως $\operatorname{Arg} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \right) = \frac{\pi}{12}$. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το πηλίκο

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \quad \text{και} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \quad \square$$

1.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Γνωρίζουμε από το σχολείο ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, η εξίσωση $z^n = 1$ έχει μία πραγματική λύση όταν ο n είναι περιττός, τη $z_1 = 1$, και δύο πραγματικές λύσεις όταν ο n είναι άρτιος, τις $z_1 = 1$ και $z_2 = -1$. Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, τα πράγματα αλλάζουν δραματικά, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε για τις περιπτώσεις $n = 3$ και $n = 4$:

$$\begin{aligned} z^3 = 1 &\Leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 + z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} z^4 = 1 &\Leftrightarrow (z^2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 = -1 \\ &\Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ή} \quad z = -1 \quad \text{ή} \quad z = i \quad \text{ή} \quad z = -i. \end{aligned}$$

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, το πλήθος των ριζών ισούται με το βαθμό της εξίσωσης, ενώ οι ρίζες βρίσκονται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο και σχηματίζουν ίσα τόξα. Αυτό είναι αναμενόμενο λόγω του Θεωρήματος De Moivre (Θεώρημα 1.2.4).

Θεώρημα 1.3.1. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, η εξίσωση $z^n = 1$ έχει ακριβώς n διακεκριμένες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, τις

$$z_{k+1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Απόδειξη. Γράφοντας $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$ κι εφαρμόζοντας το Θεώρημα De Moivre (Θεώρημα 1.2.4), έχουμε

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\Leftrightarrow [\rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)]^n = 1 \\ &\Leftrightarrow \rho^n (\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)) = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \cos(n\vartheta) = \cos 0 \\ \sin(n\vartheta) = \sin 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \geq n$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $m \geq 1$ και $\hat{k} < n$ τέτοιοι ώστε

$$k = mn + \hat{k} \quad \text{και} \quad \frac{2k\pi}{n} = \frac{2(mn + \hat{k})\pi}{n} = 2m\pi + \frac{2\hat{k}\pi}{n}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι ακριβώς οι

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos 0 + i \sin 0 = 1, \\ z_2 &= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right), \\ z_3 &= \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right), \\ &\vdots \\ z_n &= \cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.3.1. Αν συμβολίσουμε με ω το μιγαδικό αριθμό $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, τότε οι ρίζες n -οστής τάξης της μονάδας είναι

$$1 = \omega^0, \quad \omega = \omega^1, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \quad \dots, \quad \omega^{n-1},$$

οι οποίες είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου (με n πλευρές) εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο του μιγαδικού επιπέδου. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$$

και

$$\begin{aligned} 1 \cdot \omega \cdot \omega^2 \cdot \omega^3 \dots \omega^{n-1} &= \omega^{1+2+3+\dots+(n-1)} = \omega^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \cos\left(\frac{n(n-1)}{2} \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{n(n-1)}{2} \frac{2\pi}{n}\right) \\ &= \cos((n-1)\pi) + i \sin((n-1)\pi) \\ &= (\cos \pi + i \sin \pi)^{n-1} = (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Πόρισμα 1.3.2. Έστω ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z_0 σε τριγωνομετρική μορφή $z_0 = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$, η εξίσωση $z^n = z_0$ έχει ακριβώς n διακεκριμένες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, τις

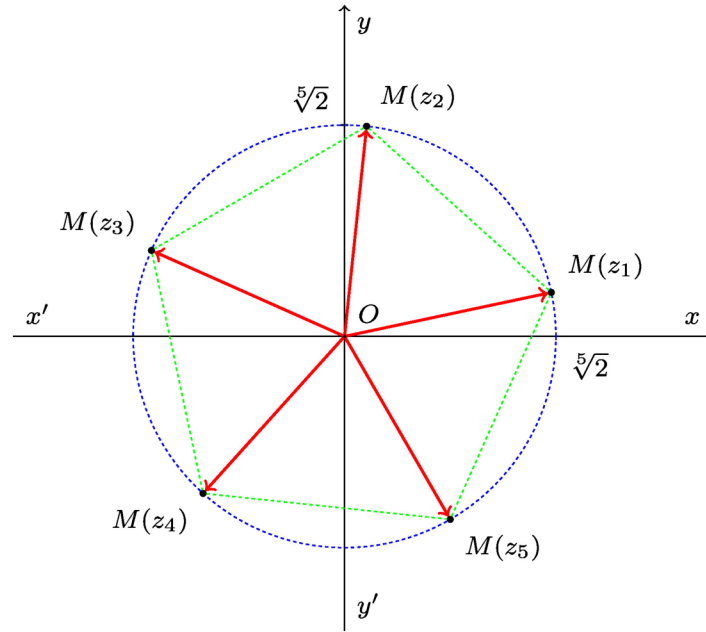
$$z_{k+1} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) \right) = e^{i \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $\hat{z}_0 = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\vartheta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\vartheta}{n}\right) \right)$, τότε η εξίσωση $z^n = z_0$ γράφεται

$$z^n = \hat{z}_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\hat{z}_0} \right)^n = 1.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3.1, το πηλίκο $\frac{z}{\hat{z}_0}$ μπορεί να λάβει n διακεκριμένες τιμές, τις ρίζες n -οστής τάξης της μονάδας:

$$\frac{z}{\hat{z}_0} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$



Σχήμα 1.3: Οι ρίζες 5ης τάξης του μιγαδικού αριθμού $1 + i\sqrt{3}$.

Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = z_0$ είναι

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \hat{z}_0 \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right) \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\vartheta}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta}{n} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right) \right) \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad \square \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.3.2. Στο μιγαδικό επίπεδο, οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = z_0$ είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου (με n πλευρές και κορυφές) εγγεγραμμένου στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $|z_0|^{\frac{1}{n}}$. Για παράδειγμα, οι λύσεις της εξίσωσης

$$z^5 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

είναι

$$z_{k+1} = 2^{\frac{1}{5}} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

και σχηματίζουν κανονικό πεντάγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2} = 1.1487$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα πολυώνυμο

$$p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$$

βαθμού (degree) $n \in \mathbb{N}$, με συντελεστές (coefficients) $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \in \mathbb{F}$ ($= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), μεγιστοβάθμιο συντελεστή (leading coefficient) $\alpha_n \neq 0$ και σταθερό όρο (constant coefficient) α_0 . Για λόγους συμβατότητας, λέμε ότι το μηδενικό πολυώνυμο είναι βαθμού $-\infty$. Ένας μιγαδικός αριθμός z_0 καλείται ρίζα (root) του πολυωνύμου $p(z)$ αν $p(z_0) = \alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0 = 0$. Η διαίρεση των πολυωνύμων

με μιγαδικούς συντελεστές ορίζεται ακριβώς όπως η διαίρεση των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές που μελετήσαμε στο σχολείο. Επίσης, λέμε ότι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $q(z)$ βαθμού $k \leq n$ διαιρεί ακριβώς το $p(z)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $h(z)$ βαθμού $n - k$ τέτοιο ώστε $p(z) = q(z)h(z)$. Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $q(z) = z^2 + z - i$ διαιρεί ακριβώς το πολυώνυμο $p(z) = z^4 - z^2 + i2z + 1$ διότι

$$p(z) = z^4 - z^2 + i2z + 1 = (z^2 + z - i)(z^2 - z + i) = q(z)h(z).$$

Παρατήρηση 1.3.3. Έστω ένα μη σταθερό πολυώνυμο $p(z)$ με μιγαδικούς συντελεστές. Αν z_0 είναι μία λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης $p(z) = 0$ (δηλαδή, μία ρίζα του $p(z)$), τότε θεωρώντας την ευκλείδεια διαίρεση $p(z) = q(z)(z - z_0) + v$ ($v \in \mathbb{C}$) και απαιτώντας να ισχύει $p(z_0) = 0$, προκύπτει ότι $v = 0$ και $p(z) = q(z)(z - z_0)$. Αντίστροφα, αν το πολυώνυμο $p(z)$ γράφεται στην παραγοντοποιημένη μορφή $p(z) = q(z)(z - z_0)$, τότε ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι προφανώς ρίζα του. Τελικά λοιπόν, και στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, ισχύει ότι ένα πολυώνυμο $p(z)$ έχει ρίζα ένα μιγαδικό αριθμό z_0 αν και μόνο αν το $z - z_0$ διαιρεί ακριβώς το $p(z)$. Για παράδειγμα, ο μιγαδικός αριθμός $z_0 = -i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(z) = z^3 + 2z + i$ διότι

$$p(-i) = (-i)^3 + 2(-i) + i = -(-i) - 2i + i = i - 2i + i = 0,$$

και το $p(z)$ παραγοντοποιείται στη μορφή

$$p(z) = z^3 + 2z + i = (z + i)(z^2 - iz + 1).$$

Πρόταση 1.3.3. Έστω ένα πολυώνυμο $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ ($\alpha_n \neq 0$) με πραγματικούς συντελεστές. Αν z_0 είναι μία μιγαδική ρίζα του $p(z)$, τότε και ο συζυγής $\bar{z}_0$ είναι επίσης ρίζα του $p(z)$.

Απόδειξη. Αν $p(z_0) = 0$, τότε είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{p(z_0)} = \overline{\alpha_n z_0^n + \alpha_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + \alpha_1 z_0 + \alpha_0} \\ &= \overline{\alpha_n z_0^n} + \overline{\alpha_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 z_0} + \overline{\alpha_0} \\ &= \bar{\alpha}_n (\bar{z}_0)^n + \bar{\alpha}_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + \bar{\alpha}_1 \bar{z}_0 + \bar{\alpha}_0 \\ &= \alpha_n (\bar{z}_0)^n + \alpha_{n-1} (\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + \alpha_1 \bar{z}_0 + \alpha_0 = p(\bar{z}_0). \quad \square \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί, γνωστό ως Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα στα Μαθηματικά που η απόδειξή του απασχόλησε τους ερευνητές από το 17ο αιώνα ως τις αρχές του 20ου αιώνα. Επισημαίνεται ότι για την απόδειξη του εν λόγω θεωρήματος, εργάστηκαν μεταξύ πολλών άλλων (σε χρονολογική σειρά) ο Γερμανός μαθηματικός, φιλόσοφος και διπλωμάτης Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716), ο Σουηδός μαθηματικός Nicolaus Bernoulli (1687–1759), ο Γάλλος μαθηματικός, φιλόσοφος και μηχανικός Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717–1783), ο Ελβετός μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός Leonhard Euler (1707–1783), ο Γαλλο-Ιταλός μαθηματικός και αστρονόμος Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), ο Γερμανός μαθηματικός και φυσικός Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), ο Γερμανός μαθηματικός Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) και ο Ουκρανός μαθηματικός Alexander Markowich Ostrowski (1893–1986).

Θεώρημα 1.3.4. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας) Κάθε πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού $n \geq 1$, με μιγαδικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστον μία μιγαδική ρίζα. Ισοδύναμα, κάθε πολυώνυμο $p(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0$ ($n \geq 1$, $\alpha_n \neq 0$), με μιγαδικούς συντελεστές, έχει ακριβώς n (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) μιγαδικές ρίζες $z_1, z_2, \dots, z_n$ και παραγοντοποιείται στη μορφή

$$p(z) = \alpha_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n).$$

Σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.3.3, το Θεώρημα 1.3.4 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας) μας οδηγεί στα τελευταία θεωρητικά αποτελέσματα του εισαγωγικού αυτού κεφαλαίου.

Πόρισμα 1.3.5. Κάθε πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού $n \geq 1$, με πραγματικούς συντελεστές, έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες, λαμβάνοντας υπόψη και τις πολλαπλότητες τους, από τις οποίες, οι μη πραγματικές ρίζες είναι σε ζεύγη συζυγών μιγαδικών.

Πόρισμα 1.3.6. Κάθε πολυώνυμο $p(z)$ περιττού βαθμού $n \geq 1$, με πραγματικούς συντελεστές, έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.

Εφαρμογή 1.3.1. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^4 = -128 + i128\sqrt{3}$.

Λύση. Γράφουμε το μιγαδικό αριθμό $-128 + i128\sqrt{3}$ στην τριγωνομετρική του μορφή:

$$-128 + i128\sqrt{3} = 256 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 256 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right).$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα 1.3.2, η εξίσωση $z^4 = -128 + i128\sqrt{3}$ έχει ακριβώς 4 διακεκριμένες λύσεις στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών, τις

$$z_{k+1} = 256^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

δηλαδή τις

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 2\sqrt{3} + i2, \\ z_2 &= 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \right) = -2 + i2\sqrt{3}, \\ z_3 &= 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \right) = -2\sqrt{3} - i2, \\ z_4 &= 4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) \right) = 2 - i2\sqrt{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.3.2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το πολυώνυμο $p(z) = z^3 - 8z^2 + 25z - 26$ αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $3 + i2$.

Λύση. Οι συντελεστές του πολυωνύμου $p(z) = z^3 - 8z^2 + 25z - 26$ είναι πραγματικοί. Συνεπώς, αν ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = 3 + i2$ είναι ρίζα του $p(z)$, τότε ρίζα του $p(z)$ είναι και ο συζυγής $\bar{z}_1 = 3 - i2$ (Πρόταση 1.3.3). Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $p(z)$ διαιρείται ακριβώς με το πολυώνυμο

$$q(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1) = (z - 3 - i2)(z - 3 + i2) = (z - 3)^2 - (i2)^2 = z^2 - 6z + 13.$$

Διαιρώντας το $p(z)$ με το $q(z)$, λαμβάνουμε το πηλίκο $\frac{z^3 - 8z^2 + 25z - 26}{z^2 - 6z + 13} = z - 2$. Τελικά λοιπόν, το πολυώνυμο $p(z)$ γράφεται

$$p(z) = q(z)(z - 2) = (z^2 - 6z + 13)(z - 2) = (z - 3 - i2)(z - 3 + i2)(z - 2). \quad \square$$

Εφαρμογή 1.3.3. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^9 - z^5 - z^4 + 1 = 0$.

Λύση. Με απλές πράξεις, έχουμε

$$\begin{aligned} z^9 - z^5 - z^4 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^5(z^4 - 1) - (z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow (z^5 - 1)(z^4 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z^5 - 1)(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^5 = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 = 1 \quad \text{ή} \quad z^2 = -1, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad \text{ή} \quad z = \pm 1 \quad \text{ή} \quad z = \pm i.$$

Επομένως, οι ρίζες της εξίσωσης είναι $z_1 = z_2 = 1$ (διπλή ρίζα), $z_3 = -1$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$, $z_6 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $z_7 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $z_8 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ και $z_9 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$. $\square$

Εφαρμογή 1.3.4. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση $(z^2)^2 - 2z^2 + 4 = 0$ ως δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση με άγνωστο τον z^2 και διακρίνουσα $\Delta = 4 - 16 = -12$, της οποίας οι ρίζες είναι

$$\tau_1 = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{2} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

και

$$\tau_2 = \frac{2 - i2\sqrt{3}}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Κατά συνέπεια, οι ρίζες της εξίσωσης $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ είναι

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3 \cdot 2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3 \cdot 2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ z_4 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.3.5. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^6 - 8z^3 + 64 = 0$.

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση $(z^3)^2 - 8z^3 + 64 = 0$ ως δευτεροβάθμια πολυωνυμική εξίσωση με άγνωστο τον z^3 και διακρίνουσα $\Delta = 64 - 256 = -192$, της οποίας οι ρίζες είναι

$$\tau_1 = \frac{8 + i8\sqrt{3}}{2} = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

και

$$\tau_2 = \frac{8 - i8\sqrt{3}}{2} = 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Συνεπώς, οι ρίζες της εξίσωσης $z^6 - 8z^3 + 64 = 0$ είναι οι κυβικές ρίζες των τ_1 και τ_2 :

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{9} \right) \right), & z_2 &= 2 \left(\cos \left(\frac{7\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{9} \right) \right), \\ z_3 &= 2 \left(\cos \left(\frac{13\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{13\pi}{9} \right) \right), & z_4 &= 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{9} \right) \right), \\ z_5 &= 2 \left(\cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{9} \right) \right), & z_6 &= 2 \left(\cos \left(\frac{11\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{9} \right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.3.6. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

Λύση. Με κατάλληλη ομαδοποίηση των όρων της, η εξίσωση $z^6 + 2z^5 + 2z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ γράφεται

$$\begin{aligned} & (z^6 + 2z^5 + z^4) + (z^4 + 2z^3 + z^2) + (z^2 + 2z + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & z^4(z^2 + 2z + 1) + z^2(z^2 + 2z + 1) + (z^2 + 2z + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (z^4 + z^2 + 1)(z + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[(z^2)^2 + z^2 + 1 \right] (z + 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[z^2 - \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \left[z^2 - \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] (z + 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[z^2 - \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] \left[z^2 - \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) \right] (z + 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 = -1 \quad (\text{διπλή ρίζα}), \\ z_3 &= \cos \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_4 &= \cos \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_5 &= \cos \left(-\frac{2\pi}{3 \cdot 2} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3 \cdot 2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_6 &= \cos \left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Εφαρμογή 1.3.7. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το (μιγαδικό) πολυώνυμο $p(z) = z^3 + (1 - i4)z^2 - (5 + i5)z - 6 + i6$ αν είναι γνωστό ότι έχει φανταστική ρίζα.

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $p(z)$ έχει μία φανταστική ρίζα της μορφής ib ($b \in \mathbb{R}$), δηλαδή

$$\begin{aligned} & (ib)^3 + (1 - i4)(ib)^2 - (5 + i5)(ib) - 6 + i6 = 0 \\ \Leftrightarrow & -ib^3 - b^2 + i4b^2 - i5b + 5b - 6 + i6 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -b^2 + 5b - 6 = 0 \\ i(-b^3 + 4b^2 - 5b + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \quad \text{ή} \quad b = 3 \\ -b^3 + 4b^2 - 5b + 6 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $b = 3$ και μία ρίζα του $p(z)$ είναι $z_1 = i3$. Υπολογίζουμε το πηλίκο

$$\frac{z^3 + (1-i4)z^2 - (5+i5)z - 6+i6}{z-i3} = z^2 + (1-i)z - 2 - i2.$$

Το πολυώνυμο $z^2 + (1-i)z - 2 - i2 = z^2 + z - 2 - i(z+2)$ έχει προφανώς ρίζα την $z_2 = -2$. Υπολογίζουμε τώρα το πηλίκο $\frac{z^2 + (1-i)z - 2 - i2}{z+2} = z - 1 - i$, και καταλήγουμε ότι

$$z^3 + (1-i4)z^2 - (5+i5)z - 6+i6 = (z-i3)(z+2)(z-1-i). \quad \square$$

Εφαρμογή 1.3.8. Έστω η εξίσωση $\frac{a_1}{z-b_1} + \frac{a_2}{z-b_2} + \dots + \frac{a_n}{z-b_n} = 0$, όπου οι αριθμοί $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ είναι γνωστοί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Να αποδείξετε ότι όλες οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι πραγματικές.

Λύση. Έστω μία λύση $z_0 (\neq b_1, b_2, \dots, b_n)$ της εξίσωσης $\frac{a_1}{z-b_1} + \frac{a_2}{z-b_2} + \dots + \frac{a_n}{z-b_n} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{a_1}{z_0-b_1} + \frac{a_2}{z_0-b_2} + \dots + \frac{a_n}{z_0-b_n} = 0$$

και, λαμβάνοντας τα συζυγή των δύο μελών,

$$\overline{\frac{a_1}{z_0-b_1} + \frac{a_2}{z_0-b_2} + \dots + \frac{a_n}{z_0-b_n}} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{\bar{z}_0-b_1} + \frac{a_2}{\bar{z}_0-b_2} + \dots + \frac{a_n}{\bar{z}_0-b_n} = 0.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{z_0-b_1} + \frac{a_2}{z_0-b_2} + \dots + \frac{a_n}{z_0-b_n} - \frac{a_1}{\bar{z}_0-b_1} - \frac{a_2}{\bar{z}_0-b_2} - \dots - \frac{a_n}{\bar{z}_0-b_n} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{a_1}{z_0-b_1} - \frac{a_1}{\bar{z}_0-b_1} \right) + \left(\frac{a_2}{z_0-b_2} - \frac{a_2}{\bar{z}_0-b_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_n}{z_0-b_n} - \frac{a_n}{\bar{z}_0-b_n} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & a_1 \frac{\bar{z}_0-b_1-(z_0-b_1)}{(z_0-b_1)(\bar{z}_0-b_1)} + a_2 \frac{\bar{z}_0-b_2-(z_0-b_2)}{(z_0-b_2)(\bar{z}_0-b_2)} + \dots + a_n \frac{\bar{z}_0-b_n-(z_0-b_n)}{(z_0-b_n)(\bar{z}_0-b_n)} = 0 \\ \Leftrightarrow & a_1 \frac{\bar{z}_0-z_0}{|z_0-b_1|^2} + a_2 \frac{\bar{z}_0-z_0}{|z_0-b_2|^2} + \dots + a_n \frac{\bar{z}_0-z_0}{|z_0-b_n|^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (\bar{z}_0-z_0) \left(\frac{a_1}{|z_0-b_1|^2} + \frac{a_2}{|z_0-b_2|^2} + \dots + \frac{a_n}{|z_0-b_n|^2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \bar{z}_0-z_0 = 0 \Leftrightarrow \bar{z}_0 = z_0. \end{aligned}$$

Τελικά λοιπόν, ο αριθμός z_0 είναι πραγματικός αφού ισούται με το συζυγή του. $\square$

1.4 Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $i^{13} + i^{19} + i^{46} + i^{50} + i^{65} + i^{205}$ και $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^9} + \frac{1}{i^{17}} + \frac{1}{i^{19}}$.
2. Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $\frac{2-i3}{5+i}$, $\left(\frac{6-i2}{3-i4}\right)^2$, $\frac{3-i5}{(1+i2)^3}$ και $\left(\frac{7-i2}{3+i6}\right)^3$ στη μορφή $a+ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
3. Αν $z = 2-i$, να υπολογίσετε τους μιγαδικούς αριθμούς $\frac{1}{z^2+z+1}$, $\frac{z^2-\bar{z}+1}{z-3}$ και $(z-3\bar{z})^2(2z+\bar{z})^3$.

4. Βρείτε δύο μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει $z_1 + z_2 = 4 + i4$ και $2z_1 - \bar{z}_2 = 5 + i5$.
5. Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που το τετράγωνό τους είναι πραγματικός αριθμός.
6. Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που το τετράγωνό τους είναι φανταστικός αριθμός.
7. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $\operatorname{Re}(z(2+i)) + z\bar{z} = 0$.
8. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $\operatorname{Re}(z^2) + i \operatorname{Im}(\bar{z}(3+i4)) = -7$.
9. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $\operatorname{Im}(z(3-i2)) = 1$.
10. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^3 = \bar{z}$.
11. Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = 1$. Να αποδείξετε ότι $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ και $-1 \leq \operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq 1$.
12. Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 τέτοιοι ώστε $|z_1| = |z_2| = 1$. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ είναι πραγματικός αριθμός.
13. Να αποδείξετε ότι όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής $\frac{2+ix}{x+i2}$ ($x \in \mathbb{R}$) έχουν μέτρο 1.
14. Βρείτε το μικρότερο μέτρο που μπορεί να έχει ένας μιγαδικός αριθμός της μορφής $z = (2a+1) + i(2a-1)$, $a \in \mathbb{R}$.
15. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $(2-i)z + (2+i)\bar{z} = 8$.
16. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|z+2| = |3z-i4|$.
17. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|2z-3+i| = |3z+4+i5|$.
18. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.
19. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $(z-2)(\bar{z}-2) + |z-2| = 2$.
20. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $10z\bar{z} - 3z^2 - 3\bar{z}^2 = 64$.
21. Να γράψετε τους μιγαδικούς αριθμούς $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^{40}$, $\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right)^{-16}$ και $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2021}$ στη μορφή $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$).
22. Βρείτε το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $z = x + iy$ ($\neq -2$) στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν την ισότητα $\operatorname{Arg}\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
23. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) τις εξισώσεις $z^5 - i32 = 0$ και $z^3 - 1 - i\sqrt{3} = 0$.
24. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^3 + z^{-3} + \sqrt{2} = 0$.

25. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το πολυώνυμο $p(z) = z^3 - 11z^2 + 49z - 75$ αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $4 - i3$.
26. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων το πολυώνυμο $p(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 14z + 26$ αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $3 + i2$.
27. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^8 - 16z^4 + 256 = 0$.
28. Να επιλύσετε (στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών) την εξίσωση $z^3 + z^2 - 2z - 8 = 0$.