

Θεωρία Μέτρου

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περιεχόμενα

1	σ -άλγεβρες	1
2	Μέτρα	27
3	Εξωτερικά μέτρα	55
4	Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue	83
5	Μετρήσιμες συναρτήσεις	125
6	Ολοκλήρωμα	147
7	Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων	209
8	Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα	215
9	Μέτρα γινόμενα	223
10	Το Θεώρημα Radon-Nikodym	241
11	Χώροι L^p	253

Κεφάλαιο 1

σ-άλγεβρες

Απλές ασκήσεις

1.1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X και $C \subseteq X$. Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$\mathcal{A}_C = \{A \cap C : A \in \mathcal{A}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο C .

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}_C$ είναι σ-άλγεβρα στο C αποδεικνύουμε τα εξής:

- (α) $C \in \mathcal{A}_C$: Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ και $C = X \cap C$, άρα $C \in \mathcal{A}_C$.
- (β) Έστω $B \in \mathcal{A}_C$. Τότε, $B = A \cap C$ για κάποιο $A \in \mathcal{A}$. Το συμπλήρωμα του B στο C είναι το $C \setminus B = C \setminus (A \cap C) = (X \setminus A) \cap C \in \mathcal{A}_C$, διότι $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- (γ) Έστω $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}_C$. Τότε, υπάρχουν $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $B_n = A_n \cap C$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_C$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.2. Έστω X, Y δύο μη κενά σύνολα, $f : X \rightarrow Y$ και $\mathcal{B}$ μια άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο Y . Να δείξετε ότι η οικογένεια

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

είναι επίσης άλγεβρα (αντίστοιχα σ-άλγεβρα) στο X .

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα και θα δείξουμε ότι η $f^{-1}(\mathcal{B})$ είναι σ-άλγεβρα:

- (α) Έχουμε $Y \in \mathcal{B}$, συνεπώς $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
- (β) Έστω $A \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ ώστε $A = f^{-1}(B)$. Τότε, $Y \setminus B \in \mathcal{B}$ και $X \setminus A = f^{-1}(Y \setminus B)$, συνεπώς $X \setminus A \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
- (γ) Έστω $A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathcal{B}$ ώστε $A_n = f^{-1}(B_n)$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ-άλγεβρα, έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$. Όμως, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, συνεπώς $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

Για την περίπτωση που η $\mathcal{B}$ είναι άλγεβρα δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο (απλώς, η ένωση που θεωρούμε είναι πεπερασμένη).

1.3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και

$$C = \{\{x\} : x \in X\}.$$

Να περιγράψετε την $\sigma(C)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\sigma(C) = \mathcal{A}$. Αρχικά αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα:

- (α) Έχουμε $X \in \mathcal{A}$ διότι το $X^c = \emptyset$ είναι αριθμήσιμο.
- (β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε είτε το A είναι αριθμήσιμο οπότε το A^c έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα είτε το A^c είναι αριθμήσιμο. Σε κάθε περίπτωση, $A^c \in \mathcal{A}$.
- (γ) Έστω (A_n) ακολουθία στην $\mathcal{A}$. Αν όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι κι αυτό αριθμήσιμο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Αν υπάρχει κάποιο A_m που δεν είναι αριθμήσιμο, τότε το A_m^c είναι αριθμήσιμο, άρα το

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_m^c$$

είναι αριθμήσιμο. Άρα, πάλι, το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε αριθμήσιμο $A \subseteq X$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων, των $\{x\}$ όπου $x \in A$, άρα ανήκει στην $\sigma(C)$. Αφού η $\sigma(C)$ είναι σ -άλγεβρα, περιέχει και τα συμπληρώματα των αριθμήσιμων συνόλων. Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{A} \subseteq \sigma(C)$.

Αντίστροφα, κάθε μονοσύνολο $\{x\}$, όπου $x \in X$, είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα ανήκει στην $\mathcal{A}$. Συνεπώς, $C \subseteq \mathcal{A}$ και έπεται ότι $\sigma(C) \subseteq \mathcal{A}$.

1.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X . Ορίζουμε τα σύνολα

$$\limsup_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε άπειρα από τα } A_n\}$$

και

$$\liminf_n A_n = \{x \in X : \text{το } x \text{ ανήκει σε όλα τελικά τα } A_n\}.$$

(α) Να δείξετε ότι

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{και} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(β) Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ενώ αν είναι φθίνουσα

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \geq n$ ώστε $x \in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_k$ για άπειρες τιμές του k .

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq n$ να ισχύει $x \in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k .

(β) Αρχικά παρατηρούμε ότι $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$ (αυτό είναι άμεσο, για παράδειγμα, από τον ορισμό). Θέτουμε $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ και $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Παρατηρήστε ότι η (B_n) είναι φθίνουσα και η (C_n) αύξουσα. Επίσης, $C_n \subseteq A_n \subseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω ότι η (A_n) είναι αύξουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, άρα

$$\liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B_1 \supseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \limsup_n A_n \supseteq \liminf_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

Έστω ότι η (A_n) είναι φθίνουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $B_n = A_n$, άρα

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = C_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n,$$

άρα έχουμε παντού ισότητα.

2η λύση για το (β). Χρησιμοποιούμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις. Για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\mathbf{1}_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(x), \quad \mathbf{1}_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n}(x).$$

Αν η (A_n) είναι αύξουσα, τότε η $(\mathbf{1}_{A_n})$ είναι σημειακά αύξουσα και συνεπώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\bigcup_n A_n}.$$

Άρα οι δύο παραπάνω χαρακτηριστικές συναρτήσεις συμπίπτουν με τη $\mathbf{1}_{\bigcup_n A_n}$, οπότε $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcup_n A_n$. Η φθίνουσα περίπτωση είναι ανάλογη: τότε $\mathbf{1}_{A_n} \downarrow \mathbf{1}_{\bigcap_n A_n}$ και παίρνουμε $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcap_n A_n$.

1.5. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε

$$\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}.$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Υπόδειξη: (α) Αρχικά παρατηρούμε ότι $X \in \mathcal{F}_A$ διότι $X \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq X$.

(β) Έστω $E \in \mathcal{F}_A$. Τότε, $E \in \mathcal{A}$, άρα $E^c \in \mathcal{A}$ και είτε $A \subseteq E$ οπότε $A \cap E^c = \emptyset$ ή $A \cap E = \emptyset$ οπότε $A \subseteq E^c$. Σε κάθε περίπτωση, $E^c \in \mathcal{F}_A$.

(γ) Έστω $E_n \in \mathcal{F}_A$, $n \geq 1$. Τότε $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \geq 1$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $A \cap E_n = \emptyset$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, $A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap E_n) = \emptyset$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_A$.
- Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $A \subseteq E_m$. Τότε, $A \subseteq E_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}_A$.

Από τα (α), (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

1.6. (α) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο X . Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα στο X .

(β) Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ μια αύξουσα ακολουθία σ -αλγεβρών στο X . Είναι απαραίτητα σωστό ότι η οικογένεια $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα στο X ;

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

- (i) Από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in \mathcal{A}_n$ (και μάλιστα) για κάθε $n \geq 1$, άρα $X \in \mathcal{A}$.
- (ii) Αν $F \in \mathcal{A}$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $F \in \mathcal{A}_m$, και αφού η $\mathcal{A}_m$ είναι άλγεβρα έχουμε $X \setminus F \in \mathcal{A}_m$, άρα $X \setminus F \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$.
- (iii) Αν $F_1, \dots, F_k \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχουν $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $F_j \in \mathcal{A}_{n_j}$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αν θέσουμε $N = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ τότε $\mathcal{A}_{n_j} \subseteq \mathcal{A}_N$ από την υπόθεση, άρα $F_j \in \mathcal{A}_N$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αφού η $\mathcal{A}_N$ είναι άλγεβρα, έπεται ότι $F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{A}_N$, άρα $F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{A}$.

Από τα (i)–(iii) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα.

(β) Δεν είναι απαραίτητα σωστό. Θεωρούμε το σύνολο $X = \mathbb{N}$ και τις εξής οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \subseteq \{1, \dots, n\} \text{ ή } \mathbb{N} \setminus B \subseteq \{1, \dots, n\}\}.$$

Είναι σαφές ότι $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1} \subseteq \dots$ και μπορείτε να ελέγξετε ότι κάθε $\mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα. Οι δύο πρώτες ιδιότητες ελέγχονται άμεσα και για την τρίτη θεωρήστε $B_k \in \mathcal{A}_n$, $k \geq 1$ και διακρίνετε δύο περιπτώσεις: αν όλα τα $B_k \subseteq \{1, \dots, n\}$ τότε $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subseteq \{1, \dots, n\}$, ενώ αν υπάρχει m ώστε $\mathbb{N} \setminus B_m \subseteq \{1, \dots, n\}$ τότε $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^c \subseteq B_m^c \subseteq \{1, \dots, n\}$. Και στις δύο περιπτώσεις έπεται ότι $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \in \mathcal{A}_n$.

Τώρα, παρατηρήστε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \{B \subseteq \mathbb{N} : B \text{ πεπερασμένο ή } \mathbb{N} \setminus B \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Αυτή όμως η οικογένεια, ας την πούμε $\mathcal{A}$, δεν είναι σ -άλγεβρα. Το σύνολο $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{A}$, είναι όμως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και όλα τα μονοσύνολα φυσικών ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

1.7. Έστω $\Delta = \{(q, q+1) : q \in \mathbb{Q}\}$. Αποδείξτε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι $\Delta \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού κάθε ανοικτό διάστημα είναι Borel σύνολο, άρα $\sigma(\Delta) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Τώρα, για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράψουμε

$$(a, +\infty) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q > a\}} (q, q+1) \in \sigma(\Delta) \quad \text{και} \quad (-\infty, b) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q < b\}} (q-1, q) \in \sigma(\Delta)$$

(αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων από την Δ). Έπεται ότι, για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$, το ανοικτό διάστημα

$$(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b) \in \sigma(\Delta).$$

Δηλαδή, $\Delta_0 \subseteq \sigma(\Delta)$, όπου $\Delta_0 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Όμως, γνωρίζουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Delta_0)$, άρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\Delta)$.

1.8. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$, και $x, y \in X$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $F \in \mathcal{F}$ έχουμε $x \in F$ αν και μόνο αν $y \in F$.

Αποδείξτε ότι: για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $x \in A$ αν και μόνο αν $y \in A$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : x, y \in A \text{ ή } x, y \notin A\}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{B}$ έχουμε ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Αν δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα, τότε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$, οπότε τελικά έχουμε ότι $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $A \in \mathcal{B}$ και από τον ορισμό της $\mathcal{B}$ βλέπουμε ότι $x \in A$ αν και μόνο αν $y \in A$.

Δείχνουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα.

1. Αφού $x, y \in X$ έχουμε ότι $X \in \mathcal{B}$.
2. Αν $A \in \mathcal{B}$ τότε $A \in \mathcal{A}$ άρα $A^c \in \mathcal{A}$ και είτε $x, y \in A$ οπότε $x, y \notin A^c$, ή $x, y \notin A$ οπότε $x, y \in A^c$. Αυτό δείχνει ότι $A^c \in \mathcal{B}$.
3. Έστω $A_n \in \mathcal{B}$, $n \geq 1$. Αρχικά παρατηρούμε ότι κάθε $A_n \in \mathcal{A}$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Κατόπιν, αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x, y \in A_n$ τότε $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, ενώ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $x, y \notin A_n$ τότε $x, y \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Συνεπώς, η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τον ορισμό της σ -άλγεβρας.

1.9. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ δύο σ -άλγεβρες στο X . Είναι απαραίτητα σωστό ότι η $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ είναι σ -άλγεβρα;

Υπόδειξη: Μπορούμε να δώσουμε ένα απλό αντιπαράδειγμα θεωρώντας το σύνολο $X = \{a, b, c\}$ και τις σ -άλγεβρες $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ και $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, X\}$. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, X\}$$

δεν είναι σ -άλγεβρα. Αν ήταν, θα έπρεπε το σύνολο $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$ να ανήκει στην $\mathcal{A}$.

1.10. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (α) Όλες οι σταθερές συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.
- (β) Αν $f, g \in \mathcal{F}$ και $c \in \mathbb{R}$ τότε οι $f + g$, $f \cdot g$ και $c \cdot f$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$.

(γ) Αν $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$, τότε και η f ανήκει στην $\mathcal{F}$.

Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : \chi_A \in \mathcal{F}\}$ είναι σ -άλγεβρα στο X (με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A).

Υπόδειξη: Ελέγχουμε τις ιδιότητες της σ -άλγεβρας.

1. Η $\chi_X \equiv 1$ είναι σταθερή, άρα ανήκει στην $\mathcal{F}$ (ιδιότητα (α) της $\mathcal{F}$). Συνεπώς, $X \in \mathcal{A}$.
2. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Τότε, $\chi_A \in \mathcal{F}$, άρα $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A \in \mathcal{F}$ ως γραμμικός συνδυασμός της σταθερής συνάρτησης $1 \in \mathcal{F}$ και της χ_A (ιδιότητα (β) της $\mathcal{F}$). Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Έστω (A_k) ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τότε $\chi_{A_n} \in \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $\chi_{A_1 \cap \dots \cap A_n} = \prod_{k=1}^n \chi_{A_k} \in \mathcal{F}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ιδιότητα (β) της $\mathcal{F}$ και επαγωγή). Όμως, εύκολα ελέγχουμε ότι $\chi_{A_1 \cap \dots \cap A_n}(x) \rightarrow \chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}(x)$ για κάθε $x \in X$. Από την ιδιότητα (γ) της $\mathcal{F}$ έπεται ότι $\chi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} \in \mathcal{F}$, άρα $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

1.11. Έστω X μη κενό σύνολο, $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα υποσυνόλων του X και $B \subset X$ τέτοιο ώστε $B \notin \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι η σ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια συνόλων $\mathcal{A} \cup \{B\}$ είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B)$ όπου $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη: Ορίζουμε $\mathcal{F} = \{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B) : A_1, A_2 \in \mathcal{A}\}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα. Παρατηρούμε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, άρα $A \in \mathcal{F}$. Επίσης, $B = (X \cap B) \cup (\emptyset \setminus B)$, άρα $B \in \mathcal{F}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{A} \cup \{B\} \subseteq \mathcal{F}$, άρα

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \{B\}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Από την άλλη πλευρά, είναι φανερό ότι αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τότε $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B) \in \sigma(\mathcal{A} \cup \{B\})$, άρα

$$\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{A} \cup \{B\})$$

και έπεται το ζητούμενο.

Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα:

1. $X = (X \cap B) \cup (X \setminus B)$ και αφού $X \in \mathcal{A}$ έπεται ότι $X \in \mathcal{F}$.
2. Έστω $E \in \mathcal{F}$. Τότε υπάρχουν $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $E = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \setminus B)$. Επειδή τα δύο κομμάτια βρίσκονται αντίστοιχα μέσα στα B και B^c , έχουμε

$$E^c \cap B = A_1^c \cap B, \quad E^c \cap B^c = A_2^c \cap B^c.$$

Άρα

$$E^c = (A_1^c \cap B) \cup (A_2^c \setminus B) \in \mathcal{F},$$

αφού $A_1^c, A_2^c \in \mathcal{A}$.

3. Έστω $E_n = (A_{1n} \cap B) \cup (A_{2n} \setminus B) \in \mathcal{F}$, όπου $A_{1n}, A_{2n} \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{1n} \cap B) \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{2n} \setminus B) \right) = \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1n} \right) \cap B \right] \cup \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} \right) \setminus B \right] \in \mathcal{F},$$

διότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1n} \in \mathcal{A}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2n} \in \mathcal{A}$.

1.12. Έστω $n \geq 2$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}_n$ όλων των υποσυνόλων E του $\mathbb{Z}$ που έχουν την εξής ιδιότητα:

«Αν για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in E$, τότε για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in E$.»

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι σ -άλγεβρα.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathbb{Z} \in \mathcal{A}_n$. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in \mathbb{Z}$ (οποιοσδήποτε s μας κάνει) και για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in \mathbb{Z}$.

Έστω $E \in \mathcal{A}_n$. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{Z} \setminus E \notin \mathcal{A}_n$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αν $\mathbb{Z} \setminus E \notin \mathcal{A}_n$, τότε υπάρχουν $k \in \mathbb{Z}$ και $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ώστε $(kn + s) \in \mathbb{Z} \setminus E$ αλλά δεν ισχύει ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ έχουμε $(kn + m) \in \mathbb{Z} \setminus E$. Όμως τότε, υπάρχει $m_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + m_0) \in E$, και αφού $E \in \mathcal{A}_n$ έπεται ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι $(kn + m) \in E$. Ειδικότερα, $kn + s \in E$, το οποίο είναι άτοπο.

Αυτό αποδεικνύει ότι αν $E \in \mathcal{A}_n$ τότε $\mathbb{Z} \setminus E \in \mathcal{A}_n$.

Τέλος, δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}_n$. Θα δείξουμε ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}_n$. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$ υπάρχει $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Τότε, υπάρχει $j_0 \geq 1$ τέτοιος ώστε $(kn + s) \in E_{j_0}$. Αφού $E_{j_0} \in \mathcal{A}_n$, έχουμε ότι για κάθε $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ισχύει ότι

$$(kn + m) \in E_{j_0} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}_n$.

2η λύση. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$B_k = \{kn, kn + 1, \dots, kn + n - 1\}.$$

Τα σύνολα B_k αποτελούν διαμέριση του $\mathbb{Z}$ και, από τον ορισμό, ένα σύνολο E ανήκει στην $\mathcal{A}_n$ αν και μόνο αν είναι ένωση κάποιων από τα B_k . Επομένως

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \bigcup_{k \in I} B_k : I \subseteq \mathbb{Z} \right\}.$$

Από αυτή την περιγραφή είναι άμεσο ότι $\mathbb{Z} \in \mathcal{A}_n$ και ότι η οικογένεια είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα και αριθμήσιμες ενώσεις. Άρα είναι σ -άλγεβρα.

1.13. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A .

Υπόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη. Τότε, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\{f < b\} \in \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{A}$, άρα η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο A . Τότε υπάρχουν $x, y \in A$ με $f(x) < f(y)$. Επιλέγουμε $c \in (f(x), f(y))$. Επειδή η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη, το σύνολο $E = \{f < c\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$. Όμως $x \in A \cap E$, οπότε το E δεν είναι ξένο προς το A , ενώ $y \in A \setminus E$, οπότε δεν περιέχει το A . Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό της $\mathcal{F}_A$. Άρα η f είναι σταθερή στο A .

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και παίρνει την τιμή a στο A . Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $b \leq a$ έχουμε ότι $A \cap \{x \in X : f(x) < b\} = \emptyset$ ενώ αν $a < b$ έχουμε ότι $\{x \in X : f(x) < b\} \supseteq \{x \in X : f(x) = a\} \supseteq A$. Έπεται ότι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$, άρα η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

1.14. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X . Αποδείξτε ότι υπάρχει η μικρότερη άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Αυτή λέγεται η *άλγεβρα που παράγει η $\mathcal{F}$* και συμβολίζεται με $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια από άλγεβρες του X , τότε και η $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι μια άλγεβρα στο X . Θεωρούμε τώρα την οικογένεια αλγεβρών

$$C = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ άλγεβρα και } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Έχουμε $C \neq \emptyset$ διότι $\mathcal{P}(X) \in C$, και η οικογένεια υποσυνόλων του X

$$\mathcal{A} = \bigcap C = \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \in C\}$$

είναι μια άλγεβρα στο X . Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\mathcal{A}$ είναι η ελάχιστη άλγεβρα με αυτή την ιδιότητα.

1.15. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\overline{I} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(\overline{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$ ανήκει στην Borel σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $\overline{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(\overline{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (a, b) γράφεται στη μορφή

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n} \right],$$

άρα $(a, b) \in \sigma(\overline{I})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(\overline{I})$. Αφού η $\sigma(\overline{I})$ είναι σ -άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\overline{I})$.

1.16. Θεωρούμε την οικογένεια

$$I_{\mathbb{Q}} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Να δείξετε ότι $\sigma(I_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) με άκρα ρητούς αριθμούς ανήκει στην Borel σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή $I_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι $\sigma(I_{\mathbb{Q}}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα (x, y) με άκρα πραγματικούς αριθμούς γράφεται στη μορφή

$$(x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

όπου (a_n, b_n) διαστήματα με ρητά άκρα (θεωρήστε ρητούς $a_n < b_n$ στο (x, y) με την (a_n) να φθίνει γνήσια προς το x και την (b_n) να αυξάνει γνήσια προς το y) άρα $(x, y) \in \sigma(I_{\mathbb{Q}})$. Κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση φραγμένων ανοικτών διαστημάτων, άρα $G \in \sigma(I_{\mathbb{Q}})$. Αφού η $\sigma(I_{\mathbb{Q}})$ είναι σ -άλγεβρα και περιέχει όλα τα ανοικτά $G \subseteq \mathbb{R}$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(I_{\mathbb{Q}})$.

1.17. Έστω $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ -άλγεβρες στο X .

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε τη σχέση

$$x \sim y \iff \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ ισχύει ότι } x \in A \text{ αν και μόνο αν } y \in A.$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο X , άρα οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$ ορίζουν διαμέριση του X .

Δείχνουμε ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Πράγματι, θεωρούμε $x \in X$ και την κλάση ισοδυναμίας του, C . Αν $C = X$, τότε $C \in \mathcal{A}$ επειδή $X \in \mathcal{A}$. Έστω λοιπόν $C \neq X$. Από τον ορισμό της $\sim$, για κάθε $y \in X \setminus C$ υπάρχει $A_y \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_y$ και $y \notin A_y$: αν ένα σύνολο της $\mathcal{A}$ χωρίζει τα x, y με την αντίθετη φορά, παίρνουμε το συμπλήρωμά του. Πάλι από τον ορισμό της $\sim$ έχουμε $C \subseteq A_y$ και $y \notin A_y$. Το $X \setminus C$ είναι μη κενό και αριθμήσιμο, άρα $\bigcap_{y \in X \setminus C} A_y \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, $C \subseteq \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y$, ενώ για κάθε $z \in X \setminus C$ ο παράγοντας A_z δεν περιέχει το z . Επομένως

$$C = \bigcap_{y \in X \setminus C} A_y \in \mathcal{A}.$$

Το πλήθος των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$ είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $C_x \subseteq A$ για κάθε $x \in A$, όπου C_x είναι η κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει το x . Δηλαδή, $A = \bigcup_{x \in A} C_x$. Με άλλα λόγια, τα $A \in \mathcal{A}$ είναι οι (πεπερασμένες ή άπειρες αριθμήσιμες) ενώσεις κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$.

1.18. Έστω $(X, d), (Y, \sigma)$ μετρικοί χώροι και μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X .

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in X : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in B(x, \delta), \sigma(f(y), f(z)) < \frac{1}{m} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x , υπάρχει

$\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in B(x, \delta)$ ισχύει $\sigma(f(y), f(x)) < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in B(x, \delta)$ έχουμε

$$\sigma(f(y), f(z)) \leq \sigma(f(y), f(x)) + \sigma(f(x), f(z)) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in B(x, \delta)$ τότε $\sigma(f(y), f(z)) < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in B(x, \delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$\sigma(f(y), f(x)) < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x , δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in B(x, \delta)$ τότε $\sigma(f(y), f(z)) < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $B(x, \delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m . Έστω $u \in B(x, \delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $B(u, \delta_1) \subseteq B(x, \delta)$. Τότε, αν $y, z \in B(u, \delta_1)$ έχουμε $y, z \in B(x, \delta)$, άρα $\sigma(f(y), f(z)) < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ -σύνολο.

1.19. Έστω X μετρικός χώρος και μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in X : \text{υπάρχει το } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$$

είναι Borel υποσύνολο του X .

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x \in X$, το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι, μπορείτε να γράψετε το B στη μορφή

$$B = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \{x \in X : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m}\} \right) \right).$$

Από τη συνέχεια των f_n , για κάθε k και m , το σύνολο

$$\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

είναι κλειστό σύνολο (ως τομή κλειστών συνόλων). Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$B_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_r(x) - f_s(x)| \leq \frac{1}{m} \right\} \right)$$

είναι F_σ -σύνολο. Έπεται ότι το $B = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ είναι $F_{\sigma\delta}$ -σύνολο.

1.20. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ λέγεται *δακτύλιος* αν είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις και τις διαφορές. Αν επιπλέον η $\mathcal{R}$ είναι κλειστή ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις, θα λέγεται σ -δακτύλιος. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α) Οι δακτύλιοι (αντίστ. οι σ -δακτύλιοι) είναι κλειστοί ως προς πεπερασμένες (αντίστ. αριθμήσιμες) τομές.
- (β) Ένας δακτύλιος (αντίστ. σ -δακτύλιος) $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα (αντίστοιχα σ -άλγεβρα) αν και μόνο αν $X \in \mathcal{R}$.
- (γ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ -δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$ είναι σ -άλγεβρα.
- (δ) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι σ -δακτύλιος, τότε το $\{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$ είναι σ -άλγεβρα.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{R}$ είναι δακτύλιος. Έστω $A, B \in \mathcal{R}$. Τότε, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$. Επαγωγικά βλέπουμε ότι αν $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ τότε $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{R}$. Αν υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{R}$ είναι σ -δακτύλιος και αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία στον $\mathcal{R}$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^\infty A_n = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^\infty (A_1 \setminus A_n) \in \mathcal{R},$$

δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς αριθμήσιμες τομές.

(β) Αν ο $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα ή σ -άλγεβρα τότε από τον ορισμό έχουμε $X \in \mathcal{R}$. Έστω $\mathcal{R}$ δακτύλιος ή σ -δακτύλιος με $X \in \mathcal{R}$. Αφού ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συνολοθεωρητικές διαφορές, για κάθε $A \in \mathcal{R}$ έχουμε $A^c = X \setminus A \in \mathcal{R}$, δηλαδή ο $\mathcal{R}$ είναι κλειστός ως προς συμπληρώματα. Έπεται τώρα ότι είναι άλγεβρα (αντίστοιχα σ -άλγεβρα) αφού είναι κλειστός ως προς πεπερασμένες (αντίστοιχα αριθμήσιμες) ενώσεις.

(γ) Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{E \subseteq X : E \in \mathcal{R} \text{ ή } E^c \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$, άρα $\mathcal{B} \neq \emptyset$, και ότι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία στην $\mathcal{B}$. Θέτουμε $I = \{n : E_n \in \mathcal{R}\}$ και $J = \{n : E_n \notin \mathcal{R}\}$. Παρατηρήστε ότι $I \cap J = \emptyset$ και $\mathbb{N} = I \cup J$. Για κάθε $n \in J$ έχουμε $E_n^c \in \mathcal{R}$. Αν $I = \emptyset$, τότε

$$\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n \right)^c = \bigcup_{n \in J} E_n^c \in \mathcal{R},$$

άρα $\bigcap_n E_n \in \mathcal{B}$. Αν $I \neq \emptyset$, θέτουμε

$$A = \bigcap_{n \in I} E_n \in \mathcal{R}, \quad U = \bigcup_{n \in J} E_n^c \in \mathcal{R},$$

όπου για πεπερασμένο I χρησιμοποιούμε την (α), ενώ για άπειρο αριθμήσιμο I την αριθμήσιμη κλειστότητα ως προς τομές. Τότε

$$\bigcap_{n=1}^\infty E_n = A \cap (X \setminus U) = A \setminus U \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}.$$

Έτσι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες τομές και συνεπώς είναι σ -άλγεβρα.

(δ) Ορίζουμε $\mathcal{C} = \{E \subseteq X : E \cap F \in \mathcal{R} \text{ για κάθε } F \in \mathcal{R}\}$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $X \in \mathcal{C}$. Αν $E \in \mathcal{C}$ τότε για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E \cap F \in \mathcal{R}$, άρα για κάθε $F \in \mathcal{R}$ έχουμε $E^c \cap F = F \setminus E = F \setminus (E \cap F) \in \mathcal{R}$, το οποίο δείχνει ότι $E^c \in \mathcal{C}$. Άρα, η $\mathcal{C}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{C}$ είναι σ -άλγεβρα, αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^\infty$

ακολουθία στην C . Για κάθε $F \in \mathcal{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $E_n \cap F \in \mathcal{R}$, άρα

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cap F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap F) \in \mathcal{R}.$$

Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in C$.

1.21. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(C_A)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid \text{υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια } C_A \text{ της } \mathcal{F} \text{ ώστε } A \in \sigma(C_A)\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα:

- (α) Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή και μάλιστα περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $E \in \mathcal{F}$ τότε $E \in \sigma(C_E)$ όπου $C_E = \{E\} \subseteq \mathcal{F}$. Άρα, $E \in \mathcal{A}$.
- (β) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(C_A)$. Έπεται ότι $A^c \in \sigma(C_A)$. Άρα, $A^c \in \mathcal{A}$ (πάρτε $C_{A^c} = C_A$).
- (γ) Έστω $A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν αριθμήσιμες $C_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A_n \in \sigma(C_{A_n})$. Η οικογένεια $C_{\cup A_n} := \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{A_n} \subseteq \mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A_n \in \sigma(C_{A_n}) \subseteq \sigma(C_{\cup A_n}).$$

Άρα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(C_{\cup A_n}).$$

Αφού η σ -άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη $C_A \subseteq \mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(C_A)$.

1.22. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο, μια σ -άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο X λέγεται *αριθμήσιμα παραγόμενη* αν υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια C ώστε $\mathcal{A} = \sigma(C)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Επιπλέον, αποδείξτε το ίδιο για την $\mathcal{B}(X)$, όπου (X, d) είναι τυχόν διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Υπόδειξη. Θεωρούμε αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D του X και την αριθμήσιμη οικογένεια

$$C = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in D, n \in \mathbb{N} \right\}$$

από ανοικτές μπάλες του X . Έχουμε $C \subseteq \mathcal{B}(X)$, άρα $\sigma(C) \subseteq \mathcal{B}(X)$. Αντίστροφα, από την Πραγματική Ανάλυση είναι γνωστό ότι κάθε ανοικτό σύνολο $G \subseteq X$ γράφεται ως (αριθμήσιμη) ένωση συνόλων από την C , άρα $\mathcal{B}(X) \subseteq \sigma(C)$. Τελικά, $\mathcal{B}(X) = \sigma(C)$ και η C είναι αριθμήσιμη, άρα η $\mathcal{B}(X)$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.

Τα παραπάνω ισχύουν για την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ αφού το $\mathbb{Q}$ είναι ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

2η λύση για το $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\mathcal{D} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}.$$

Η $\mathcal{D}$ είναι αριθμήσιμη και $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Από την άλλη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(-\infty, a) = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q < a}} (-\infty, q),$$

οπότε κάθε ημιευθεία $(-\infty, a)$ ανήκει στην $\sigma(\mathcal{D})$. Επειδή οι ημιευθείες $(-\infty, a)$ παράγουν την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, παίρνουμε $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{D})$. Συνεπώς $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{D})$. Η απόδειξη αυτή δίνει μάλιστα μια ιδιαίτερα απλή αριθμήσιμη οικογένεια γεννητόρων.

1.23. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X και $f : X \rightarrow Y$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ -άλγεβρα στο Y .

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ -άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X, d) και (Y, τ) μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής. Αποδείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y , τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X .

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Έχουμε $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, άρα $Y \in \mathcal{F}$. Έστω τώρα $B \in \mathcal{F}$. Τότε, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $f^{-1}(B^c) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, άρα $B^c \in \mathcal{F}$. Τέλος, αν $B_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 1$, τότε $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \geq 1$, άρα

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A},$$

το οποίο σημαίνει ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$. Τα παραπάνω δείχνουν ότι η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα στο Y .

(β) Θέτουμε $\mathcal{F} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Από το (α) η $\mathcal{F}$ είναι σ -άλγεβρα στο Y και από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$. Έπεται ότι

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε $B \in \mathcal{C}$ ανήκει στην $\mathcal{F}$, δηλαδή $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(γ) Θέτουμε $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{C} = \mathcal{B}(Y)$ και $\mathcal{E} = \{B \subseteq Y : B \text{ ανοικτό}\}$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (β). Παρατηρήστε ότι $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(Y)$ και για κάθε $B \in \mathcal{E}$ ισχύει ότι το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X (διότι η f είναι συνεχής) άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Έπεται ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$, δηλαδή για κάθε $B \in \mathcal{B}(Y)$ έχουμε ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$.

1.24. Αποδείξτε ότι οι οικογένειες $\mathcal{B} = \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων του } \mathbb{R}\}$ και

$$\mathcal{D} = \{\text{αριθμήσιμες ενώσεις διαστημάτων της μορφής } (a, b) \text{ όπου } a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$$

δεν είναι σ -άλγεβρες στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{Q}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Έχουμε ότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \in \mathcal{B}$ διότι κάθε $\{q_n\}$ είναι

διάστημα. Αν υποθέσουμε ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ -άλγεβρα, τότε το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ανήκει κι αυτό στην $\mathcal{B}$, άρα

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

όπου κάθε I_k είναι διάστημα. Όμως το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει κανένα γνήσιο διάστημα, άρα κάθε I_k είναι το κενό σύνολο ή μονοσύνολο. Τότε, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο.

Υποθέτουμε ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ -άλγεβρα. Τότε, περιέχει όλα τα μονοσύνολα: αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$$

και τα ανοικτά διαστήματα $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right)$ ανήκουν στην $\mathcal{D}$. Όμως, η $\mathcal{D}$ δεν μπορεί να περιέχει μονοσύνολα. Αν $\{x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ όπου $a_n \leq b_n$ στο $\mathbb{R}$, τότε είτε $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οπότε θα είχαμε $\{x\} = \emptyset$ ή υπάρχει m τέτοιος ώστε $a_m < b_m$ και τότε το $\{x\}$ περιέχει το μη τετρωμένο διάστημα (a_m, b_m) , το οποίο είναι πάλι άτοπο.

1.25. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το σύνολο C_f όλων των $x \in \mathbb{R}$ στα οποία η f είναι συνεχής είναι G_δ -σύνολο.

(β) Αποδείξτε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ -σύνολο αλλά δεν είναι G_δ -σύνολο.

(γ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{Q}$;

(δ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x - \delta, x + \delta), |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m} \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $C_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in C_f$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x - \delta, x + \delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $C_f \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in C_f$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x - \delta, x + \delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x , δηλαδή $x \in C_f$. Έτσι, $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq C_f$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x

είναι εσωτερικό σημείο του A_m . Έστω $u \in (x - \delta, x + \delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u - \delta_1, u + \delta_1) \subseteq (x - \delta, x + \delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u - \delta_1, u + \delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $C_f = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το C_f είναι G_δ -σύνολο.

(β) Το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ -σύνολο (αφού είναι αριθμήσιμο και τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα) αλλά δεν είναι G_δ -σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

(γ) Από τα (α) και (β) προκύπτει άμεσα ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $C_f = \mathbb{Q}$. Λόγω του (α) το $\mathbb{Q}$ θα ήταν G_δ -σύνολο, ενώ από το (β) αυτό δεν ισχύει.

(δ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ αν } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \text{ αν } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ ΜΚΔ}(|p|, q) = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής στους άρρητους και ασυνεχής στους ρητούς, δηλαδή $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.26. (α) Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ η ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$ αν ο n είναι περιττός και $A_n = \left(-1, \frac{1}{n}\right)$ αν ο n είναι άρτιος. Να βρείτε τα σύνολα $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αν f και g είναι οι δείκτριες συναρτήσεις των συνόλων $\liminf_n A_n$ και $\limsup_n A_n$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x) \quad \text{και} \quad g(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \chi_{A_n}(x).$$

Υπόδειξη: (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $A_n \subseteq (-1, 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\limsup_n A_n \subseteq (-1, 1)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει ισότητα. Πράγματι, αν $x \in [0, 1)$ τότε $x \in A_{2k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή το x ανήκει σε άπειρα A_n , άρα $x \in \limsup_n A_n$. Αυτό δείχνει ότι $[0, 1) \subseteq \limsup_n A_n$. Ομοίως, αν $x \in (-1, 0]$ τότε $x \in A_{2k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή το x ανήκει σε άπειρα A_n , άρα $x \in \limsup_n A_n$. Αυτό δείχνει ότι $(-1, 0] \subseteq \limsup_n A_n$, και τελικά $(-1, 1) \subseteq \limsup_n A_n$.

Δείχνουμε τώρα ότι $\liminf_n A_n = \{0\}$. Αρχικά, $0 \in A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $0 \in \liminf_n A_n$. Έστω $x > 0$. Τότε, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{2k_0} < x$. Για κάθε $k \geq k_0$ έχουμε $\frac{1}{2k} < x$, άρα $x \notin A_{2k}$. Υπάρχουν λοιπόν άπειροι φυσικοί n τέτοιοι ώστε $x \notin A_n$, το οποίο σημαίνει ότι $x \notin \liminf_n A_n$. Όμοια δείχνουμε ότι αν $x < 0$ τότε $x \notin \liminf_n A_n$, και συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $\liminf_n A_n = \{0\}$.

(β) Δείχνουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό. Έχουμε $f(x) = 1$ ή $f(x) = 0$. Έχουμε $f(x) = 1$ αν και μόνο αν $x \in \liminf_n A_n$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε όλα τελικά τα A_n , δηλαδή αν και μόνο αν η ακολουθία $\chi_{A_n}(x)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 1, ή ισοδύναμα $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 1$ (για την ισοδυναμία, παρατηρήστε ότι αν $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 1$ τότε όλοι τελικά οι $\chi_{A_n}(x)$ είναι μεγαλύτεροι από $1/2$ –εξηγήστε γιατί– άρα $\chi_{A_n}(x) = 1$ τελικά).

Επίσης, έχουμε $f(x) = 0$ αν και μόνο αν $x \notin \liminf_n A_n$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \notin A_n$ για άπειρους δείκτες n , δηλαδή αν και μόνο αν πάσχει υπακολουθία $\chi_{A_{k_n}}(x)$ σταθερή και ίση με 0, το οποίο συνεπάγεται ότι $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 0$. Αντίστροφα, παρατηρήστε ότι αν $\liminf_n \chi_{A_n}(x) = 0$ τότε υπάρχουν άπειροι δείκτες n για τους οποίους $\chi_{A_n}(x)$ είναι μικρότερη από $1/2$ –εξηγήστε γιατί– άρα $\chi_{A_n}(x) = 0$ για άπειρους δείκτες n , άρα $x \notin A_n$ για άπειρους δείκτες n , άρα $x \notin \liminf_n A_n$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x) = 0$.

Δύσκολες ασκήσεις

1.27. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή ως προς αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή ως προς φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X , συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει την Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

- (α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.
- (β) Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X , τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.
- (γ) Υπάρχει μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.
- (δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X , τότε

$$m(\Delta) = \sigma(\Delta).$$

Υπόδειξη. (α) Έστω $\mathcal{D}$ μια κλάση Dynkin. Από τον ορισμό της κλάσης Dynkin, η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες αύξουσες ενώσεις, αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες φθίνουσες τομές. Έστω (A_n) φθίνουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{D}$. Η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, άρα η αύξουσα ακολουθία $(X \setminus A_n)$ περιέχεται στην $\mathcal{D}$. Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \in \mathcal{D}$, δηλαδή $X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$. Αφού η $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, έχουμε τελικά ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(β) Η $\delta(\Delta)$ είναι κλάση Dynkin, άρα είναι μονότονη κλάση από το (α). Αφού $\Delta \subseteq \delta(\Delta)$, από τον ορισμό της $m(\Delta)$ παίρνουμε αμέσως ότι $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Έστω $X = \mathbb{N}$ και $\mathcal{M} = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Η $\mathcal{M}$ είναι μονότονη κλάση αλλά δεν είναι κλάση Dynkin, διότι το $\{1, 2\} \setminus \{1\} = \{2\} \notin \mathcal{M}$.

(δ) Αφού η Δ είναι άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι $\delta(\Delta) = \sigma(\Delta)$. Από το (β) έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \sigma(\Delta)$. Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(\Delta) \subseteq m(\Delta)$, και αφού $\Delta \subseteq m(\Delta)$ αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι σ -άλγεβρα, και αφού η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις αρκεί να δείξουμε ότι η $m(\Delta)$ είναι άλγεβρα:

1. Έχουμε $X \in \Delta \subseteq m(\Delta)$.

2. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{C} = \{A \subseteq X : A^c \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Αφού η Δ είναι άλγεβρα, έχουμε $\Delta \subseteq \mathcal{C}$. Έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{C}$, δηλαδή για κάθε $A \in m(\Delta)$ ισχύει ότι $A^c \in m(\Delta)$. Άρα, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

3. Δείχνουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{D} = \{A \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta) \text{ για κάθε } B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και ότι $\Delta \subseteq \mathcal{D}$ (για τον δεύτερο εγκλεισμό σταθεροποιούμε $A \in \Delta$ και δείχνουμε ότι η $C_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in m(\Delta)\}$ είναι μονότονη κλάση και περιέχει την Δ). Από τα παραπάνω έπεται ότι $m(\Delta) \subseteq \mathcal{D}$, δηλαδή για κάθε $A, B \in m(\Delta)$ ισχύει $A \cap B \in m(\Delta)$. Επαγωγικά, η $m(\Delta)$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

1.28. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του X . Ναδειχθεί ότι και η $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ (βλ. Άσκηση 1.14) είναι αριθμήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ και επαγωγικά, αν για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ έχει οριστεί η $\mathcal{F}_n$, ορίζουμε $\mathcal{F}_{n+1}$ να είναι η οικογένεια όλων των πεπερασμένων ενώσεων και των συμπληρωμάτων στοιχείων της $\mathcal{F}_n$. Δηλαδή,

$$\mathcal{F}_{n+1} = \{A_1 \cup \dots \cup A_m : m \in \mathbb{N}, A_i \in \mathcal{F}_n\} \cup \{A^c : A \in \mathcal{F}_n\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι κάθε $\mathcal{F}_n$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων. Επαγωγικά αποδεικνύουμε επίσης ότι $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα την (επίσης αριθμήσιμη) οικογένεια

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n.$$

Από τα προηγούμενα έχουμε $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα, οπότε $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$ και έχουμε το ζητούμενο.

Αρχικά παρατηρούμε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Επίσης, αν $A \in \mathcal{A}$ τότε υπάρχει $n \geq 0$ ώστε $A \in \mathcal{F}_n$ και τότε $A^c \in \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}$. Μένει να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις. Έστω $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Υπάρχουν $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $A_i \in \mathcal{F}_{k_i}$. Αν θέσουμε $m = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ τότε $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}_m$, άρα $A_1 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}_{m+1} \subseteq \mathcal{A}$.

Δεύτερη, συντομότερη λύση. Αριθμούμε την $\mathcal{F}$ ως $\mathcal{F} = \{E_1, E_2, \dots\}$ (στην πεπερασμένη περίπτωση το επιχείρημα είναι ακόμη απλούστερο) και θέτουμε

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(\{E_1, \dots, E_n\}).$$

Η $\mathcal{A}_n$ είναι πεπερασμένη: τα στοιχεία της είναι ενώσεις των το πολύ 2^n 'ατόμων' της μορφής

$$E_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap E_n^{\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\},$$

όπου $E_i^1 = E_i$ και $E_i^0 = E_i^c$. Επομένως η $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι αριθμήσιμη. Επιπλέον είναι άλγεβρα: αν $A, B \in \mathcal{A}_0$, τότε για κάποιο n έχουμε $A, B \in \mathcal{A}_n$, οπότε $A \cup B, A^c \in \mathcal{A}_n$. Αφού $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}_0$, από την ελαχιστικότητα της $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ παίρνουμε $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}_0$. Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι άμεσος, άρα $\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \mathcal{A}_0$ και είναι αριθμήσιμη.

1.29. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X με άπειρα στοιχεία. Να δείξετε ότι:

- (α) Η $\mathcal{A}$ περιέχει μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.
- (β) Η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του ατόμου της $\mathcal{A}$: ένα μη κενό $E \in \mathcal{A}$ λέγεται άτομο αν τα μόνα μετρήσιμα υποσύνολά του είναι τα $\emptyset$ και E .

Αν η $\mathcal{A}$ έχει άπειρα άτομα, επιλέγουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια διαφορετικών ατόμων. Δύο διαφορετικά άτομα είναι ξένα: πράγματι, αν E και F είναι άτομα και $E \cap F \neq \emptyset$, τότε $E \cap F \in \mathcal{A}$ είναι μη κενό μετρήσιμο υποσύνολο και των δύο, άρα $E \cap F = E = F$. Έτσι έχουμε ήδη άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο μη κενών συνόλων.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{A}$ έχει μόνο πεπερασμένα πολλά άτομα, έστω $E_1, \dots, E_m$ (ενδεχομένως κανένα), και θέτουμε

$$R = X \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j.$$

Αν $R = \emptyset$, τότε κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι ένωση ορισμένων από τα E_j : για κάθε j , το $A \cap E_j$ είναι είτε $\emptyset$ είτε E_j . Άρα η $\mathcal{A}$ θα είχε το πολύ 2^m στοιχεία, αντίφαση. Επομένως $R \neq \emptyset$. Επιπλέον, το R δεν περιέχει άτομο της $\mathcal{A}$.

Κατασκευάζουμε τώρα αναδρομικά μη κενά $R_n, A_n \in \mathcal{A}$. Θέτουμε $R_1 = R$. Εφόσον το R_n δεν είναι άτομο, υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ με

$$\emptyset \neq A_n \subsetneq R_n,$$

και θέτουμε $R_{n+1} = R_n \setminus A_n$. Τότε $R_{n+1} \neq \emptyset$ και δεν περιέχει άτομο, αφού $R_{n+1} \subseteq R$. Επειδή $A_n \subseteq R_n$ και $R_{n+1} = R_n \setminus A_n$, τα A_n είναι μη κενά και ξένα ανά δύο. Αυτό αποδεικνύει το (α).

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ μη κενών ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $M \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_M = \bigcup_{n \in M} A_n.$$

Αν $M \neq N$, υπάρχει k που ανήκει ακριβώς σε ένα από τα M, N . Επειδή $A_k \neq \emptyset$ και τα A_n είναι ξένα ανά δύο, έχουμε $A_M \neq A_N$. Άρα η απεικόνιση $M \mapsto A_M$ από το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ στην $\mathcal{A}$ είναι 1-1. Επομένως

$$|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|,$$

οπότε η $\mathcal{A}$ είναι υπεραριθμήσιμη.

1.30. (α) Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(A_n), (B_n)$ δύο ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$\limsup A_n \cap \limsup B_n \supseteq \limsup(A_n \cap B_n) \quad \text{και} \quad \limsup A_n \cup \limsup B_n = \limsup(A_n \cup B_n).$$

Ποιες είναι οι αντίστοιχες σχέσεις για το $\liminf$;

(β) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $A_n = (-\infty, a_n)$. Αποδείξτε ότι

$$(-\infty, \liminf a_n) \subseteq \liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n] \quad \text{και} \quad (-\infty, \limsup a_n) \subseteq \limsup A_n \subseteq (-\infty, \limsup a_n].$$

Αποδείξτε ότι αν $\liminf A_n = \limsup A_n$ τότε το $\lim a_n$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι $\pm\infty$) αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Υπόδειξη. (α) Αν $x \in \limsup(A_n \cap B_n)$ τότε υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_n) τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $x \in A_{k_n} \cap B_{k_n}$. Αφού $x \in A_{k_n}$ για κάθε n (το x ανήκει σε άπειρα από τα A_n) έχουμε $x \in \limsup A_n$. Ομοίως, $x \in \limsup B_n$. Άρα, $x \in \limsup A_n \cap \limsup B_n$.

Για την δεύτερη ισότητα παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k \cup B_k) \right) = \limsup (A_n \cup B_n)$$

και όμοια $\limsup B_n \subseteq \limsup (A_n \cup B_n)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε τον εγκλεισμό $\limsup A_n \cup \limsup B_n \subseteq \limsup (A_n \cup B_n)$. Έστω $x \in \limsup (A_n \cup B_n)$. Το σύνολο $J = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n \cup B_n\}$ είναι άπειρο, άρα κάποιο από τα $J_1 = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$ και $J_2 = \{n \in \mathbb{N} : x \in B_n\}$ είναι άπειρο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $x \in \limsup A_n$ και στη δεύτερη $x \in \limsup B_n$, άρα $x \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

(β) Έστω $x < \liminf a_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x < a_n$, δηλαδή $x \in A_n$, για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, $x \in \liminf A_n$. Αυτό αποδεικνύει ότι $(-\infty, \liminf a_n) \subseteq \liminf A_n$. Αντίστροφα, έστω $x \in \liminf A_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x < a_n$ για κάθε $n \geq n_0$. Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι τότε $x \leq \liminf a_n$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n]$. Οι αντίστοιχοι ισχυρισμοί για το $\limsup$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\liminf A_n = \limsup A_n$. Από τα προηγούμενα έχουμε

$$(-\infty, \limsup a_n) \subseteq \limsup A_n = \liminf A_n \subseteq (-\infty, \liminf a_n],$$

άρα $\limsup a_n \leq \liminf a_n$ (ελέγξτε την περίπτωση που είναι $\pm\infty$). Άρα, υπάρχει το $\lim a_n$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Αν θεωρήσουμε την $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ τότε $a_n \rightarrow 0$ αλλά $0 \in \limsup A_n$ και $0 \notin \liminf A_n$, άρα δεν ισχύει η ισότητα $\liminf A_n = \limsup A_n$.

1.31. (α) Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα G_δ -συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ -σύνολο.

(γ) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι G_δ -σύνολο ούτε F_σ -σύνολο.

(δ) Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ -σύνολο.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $A \subseteq X$, αν ορίσουμε $U_n = \{x \in X : \text{dist}(x, A) < 1/n\}$ τότε τα σύνολα U_n είναι ανοικτά και $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bar{A}$. Αν το A υποτεθεί κλειστό, τότε έχουμε $A = \bar{A}$, άρα έχουμε γράψει το A ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων.

Το συμπλήρωμα ενός G_δ -συνόλου είναι F_σ -σύνολο, οπότε προκύπτει τώρα άμεσα ότι κάθε ανοικτό σύνολο είναι F_σ -σύνολο.

(β) Το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ -σύνολο (αφού είναι αριθμήσιμο και τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα) αλλά δεν είναι G_δ -σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire. Τώρα, το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ μας δίνει παράδειγμα G_δ -συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ -σύνολο.

(γ) Θεωρούμε τα σύνολα $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ και $C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ -σύνολο

ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ -σύνολο: αν $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, τότε

$$C = (0, \infty) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{q_n\}).$$

Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A = B \cup C = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

- Το B δεν είναι G_δ -σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θέτοντας $U_n = G_n \cap (-\infty, 0]$ θα είχαμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ και κάθε U_n θα ήταν σχετικά ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty, 0]$ αφού $U_n \supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty, 0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = (-\infty, 0] \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = B \cap ((-\infty, 0] \setminus B) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

- Το C δεν είναι F_σ -σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R} \setminus C = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0]$ θα ήταν G_δ -σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ -σύνολο $[1, \infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ θα ήταν G_δ -σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.
- Το A δεν είναι G_δ -σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι G_δ -σύνολο, θα είχαμε ότι το $B = A \cap (-\infty, 0]$ είναι G_δ -σύνολο.
- Ομοίως, το A δεν είναι F_σ -σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0, \infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C = A \cap [0, \infty)$ είναι F_σ -σύνολο.

(δ) Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A + B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A + B$ με $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \rightarrow a \in A$. Τότε, $b_{k_n} = x_{k_n} - a_{k_n} \rightarrow x - a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x - a \in B$. Άρα, $x = a + (x - a) \in A + B$. Έπεται ότι το $A + B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n \cap [-n, n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το $A_n + B$ είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το

$$A + B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + B)$$

είναι F_σ -σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A + B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A = \mathbb{Z}$ και $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί). Όμως, το $A + B = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (\sqrt{2} - 1)^n$ είναι στο $A + B$ και $\alpha_n \rightarrow 0$. Έστω $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \alpha_{n_0} < \varepsilon$ και μετά $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $m\alpha_{n_0} \leq x < (m+1)\alpha_{n_0}$.

Τότε, $0 \leq x - m\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0} < \varepsilon$. Αν $x < 0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - m\alpha_{n_0}| < \varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = A + B$, έπεται ότι $\overline{A + B} = \mathbb{R}$.

1.32. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{k \in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N} \right\}$$

είναι σ -άλγεβρα στο X .

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(α) Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k,$$

άρα $X \in \mathcal{S}$.

(β) Αν $F = \bigcup_{k \in A} E_k \in \mathcal{S}$, όπου $A \subseteq \mathbb{N}$, τότε

$$X \setminus F = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) \setminus \left(\bigcup_{k \in A} E_k \right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N} \setminus A} E_k,$$

άρα $X \setminus F \in \mathcal{S}$.

(γ) Αν $F_n = \bigcup_{k \in A_n} E_k \in \mathcal{S}$, όπου $A_n \subseteq \mathbb{N}$, και αν θέσουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε έχουμε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k \in A_n} E_k \right) = \bigcup_{k \in A} E_k,$$

άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{S}$.

Από τα (α)–(γ) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{S}$ είναι σ -άλγεβρα.

1.33. Αποδείξτε ότι η σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές και διαστολές. Δηλαδή, αν $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα Borel σύνολο, τότε τα

$$t + B := \{t + x : x \in B\} \quad \text{και} \quad tB := \{tx : x \in B\}$$

είναι Borel σύνολα.

Υπόδειξη. Έστω $t \neq 0$. Θεωρούμε τις οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{R}$

$$\mathcal{A}_t = \{B \subseteq \mathbb{R} : t + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

και

$$\mathcal{C}_t = \{B \subseteq \mathbb{R} : tB \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Αποδεικνύουμε ότι οι $\mathcal{A}_t$ και $\mathcal{C}_t$ είναι σ -άλγεβρες. Για παράδειγμα, για την $\mathcal{A}_t$ παρατηρούμε ότι:

- $t + \mathbb{R} = \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}_t$.

- Αν $B \in \mathcal{A}_t$ τότε $t + B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, συνεπώς $t + (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus (t + B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{A}_t$.
- Αν $B_n \in \mathcal{A}_t$, $n \geq 1$, τότε $t + B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, συνεπώς $t + \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (t + B_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}_t$.

Εντελώς ανάλογα βλέπουμε ότι η C_t είναι σ -άλγεβρα. Θεωρούμε τώρα την οικογένεια

$$\Delta = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

των φραγμένων ανοικτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Αν $(a, b) \in \Delta$ τότε $t + (a, b) = (t + a, t + b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $t(a, b) = (ta, tb) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αν $t > 0$, ενώ $t(a, b) = (tb, ta) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ αν $t < 0$. Άρα, $\Delta \subseteq \mathcal{A}_t$ και $\Delta \subseteq C_t$. Αφού $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\Delta)$ έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}_t$ και $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq C_t$, δηλαδή το ζητούμενο.

Η περίπτωση $t = 0$ είναι πολύ απλούστερη: για κάθε $\emptyset \neq B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε $0 + B = B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $0B = \{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Η περίπτωση $B = \emptyset$ είναι ακόμα πιο απλή, αφού $0 + \emptyset = 0\emptyset = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1.34. Έστω X μη κενό σύνολο και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X . Η $\mathcal{E}$ λέγεται *στοιχειώδης οικογένεια* αν ικανοποιεί τα εξής: (α) $\emptyset \in \mathcal{E}$, (β) αν $E, F \in \mathcal{E}$ τότε $E \cap F \in \mathcal{E}$, και (γ) αν $E \in \mathcal{E}$ τότε το $E^c := X \setminus E$ είναι πεπερασμένη ένωση ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{E}$.

Αποδείξτε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι μια στοιχειώδης οικογένεια τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{E_1 \cup \dots \cup E_k : k \in \mathbb{N}, E_i \in \mathcal{E} \text{ ξένα ανά δύο}\}$$

των πεπερασμένων ξένων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{E}$ είναι άλγεβρα στο X .

Υπόδειξη. Θα δώσουμε την απόδειξη σε βήματα.

Βήμα 1. Αν $A, B \in \mathcal{E}$, τότε $A \setminus B \in \mathcal{A}$. Γράφουμε

$$A \setminus B = A \cap B^c = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k F_i \right)$$

με τα $F_i \in \mathcal{E}$ ξένα ανά δύο, και παρατηρούμε ότι

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k F_i \right) = \bigcup_{i=1}^k (A \cap F_i) \in \mathcal{A}$$

διότι τα $A \cap F_i$ ανήκουν στην $\mathcal{E}$ από το (β) του ορισμού, και είναι ξένα ανά δύο.

Βήμα 2. Αν $A, B \in \mathcal{E}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}$. Πράγματι, αν γράψουμε $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ τότε το πρώτο σύνολο $A \setminus B$ ανήκει στην $\mathcal{A}$ (από το Βήμα 1) άρα γράφεται ως

$$A \setminus B = \bigcup_{i=1}^s G_i$$

με τα $G_i \in \mathcal{E}$ ξένα ανά δύο. Από την άλλη πλευρά, $B \in \mathcal{E}$ και συνεπώς

$$A \cup B = \left(\bigcup_{i=1}^s G_i \right) \cup B$$

που είναι μια ξένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$, διότι επιπλέον $G_i \subseteq A \setminus B$.

Βήμα 3. Αν $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{E}$ τότε $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$ (για οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$). Το δείχνουμε με επαγωγή. Η περίπτωση $n = 2$ καλύφθηκε στο Βήμα 2. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο ισχυρισμός αληθεύει για $n - 1$

σύνολα. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = \bigcup_{j=1}^s G_j$$

με τα G_i ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$ (από την επαγωγική υπόθεση). Επομένως,

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^s (G_j \setminus A_n) \cup A_n.$$

Τώρα, με βάση το Βήμα 1, έχουμε $(G_j \setminus A_n) \in \mathcal{A}$ για κάθε j , συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$G_j \setminus A_n = \bigcup_{k=1}^{t_j} F_{j,k}$$

για $j = 1, 2, \dots, s$, όπου τα $F_{j,k}$ είναι ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$), άρα

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{j=1}^s \bigcup_{k=1}^{t_j} F_{j,k} \right) \cup A_n \in \mathcal{A}.$$

Βήμα 4. Αν $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{A}$, τότε $\bigcup_{i=1}^k E_i \in \mathcal{A}$. Πράγματι, για κάθε i γράφουμε

$$E_i = \bigcup_{j=1}^{t_i} F_{i,j}, \quad F_{i,j} \in \mathcal{E}.$$

Τότε

$$\bigcup_{i=1}^k E_i = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{t_i} F_{i,j}.$$

Η ένωση στο δεξί μέλος δεν είναι κατ' ανάγκην ξένη (η ξενότητα ισχύει μόνο μέσα σε κάθε σταθερό i), αλλά αυτό δεν χρειάζεται: είναι πεπερασμένη ένωση στοιχείων της $\mathcal{E}$, και συνεπώς ανήκει στην $\mathcal{A}$ από το Βήμα 3.

Βήμα 5. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}$. Αν γράψουμε $A = \bigcup_{i=1}^n E_i$, με τα E_i ξένα ανά δύο στοιχεία της $\mathcal{E}$, τότε $A^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$. Αφού η $\mathcal{E}$ είναι στοιχειώδης οικογένεια, έχουμε $E_i^c = \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{ij}$ (όπου τα $F_{ij} \in \mathcal{E}$, $1 \leq j \leq k_i$ είναι ξένα), οπότε

$$A^c = \bigcap_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} F_{i,j} = \bigcup \{ F_{1,j_1} \cap \dots \cap F_{n,j_n}, 1 \leq j_i \leq k_i, 1 \leq i \leq n \},$$

το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση τομών στοιχείων της $\mathcal{E}$, άρα στοιχείο της $\mathcal{A}$ (από το (β) του ορισμού της $\mathcal{E}$ και το Βήμα 3).

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι η $\mathcal{A}$ είναι (προφανώς) μη κενή, συμπεραίνουμε ότι είναι άλγεβρα.

1.35. Έστω $X \neq \emptyset$ και $(Y, \mathcal{B})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Έστω $f : X \rightarrow Y$ συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα.

(β) Έστω $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική Borel μετρήσιμη. Αποδείξτε ότι υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $h : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g = h \circ f$.

(γ) Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι η g είναι μη αρνητική.

Υπόδειξη: (α) Το κενό σύνολο ανήκει στην $\mathcal{A}$, διότι $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $A = f^{-1}(B)$ για κάποιο $B \in \mathcal{B}$. Αφού $B^c \in \mathcal{B}$ και $A^c = f^{-1}(B^c)$, έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$. Τέλος, αν (A_n) είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τότε μπορούμε να γράψουμε $A_n = f^{-1}(B_n)$ για κάποια ακολουθία (B_n) στην $\mathcal{B}$. Εφόσον $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$, βλέπουμε ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(β) Αρχίζουμε με την περίπτωση που η g είναι απλή, μετρήσιμη και μη αρνητική. Γράφουμε

$$g = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k},$$

όπου τα A_k ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι ξένα ανά δύο. Για κάθε k επιλέγουμε $B_k \in \mathcal{B}$ ώστε $A_k = f^{-1}(B_k)$. Τα B_k δεν είναι κατ' ανάγκην ξένα έξω από το $f(X)$, γι' αυτό θέτουμε

$$C_1 = B_1, \quad C_k = B_k \setminus \bigcup_{j < k} B_j \quad (k \geq 2).$$

Τότε τα C_k είναι ξένα ανά δύο και, επειδή τα A_k είναι ξένα ανά δύο, $f^{-1}(C_k) = A_k$. Άρα η απλή $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση

$$h = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{C_k}$$

ικανοποιεί $g = h \circ f$.

Έστω τώρα $g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty)$ μετρήσιμη. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $s_n \uparrow g$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε n υπάρχει μη αρνητική απλή $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη $t_n : Y \rightarrow [0, \infty)$ με $s_n = t_n \circ f$. Θέτουμε αρχικά

$$H(y) = \sup_{n \geq 1} t_n(y), \quad y \in Y.$$

Η $H : Y \rightarrow [0, \infty]$ είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και, για κάθε $x \in X$,

$$H(f(x)) = \sup_n t_n(f(x)) = \sup_n s_n(x) = g(x) < \infty.$$

Άρα το μετρήσιμο σύνολο $N = \{H = +\infty\}$ δεν συναντά το $f(X)$. Ορίζουμε

$$h = H \chi_{Y \setminus N}.$$

Τότε $h : Y \rightarrow [0, \infty)$ είναι πραγματική $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη, συμφωνεί με την H πάνω στο $f(X)$ και επομένως $g = h \circ f$.

(γ) Έστω $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Γράφουμε $g = g^+ - g^-$. Από το (β) βρίσκουμε μη αρνητικές πραγματικές $\mathcal{B}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις $h^+, h^- : Y \rightarrow [0, \infty)$ τέτοιες ώστε $g^+ = h^+ \circ f$ και $g^- = h^- \circ f$. Επομένως η

πραγματική $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση $h = h^+ - h^-$ ικανοποιεί

$$h(f(x)) = g^+(x) - g^-(x) = g(x)$$

για κάθε $x \in X$. Άρα $g = h \circ f$.

.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

Απλές ασκήσεις

2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $C \in \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_C : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$\mu_C(A) = \mu(A \cap C), \quad A \in \mathcal{A}$$

ορίζει ένα μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι $\mu_C(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$. Έστω τώρα $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Τα σύνολα $A_n \cap C$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και είναι επίσης ξένα ανά δύο. Αφού το μ είναι μέτρο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu_C\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap C\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap C)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_C(A_n). \end{aligned}$$

Άρα, το μ_C είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

2.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι

$$\mu(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$$

και ότι, αν επιπλέον $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, τότε

$$\limsup_n \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_n A_n).$$

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$. Η ακολουθία $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Επίσης, $B_n \subseteq A_n$, άρα $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ και έπεται ότι $\lim_n \mu(B_n) \leq \liminf_n \mu(A_n)$. Συνεπώς,

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(β) Έχουμε $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$. Η ακολουθία $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Από την υπόθεση, $\mu(C_1) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(C_n).$$

Επίσης, $A_n \subseteq C_n$, άρα $\mu(A_n) \leq \mu(C_n)$ και έπεται ότι $\limsup_n \mu(A_n) \leq \lim_n \mu(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right).$$

2.3. (λο Λήμμα Borel-Cantelli) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και (A_n) ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για τα οποία ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty.$$

Να δείξετε ότι $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$.

2.4. Έστω $A \neq \emptyset$ και $a : A \rightarrow [0, \infty]$ μια συνάρτηση. Θέτουμε

$$\sum_{x \in A} a(x) = \sup \left\{ \sum_{x \in F} a(x) : F \subseteq A, F \neq \emptyset \text{ και } F \text{ πεπερασμένο} \right\}.$$

Επιπλέον, θέτουμε $\sum_{x \in \emptyset} a(x) = 0$. Έστω $X \neq \emptyset$ και μια συνάρτηση $a : X \rightarrow [0, \infty]$. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Αν $\sum_{x \in X} a(x) < \infty$, τότε το σύνολο $J = \{x \in X : a(x) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Υπόδειξη:

$$J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in X : a(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

(β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mu_a : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ που ορίζεται από την

$$\mu_a(A) = \sum_{x \in A} a(x)$$

ορίζει ένα μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{P}(X))$. Η μ_a είναι η σημειακή κατανομή που επάγεται από την a και ο $a(x)$ είναι η μάζα του x .

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $J = \{x \in X : a(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$, όπου

$$J_n = \left\{ x \in X : a(x) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Κάθε J_n είναι πεπερασμένο σύνολο: αν κάποιος J_n είναι άπειρο, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F \subseteq J_n$ με N στοιχεία, και τότε

$$\frac{1}{n} N \leq \sum_{x \in F} a(x) \leq \sum_{x \in X} a(x).$$

Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ καταλήγουμε σε άτοπο. Τώρα, αφού κάθε J_n είναι πεπερασμένο, το $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Έχουμε θέσει $\sum_{x \in \emptyset} a(x) = 0$, συνεπώς $\mu_a(\emptyset) = 0$. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X . Θέτουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F του A υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $F \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_N$. Ορίζουμε $F_n = F \cap A_n$, $n = 1, \dots, N$. Τότε,

$$\sum_{x \in F} a(x) = \sum_{n=1}^N \sum_{x \in F_n} a(x) \leq \sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_a(A_n),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\sum_{x \in F_n} a(x) \leq \mu_a(A_n)$ που ισχύει αφού το F_n είναι (πεπερασμένο) υποσύνολο του A_n . Παίρνοντας supremum πάνω από όλα τα πεπερασμένα $F \subseteq A$ καταλήγουμε στην

$$\mu_a(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_a(A_n).$$

Αντίστροφα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leq \mu_a(A).$$

Για κάθε επιλογή πεπερασμένων $F_n \subseteq A_n$, $n = 1, \dots, N$, έχουμε ότι τα F_n είναι ξένα και το $F = F_1 \cup \dots \cup F_N$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του A . Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^N \sum_{x \in F_n} a(x) = \sum_{x \in F} a(x) \leq \mu_a(A).$$

Παίρνοντας διαδοχικά supremum ως προς τα πεπερασμένα $F_n \subseteq A_n$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^N \mu_a(A_n) \leq \mu_a(A).$$

2.5. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geq \mu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\mu_n(\emptyset) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \mu_n(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2.6. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$. Να δείξετε ότι:

(α) Η συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

(β) Αν επιπλέον κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, τότε και η συνάρτηση $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(A), \quad A \in \mathcal{A}$$

είναι επίσης μέτρο πιθανότητας.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\nu_n = \mu_1 + \dots + \mu_n$. Κάθε ν_n είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και $\nu_n(A) \leq \nu_{n+1}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A)$. Το όριο στο δεξιό μέλος υπάρχει, και ενδεχομένως είναι άπειρο, για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geq \nu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\nu_n(\emptyset) = \sum_{k=1}^n \mu_k(\emptyset) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \nu_n(A_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Άρα,

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(β) Το ν είναι μέτρο από το (α), αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $A \mapsto \frac{1}{2^n} \mu_n(A)$, $A \in \mathcal{A}$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Μένει να ελέγξουμε ότι $\nu(X) = 1$. Όμως, κάθε μ_n είναι μέτρο πιθανότητας, άρα $\mu_n(X) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έπεται ότι

$$\nu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

2.7. Περιγράψτε όλα τα μέτρα στο χώρο $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Υπόδειξη. Έστω μ ένα μέτρο στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $a_n = \mu(\{n\})$. Τότε, για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} \mu(\{n\}) = \sum_{n \in A} a_n.$$

Αντίστροφα, αν (a_n) είναι τυχούσα ακολουθία στο $[0, \infty]$, ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n.$$

Από την Άσκηση 2.4 η μ είναι μέτρο.

2.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \Delta B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \Delta B) = 0$, να δείξετε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Υπόδειξη. Αφού $B \setminus A \subseteq A \Delta B$ και $\mu(A \Delta B) = 0$, η πληρότητα του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ εξασφαλίζει ότι $B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $A \setminus B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα, συνεπώς $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ και $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$. Επειδή οι ενώσεις $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$ και $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ είναι ενώσεις ξένων μετρήσιμων συνόλων, έχουμε $\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B)$ και $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B)$. Άρα $\mu(A) = \mu(B)$.

2.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Αν $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0$, αποδείξτε ότι $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Υπόδειξη: Γράφοντας $A_n = (A_n \cap A) \cup (A_n \setminus A)$ και $A = (A_n \cap A) \cup (A \setminus A_n)$ βλέπουμε ότι

$$\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) \quad \text{και} \quad \mu(A) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A \setminus A_n)$$

και όλα αυτά τα μέτρα είναι πεπερασμένα, αφού $\mu(X) < \infty$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |\mu(A_n) - \mu(A)| &= |\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) - \mu(A_n \cap A) - \mu(A \setminus A_n)| \\ &= |\mu(A_n \setminus A) - \mu(A \setminus A_n)| \leq \mu(A_n \setminus A) + \mu(A \setminus A_n) \\ &= \mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

άρα $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

2.10. Δώστε παράδειγμα σ -πεπερασμένου μέτρου μ στο χώρο $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ ώστε $\mu((a, b)) = \infty$ για κάθε $a < b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών αριθμών και το μέτρο $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{q_n}$, όπου δ_x είναι το μέτρο Dirac στο $x \in \mathbb{R}$. Από την Άσκηση 2.6(α) το μ είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ το μέτρο $\mu(A)$ του A είναι ίσο με το πλήθος των ρητών που ανήκουν στο A . Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί στο ανοικτό διάστημα (a, b) , συνεπώς $\mu((a, b)) = \infty$.

2.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $J_E = \{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Αφού το μ είναι σ -πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\mu(E \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n \cap A_i).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_n = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι, για κάθε n και για κάθε k , το σύνολο

$$U_{n,k} = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 1/k\}$$

είναι πεπερασμένο. Πράγματι, αν το $U_{n,k}$ είχε τουλάχιστον N στοιχεία, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε διαφορετικά $i_1, \dots, i_N \in U_{n,k}$. Τα σύνολα $E \cap B_n \cap A_{i_j}$ είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται στο B_n , οπότε

$$\frac{N}{k} < \sum_{j=1}^N \mu(E \cap B_n \cap A_{i_j}) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^N (E \cap B_n \cap A_{i_j})\right) \leq \mu(B_n) < \infty.$$

Άρα το N είναι φραγμένο από το $k\mu(B_n)$ και το $U_{n,k}$ δεν μπορεί να είναι άπειρο. Έπεται ότι το $U_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ είναι αριθμήσιμο.

2.12. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα σε ένα σύνολο X και μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \Delta F) < \varepsilon,$$

όπου $A \Delta F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$.

Υπόδειξη. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \Delta F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ (αν $A \in \mathcal{F}$ τότε παίρνοντας $F = A$ έχουμε $A \Delta F = A \Delta A = \emptyset$). Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \Delta F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \Delta F^c = A \Delta F$, άρα $\mu(A^c \Delta F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n = 1, \dots, k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \Delta F_n) < \frac{\varepsilon}{2k}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \dots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Delta F \subseteq \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \cup (A_1 \Delta F_1) \cup \dots \cup (A_k \Delta F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Delta F\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^k \mu(A_n \Delta F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^k \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, έχουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \sigma(\mathcal{F})$. Όμως, από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έχουμε και τον εγκλεισμό $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$, άρα τελικά συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

2.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \mu(A_k) \geq \delta.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\mu(E_1) \leq \mu(X) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu(\limsup A_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) \geq \delta > 0.$$

Αφού $\mu(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \limsup A_n$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n . Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

2.14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται *ημιπεπερασμένο* αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $B \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu(B) < \infty$. Να δείξετε ότι αν $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος ημιπεπερασμένου μέτρου και $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$, τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$. Ορίζουμε

$$S = \{\mu(B) : B \in \mathcal{A}, B \subseteq A, 0 < \mu(B) < \infty\}$$

και θέτουμε $s = \sup S$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, το S είναι μη κενό. Συνεπώς, $s > 0$.

Υποθέτουμε ότι $s < \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \subseteq A$, $0 < \mu(B_n) < \infty$ ώστε $\mu(B_n) > (1 - \frac{1}{n})s$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=1}^N B_n \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^N B_n \subseteq A$ και

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(B_n) < \infty.$$

Άρα, από τον ορισμό του s ισχύει ότι $\mu\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq s$. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq A$. Από τη συνέχεια του μέτρου,

$$\mu(B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right) \leq s,$$

δηλαδή $\mu(B) < \infty$. Επίσης,

$$\mu(B) \geq \mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right)s$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(B) = s$. Θεωρούμε το $A \setminus B$: έχουμε $\mu(A \setminus B) = \infty$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $C \subseteq A \setminus B$ ώστε $0 < \mu(C) < \infty$. Όμως τότε, $B \cup C \subseteq A$ και $0 < \mu(B \cup C) < \infty$, οπότε, από τον ορισμό του s , θα έπρεπε $\mu(B \cup C) \leq s$, ενώ $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > s$. Άτοπο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = \infty$. Από τον ορισμό του s έπεται τώρα ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

2.15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) > n - 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k^c) = \sum_{k=1}^n (1 - \mu(A_k)) = n - \sum_{k=1}^n \mu(A_k) < n - (n - 1) = 1.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) > 0.$$

2.16. Κατασκευάστε μέτρο μ στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ τέτοιο ώστε

$$\{\mu(E) : E \subseteq \mathbb{N}\} = [0, 1].$$

Υπόδειξη: Θεωρούμε το μέτρο μ στον $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ με $\mu(\{n\}) = 1/2^n$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε, για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mu(E) = \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq \sum_{n \in E} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$, με ισότητα αριστερά αν $E = \emptyset$ και δεξιά αν $E = \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\{\mu(E) : E \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq [0, 1].$$

Έστω τώρα $x \in [0, 1]$. Θεωρούμε το δυαδικό ανάπτυγμα $x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(x)/2^n$ του x , όπου $\delta_n(x) \in \{0, 1\}$, και ορίζουμε $E_x = \{n \in \mathbb{N} : \delta_n(x) = 1\}$. Τότε,

$$\mu(E_x) = \sum_{n \in E_x} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \in E_x} \frac{\delta_n(x)}{2^n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta_n(x)}{2^n} = x$$

(για την προτελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι $\delta_n(x) = 0$ αν $n \notin E_x$). Αφού το $x \in [0, 1]$ ήταν τυχόν, αυτό αποδεικνύει ότι

$$\{\mu(E) : E \subseteq \mathbb{N}\} \supseteq [0, 1].$$

2.17. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ πεπερασμένα προσθετικό μέτρο. Αν το ν είναι επίσης αριθμήσιμα υποπροσθετικό, αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο.

Υπόδειξη: Από την πεπερασμένη προσθετικότητα του ν έπεται ότι είναι και μονότονο: αν $E, F \in \mathcal{A}$ και $E \subseteq F$ τότε $\nu(E) \leq \nu(F)$.

Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Έπεται ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) \leq \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$. Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει αφού το ν έχει υποτεθεί αριθμήσιμα υποπροσθετικό. Άρα, $\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$. Έπεται ότι το ν είναι μέτρο.

2.18. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (δηλαδή, $\mu(\mathbb{R}) < +\infty$). Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής (δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$).

Υπόδειξη: Αν $x < y$ τότε $(-\infty, x] \subseteq (-\infty, y]$, άρα

$$F(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, y]) = F(y)$$

λόγω της μονοτονίας του μ . Αυτό δείχνει ότι η F είναι αύξουσα.

Για να δείξουμε ότι η F είναι δεξιά συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να θεωρήσουμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $x_n \rightarrow x$ και να ελέγξουμε ότι $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Παρατηρούμε ότι: αν $A_n = (-\infty, x_n]$ τότε η (A_n) είναι φθίνουσα και

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n] = (-\infty, x].$$

Επίσης, $\mu(A_1) < \infty$ διότι το μ είναι πεπερασμένο μέτρο. Από τη συνέχεια του μέτρου (για φθίνουσες ακολουθίες συνόλων πεπερασμένου μέτρου)

$$F(x_n) = \mu(A_n) \longrightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

Δηλαδή, η F είναι δεξιά συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2.19. Δώστε παράδειγμα απεικόνισης $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, +\infty]$ που είναι πεπερασμένα προσθετικό μέτρο αλλά δεν είναι (αριθμήσιμα προσθετικό) μέτρο.

Υπόδειξη: Δοκιμάστε $\mu(A) = 0$ αν το A είναι πεπερασμένο και $\mu(A) = \infty$ αν το A είναι άπειρο σύνολο.

2.20. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A, B, C \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:

$$A \subseteq C, \quad B \subseteq C, \quad \mu(A) = \mu(C) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι $\mu(A \cap B) = \mu(B)$.

Υπόδειξη: Από τις $A \subseteq C$ και $\mu(A) = \mu(C) < \infty$ βλέπουμε ότι

$$\mu(A) = \mu(C) = \mu(A \cup (C \setminus A)) = \mu(A) + \mu(C \setminus A),$$

άρα $\mu(C \setminus A) = 0$. Τότε, από την $B \subseteq C$ έχουμε ότι $B \setminus A \subseteq C \setminus A$, άρα $\mu(B \setminus A) \leq \mu(C \setminus A) = 0$, δηλαδή $\mu(B \setminus A) = 0$. Τώρα,

$$\mu(A \cap B) \leq \mu(B) = \mu((A \cap B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B),$$

και έπεται ότι $\mu(A \cap B) = \mu(B)$.

2.21. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\mathcal{D}$ οικογένεια μέτρων στην $\mathcal{A}$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{D}$ τότε υπάρχει $\mu_3 \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu_3 \geq \max\{\mu_1, \mu_2\}$. Ορίζουμε

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Αποδείξτε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

Υπόδειξη: Από τον ορισμό του ν ελέγχουμε εύκολα ότι $\nu(\emptyset) = 0$ και ότι το ν είναι μονότονο: αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \nu(B)$ για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$, άρα

$$\nu(A) = \sup\{\mu(A) : \mu \in \mathcal{D}\} \leq \nu(B).$$

Έστω $(A_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $\mu \in \mathcal{D}$ έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n),$$

και παίρνοντας supremum ως προς $\mu \in \mathcal{D}$ βλέπουμε ότι

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sup\left\{\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) : \mu \in \mathcal{D}\right\} \leq \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) < \infty$. Τότε, λόγω μονοτονίας του ν , έχουμε $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$ και για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε $\mu_n \in \mathcal{D}$, $1 \leq n \leq N$, ώστε $\mu_n(A_n) > \nu(A_n) - \epsilon/N$. Από την υπόθεση της άσκησης έπεται ότι υπάρχει $\mu \in \mathcal{D}$ τέτοιο ώστε $\mu \geq \max\{\mu_1, \dots, \mu_N\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^N \nu(A_n) - \epsilon < \sum_{n=1}^N \mu_n(A_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right).$$

Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\sum_{n=1}^N \nu(A_n) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)$, και αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^\infty \nu(A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \nu(A_n) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right).$$

Αφού το ν είναι αριθμήσιμα προσθετικό, είναι μέτρο στην $\mathcal{A}$.

Δύσκολες ασκήσεις

2.22. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ορίζουμε $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Να δείξετε ότι:

- (α) Το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο μέτρο (το ημιπεπερασμένο μέρος του μ).
- (β) Αν το μ είναι ημιπεπερασμένο, τότε $\mu_0 = \mu$.
- (γ) Υπάρχει μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και ∞ , τέτοιο ώστε $\mu = \mu_0 + \nu$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι από τον ορισμό του μ_0 (και τη μονοτονία του μ) έχουμε $\mu_0(A) \leq \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, αν $F \in \mathcal{A}$ και $\mu(F) < \infty$ τότε $\mu_0(F) = \mu(F)$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$S(A) = \{F \in \mathcal{A} : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\}.$$

(α) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu_0(A) = \infty$. Από τον ορισμό του $\mu_0(A)$ υπάρχει ακολουθία (F_n) στην $\mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$, $\mu(F_n) < \infty$ και $\mu(F_n) \rightarrow \mu_0(A) = \infty$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < \mu(F_N)$. Τότε, για το $F := F_N$ έχουμε $F \subseteq A$, $F \in \mathcal{A}$ και $0 < \mu_0(F) = \mu(F) < \infty$. Με βάση τον ορισμό (της Άσκησης 2.14) το μ_0 είναι ημιπεπερασμένο.

Για να δείξουμε ότι το μ_0 είναι μέτρο, αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα. Έστω (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Αν $F \in S(A)$ τότε $F \cap A_n \in S(A_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τα $F \cap A_n$ είναι ξένα, συνεπώς

$$\mu(F) = \mu(F \cap A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Άρα,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \in S(A)\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_0(A) < \infty$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu_0(A_n) \leq \mu_0(A) < \infty$. Άρα, για τυχόν $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $F_n \in S(A_n)$ με $\mu_0(A_n) < \mu(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Για τυχόν $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το $B_N = \bigcup_{n=1}^N F_n$. Έχουμε $B_N \in \mathcal{A}$, $B_N \subseteq A$ και $\mu(B_N) = \sum_{n=1}^N \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^N \mu_0(A_n) < \infty$, άρα $B_N \in S(A)$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) \geq \mu(B_N) = \sum_{n=1}^N \mu(F_n) > \sum_{n=1}^N (\mu_0(A_n) - \varepsilon/2^n) > \sum_{n=1}^N \mu_0(A_n) - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε

$$\mu_0(A) \geq \sum_{n=1}^N \mu_0(A_n),$$

και αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ έχουμε το ζητούμενο.

(β) Έχουμε σημειώσει ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \infty$ τότε $\mu_0(A) = \mu(A)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \infty$ τότε $\mu_0(A) = \infty$. Όμως, αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, από την Άσκηση 2.14 γνωρίζουμε ότι για κάθε $n > 0$ υπάρχει $F_n \in \mathcal{A}$ με $F_n \subseteq A$ και $n < \mu(F_n) < \infty$. Συνεπώς,

$$\mu_0(A) = \sup\{\mu(F) : F \subseteq A \text{ και } \mu(F) < \infty\} = \infty = \mu(A).$$

(γ) Συμβολίζουμε με C την κλάση όλων των $A \in \mathcal{A}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: $\mu(A) < \infty$ ή $\mu(A) = \infty$ και για κάθε $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$ υπάρχει $F_1 \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ με $\nu(A) = 0$ αν $A \in C$ και $\nu(A) = \infty$ αλλιώς.

Αρκεί να ελέγξουμε την αριθμήσιμη προσθετικότητα του ν . Έστω (A_n) ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Ορίζουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A_m \notin C$. Από τον ορισμό της C είναι τότε φανερό ότι $A \notin C$, άρα

$$\nu(A) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $A_n \in C$. Θα δείξουμε ότι $A \in C$, οπότε έχουμε πάλι ισότητα, αυτή τη φορά την

$$\nu(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

Έστω $F \subseteq A$ με $\mu(F) = \infty$. Αφού $\mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(F \cap A_m) > 0$. Αν $\mu(F \cap A_m) < \infty$ τότε ορίζουμε $F_1 = F \cap A_m$ και έχουμε $F_1 \subseteq F$ και $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αν $\mu(F \cap A_m) = \infty$ τότε αφού $A_m \in C$ πάλι μπορούμε να βρούμε $F_1 \subseteq F \cap A_m \subseteq F$ με $0 < \mu(F_1) < \infty$. Αφού το $F \subseteq A$ ήταν τυχόν (με $\mu(F) = \infty$) έπεται ότι $A \in C$.

Μένει να ελέγξουμε ότι $\mu = \mu_0 + \nu$. Έστω $A \in \mathcal{A}$.

- (i) Αν $\mu(A) < \infty$ τότε έχουμε $\mu_0(A) = \mu(A)$ και επίσης $A \in C$ άρα $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.
- (ii) Αν $\mu(A) = \infty$ και $A \in C$ τότε όπως στην Άσκηση 2.14 βλέπουμε ότι $\mu_0(A) = \infty$, άρα πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.
- (iii) Τέλος, αν $A \notin C$ έχουμε $\mu(A) = \infty$ και $\nu(A) = \infty$, άρα και πάλι ισχύει ότι $\mu(A) = \mu_0(A) + \nu(A)$.

2.23. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου.

- (α) Για δύο σύνολα $A, B \in \mathcal{A}$ γράφουμε $A \sim B$ αν $\mu(A \Delta B) = 0$. Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{A}$.
- (β) Για $A, B \in \mathcal{A}$ ορίζουμε $\rho(A, B) = \mu(A \Delta B)$. Να δείξετε ότι η ρ είναι πλήρης μετρική στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{A}/\sim$.

Υπόδειξη. (α) Είναι φανερό ότι $A \sim A$ και ότι $A \sim B \implies B \sim A$ για κάθε $A, B \in \mathcal{A}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $A, B, C \in \mathcal{A}$, $A \sim B$ και $B \sim C$ τότε $A \sim C$.

Έχουμε $\mu(A \Delta B) = 0$ και $\mu(B \Delta C) = 0$. Παρατηρούμε ότι: $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$ και $C \setminus A \subseteq (C \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Άρα,

$$\begin{aligned} \mu(A \Delta C) &= \mu(A \setminus C) + \mu(C \setminus A) \\ &\leq \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus C)) + \mu((C \setminus B) \cup (B \setminus A)) \\ &\leq \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus C) + \mu(C \setminus B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A \Delta B) + \mu(B \Delta C) = 0. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $A \sim C$.

(β) Στο (α) δείξαμε ότι η ρ είναι ψευδομετρική στην $\mathcal{A}$, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\rho(A, B) = \mu(A \Delta B) \leq \mu(A \Delta C) + \mu(C \Delta B) = \rho(A, C) + \rho(C, B)$$

για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$. Αν λοιπόν ορίσουμε $\rho([A], [B]) = \rho(A, B)$ στο σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\mathcal{D}_\mu := \mathcal{A}/\sim$ τότε έχουμε μετρική.

Έστω $([A_n])_n$ μια βασική ακολουθία στον (D_μ, ρ) . Μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $([B_n])_n = ([A_{k_n}])_n$ της $([A_n])_n$ τέτοια ώστε $\rho(B_n, B_m) \leq \frac{1}{2^n}$ για κάθε $m \geq n$. Ορίζουμε $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m$. Τότε, $B_n \subseteq E_n$ και

$$E_n \setminus B_n = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B_m \setminus B_n) \subseteq \bigcup_{m=n+1}^{\infty} (B_m \setminus B_{m-1})$$

διότι $B_m \setminus B_n \subseteq \bigcup_{k=n+1}^m (B_k \setminus B_{k-1})$, άρα

$$\begin{aligned} \mu(E_n \Delta B_n) &= \mu(E_n \setminus B_n) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B_m \setminus B_{m-1}) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \mu(B_m \Delta B_{m-1}) \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $B = \limsup B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Παρατηρούμε ότι

$$\mu(B \setminus B_n) \leq \mu(E_n \setminus B_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(B_n \setminus B) &= \mu\left(B_n \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^c\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (B_n \cap E_m^c)\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_n \cap E_m^c) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(B_n \setminus E_m) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(B_n \setminus B_m) \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\rho(B_n, B) = \mu(B_n \setminus B) + \mu(B \setminus B_n) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n},$$

δηλαδή

$$\rho([A_{k_n}], [B]) = \rho([B_n], [B]) \rightarrow 0.$$

Αφού η $([A_n])_n$ είναι βασική ακολουθία και έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $[B]$, συμπεραίνουμε ότι $\rho([A_n], [B]) \rightarrow 0$. Άρα, ο $(\mathcal{D}_\mu, \rho)$ είναι πλήρης.

2.24. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $E \subseteq X$ λέγεται *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X : E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

- (α) Να δείξετε ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ -άλγεβρα. Αν $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ τότε ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται *κορεσμένος* χώρος μέτρου.
- (β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ -πεπερασμένο, τότε $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$.
- (γ) Ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty]$ με $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ για $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ για $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$: αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι $\mu(A) < \infty$). Ειδικότερα, η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι μη κενή.

Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \mathcal{A}$, άρα $E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \in \mathcal{A}$. Από τον ορισμό, $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Τέλος, έστω $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία συνόλων στην $\tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \cap A = \bigcup_{n=1}^\infty (E_n \cap A) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα και $E_n \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ -πεπερασμένο. Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε n . Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Τότε, $E \cap B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα,

$$E = \bigcup_{n=1}^\infty (E \cap B_n) \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

(γ) Δείξτε πρώτα ότι το $\tilde{\mu}$ είναι μέτρο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}})$. Έστω E ένα τοπικά μετρήσιμο σύνολο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$. Τότε, για κάθε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ με $\tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Από τον ορισμό του $\tilde{\mu}$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$ και $\tilde{\mu}(E \cap A) \leq \tilde{\mu}(A) < \infty$, δηλαδή $E \cap A \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Αφού κάθε τοπικά μετρήσιμο σύνολο του $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι στην $\tilde{\mathcal{A}}$, ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

2.25. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.
- (β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$.
- (γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) $\implies$ (γ): Για κάθε $E \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$G(E) = \{\mu(F) : F \in \mathcal{A}, F \subseteq E\}.$$

Δείχνουμε αρχικά ότι αν το $G(E)$ είναι άπειρο και $F \in \mathcal{A}$, $F \subseteq E$, τότε είτε το $G(F)$ ή το $G(E \setminus F)$ είναι άπειρο. Πράγματι, αν τα $G(F)$ και $G(E \setminus F)$ είναι πεπερασμένα, τότε για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq E$ έχουμε $B = (F \cap B) \cup ((E \setminus F) \cap B)$ και τα δύο αυτά σύνολα είναι ξένα, άρα $\mu(B) = \mu(F \cap B) + \mu((E \setminus F) \cap B) \in G(F) + G(E \setminus F)$. Το τελευταίο σύνολο είναι πεπερασμένο, και αφού το $B \subseteq E$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι το $G(E) \subseteq G(F) + G(E \setminus F)$ είναι πεπερασμένο σύνολο, το οποίο είναι άτοπο.

Εφαρμόζουμε τώρα αυτόν τον ισχυρισμό επαγωγικά. Από την υπόθεση έχουμε ότι το $G(X)$ είναι άπειρο, άρα μπορούμε να βρούμε $F_1 \in \mathcal{A}$, $F_1 \subseteq X$ με $0 < \mu(F_1) < \mu(X)$. Τώρα ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_1)$ και $G(X \setminus F_1)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_1)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_1 = F_1$ και αν το $G(F_1)$ είναι πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_1 = X \setminus F_1$. Σε κάθε περίπτωση, $0 < \mu(C_1) < \mu(X)$ και το $G(C_1)$ είναι άπειρο.

Τώρα βρίσκουμε $F_2 \in \mathcal{A}$, $F_2 \subseteq C_1$ με $0 < \mu(F_2) < \mu(C_1)$. Πάλι ξέρουμε ότι κάποιο από τα $G(F_2)$ και $G(C_1 \setminus F_2)$ είναι άπειρο. Αν το $G(F_2)$ είναι άπειρο τότε θέτουμε $C_2 = F_2$ και αν το $G(F_2)$ είναι

πεπερασμένο τότε θέτουμε $C_2 = C_1 \setminus F_2$. Σε κάθε περίπτωση, $C_2 \subseteq C_1$, $0 < \mu(C_2) < \mu(C_1) < \mu(X)$ και το $G(C_2)$ είναι άπειρο.

Επαγωγικά ορίζουμε φθίνουσα ακολουθία (C_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(C_{n+1}) < \mu(C_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν θεωρήσουμε τα σύνολα $A_n = C_n \setminus C_{n+1}$ τότε αυτά ανήκουν στην $\mathcal{A}$, είναι ξένα και $\mu(A_n) = \mu(C_n) - \mu(C_{n+1}) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) $\implies$ (β): Θεωρούμε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty,$$

συνεπώς $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$.

(β) $\implies$ (α): Ας υποθέσουμε ότι το $G(X) = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο. Από την υπόθεση, το σύνολο των θετικών στοιχείων του $G(X)$ είναι μη κενό, άρα έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο $\mu(B) = \varepsilon > 0$, για κάποιο $B \in \mathcal{A}$. Τότε, πάλι από την υπόθεση, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το $G(X)$ είναι άπειρο.

2.26. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ ώστε:

- (i) Αν $A \in \mathcal{F}$, τότε $\mu(A) > 0$.
- (ii) Τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι ξένα ανά δύο.
- (iii) Αν $F = \bigcup \mathcal{F}$, το $X \setminus F$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ -μέτρου.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \in \mathcal{E}$ με $\mu(A) > 0$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αρχικά ορίζουμε $\mathcal{E}_0 := \{A \in \mathcal{E} : \mu(A) > 0\}$ και επιλέγουμε $A_1 \in \mathcal{E}_0$ με $\mu(A_1) > \frac{1}{2} \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_0\}$. Ορίζουμε επίσης $\mathcal{E}_1 := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap A_1 = \emptyset\}$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν τα $A_1, \dots, A_n$ έχουν επιλεγεί και έχει οριστεί η οικογένεια $\mathcal{E}_n$, επιλέγουμε $A_{n+1} \in \mathcal{E}_n$ έτσι ώστε $\mu(A_{n+1}) > \frac{1}{2} \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_n\}$ και θέτουμε $\mathcal{E}_{n+1} := \{A \in \mathcal{E}_0 : A \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) = \emptyset\}$.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mathcal{E}_m = \emptyset$. Δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{E}$ με $A \cap (A_1 \cup \dots \cup A_m) = \emptyset$ ισχύει ότι $\mu(A) = 0$. Τότε, η $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_m\}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια, τα $A_1, \dots, A_m$ είναι ξένα, έχουν μέτρο $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, και το $X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_m)$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο της $\mathcal{E}$ γνήσια θετικού μ -μέτρου.

Έστω τώρα ότι $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε την $\mathcal{F} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Από τον τρόπο ορισμού τους, τα σύνολα A_n είναι ξένα και $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $\mu(X) < +\infty$ και τα A_n είναι ξένα, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$, άρα $\mu(A_n) \rightarrow 0$.

Έστω $A \in \mathcal{E}$ το οποίο περιέχεται στο $X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και έστω ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $\mu(A_n) \rightarrow 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_n) < \frac{1}{2}\mu(A)$, και έστω n_0 ο μικρότερος φυσικός με αυτή την ιδιότητα. Αφού $A \cap (A_1 \cup \dots \cup A_{n_0-1}) = \emptyset$, έχουμε $A \in \mathcal{E}_{n_0-1}$, άρα $\frac{1}{2}\mu(A) < \mu(A_{n_0})$ το οποίο είναι άτοπο.

2.27. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_k\}_{k=1}^\infty, \{B_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε $\mu(\limsup_k A_k) = 1$ και $\mu(\liminf_k B_k) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) = 1$.

Εξετάστε επίσης αν το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την υπόθεση $\mu(\liminf_k B_k) = 1$ με την $\mu(\limsup_k B_k) = 1$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \limsup_k A_k$ και $B = \liminf_k B_k$. Τότε, $\mu(X \setminus (A \cap B)) = 0$. Δείχνουμε ότι $A \cap B \subseteq \limsup_k (A_k \cap B_k)$, οπότε $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) \geq \mu(A \cap B) = 1$ και έπεται το ζητούμενο.

Έστω $x \in A \cap B$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x \in B_k$ για κάθε $k \geq k_0$. Επίσης, αφού $x \in \limsup_k A_k$, το σύνολο $J = \{k \in \mathbb{N} : x \in A_k\}$ είναι άπειρο, άρα και το σύνολο $J_1 = \{k \geq k_0 : x \in A_k\}$ είναι άπειρο. Για κάθε $k \in J_1$ έχουμε $x \in A_k \cap B_k$, και αφού το J_1 είναι άπειρο συμπεραίνουμε ότι $x \in \limsup_k (A_k \cap B_k)$.

Αν $\mu(\limsup_k A_k) = 1$ και $\mu(\limsup_k B_k) = 1$ δεν έπεται ότι $\mu(\limsup_k (A_k \cap B_k)) = 1$. Ένα παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε το $X = [0, 1]$ με το μέτρο Lebesgue και να θέσουμε

- $A_k = [0, 1/2]$ αν k άρτιος και $A_k = (1/2, 1]$ αν k περιττός,
- $B_k = [0, 1/2]$ αν k περιττός και $B_k = (1/2, 1]$ αν k άρτιος.

Παρατηρήστε ότι $A_k \cap B_k = \emptyset$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

2.28. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι:

- (α) Αν $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, $A \subseteq X$ και $A \cup N \in \mathcal{A}$, τότε $A \in \mathcal{A}$.
- (β) Αν $A \in \mathcal{A}$ και $A \Delta B \subseteq N$ για κάποιο $N \in \mathcal{A}$ με $\mu(N) = 0$, τότε $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \mu(B)$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $N \setminus A \subseteq N$ και $\mu(N) = 0$. Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, έπεται ότι $N \setminus A \in \mathcal{A}$. Τότε, $A = (A \cup N) \setminus (N \setminus A) \in \mathcal{A}$.

(β) Έχουμε $A \setminus B, B \setminus A \subseteq A \Delta B \subseteq N$ και $\mu(N) = 0$. Αφού ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου, έπεται ότι $A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$. Αφού $A \in \mathcal{A}$, έχουμε $A \cup B = A \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ και συνεπώς $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$. Τέλος,

$$\mu(A) \leq \mu(A \cup B) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \mu(B)$$

και όμοια $\mu(B) \leq \mu(A)$. Άρα, $\mu(A) = \mu(B)$.

2.29. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$. Έστω $(A_i)_{i \in I}$ οικογένεια ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$. Αποδείξτε ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_k = \{i \in I : \mu(A_i) \geq 1/k\}$. Αφού $\mu(A_i) > 0$ για κάθε $i \in I$, έχουμε $I = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ (πράγματι, για κάθε $i \in I$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_i) \geq 1/k$, και τότε $i \in I_k$). Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε I_k είναι πεπερασμένο. Πράγματι, αν το I_k είχε αυθαίρετα πολλά στοιχεία, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θα μπορούσαμε να επιλέξουμε διαφορετικά $i_1, \dots, i_m \in I_k$. Επειδή τα A_i είναι ξένα,

$$\mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^m \mu(A_{i_j}) \geq \frac{m}{k}.$$

Επιλέγοντας $m > k\mu(X)$ παίρνουμε άτοπο. Άρα όλα τα I_k είναι πεπερασμένα και έπεται ότι το I είναι το πολύ άπειρο αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων.

2.30. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου τέτοιος ώστε για κάθε $\emptyset \neq E \in \mathcal{A}$ ισχύει $0 < \mu(E) < \infty$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}, x \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σύνολο $A_x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_x$ και $\mu(A_x) = f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $x, y \in X$ τότε είτε $A_x = A_y$ ή $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$. Από τον ορισμό της f , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $x \in A_n$ και $\mu(A_n) < f(x) + \frac{1}{n}$. Αν θέσουμε $A_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, τότε $A_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x$ και $f(x) \leq \mu(A_x) \leq \mu(A_n) < f(x) + 1/n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(A_x) = f(x)$. Έστω ότι υπάρχει $B_x \neq A_x$ στην $\mathcal{A}$ με $x \in B_x$ και $\mu(B_x) = f(x)$. Παρατηρούμε ότι $A_x \cap B_x \in \mathcal{A}$, $x \in A_x \cap B_x$ και $A_x \cap B_x \subseteq A_x$, άρα

$$f(x) \leq \mu(A_x \cap B_x) \leq \mu(A_x) = f(x).$$

Άρα, $\mu(A_x \cap B_x) = \mu(A_x)$ και (αφού $\mu(A_x) < \infty$) έπεται ότι $\mu(A_x \setminus B_x) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap B_x) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus B_x = \emptyset$ από την υπόθεση. Όμοια, $B_x \setminus A_x = \emptyset$, άρα $A_x = B_x$ το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $x \neq y$ στο X . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $x \in A_y$ τότε $x \in A_x \cap A_y$. Έχουμε $f(x) \leq \mu(A_x \cap A_y) \leq \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \cap A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \setminus A_y = \emptyset$ από την υπόθεση, άρα $A_x \subseteq A_y$. Αν $y \in A_x$, τότε το A_x είναι μετρήσιμο σύνολο που περιέχει το y και, αφού $A_x \subseteq A_y$, έχουμε

$$f(y) \leq \mu(A_x) \leq \mu(A_y) = f(y),$$

οπότε η μοναδικότητα του ελαχιστοποιητή για το y δίνει $A_x = A_y$. Αν, αντίθετα, $y \notin A_x$, τότε $y \in A_y \setminus A_x$ και

$$f(y) \leq \mu(A_y \setminus A_x) = \mu(A_y) - \mu(A_x) < \mu(A_y) = f(y),$$

άτοπο. Συνεπώς και πάλι $A_x = A_y$.

- Αν $x \notin A_y$ τότε $x \in A_x \setminus A_y$. Έχουμε $f(x) \leq \mu(A_x \setminus A_y) \leq \mu(A_x) = f(x)$. Δηλαδή, $\mu(A_x \setminus A_y) = \mu(A_x)$. Έπεται ότι $\mu(A_x \cap A_y) = \mu(A_x) - \mu(A_x \setminus A_y) = 0$. Όμως τότε $A_x \cap A_y = \emptyset$ από την υπόθεση.

2.31. Έστω μ ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ με την ιδιότητα ότι $\mu(I) < \infty$ για κάθε φραγμένο διάστημα $I \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]) & , \text{ αν } x > 0 \\ 0 & , \text{ αν } x = 0 \\ -\mu((x, 0]) & , \text{ αν } x < 0. \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η F είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά.

Υπόδειξη. Έστω $x < y$ στο $\mathbb{R}$. Αν $0 < x < y$ τότε $(0, x] \subset (0, y]$, άρα $F(x) = \mu((0, x]) \leq \mu((0, y]) = F(y)$. Αν $x < y < 0$ τότε $(x, 0] \supset (y, 0]$, άρα $\mu((x, 0]) \geq \mu((y, 0])$ και έπεται ότι $F(x) = -\mu((x, 0]) \leq -\mu((y, 0]) = F(y)$. Τέλος, αν $x \leq 0 \leq y$, τότε $F(x) \leq 0 \leq F(y)$ (με την προφανή ερμηνεία όταν $x = 0$ ή $y = 0$). Από τα παραπάνω έπεται ότι η F είναι αύξουσα.

(β) Αφού η F είναι αύξουσα, για να ελέγξουμε τη συνέχεια από δεξιά στο $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε φθίνουσα ακολουθία $x_n \rightarrow x$ ισχύει $F(x_n) \rightarrow F(x)$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι $x_n < 0$ αν $x < 0$ και $x_n \leq x + 1$ αν $x \geq 0$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Αν $x < 0$ τότε $(x_n, 0] \subseteq (x, 0]$, η ακολουθία $((x_n, 0])_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n, 0] = (x, 0]$ λόγω της $x_n \rightarrow x$. Από τη συνέχεια του μέτρου, $F(x_n) = -\mu((x_n, 0]) \rightarrow -\mu((x, 0]) = F(x)$.
- Αν $x > 0$ τότε $(0, x] \subseteq (0, x_n]$, η ακολουθία $((0, x_n])_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, x_n] = (0, x]$ λόγω της $x_n \rightarrow x$. Επίσης, $\mu((0, x_n]) \leq \mu((0, x + 1])$ για κάθε n και $\mu((0, x + 1]) < \infty$ από την υπόθεση. Από τη συνέχεια του μέτρου, $F(x_n) = \mu((0, x_n]) \rightarrow \mu((0, x]) = F(x)$.

- Αν $x = 0$, τότε η ακολουθία $((0, x_n])_{n=1}^{\infty}$ είναι πάλι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, x_n] = \emptyset$. Όπως στη δεύτερη περίπτωση, $F(x_n) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0 = F(0)$.

Έπεται ότι η F είναι συνεχής από δεξιά.

2.32. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $0 < \mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \leq \left(\prod_{k=1}^n \mu(A_k)\right)^{1/n}$$

και

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \geq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j)$$

για κάθε $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) > n - 1$. Αποδείξτε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $k = 1, \dots, n$ έχουμε $\bigcap_{k=1}^n A_k \subseteq A_k$, άρα $\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \leq \mu(A_k)$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$\left[\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)\right]^n \leq \prod_{k=1}^n \mu(A_k),$$

άρα

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) \leq \left(\prod_{k=1}^n \mu(A_k)\right)^{1/n}.$$

Αποδεικνύουμε τη δεύτερη ανισότητα με επαγωγή ως προς n . Για $n = 2$ θεωρούμε $A, B \in \mathcal{A}$ και ζητάμε να ισχύει η ανισότητα

$$\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

Όμως,

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = [\mu(A) + \mu(B \setminus A)] + \mu(A \cap B) = \mu(A) + [\mu(B \setminus A) + \mu(B \cap A)] = \mu(A) + \mu(B),$$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Για το επαγωγικό βήμα, έστω $A_1, \dots, A_n, A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση για 2 και n σύνολα και την υποπροσθετικότητα του μέτρου,

γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \\
 &\geq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \\
 &\geq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu(A_i \cap A_j) - \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}) \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \mu(A_i \cap A_j).
 \end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k^c) = \sum_{k=1}^n (1 - \mu(A_k)) = n - \sum_{k=1}^n \mu(A_k) < n - (n-1) = 1.$$

Συνεπώς,

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k^c\right) > 0.$$

2.33. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ -πεπερασμένο και $\mu(X) = \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $r < \mu(A) < \infty$.

Υπόδειξη. Το μ είναι σ -πεπερασμένο, άρα υπάρχει ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Αν ορίσουμε $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ τότε η $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, έχουμε $\mu(B_n) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$ και $A_n \subseteq B_n$ για κάθε n , οπότε

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Από τα παραπάνω και από τη συνέχεια του μέτρου έχουμε

$$\infty = \mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Έστω τώρα $r > 0$. Από την προηγούμενη ισότητα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $r < \mu(B_m) < \infty$. Θέτοντας $A = B_m$ έχουμε το ζητούμενο.

2.34. Έστω μ ένα μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $0 < \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $n = \mu(\mathbb{R}) \in \mathbb{N}$ και

$$F(x) = \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής, παίρνει τιμές στο $\{0, 1, \dots, n\}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = n.$$

Για $s = 1, \dots, n$ ορίζουμε

$$x_s = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}.$$

Τότε $-\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < \infty$. Για να δικαιολογήσουμε προσεκτικά την τιμή στο x_s , παρατηρούμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_m < x_s + 1/m$ με $F(y_m) \geq s$ διαφορετικά το $x_s + 1/m$ θα ήταν κάτω φράγμα του συνόλου $\{x : F(x) \geq s\}$ μεγαλύτερο από το x_s . Από τη μονοτονία έπεται $F(x_s + 1/m) \geq s$ και, αφήνοντας $m \rightarrow \infty$, η δεξιά συνέχεια δίνει $F(x_s) \geq s$. Από την άλλη, αν $x < x_s$, τότε αναγκαστικά $F(x) < s$ και, επειδή η F παίρνει ακέραιες τιμές, $F(x) \leq s - 1$. Άρα, για κάθε $s = 1, \dots, n$ και $x \in \mathbb{R}$,

$$x_s \leq x \iff F(x) \geq s.$$

Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \#\{s \in \{1, \dots, n\} : x_s \leq x\} = \sum_{s=1}^n \delta_{x_s}((-\infty, x]).$$

Άρα τα δύο πεπερασμένα μέτρα μ και $\sum_{s=1}^n \delta_{x_s}$ συμφωνούν σε όλα τα ημιάνοιχτα διαστήματα $(-\infty, x]$, τα οποία παράγουν την $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Από το θεώρημα μοναδικότητας,

$$\mu = \sum_{s=1}^n \delta_{x_s}.$$

2.35. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \Delta F) < \varepsilon$, όπου $A \Delta F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F .

Υπόδειξη: Ορίζουμε

$$\mathcal{D} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ με } \mu(A \Delta F) < \varepsilon\}.$$

Προφανώς $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{D}$ είναι σ -άλγεβρα.

Αν $A \in \mathcal{D}$, διαλέγουμε για δοσμένο $\varepsilon > 0$ ένα $F \in \mathcal{F}$ με $\mu(A \Delta F) < \varepsilon$. Επειδή

$$A^c \Delta F^c = A \Delta F$$

και $F^c \in \mathcal{F}$, έχουμε $A^c \in \mathcal{D}$.

Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{D}$. Επιλέγουμε $F, G \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \Delta F) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu(B \Delta G) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού $F \cup G \in \mathcal{F}$ και

$$(A \cup B) \Delta (F \cup G) \subseteq (A \Delta F) \cup (B \Delta G),$$

παίρνουμε $\mu((A \cup B) \Delta (F \cup G)) < \varepsilon$. Άρα $\mathcal{D}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Τέλος, έστω $A_n \in \mathcal{D}$ και

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad C_k = \bigcup_{n=1}^k A_n.$$

Από το προηγούμενο βήμα $C_k \in \mathcal{D}$ για κάθε k . Επίσης $C_k \uparrow A$ και, επειδή το μ είναι πεπερασμένο,

$$\mu(A \setminus C_k) = \mu(A) - \mu(C_k) \longrightarrow 0.$$

Για δοσμένο $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε k ώστε $\mu(A \setminus C_k) < \varepsilon/2$ και κατόπιν $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(C_k \Delta F) < \varepsilon/2$. Τότε

$$A \Delta F \subseteq (A \setminus C_k) \cup (C_k \Delta F),$$

οπότε $\mu(A \Delta F) < \varepsilon$. Συνεπώς $A \in \mathcal{D}$.

Άρα η $\mathcal{D}$ είναι σ -άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}$. Επομένως $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D}$, ενώ ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει από τον ορισμό της $\mathcal{D}$. Άρα $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{F})$, όπως ζητείται.

2.36. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο μη κενό σύνολο X και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Θεωρούμε δύο μέτρα μ και ν στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ τέτοια ώστε $\mu(X) = \nu(X) < \infty$ και $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$. Είναι απαραίτητα σωστό ότι $\mu = \nu$;

Υπόδειξη: Δίνουμε αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε το σύνολο $X = \{a, b, c, d\}$, την σ -άλγεβρα $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ και την οικογένεια

$$\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$$

υποσυνόλων του X . Μπορείτε να ελέγξετε ότι $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Θεωρούμε τώρα τα μέτρα μ και ν στην $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ που ορίζονται από τις

$$\mu(\{a\}) = \mu(\{c\}) = 1, \quad \mu(\{b\}) = \mu(\{d\}) = 0$$

και

$$\nu(\{a\}) = \nu(\{c\}) = 0, \quad \nu(\{b\}) = \nu(\{d\}) = 1$$

Παρατηρούμε ότι $\mu(X) = \nu(X) = 2 < \infty$ και $\mu(E) = \nu(E)$ για κάθε $E \in \mathcal{E}$, αφού

$$\mu(\{a, b\}) = \nu(\{a, b\}) = 1 \quad \text{και} \quad \mu(\{b, c\}) = \nu(\{b, c\}) = 1.$$

Όμως, $\mu(\{a\}) = 1 \neq 0 = \nu(\{a\})$, άρα δεν ισχύει ότι $\mu = \nu$.

2.37. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Υπόδειξη: Παρατηρούμε ότι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n = A_N \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1}) \right).$$

Πράγματι, αν $x \in \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ τότε είτε $x \in A_N$ ή υπάρχει ο ελάχιστος $n > N$ ώστε $x \in A_n$ και τότε $x \in A_n \setminus A_{n-1}$. Αυτό δείχνει τον εγκλεισμό $\subseteq$, ενώ ο αντίστροφος εγκλεισμός ελέγχεται εύκολα. Έπεται ότι $\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \mu(A_N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1})$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{n+1} \setminus A_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $N \geq M$,

$$\mu(A_N) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως, για κάθε $N \geq M$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n\right) \leq \mu(A_N) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) < \varepsilon.$$

Επειδή $\limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ για κάθε N , παίρνουμε $\mu(\limsup A_n) \leq \varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\mu(\limsup A_n) = 0$.

2.38. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι, για κάθε $A, B, C \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι

$$\mu(A \Delta B) \leq \mu(A \Delta C) + \mu(C \Delta B).$$

[Η συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A και B είναι το σύνολο $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.]

Υπόδειξη: Αρκεί να ελέγξουμε τον εγκλεισμό $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$. Κατόπιν, το συμπέρασμα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα του μέτρου.

Για την απόδειξη του εγκλεισμού, θεωρούμε $x \in A \Delta B$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν $x \in A \setminus B$ τότε (α) αν $x \notin C$ έχουμε ότι $x \in A \setminus C \subseteq A \Delta C$, και (β) αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus B \subseteq C \Delta B$. Σε κάθε περίπτωση $x \in (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$.
2. Αν $x \in B \setminus A$ τότε (α) αν $x \notin C$ έχουμε ότι $x \in B \setminus C \subseteq C \Delta B$, και (β) αν $x \in C$ έχουμε ότι $x \in C \setminus A \subseteq A \Delta C$. Σε κάθε περίπτωση $x \in (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$.

2.39. Έστω μ και ν δύο μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) + \nu(X \setminus A) \leq \varepsilon$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(B) = \nu(X \setminus B) = 0$.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση, για κάθε $n \geq 1$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(A_n) + \nu(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ειδικότερα,

$$\mu(A_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ορίζουμε $B = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε ότι $B \subseteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, άρα

$$\mu(B) \leq \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0,$$

άρα $\mu(B) = 0$. Επίσης, από τον τύπο του De Morgan,

$$X \setminus B = X \setminus \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} (X \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k).$$

Θέτουμε $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} (X \setminus A_k)$. Τότε $C_n \uparrow X \setminus B$ και, για κάθε n ,

$$C_n \subseteq X \setminus A_n,$$

οπότε

$$\nu(C_n) \leq \nu(X \setminus A_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω παίρνουμε

$$\nu(X \setminus B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(C_n) = 0.$$

Άρα $\nu(X \setminus B) = 0$.

2.40. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mu(A_k \cap A_m).$$

Υπόδειξη: Με επαγωγή ως προς n . Αν $n = 2$ τότε παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(A_1) + \mu(A_2) &= (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2)) + (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)) \\ &= (\mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1)) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2), \end{aligned}$$

άρα το ζητούμενο ισχύει ως ισότητα (χρησιμοποιήσαμε τη διάσπαση του $A_1 \cup A_2$ στα ξένα ανά δύο σύνολα $A_1 \cap A_2$, $A_1 \setminus A_2$ και $A_2 \setminus A_1$).

Για το επαγωγικό βήμα, εφαρμόζοντας το βήμα $n = 2$ για τα $\bigcup_{k=1}^n A_k$ και A_{n+1} , γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cup A_{n+1}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right), \end{aligned}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}).$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση για τα $A_1, \dots, A_n$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\right) \\ &\leq \sum_{1 \leq k < m \leq n} \mu(A_k \cap A_m) + \sum_{k=1}^n \mu(A_k \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{1 \leq k < m \leq n+1} \mu(A_k \cap A_m). \end{aligned}$$

2.41. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε $\mu(\liminf_n A_n) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ της $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_{k_n}\right) > 0 \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Υπόδειξη: Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^\infty A_k$. Τότε, η $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty A_k\right) = \mu\left(\liminf_n A_n\right) > 0,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(B_m) > 0$. Αν ορίσουμε $k_n = m + n - 1$, τότε

$$\bigcap_{n=1}^N A_{k_n} = \bigcap_{k=m}^{m+N-1} A_k \supseteq \bigcap_{k=m}^\infty A_k = B_m,$$

άρα

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^N A_{k_n}\right) \geq \mu(B_m) > 0$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

2.42. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν:

(i) $\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και

(ii) για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Αν $\mu(X) < \infty$, τότε η (i) είναι άμεση, αφού το ίδιο το X ανήκει στο σύνολο ως προς το οποίο παίρνουμε το supremum. Για τη (ii), από την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε

$$0 \leq f_n(x) \leq \|f_n\|_\infty \quad (x \in X),$$

οπότε

$$0 \leq \int_X f_n d\mu \leq \|f_n\|_\infty \mu(X) \longrightarrow 0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (ι) και (ιι). Αν $\mu(X) = \infty$, η (ι) συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $A_n \in \mathcal{A}$ με

$$n < \mu(A_n) < \infty.$$

Θέτουμε

$$f_n = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}.$$

Τότε οι f_n είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες και

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\mu(A_n)} < \frac{1}{n},$$

άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα. Από την άλλη,

$$\int_X f_n d\mu = 1$$

για κάθε n , σε αντίφαση με την (ιι). Επομένως $\mu(X) < \infty$.

2.43. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με την ιδιότητα

$$\{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\} = [0, 1).$$

Υπόδειξη: Έστω $B = \{\mu(E) : E \in \mathcal{A}\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mu(X) \in [0, 1)$ άρα $\mu(X) < 1$. Από τη μονοτονία του μ έχουμε $\mu(E) \leq \mu(X)$ για κάθε $E \in \mathcal{A}$, άρα ο $\mu(X)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα (μάλιστα είναι το μέγιστο στοιχείο) του B . Έπεται ότι

$$1 = \sup([0, 1)) = \sup(B) = \mu(X),$$

το οποίο είναι άτοπο.

2.44. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$ λέγεται *άτομο* αν $\mu(A) > 0$ και για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ ισχύει ότι $\mu(B) = 0$ ή $\mu(A \setminus B) = 0$.

- (α) Αποδείξτε ότι αν το $A \in \mathcal{A}$ είναι άτομο τότε κάθε σύνολο $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$ είναι επίσης άτομο.
- (β) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το μ είναι σ -πεπερασμένο, αποδείξτε ότι υπάρχει $X_0 \subseteq X$ τέτοιο ώστε το X_0 να είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και το $X \setminus X_0$ να μην περιέχει άτομα.

Υπόδειξη. (α) Έστω $A \in \mathcal{A}$ άτομο και $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$. Αν υποθέσουμε ότι το B δεν είναι άτομο, τότε υπάρχει $C \in \mathcal{A}$ με $C \subseteq B$ ώστε $\mu(C) > 0$ και $\mu(B \setminus C) > 0$. Όμως τότε, $C \subseteq A$, $\mu(C) > 0$ και $A \setminus C \supseteq B \setminus C$ άρα $\mu(A \setminus C) > 0$. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο: αφού το A είναι άτομο θα έπρεπε να έχουμε $\mu(C) = 0$ ή $\mu(A \setminus C) = 0$.

(β) Παρατηρούμε αρχικά ότι αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για πεπερασμένα μέτρα. Πράγματι, έστω $M := (X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου. Γράφουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, όπου τα $B_n \in \mathcal{A}$ είναι ξένα ανά δύο και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τις σ -άλγεβρες $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{A} : A \subseteq B_n\}$. Οι χώροι $M_n := (B_n, \mathcal{A}_n, \mu|_{\mathcal{A}_n})$ είναι χώροι πεπερασμένου μέτρου. Αν υποθέσουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για χώρους πεπερασμένου μέτρου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $X_n \subseteq B_n$ που είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων του M_n ώστε $B_n = X_n \cup Y_n$ και το Y_n δεν περιέχει άτομα του M_n . Παρατηρούμε ότι κάθε άτομο $A \subseteq B_n$ του M_n είναι και άτομο του M : πράγματι, κάθε μετρήσιμο $C \subseteq A$ ανήκει στην $\mathcal{A}_n$, οπότε από την ατομικότητα στον M_n έχουμε $\mu(C) = 0$ ή $\mu(A \setminus C) = 0$. Αντίστροφα, κάθε άτομο του M που περιέχεται στο B_n είναι προφανώς άτομο του M_n .

Ορίζουμε $X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Από τα προηγούμενα, παίρνοντας υπόψη και το γεγονός ότι τα B_n είναι ξένα, το X_0 είναι αριθμήσιμη ένωση ατόμων του M . Μένει να δείξουμε ότι το $X \setminus X_0$ δεν περιέχει άτομα. Έστω $A \subseteq X \setminus X_0$ άτομο. Γράφουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$. Αφού $\mu(A) > 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A \cap B_m) > 0$. Αφού $A \cap B_m \subseteq A$ και $\mu(A \cap B_m) > 0$, από το (α) έχουμε ότι το $A \cap B_m$ είναι άτομο στον M . Επειδή επιπλέον $A \cap B_m \subseteq B_m$, από την προηγούμενη παρατήρηση είναι άτομο και στον M_m . Όμως,

$$A \cap B_m \subseteq (X \setminus X_0) \cap B_m \subseteq (X \setminus X_m) \cap B_m = B_m \setminus X_m = Y_m,$$

και έχουμε άτομο διότι το Y_m δεν περιέχει άτομα του M_m .

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι χώρος πεπερασμένου μέτρου και έστω $\mathcal{E}$ η οικογένεια των ατόμων του. Αν $\mathcal{E} = \emptyset$, παίρνουμε $X_0 = \emptyset$ και τελειώσαμε. Διαφορετικά, κατασκευάζουμε αναδρομικά ξένα ανά δύο $A_n \in \mathcal{E}$. Αφού έχουν επιλεγεί $A_1, \dots, A_{n-1}$, θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{E}_n = \{A \in \mathcal{E} : A \cap A_j = \emptyset \text{ για } j < n\}.$$

Αν $\mathcal{E}_n = \emptyset$, σταματάμε. Διαφορετικά θέτουμε

$$s_n = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{E}_n\}.$$

Επειδή κάθε άτομο έχει θετικό μέτρο, $s_n > 0$, και επειδή $\mu(A) \leq \mu(X) < \infty$ για κάθε $A \in \mathcal{E}_n$, έχουμε $s_n < \infty$. Επιλέγουμε λοιπόν $A_n \in \mathcal{E}_n$ με $\mu(A_n) > s_n/2$. Επειδή τα A_n είναι ξένα ανά δύο και $\mu(X) < \infty$, έχουμε

$$\sum_n \mu(A_n) \leq \mu(X) < \infty,$$

άρα $\mu(A_n) \rightarrow 0$ και συνεπώς $s_n \rightarrow 0$ (αν η διαδικασία δεν σταματήσει νωρίτερα). Θέτουμε $X_0 = \bigcup_n A_n$, με την προφανή ερμηνεία αν η διαδικασία είναι πεπερασμένη.

Αν υπήρχε άτομο $A \subseteq X \setminus X_0$, τότε A θα ήταν ξένο από κάθε A_n και $\mu(A) > 0$. Στην άπειρη περίπτωση αυτό θα έδινε $s_n \geq \mu(A) > 0$ για κάθε n , αντίφαση με $s_n \rightarrow 0$, ενώ στην πεπερασμένη περίπτωση θα αντέφασκε στο γεγονός ότι κατά τον τερματισμό η αντίστοιχη οικογένεια $\mathcal{E}_n$ είναι κενή. Άρα το $X \setminus X_0$ δεν περιέχει άτομα και το X_0 είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων, όπως ζητείται.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

Απλές ασκήσεις

3.1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ με $A^\circ \neq \emptyset$. Να δείξετε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A . Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geq \lambda^*(I) = \nu(I) > 0.$$

3.2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Δίνονται οι συναρτήσεις $\phi_j : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$, $j = 1, 2, 3, 4$ με

$$\phi_1(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ 1, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases}, \quad \phi_2(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A = \emptyset \\ \infty, & \text{αν } A \neq \emptyset \end{cases},$$

$$\phi_3(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ 1, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases} \quad \text{και} \quad \phi_4(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα και να βρείτε τις $\mathcal{M}_{\phi_j}$.

Υπόδειξη. Το γεγονός ότι οι ϕ_j είναι εξωτερικά μέτρα ελέγχεται εύκολα για κάθε $j = 1, 2, 3, 4$.

Έχουμε $\mathcal{M}_{\phi_1} = \{\emptyset, X\}$. Πράγματι, αν A είναι ένα γνήσιο μη κενό υποσύνολο του X τότε υπάρχουν $x \in A$ και $y \in X \setminus A$, οπότε για το σύνολο $B = \{x, y\}$ έχουμε $B \cap A = \{x\}$ και $B \setminus A = \{y\}$, άρα

$$1 = \phi_1(B) < 2 = \phi_1(B \cap A) + \phi_1(B \setminus A).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{M}_{\phi_2} = \mathcal{P}(X)$. Για κάθε $A, B \neq \emptyset$ έχουμε είτε $B \cap A \neq \emptyset$ είτε $B \setminus A \neq \emptyset$, άρα

$$\phi_2(B) = \infty = \phi_2(B \cap A) + \phi_2(B \setminus A),$$

ενώ αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε η παραπάνω ισότητα ισχύει και πάλι.

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι $\mathcal{M}_{\phi_4} = \mathcal{P}(X)$. Αν το B είναι υπεραριθμήσιμο τότε τουλάχιστον ένα από τα $B \cap A$ και $B \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα

$$\phi_4(B) = \infty = \phi_4(B \cap A) + \phi_4(B \setminus A),$$

ενώ αν το B είναι αριθμήσιμο τότε τα $B \cap A$ και $B \setminus A$ είναι αριθμήσιμα, οπότε η παραπάνω ισότητα

ισχύει και πάλι.

Τέλος, $\mathcal{M}_{\phi_3} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } X \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε: αν $B \subseteq X$ αριθμήσιμο έχουμε $\phi_3(B) = 0 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$ διότι τα $B \cap A, B \setminus A$ είναι επίσης αριθμήσιμα, ενώ αν το B είναι υπεραριθμήσιμο τότε το $B \cap A$ είναι αριθμήσιμο και το $B \setminus A$ υπεραριθμήσιμο, συνεπώς $\phi_3(B) = 1 = 0 + 1 = \phi_3(B \cap A) + \phi_3(B \setminus A)$.
2. Αν το $X \setminus A$ είναι αριθμήσιμο τότε από την προηγούμενη περίπτωση έχουμε $X \setminus A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$, άρα και $A \in \mathcal{M}_{\phi_3}$.
3. Έστω ότι τα A και $X \setminus A$ είναι υπεραριθμήσιμα. Τότε, $\phi_3(X) = 1 < 1 + 1 = \phi_3(X \cap A) + \phi_3(X \setminus A)$, άρα $A \notin \mathcal{M}_{\phi_3}$.

3.3. Για $A \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\phi(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |A \cap \{1, \dots, n\}|$, όπου $|E|$ είναι ο πληθάριθμος ενός πεπερασμένου συνόλου E . Εξετάστε αν η ϕ είναι εξωτερικό μέτρο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A_m = \{m\}$, $m = 1, 2, \dots$. Τότε, $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{N}$. Άρα,

$$\phi\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\mathbb{N} \cap \{1, \dots, n\}| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \geq m$ έχουμε $|A_m \cap \{1, \dots, n\}| = 1$. Άρα,

$$\phi(A_m) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |A_m \cap \{1, \dots, n\}| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\phi\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = 1 > 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \phi(A_m).$$

Αφού η ϕ δεν είναι σ -υποπροσθετική, η ϕ δεν είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

3.4. Θεωρούμε την οικογένεια C που αποτελείται από το κενό σύνολο και όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in C$. Η C είναι σ -κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(A)$ για $A \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε τα μ^* -μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Δείξτε ότι:

1. Αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.
2. Αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k-1}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

Για παράδειγμα, αν $E = \{n_1, \dots, n_{2k-1}\}$ και $k \geq 2$, τότε

$$E \subset \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \{n_{2j-1}, n_{2j}\}\right) \cup \{n_{2k-1}, n_1\},$$

οπότε

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \tau(\{n_{2j-1}, n_{2j}\}) + \tau(\{n_{2k-1}, n_1\}) = 2k.$$

Για $k = 1$, δηλαδή όταν $E = \{n_1\}$, επιλέγουμε οποιοδήποτε $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_1\}$ και έχουμε $E \subset \{n_1, m\}$, άρα $\mu^*(E) \leq 2$. Από την άλλη, κάθε κάλυψη ενός συνόλου με $2k - 1$ στοιχεία από δισύνολα χρειάζεται τουλάχιστον k δισύνολα. Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις, $\mu^*(E) = 2k$.

Τέλος, αν το E έχει άπειρα στοιχεία τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_k \subset E$ με $\text{card}(A_k) = 2k$. Άρα, $\mu^*(E) \geq \mu^*(A_k) = 2k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mu^*(E) = \infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}_{\mu^*} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αν $m \in A$ και $n \notin A$ τότε για το $E = \{m, n\}$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(\{m\}) + \mu^*(\{n\}) = 2 + 2 = 4 > 2 = \mu^*(E).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{M}_{\mu^*}$.

3.5. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία και κάθε κύκλος στο $\mathbb{R}^2$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε κάτι γενικότερο: Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση τότε το γράφημα $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ έχει μέτρο $\lambda(\Gamma) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| \leq \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \dots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ . Τότε, για κάθε $j = 1, \dots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^k \{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^k I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leq \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^k \ell(I_j) \ell(T_j) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^k \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^k \ell(I_j) = \ell([a, b]) = b - a.$$

Για τα ερωτήματα της άσκησης, παρατηρήστε ότι κάθε κύκλος γράφεται ως ένωση $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ δύο γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων όπως παραπάνω. Κάθε μη κατακόρυφη ευθεία γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση γραφημάτων της συνεχούς συνάρτησης $x \mapsto ax + b$ περιορισμένης σε φραγμένα διαστήματα, άρα έχει μέτρο μηδέν. Τέλος, μια κατακόρυφη ευθεία $L = \{c\} \times \mathbb{R}$ γράφεται ως $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\{c\} \times [-n, n])$. Για κάθε n και κάθε $\eta > 0$ έχουμε

$$\{c\} \times [-n, n] \subseteq (c - \eta, c + \eta) \times [-n, n],$$

οπότε

$$\lambda(\{c\} \times [-n, n]) \leq 4n\eta.$$

Αφήνοντας $\eta \downarrow 0$ παίρνουμε $\lambda(\{c\} \times [-n, n]) = 0$, και συνεπώς $\lambda(L) = 0$.

3.6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq A$ ώστε $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leq \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A \cap (-\infty, n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A \cap (-\infty, -n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A \cap (-\infty, -1]) \leq \lambda(A) < \infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-n) < \frac{\lambda(A)}{2} < \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lambda(A),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x]) = \frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F = A \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

3.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και ένα $A \subseteq X$. Δείξτε ότι υπάρχει $A_0 \in \mathcal{A}$ με $A_0 \subseteq A$ και $\mu_*(A) = \mu(A_0)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu_*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εσωτερικού μέτρου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n \subseteq A$ και $\mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $A_0 \in \mathcal{A}$, έχουμε $A_0 \subseteq A$ και $\mu(A_0) \geq \mu(E_n) > \mu_*(A) - \frac{1}{n}$ για κάθε n , άρα $\mu(A_0) \geq \mu_*(A)$. Η αντίστροφη ανισότητα, $\mu(A_0) \leq \mu_*(A)$, είναι άμεση από τον ορισμό του $\mu_*(A)$, αφού $A_0 \subseteq A$.

Έστω τώρα ότι $\mu_*(A) = \infty$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n \subseteq A$ και $\mu(E_n) > n$. Ορίζουμε $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $A_0 \in \mathcal{A}$, έχουμε $A_0 \subseteq A$ και $\mu(A_0) \geq \mu(E_n) > n$ για κάθε n , άρα $\mu(A_0) = \infty = \mu_*(A)$.

3.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του X , τότε

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Από τη μονοτονία του μ^* , η ακολουθία $\mu^*(A_n)$ είναι αύξουσα και $\mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$. Άρα, το $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$ υπάρχει και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Θέτουμε $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$. Αν $L = +\infty$, τότε από τη μονοτονία

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \mu^*(A_n)$$

για κάθε n , και το ζητούμενο είναι άμεσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $L < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E_n \supseteq A_n$ και $\mu(E_n) = \mu^*(A_n)$: πράγματι, επιλέγουμε μετρήσιμα $G_{n,j} \supseteq A_n$ με $\mu(G_{n,j}) < \mu^*(A_n) + 1/j$ και θέτουμε $E_n = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{n,j}$. Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k$. Για κάθε $k \geq n$ έχουμε $E_k \supseteq A_k \supseteq A_n$, διότι η (A_n) είναι αύξουσα, άρα $E_n \supseteq B_n \supseteq A_n$. Τώρα, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, άρα

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Παρατηρήστε ότι $B_n \subseteq B_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

3.9. (α) Έστω μ^* εξωτερικό μέτρο στο X . Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^* -μετρήσιμων υποσυνόλων του X , αποδείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\right).$$

(β) Σωστό ή λάθος; Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[0, 1]$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(A_n) = \lambda^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $B_n = A_n \cap E$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου, η ακολουθία $\mu^*(B_n)$ είναι αύξουσα και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα θέτουμε $D_1 = A_1$ και

$$D_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Τα D_n είναι μ^* -μετρήσιμα και ξένα ανά δύο, ενώ $A_n = \bigcup_{j=1}^n D_j$. Επειδή κάθε D_j είναι Carathéodory μετρήσιμο, εφαρμόζοντας διαδοχικά το κριτήριο Carathéodory στο σύνολο E παίρνουμε

$$\mu^*(B_n) = \mu^*(E \cap A_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap D_j).$$

Επίσης

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap D_j).$$

Άρα, από τη σ -υποπροσθετικότητα του μ^* ,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap D_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n).$$

Οι δύο ανισότητες δίνουν το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι η απόδειξη χρησιμοποιεί μόνο το κριτήριο Carathéodory και δεν απαιτεί την ύπαρξη μετρήσιμου υπερσυνόλου του B_n με ακριβώς το ίδιο εξωτερικό μέτρο.

(β) Έχουμε δει ότι υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων N_n του $[-1, 2]$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$, και (ii) κάθε $N_n = N + q_n$ όπου q_n ρητός του $[-1, 1]$ και N συγκεκριμένο υποσύνολο του $[0, 1]$ που ορίστηκε με χρήση του αξιώματος της επιλογής. Από αυτήν την κατασκευή είναι φανερό ότι

$$\lambda^*(N_n) = \lambda^*(N) > 0$$

για κάθε $n \geq 1$, και ότι τα N_n είναι μη μετρήσιμα σύνολα. Ορίζουμε

$$A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} N_k.$$

Η $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία υποσυνόλων του $[-1, 2]$ και έχουμε

$$\lambda^*(A_n) \geq \lambda^*(N_n) = \lambda^*(N)$$

για κάθε $n \geq 1$, άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(A_n) \geq \lambda^*(N) > 0.$$

Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(A_n) > \lambda^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Για να μεταφέρετε αυτήν την κατασκευή στο $[0, 1]$ θεωρήστε τα σύνολα $A'_n = \frac{1}{3}(1 + A_n) \subseteq [0, 1]$.

3.10. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ μια άλγεβρα. Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε τα εξής.

(α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.

(β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^* -μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ -πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

Υπόδειξη: (α) Αν $\mu^*(A) = +\infty$, παίρνουμε απλώς $B = X$. Πράγματι, $X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\sigma$, $A \subseteq X$ και $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \varepsilon = +\infty$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mu^*(A) < +\infty$. Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, για τυχόν

$\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Ορίζουμε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B$, και

$$\mu^*(B) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

(β) Έστω $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < +\infty$. Από το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_n$ και $\mu^*(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Αφού το A είναι μ^* -μετρήσιμο, και κάθε B_n είναι επίσης μ^* -μετρήσιμο, έχουμε

$$\mu^*(B_n \setminus A) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A) < \frac{1}{n}$$

για κάθε n . Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n , άρα $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$ τότε το $A = B \setminus (B \setminus A)$ είναι μ^* -μετρήσιμο, διότι τα B και $B \setminus A$ ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ -πεπερασμένο τότε έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (F_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω A ένα μ^* -μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n := A \cap F_n$ είναι μ^* -μετρήσιμο και $\mu^*(A_n) < \infty$. Από το (β) για κάθε $k \geq 1$ μπορούμε να βρούμε $B_{n,k} \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A_n \subseteq B_{n,k}$ και

$$\mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \frac{1}{k \cdot 2^n}.$$

Τότε, το σύνολο $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,k}$ ανήκει στην $\mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B_k$ και

$$\mu^*(B_k \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^n} = \frac{1}{k}.$$

Συνεχίζουμε όπως στο (β). Το σύνολο $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ανήκει στην $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $B \supseteq A$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είχαμε χρειαστεί την υπόθεση ότι $\mu^*(A) < \infty$.

3.11. Έστω X ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ με $\varphi(A) = 0$ αν το $A \subseteq X$ είναι αριθμήσιμο και $\varphi(A) = 1$ αν το $A \subseteq X$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι το φ είναι εξωτερικό μέτρο και προσδιορίστε την σ -άλγεβρα των $\mathcal{M}_\varphi$ των φ -μετρήσιμων υποσυνόλων του X .

Υπόδειξη: Αφού το $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο σύνολο έχουμε ότι $\varphi(\emptyset) = 0$. Η μονοτονία ελέγχεται εύκολα. Έστω τώρα (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του X . Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Αν υπάρχει n τέτοιος ώστε $\varphi(A_n) = 1$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $\varphi(A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε όλα τα A_n είναι αριθμήσιμα σύνολα, αλλά τότε το $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι επίσης αριθμήσιμο και έχουμε ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Από τον ορισμό, ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι φ -μετρήσιμο αν $\varphi(B) = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$ για κάθε $B \subseteq X$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε: (α) αν το B είναι αριθμήσιμο έχουμε ότι τα $B, B \cap A, B \cap A^c$ είναι αριθμήσιμα, άρα $\varphi(B) = 0 = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$ και (β) αν το B είναι υπεραριθμήσιμο έχουμε ότι τα $B, B \cap A^c$ είναι υπεραριθμήσιμα και το $B \cap A$ αριθμήσιμο, άρα $\varphi(B) = 1 = \varphi(B \cap A) + \varphi(B \cap A^c)$. Συνεπώς, κάθε αριθμήσιμο $A \subseteq X$ είναι φ -μετρήσιμο.
2. Αν το $X \setminus A$ είναι αριθμήσιμο, τότε από την προηγούμενη περίπτωση το $X \setminus A$ είναι φ -μετρήσιμο και αφού η $\mathcal{M}_\varphi$ είναι σ -άλγεβρα συμπεραίνουμε ότι το A είναι κι αυτό φ -μετρήσιμο. Συνεπώς, κάθε $A \subseteq X$ με αριθμήσιμο συμπλήρωμα είναι φ -μετρήσιμο.
3. Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και το A^c είναι υπεραριθμήσιμο τότε παίρνοντας $B = X$ έχουμε ότι $\varphi(X) = 1 < 2 = \varphi(A) + \varphi(A^c) = \varphi(X \cap A) + \varphi(X \cap A^c)$, άρα το A δεν είναι φ -μετρήσιμο.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η $\mathcal{M}_\varphi$ αποτελείται από τα υποσύνολα A του X που είναι αριθμήσιμα ή έχουν αριθμήσιμο συμπλήρωμα.

3.12. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(\{q \in \mathbb{Q} : a \leq q \leq b\}) = b - a$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{Q}$ με $a < b$.

Υπόδειξη: Έστω ότι υπάρχει εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathbb{Q}$ με αυτή την ιδιότητα. Τότε, για κάθε $p \in \mathbb{Q}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτοντας $a = p - \frac{1}{n}$ και $b = p + \frac{1}{n}$, και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία του φ παίρνουμε

$$0 \leq \varphi(\{p\}) \leq \varphi\left(\left\{q \in \mathbb{Q} : p - \frac{1}{n} \leq q \leq p + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{2}{n},$$

άρα $\varphi(\{p\}) = 0$. Έπεται ότι

$$\varphi(\mathbb{Q}) \leq \sum_{p \in \mathbb{Q}} \varphi(\{p\}) = 0,$$

δηλαδή $\varphi(\mathbb{Q}) = 0$. Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ πρέπει να έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{Q}) \geq \varphi(\{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq m\}) = m \rightarrow +\infty,$$

άρα $\varphi(\mathbb{Q}) = +\infty$ και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

3.13. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικό μέτρο. Αποδείξτε ότι αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο φ -μετρήσιμων συνόλων, τότε για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n).$$

Υπόδειξη: Αν A, B είναι ξένα φ -μετρήσιμα σύνολα και $E \subseteq X$, τότε

$$\begin{aligned}\varphi(E \cap (A \cup B)) &= \varphi(E \cap (A \cup B) \cap A) + \varphi(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap B).\end{aligned}$$

Με επαγωγή έπεται ότι

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right) = \sum_{n=1}^N \varphi(E \cap A_n)$$

για ξένα ανά δύο φ -μετρήσιμα σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_N$ και κάθε $E \subseteq X$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία ξένων ανά δύο φ -μετρήσιμων συνόλων, και έστω $E \subseteq X$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^N \varphi(E \cap A_n) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right)\right) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right),$$

όπου η ανισότητα ισχύει λόγω της μονοτονίας του εξωτερικού μέτρου. Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n) \leq \varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right),$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου:

$$\varphi\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)\right) = \varphi\left(\bigcup_{n=1}^\infty (E \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \varphi(E \cap A_n).$$

3.14. (α) Έστω $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X , και έστω $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το A είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $B \subseteq A$ και κάθε $C \subseteq X \setminus A$ ισχύει ότι $\varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C)$.

(β) Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ εξωτερικά μέτρα στο μη κενό σύνολο X . Αποδείξτε ότι η $\varphi = \max\{\varphi_1, \varphi_2\}$ είναι επίσης εξωτερικό μέτρο.

Υπόδειξη: (α) ($\implies$) Από τις $B \subseteq A$ και $C \subseteq A^c$ έπεται ότι

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = B, \quad (B \cup C) \cap A^c = (B \cap A^c) \cup (C \cap A^c) = C.$$

Εφόσον το A είναι φ -μετρήσιμο,

$$\varphi(B \cup C) = \varphi((B \cup C) \cap A) + \varphi((B \cup C) \cap A^c) = \varphi(B) + \varphi(C).$$

($\impliedby$) Έστω $E \subseteq X$. Θέτουμε $B = E \cap A \subseteq A$ και $C = E \cap A^c \subseteq A^c$. Τότε, $E = B \cup C$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα B και C βλέπουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap A^c).$$

Αφού το $E \subseteq X$ ήταν τυχόν, έπεται ότι το A είναι φ -μετρήσιμο.

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση ότι αν $a_1 \leq b_1$ και $a_2 \leq b_2$ τότε $\max\{a_1, a_2\} \leq \max\{b_1, b_2\}$.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\varphi(\emptyset) = \max\{\varphi_1(\emptyset), \varphi_2(\emptyset)\} = 0$, διότι $\varphi_1(\emptyset) = \varphi_2(\emptyset) = 0$.

Για τη μονοτονία, αν $A \subseteq B \subseteq X$ έχουμε ότι $\varphi_1(A) \leq \varphi_1(B)$ και $\varphi_2(A) \leq \varphi_2(B)$, οπότε η αρχική παρατήρηση μας δίνει

$$\varphi(A) = \max\{\varphi_1(A), \varphi_2(A)\} \leq \max\{\varphi_1(B), \varphi_2(B)\} = \varphi(B).$$

Για την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα, αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X έχουμε ότι

$$\varphi_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \quad i = 1, 2.$$

Τότε, πάλι από την παρατήρηση,

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \max\left\{\varphi_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \varphi_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right\} \leq \max\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_1(A_n), \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_2(A_n)\right\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

3.15. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο αν για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το σύνολο $E \setminus [a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ με $\varphi(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο, $\varphi(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και $\varphi(E) = +\infty$ αν το E έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Αποδείξτε ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν το A ή το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι αριθμήσιμο. Έχει κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ φ -μετρήσιμο κάλυμμα.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο. Αρχικά, το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(\emptyset) = 0$ από τον ορισμό της φ .

Έστω $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το F είναι αριθμήσιμο, τότε και το E είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E) = 0 = \varphi(F)$.
2. Αν το F έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, άρα $\varphi(F) = +\infty \geq \varphi(E)$ για οποιοδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$.
3. Αν το F είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε $\varphi(F) = 1$ και υπάρχει φραγμένο διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε το $F \setminus [a, b]$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, το $E \setminus [a, b]$ είναι επίσης αριθμήσιμο, άρα το E δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, δηλαδή $\varphi(E) = 0$ ή $\varphi(E) = 1$. Σε κάθε περίπτωση, $\varphi(E) \leq \varphi(F)$.

Έτσι, έχουμε αποδείξει τη μονοτονία της φ .

Έστω τώρα $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Για να δείξουμε ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(E_n),$$

μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο. Τότε, κανένα E_n δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και επίσης το σύνολο $M = \{n \in \mathbb{N} : E_n \text{ είναι υπεραριθμήσιμο}\}$ είναι πεπερασμένο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M \neq \emptyset$ και $M = \{1, \dots, k\}$. Πράγματι, αν όλα τα E_n είναι αριθμήσιμα, τότε το ίδιο ισχύει για το $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε ισχύει ως ισότητα $0 = 0$. Μπορούμε επίσης να αναδιατάξουμε τα σύνολα ώστε τα υπεραριθμήσιμα να είναι τα $E_1, \dots, E_k$ για κάποιον $k \geq 1$. Τότε, τα E_s , $s > k$ είναι όλα αριθμήσιμα.

Για κάθε $s = 1, \dots, k$ υπάρχει διάστημα $[a_s, b_s]$ τέτοιο ώστε το $E_s \setminus [a_s, b_s]$ να είναι αριθμήσιμο. Αν ορίσουμε $a = \min\{a_1, \dots, a_k\}$ και $b = \max\{b_1, \dots, b_k\}$ τότε το

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s \setminus [a, b] \subseteq \bigcup_{s=1}^k (E_s \setminus [a_s, b_s]) \cup \bigcup_{s=k+1}^{\infty} E_s$$

είναι αριθμήσιμο, άρα το $\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s$ είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο που δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Έπεται ότι

$$\varphi\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} E_s\right) = 1 \leq k = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi(E_s).$$

Αυτό αποδεικνύει την υποπροσθετικότητα της φ , και έχουμε ότι η φ είναι εξωτερικό μέτρο.

Δείχνουμε τώρα ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν το A ή το $\mathbb{R} \setminus A$ είναι αριθμήσιμο.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap A) + \varphi(E \cap A^c).$$

Το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E \cap A) = 0$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap A^c).$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν το E είναι αριθμήσιμο, τότε το $E \cap A^c$ είναι επίσης αριθμήσιμο, άρα $\varphi(E) = 0 = \varphi(E \cap A^c)$.
2. Αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και δεν έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε το $E \cap A^c = E \setminus A$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμο (διότι το A είναι αριθμήσιμο) και ως υποσύνολο του E δεν έχει ούτε αυτό σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο. Άρα, $\varphi(E) = 1 = \varphi(E \cap A^c)$.
3. Αν το E είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, τότε για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ το $E \setminus [a, b]$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα το $(E \setminus A) \setminus [a, b]$ είναι επίσης υπεραριθμήσιμο (διότι το A είναι αριθμήσιμο). Άρα, το $E \setminus A$ έχει κι αυτό σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, και έπεται ότι $\varphi(E) = +\infty = \varphi(E \cap A^c)$.

Όμοια δουλεύουμε αν το A^c είναι αριθμήσιμο, δείχνοντας ότι $\varphi(E) = \varphi(E \cap A)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Δείχνουμε ότι αν το A και το A^c είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα τότε το A δεν είναι φ -μετρήσιμο. Θεωρώντας τις τομές $A \cap [-n, n]$ και $A^c \cap [-n, n]$ βλέπουμε εύκολα ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A \cap [-N, N]$ και το $A^c \cap [-N, N]$ να είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα. Αφού το $[-N, N]$ και τα δύο αυτά σύνολα είναι φραγμένα, δεν μπορούν να έχουν σημείο συμπίκνωσης στο άπειρο, άρα

$$\varphi([-N, N]) = 1 \neq 1 + 1 = \varphi([-N, N] \cap A) + \varphi([-N, N] \cap A^c).$$

Έπεται ότι το A δεν είναι φ -μετρήσιμο.

Τέλος, κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει φ -μετρήσιμο κάλυμμα. Αν το E είναι αριθμήσιμο, τότε $E \in \mathcal{M}_\varphi$ και μπορούμε να πάρουμε $G = E$. Αν το E είναι υπεραριθμήσιμο, παίρνουμε $G = \mathbb{R}$. Πράγματι, αν $A \in \mathcal{M}_\varphi$ και $A \subseteq G \setminus E = E^c$, τότε το A^c περιέχει το υπεραριθμήσιμο E , άρα δεν είναι αριθμήσιμο. Από τον χαρακτηρισμό της $\mathcal{M}_\varphi$ που μόλις αποδείξαμε, το A είναι αναγκαστικά αριθμήσιμο, οπότε $\varphi(A) = 0$. Επομένως το $\mathbb{R}$ είναι φ -μετρήσιμο κάλυμμα του E .

3.16. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X . Αποδείξτε ότι αν $E \in \mathcal{M}_\varphi$ τότε για κάθε $F \subseteq X$ ισχύει ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

Υπόδειξη: Αν $\varphi(E) = +\infty$ ή $\varphi(F) = +\infty$ τότε $\varphi(E \cup F) = +\infty$ από τη μονοτονία του φ και έχουμε ότι

$$\varphi(E) + \varphi(F) = +\infty = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F).$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(E) < +\infty$ και $\varphi(F) < +\infty$. Τότε, $\varphi(E \cup F) \leq \varphi(E) + \varphi(F) < +\infty$ και $\varphi(E \cap F) \leq \varphi(E) < +\infty$. Αφού $E \in \mathcal{M}_\varphi$, έχουμε ότι

$$\varphi(F) = \varphi(F \cap E) + \varphi(F \cap E^c)$$

και

$$\varphi(E \cup F) = \varphi((E \cup F) \cap E) + \varphi((E \cup F) \cap E^c) = \varphi(E) + \varphi(F \cap E^c).$$

Από τις δύο προηγούμενες ισότητες έχουμε, χωρίς να χρειάζεται αφαίρεση απείρων,

$$\begin{aligned} \varphi(E) + \varphi(F) &= \varphi(E) + \varphi(F \cap E) + \varphi(F \cap E^c) \\ &= \varphi(E \cap F) + \varphi(E \cup F). \end{aligned}$$

Άρα $\varphi(E) + \varphi(F) = \varphi(E \cup F) + \varphi(E \cap F)$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

3.17. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda^*(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A , είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda^*(A) > 0$.

3.18. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Να δείξετε ότι και για το $A' = \{x^2 : x \in A\}$ ισχύει $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν B είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $C > 0$ τότε $\lambda^*(f(B)) \leq C\lambda^*(B)$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ μια κάλυψη του B από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in B \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \leq C\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\text{diam}(f(B \cap I_n)) \leq C\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(B \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leq C\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $f(B)$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) \leq C \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(B)) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(B) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C \ell(I_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} = C \lambda^*(B).$$

Έστω τώρα $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$ -Lipschitz στο A_n . Από τον προηγούμενο ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leq 2n\lambda(A_n) = 0,$$

δηλαδή $\lambda^*(f(A_n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

3.19. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $A \subseteq X$. Να δείξετε ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_*(A) < \infty$ και $\mu^*(X \setminus A) < \infty$. Αν όχι, τότε έχουμε και $\mu(X) = \infty$ (εξηγήστε γιατί) και ισχύει το ζητούμενο.

Έχουμε δει ότι υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $X \setminus A \subseteq B$ και $\mu^*(X \setminus A) = \mu(B) < \infty$. Τότε, $X \setminus B \subseteq A$ και $X \setminus B \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu_*(A) \geq \mu(X \setminus B) = \mu(X) - \mu(B) = \mu(X) - \mu^*(X \setminus A).$$

Ειδικότερα, $\mu(X) < \infty$. Στην Άσκηση 3.7 είδαμε επίσης ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $E \subseteq A$ και $\mu(E) = \mu_*(A) < \infty$. Τότε, $X \setminus E \supseteq X \setminus A$ και $X \setminus E \in \mathcal{A}$, άρα

$$\mu^*(X \setminus A) \leq \mu(X \setminus E) = \mu(X) - \mu(E) = \mu(X) - \mu_*(A).$$

Από τις δύο ανισότητες έπεται ότι

$$\mu_*(A) + \mu^*(X \setminus A) = \mu(X) < \infty.$$

3.20. Δείξτε ότι ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\lambda^*((a, b)) = \lambda^*((a, b) \cap A) + \lambda^*((a, b) \setminus A), \quad \text{για κάθε } a < b \text{ στο } \mathbb{R}.$$

Υπόδειξη. Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο τότε η ισότητα $\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)$ ισχύει για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$. Ειδικότερα ισχύει αν $E = (a, b)$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$.

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι $\lambda^*((a, b)) = \lambda^*((a, b) \cap A) + \lambda^*((a, b) \setminus A)$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ θα δείξουμε ότι το $A \cap (a, b)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$, οπότε το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap (-n, n))$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Έστω (a, b) ένα φραγμένο διάστημα και θέτουμε $C = (a, b) \setminus A$. Επειδή $\lambda^*(C) \leq b - a < \infty$, για κάθε

$n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ανοικτό $G_n \supseteq C$ με

$$\lambda(G_n) < \lambda^*(C) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $B_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Τότε B_1 είναι μετρήσιμο, $C \subseteq B_1$ και, από τη μονοτονία και τις προηγούμενες ανισότητες,

$$\lambda^*(C) \leq \lambda(B_1) \leq \lambda(G_n) < \lambda^*(C) + \frac{1}{n}$$

για κάθε n , άρα $\lambda(B_1) = \lambda^*(C)$. Θέτοντας τώρα $B = B_1 \cap (a, b)$, έχουμε $C \subseteq B \subseteq (a, b)$ και

$$\lambda^*(C) \leq \lambda(B) \leq \lambda(B_1) = \lambda^*(C),$$

οπότε $\lambda(B) = \lambda^*((a, b) \setminus A)$. Τότε $(a, b) \setminus B \subseteq (a, b) \cap A$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση γράφουμε

$$\lambda^*((a, b) \cap A) = \lambda((a, b)) - \lambda^*((a, b) \setminus A) = \lambda((a, b)) - \lambda(B) = \lambda((a, b) \setminus B) \leq \lambda_*((a, b) \cap A).$$

Έπεται ότι $\lambda^*((a, b) \cap A) = \lambda_*((a, b) \cap A)$, άρα το $(a, b) \cap A$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3.21. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ και $\alpha \in (0, 1)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(A \cap I) > \alpha \lambda(I).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 < \lambda^*(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon) \lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(A) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n),$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\lambda^*(A \cap I_m) > \frac{1}{1 + \varepsilon} \lambda(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα δείχνουμε ότι το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(A) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A_m := A \cap [-m, m]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(A_m) < \infty$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για το σύνολο A_m , βρίσκουμε ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(A \cap I) \geq \lambda^*(A_m \cap I) > \alpha \lambda(I).$$

3.22. Να δείξετε ότι υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A \cap I) < \lambda(I)$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I .

Υπόδειξη. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Το B είναι ανοικτό και

$$\lambda(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(q_n - \frac{1}{n^2}, q_n + \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} < 4,$$

άρα το σύνολο $A := [0, 4] \setminus B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(A) > 0$.

Έστω I μη τετριμμένο διάστημα. Υπάρχει ρητός q_n ο οποίος είναι εσωτερικό σημείο του I , και τότε το $J := I \cap (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)$ είναι μη τετριμμένο διάστημα, άρα $\lambda(J) > 0$. Παρατηρούμε ότι $A^c \supseteq B$, άρα $\lambda(I \cap A^c) \geq \lambda(I \cap B) \geq \lambda(J)$. Συνεπώς, αν $\lambda(I) < \infty$ έχουμε

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(I \cap A^c) \leq \lambda(I) - \lambda(J) < \lambda(I),$$

ενώ αν $\lambda(I) = +\infty$ τότε $\lambda(A \cap I) \leq \lambda(A) \leq 4 < \lambda(I)$.

3.23. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X . Γράφουμε $\mathcal{A}_\sigma$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων ενώσεων στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ για την οικογένεια όλων των αριθμήσιμων τομών στοιχείων της $\mathcal{A}_\sigma$. Έστω μ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{A}$ και μ^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Δείξτε τα εξής:

- (α) Για κάθε $A \subseteq X$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει $B \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.
- (β) Αν $\mu^*(A) < \infty$, τότε το A είναι μ^* -μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$.
- (γ) Αν το μ_0 είναι σ -πεπερασμένο, τότε στο (β) δε χρειάζεται να κάνουμε την υπόθεση $\mu^*(A) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Αν $\mu^*(A) = +\infty$, παίρνουμε $B = X \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_\sigma$ και το ζητούμενο είναι άμεσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mu^*(A) < +\infty$. Από τον ορισμό του $\mu^*(A)$, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $E_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$. Ορίζουμε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B$, και

$$\mu^*(B) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

(β) Έστω $A \subseteq X$ με $\mu^*(A) < +\infty$. Από το (α), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B_n$ και $\mu^*(B_n) < \mu^*(A) + \frac{1}{n}$. Αφού το A είναι μ^* -μετρήσιμο, και κάθε B_n είναι επίσης μ^* -μετρήσιμο, έχουμε

$$\mu^*(B_n \setminus A) = \mu^*(B_n) - \mu^*(A) < \frac{1}{n}$$

για κάθε n . Θέτουμε $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Τότε, $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) \leq \mu^*(B_n \setminus A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n , άρα $\mu^*(B \setminus A) = 0$.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$ τότε το $A = B \setminus (B \setminus A)$ είναι μ^* -μετρήσιμο, διότι τα B και $B \setminus A$ ανήκουν στην $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

(γ) Αν το μ_0 είναι σ -πεπερασμένο τότε έχουμε επιπλέον ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία (F_n) συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ και $\mu_0(F_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω A ένα μ^* -μετρήσιμο σύνολο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_n := A \cap F_n$ είναι μ^* -μετρήσιμο και $\mu^*(A_n) < \infty$. Εφαρμόζοντας το (α) στο A_n με $\varepsilon = 1/(k2^n)$, για κάθε $k \geq 1$ βρίσκουμε $B_{n,k} \in \mathcal{A}_\sigma$ ώστε $A_n \subseteq B_{n,k}$ και

$$\mu^*(B_{n,k}) < \mu^*(A_n) + \frac{1}{k2^n}.$$

Επειδή τόσο το A_n όσο και το $B_{n,k}$ είναι μ^* -μετρήσιμα και $\mu^*(A_n) < \infty$, έχουμε

$$\mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) = \mu^*(B_{n,k}) - \mu^*(A_n) < \frac{1}{k2^n}.$$

Τότε, το σύνολο $B_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,k}$ ανήκει στην $\mathcal{A}_\sigma$, έχουμε $A \subseteq B_k$ και

$$\mu^*(B_k \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_{n,k} \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^n} = \frac{1}{k}.$$

Συνεχίζουμε όπως στο (β). Το σύνολο $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ανήκει στην $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$, έχουμε $B \supseteq A$ και $\mu^*(B \setminus A) = 0$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είχαμε χρειαστεί την υπόθεση ότι $\mu^*(A) < \infty$.

3.24. Έστω ϕ ένα εξωτερικό μέτρο στο σύνολο X και μ το επαγόμενο μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{M}_\phi)$. Αν $E, G \subseteq X$, το G λέγεται ϕ -μετρήσιμο κάλυμμα του E αν:

$$E \subseteq G, \quad G \in \mathcal{M}_\phi \quad \text{και για κάθε } A \in \mathcal{M}_\phi \text{ με } A \subseteq G \setminus E \text{ ισχύει } \mu(A) = 0.$$

Δείξτε ότι:

(α) Αν G_1 και G_2 είναι δύο ϕ -μετρήσιμα καλύμματα του ίδιου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \Delta G_2) = 0$.

(β) Αν $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{M}_\phi$ και $\phi(E) = \mu(G) < \infty$, τότε το G είναι ένα ϕ -μετρήσιμο κάλυμμα του E .

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $G_2 \setminus G_1 \subseteq G_2 \setminus E$ διότι $E \subseteq G_1$. Αφού $G_2 \setminus G_1 \in \mathcal{M}_\phi$ και το G_2 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του E , συμπεραίνουμε ότι $\mu(G_2 \setminus G_1) = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mu(G_1 \setminus G_2) = 0$. Συνεπώς,

$$\mu(G_1 \Delta G_2) = \mu(G_2 \setminus G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = 0.$$

Τέλος, από τις $\mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_2 \setminus G_1) = 0$ έπεται ότι

$$\mu(G_2) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_2 \setminus G_1) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1).$$

(β) Έστω $A \in \mathcal{M}_\phi$ με $A \subseteq G \setminus E$. Τότε, $E \subseteq G \setminus A$. Άρα,

$$\mu(G) = \phi(E) \leq \phi(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονοτονία του ϕ , το γεγονός ότι $G \setminus A \in \mathcal{M}_\phi$ και την υπόθεση ότι $\mu(G) < \infty$. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$. Άρα, το G είναι ϕ -μετρήσιμο κάλυμμα του E .

3.25. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_n \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ υπάρχει υπακολουθία (A_{k_n}) της (A_n) ώστε

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

Υπόδειξη. Αφού $\limsup_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1 - \alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0, 1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

Δύσκολες ασκήσεις

3.26. Έστω $\{q_n\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0, 1]$ και $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0, 1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0, 1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leq \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leq q_n \leq 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A\left(\frac{1}{j}\right) \subseteq \left[-\frac{1}{j}, 1 + \frac{1}{j}\right]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{j}, 1 + \frac{1}{j}\right] = [0, 1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leq \lambda(A(1/j)) \leq 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A\left(\frac{1}{j}\right)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{j}\right) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0, 1] \setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ είναι κλειστό ως υποσύνολο του μετρικού χώρου $[0, 1]$. Επιπλέον έχει κενό σχετικό εσωτερικό: πράγματι, $A(1/j)$ περιέχει το $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, ενώ κάθε μη κενό σχετικά ανοικτό υποσύνολο του $[0, 1]$ περιέχει ρητό. Άρα το $[0, 1] \setminus A(1/j)$ είναι πουθενά πυκνό στο $[0, 1]$.

Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0, 1] = A \cup ([0, 1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ([0, 1] \setminus A\left(\frac{1}{j}\right))\right).$$

Τα μονοσύνολα $\{x_n\}$ είναι επίσης κλειστά και πουθενά πυκνά στο $[0, 1]$. Έτσι ο πλήρης μετρικός χώρος $[0, 1]$ θα ήταν αριθμήσιμη ένωση κλειστών πουθενά πυκνών συνόλων, σε αντίθεση με το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

3.27. Έστω A ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(A) < \infty$ και $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του A ώστε $\lambda(A_n) \geq c$ για κάποιο $c > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geq \lambda(A_k) \geq c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leq \lambda(A) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(E_k) \geq c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in \limsup_n A_n$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n . Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

3.28. Έστω Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Να δείξετε ότι το σύνολο $A - A = \{x - y : x, y \in A\}$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leq (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geq \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leq \ell(I) + |s| < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$.

3.29. Έστω $E \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και $N \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda(N) = 0$ τέτοια ώστε

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right) \cup N.$$

Υπόδειξη. Έστω ότι το E είναι μετρήσιμο. Έχουμε $\lambda(E) = \lambda^*(E) < \infty$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές $K_1 \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lambda(E \setminus K_1) < 1$. Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε ορίσει ξένα ανά δύο συμπαγή σύνολα $K_1, \dots, K_n \subseteq E$ ώστε $\lambda(E \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)) < \frac{1}{n}$. Μπορούμε πάλι να βρούμε συμπαγές $K_{n+1} \subseteq E \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(E \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n \cup K_{n+1})) = \lambda((E \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)) \setminus K_{n+1}) < \frac{1}{n+1}.$$

Έτσι ορίζεται ακολουθία $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ συμπαγών υποσυνόλων του E τέτοια ώστε για το $N = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ να

ισχύει

$$\lambda(N) = \lambda\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \leq \lambda(E \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_n)) < \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(N) = 0$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι άμεση: αν υπάρχουν ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και $N \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda(N) = 0$ τέτοια ώστε $E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) \cup N$, τότε το E είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

3.30. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα E_n τέτοια ώστε $A_n \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $1 \leq n \leq k$ έχουμε $A_{k+1} \cap E_{k+1} = A_{k+1}$, $A_n \cap E_{k+1} = \emptyset$, $E_{k+1}^c \cap A_{k+1} = \emptyset$ και $E_{k+1}^c \cap A_n = A_n$. Συνεπώς, $E_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = A_{k+1}$ και $E_{k+1}^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^k A_n$. Άρα,

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right) = \lambda^*\left(E_{k+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right)\right) + \lambda^*\left(E_{k+1}^c \cap \left(\bigcup_{n=1}^{k+1} A_n\right)\right) = \lambda^*(A_{k+1}) + \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right).$$

Επαγωγικά, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^N \lambda^*(A_n) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Η αντίστροφη ανισότητα ισχύει από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του λ^* .

3.31. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

(β) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $E \cap K \neq \emptyset$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(K) > 0$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) = \infty$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι αν E, F είναι Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ τότε

$$\lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F).$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A) < \infty$ και $\lambda^*(B) < \infty$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν G_δ -σύνολα $E, F \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda^*(A) = \lambda(E)$, $\lambda^*(B) = \lambda(F)$. Έχουμε $A \cup B \subseteq E \cup F$ και $A \cap B \subseteq E \cap F$, άρα

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leq \lambda(E \cup F) + \lambda(E \cap F) = \lambda(E) + \lambda(F) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

(β) Έστω ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Υπάρχει G_δ -σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $E \subseteq G$ και $\lambda(G) = \lambda^*(E)$. Αφού

$\lambda(G) < \infty$, έχουμε $\lambda(\mathbb{R}^k \setminus G) = +\infty$. Θέτουμε $H = \mathbb{R}^k \setminus G$. Επειδή $H = \bigcup_{m=1}^{\infty} (H \cap [-m, m]^k)$ και $\lambda(H) = +\infty$, υπάρχει m με $\lambda(H \cap [-m, m]^k) > 0$. Το σύνολο $H \cap [-m, m]^k$ είναι μετρήσιμο και έχει πεπερασμένο θετικό μέτρο, οπότε από την εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει συμπαγής $K \subseteq H \cap [-m, m]^k$ με $\lambda(K) > 0$. Τότε $K \subseteq \mathbb{R}^k \setminus G$, άρα $K \cap E = \emptyset$, σε αντίφαση με την υπόθεση.

3.32. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \Delta E) < \varepsilon$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $E \subseteq A$ και για κάθε $F \subseteq A^c$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$

Υπόδειξη. (α) Αν το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε το $E = A$ το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο και προφανώς ικανοποιεί την $\lambda(A \Delta E) = \lambda(\emptyset) = 0 < \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(A \Delta E) < \varepsilon$. Για κάθε $n \geq 1$ επιλέγουμε Lebesgue μετρήσιμο $E_n \subseteq \mathbb{R}^k$ ώστε

$$\lambda^*(A \Delta E_n) < 2^{-n}.$$

Θέτουμε

$$E = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} E_n.$$

Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επιπλέον,

$$A \Delta E \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} (A \Delta E_n) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} (A \Delta E_n).$$

Πράγματι, αν ένα σημείο ανήκει μόνο σε πεπερασμένα από τα $A \Delta E_n$, τότε από κάποιον δείκτη και μετά η συμμετοχή του στα E_n είναι ίδια με τη συμμετοχή του στο A , οπότε η συμμετοχή του στο $E = \liminf E_n$ είναι επίσης ίδια. Για κάθε m λοιπόν, από τη μονοτονία και την αριθμησιμη υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A \Delta E) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (A \Delta E_n)\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda^*(A \Delta E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}.$$

Αφήνοντας $m \rightarrow \infty$ παίρνουμε $\lambda^*(A \Delta E) = 0$. Επειδή κάθε σύνολο μηδενικού εξωτερικού μέτρου είναι Lebesgue μετρήσιμο, το A διαφέρει από το μετρήσιμο E κατά ένα μηδενικό μετρήσιμο σύνολο και συνεπώς είναι και το ίδιο Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Έστω ότι το A είναι μετρήσιμο. Αν $E \subseteq A$ και για $F \subseteq A^c$ τότε

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*((E \cup F) \cap A) + \lambda^*((E \cup F) \cap A^c) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F),$$

διότι $(E \cup F) \cap A = E$ και $(E \cup F) \cap A^c = F$.

Αντίστροφα, για τυχόν $X \subseteq \mathbb{R}^k$ θέτουμε $E = X \cap A \subseteq A$ και $F = X \cap A^c \subseteq A^c$ και εφαρμόζοντας την υπόθεση παίρνουμε

$$\lambda^*(X) = \lambda^*((X \cap A) \cup (X \cap A^c)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c),$$

το οποίο σημαίνει, από τον ορισμό του Καραθεοδωρή, ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

3.33. Έστω $X \neq \emptyset$. Ένα εξωτερικό μέτρο $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ λέγεται *κανονικό* αν για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει φ -μετρήσιμο $B \supseteq A$ τέτοιο ώστε $\varphi(B) = \varphi(A)$.

Αποδείξτε ότι αν φ είναι ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στο X και $\varphi(X) < \infty$ τότε ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι φ -μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(X \setminus B).$$

Υπόδειξη. Η μία κατεύθυνση είναι άμεση: αν το B είναι φ -μετρήσιμο, εφαρμόζοντας το κριτήριο του Καραθεοδωρή στο $A = X$ παίρνουμε

$$\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(B^c).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(B^c).$$

Από την κανονικότητα υπάρχουν φ -μετρήσιμα σύνολα $C, D \subseteq X$ τέτοια ώστε

$$B \subseteq C, \quad B^c \subseteq D, \quad \varphi(C) = \varphi(B), \quad \varphi(D) = \varphi(B^c).$$

Θέτουμε $K = D^c$. Τότε το K είναι φ -μετρήσιμο και, επειδή $B^c \subseteq D$, έχουμε

$$K \subseteq B \subseteq C.$$

Επειδή D είναι φ -μετρήσιμο και $\varphi(X) < \infty$,

$$\varphi(K) = \varphi(X) - \varphi(D) = \varphi(X) - \varphi(B^c) = \varphi(B) = \varphi(C).$$

Άρα, αφού $K \subseteq C$ και τα K, C είναι μετρήσιμα,

$$\varphi(C \setminus K) = \varphi(C) - \varphi(K) = 0.$$

Κάθε σύνολο μηδενικού εξωτερικού μέτρου είναι φ -μετρήσιμο. Εφόσον

$$B \setminus K \subseteq C \setminus K,$$

έχουμε $\varphi(B \setminus K) = 0$, οπότε το $B \setminus K$ είναι φ -μετρήσιμο. Τελικά

$$B = K \cup (B \setminus K)$$

είναι φ -μετρήσιμο.

3.34. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται *μετρικό εξωτερικό μέτρο* αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\text{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι φ -μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του φ στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

Υπόδειξη. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ των φ -μετρήσιμων συνόλων είναι σ -άλγεβρα, συνεπώς για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq X$ ανήκει στην $\mathcal{A}$. Για να ελέγξουμε το κριτήριο του Καραθεοδωρή, έστω $A \subseteq X$. Αν $\varphi(A) = +\infty$, η ανισότητα

$$\varphi(A \cap F) + \varphi(A \cap F^c) \leq \varphi(A)$$

είναι αυτόματη. Αρκεί λοιπόν να θεωρήσουμε $A \subseteq X$ με $\varphi(A) < \infty$ και να αποδείξουμε την ίδια

ανισότητα. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $B_n = \{x \in A \setminus F : \text{dist}(x, F) \geq 1/n\}$. Η (B_n) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων και αφού το F είναι κλειστό έχουμε $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A \setminus F$.

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $\text{dist}(B_n, F) \geq 1/n$, οπότε εφαρμόζοντας την υπόθεση παίρνουμε

$$\varphi(A) \geq \varphi((A \cap F) \cup B_n) = \varphi(A \cap F) + \varphi(B_n).$$

Θα δείξουμε ότι $\varphi(B_n) \rightarrow \varphi(A \setminus F)$ και έτσι θα έχουμε ότι

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap F) + \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(B_n) = \varphi(A \cap F) + \varphi(A \setminus F).$$

Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε

$$C_n = B_{n+1} \setminus B_n.$$

Επειδή η συνάρτηση $x \mapsto \text{dist}(x, F)$ είναι 1-Lipschitz, αν $j \geq i + 2$, $x \in C_i$ και $y \in C_j$, τότε

$$\text{dist}(x, F) \geq \frac{1}{i+1}, \quad \text{dist}(y, F) < \frac{1}{j} \leq \frac{1}{i+2},$$

και επομένως

$$d(x, y) \geq \text{dist}(x, F) - \text{dist}(y, F) > \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} > 0.$$

Άρα τα σύνολα $C_2, C_4, \dots$ είναι ανά δύο σε θετική απόσταση, και το ίδιο ισχύει για τα $C_1, C_3, \dots$. Για να εφαρμοστεί όμως επαγωγικά η ιδιότητα του μετρικού εξωτερικού μέτρου χρειάζεται λίγο περισσότερο από την ανά δύο θετική απόσταση. Για κάθε πεπερασμένη οικογένεια, αν $j_1 < \dots < j_m$ έχουν την ίδια παρατιτικότητα, τότε

$$\text{dist}\left(\bigcup_{r=1}^{m-1} C_{j_r}, C_{j_m}\right) = \min_{1 \leq r < m} \text{dist}(C_{j_r}, C_{j_m}) > 0,$$

επειδή το ελάχιστο λαμβάνεται πάνω σε πεπερασμένο σύνολο θετικών αριθμών. Επομένως μπορούμε πράγματι να εφαρμόσουμε διαδοχικά την ιδιότητα του μετρικού εξωτερικού μέτρου και, για κάθε m , παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^m \varphi(C_{2k}) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^m C_{2k}\right) \leq \varphi(A),$$

και ομοίως

$$\sum_{k=1}^m \varphi(C_{2k-1}) = \varphi\left(\bigcup_{k=1}^m C_{2k-1}\right) \leq \varphi(A).$$

Επειδή $\varphi(A) < \infty$, και οι δύο σειρές συγκλίνουν, άρα

$$\sum_{k=n}^{\infty} \varphi(C_k) \rightarrow 0.$$

Τώρα

$$A \setminus F = B_n \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k,$$

οπότε από την υποπροσθετικότητα

$$\varphi(A \setminus F) \leq \varphi(B_n) + \sum_{k=n}^{\infty} \varphi(C_k).$$

Αφήνοντας $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία $B_n \subseteq A \setminus F$, καταλήγουμε

$$\varphi(A \setminus F) \leq \liminf_n \varphi(B_n) \leq \limsup_n \varphi(B_n) \leq \varphi(A \setminus F),$$

δηλαδή $\varphi(B_n) \rightarrow \varphi(A \setminus F)$. Επομένως

$$\varphi(A) \geq \varphi(A \cap F) + \varphi(A \setminus F),$$

και το F είναι φ -μετρήσιμο. Άρα όλα τα κλειστά, και συνεπώς όλα τα Borel, σύνολα είναι φ -μετρήσιμα.

3.35. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\bar{E})$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) \leq J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα συνόλου E για το οποίο $\lambda^*(E) < J_*(E)$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι αν $I_1, \dots, I_N$ είναι κλειστά διαστήματα και $\bar{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ τότε (προφανώς) $E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$, ενώ αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ τότε $\bar{E} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^N I_j} = \bigcup_{j=1}^N \bar{I}_j = \bigcup_{j=1}^N I_j$. Άρα,

$$\left\{ \sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα} \right\} = \left\{ \sum_{j=1}^N \ell(I_j) : \bar{E} \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα} \right\}$$

και έπεται από τον ορισμό ότι $J_*(E) = J_*(\bar{E})$.

(β) Παρατηρούμε ότι κάθε πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων είναι Borel σύνολο, άρα

$$\begin{aligned} \lambda^*(E) &= \inf \{ \lambda(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E \subseteq B \} \leq \inf \left\{ \lambda \left(\bigcup_{j=1}^N I_j \right) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\} = J_*(E). \end{aligned}$$

Για το παράδειγμα θεωρούμε το σύνολο $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Το E είναι αριθμήσιμο σύνολο, άρα $\lambda^*(E) = 0$. Από την άλλη πλευρά, $\bar{E} = [0, 1]$ και από το (α) έχουμε $J_*(E) = J_*([0, 1])$. Όμως, αν $[0, 1] \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j$ τότε

$$\sum_{j=1}^N \ell(I_j) = \sum_{j=1}^N \lambda(I_j) \geq \lambda \left(\bigcup_{j=1}^N I_j \right) \geq \lambda([0, 1]) = 1,$$

απ' όπου έπεται (θεωρώντας την κάλυψη $[0, 1] \subseteq I_1 := [0, 1]$) ότι

$$\inf \left\{ \sum_{j=1}^N \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N I_j, I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \right\} = 1,$$

δηλαδή $J_*([0, 1]) = 1$. Έτσι έχουμε δείξει ότι $\lambda^*(E) = 0 < 1 = J_*(E)$.

3.36. Έστω φ εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X και $A \subseteq C \subseteq X$. Αποδείξτε ότι αν $B \in \mathcal{M}_\varphi$ και ισχύουν οι $A \subseteq B$ και $\varphi(A) = \varphi(B)$ τότε $\varphi(C) = \varphi(B \cup C)$.

Υπόδειξη: Αν $\varphi(C) = +\infty$ τότε $\varphi(B \cup C) = +\infty$ από τη μονοτονία του φ και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\varphi(C) < +\infty$. Επειδή $A \subseteq C$ και $\varphi(A) = \varphi(B)$, έχουμε επίσης $\varphi(B) < +\infty$. Αφού $B \in \mathcal{M}_\varphi$, το κριτήριο του Carathéodory, εφαρμοσμένο στα C και $B \cup C$, δίνει

$$\varphi(C) = \varphi(B \cap C) + \varphi(C \setminus B), \quad \varphi(B \cup C) = \varphi(B) + \varphi(C \setminus B).$$

Όλοι οι όροι είναι πεπερασμένοι, και επομένως

$$(*) \quad \varphi(C) + \varphi(B) = \varphi(B \cup C) + \varphi(B \cap C).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\varphi(B) = \varphi(B \cap C)$. Τότε μπορούμε να διαγράψουμε αυτούς τους δύο ίσους πεπερασμένους όρους από την $(*)$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

Αφού $A \subseteq C$ και $A \subseteq B$, έχουμε ότι $A \subseteq B \cap C$, άρα

$$\varphi(B \cap C) \geq \varphi(A) = \varphi(B) \geq \varphi(B \cap C).$$

Έπεται ότι $\varphi(B) = \varphi(B \cap C)$.

3.37. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A}, E \subseteq A\}.$$

Γνωρίζουμε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X . Έστω $\bar{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στη σ -άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^* -μετρήσιμων συνόλων. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο, αποδείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \bar{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε την σ -υποπροσθετικότητα του μ^* . Έστω $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία υποσυνόλων του X . Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\mu^*(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n βρίσκουμε $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $E_n \subseteq A_n$ και $\mu(A_n) < \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, και

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n)$.

(β) Έστω $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$ η πλήρωση του μ . Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

- Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\mu^*(A) = \mu(A)$.
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$. Θα χρειαστείτε την εξής παρατήρηση: αν $E \subseteq X$ με $\mu^*(E) < \infty$, τότε υπάρχουν $F_n \in \mathcal{A}$ ώστε $F_n \supseteq E$ για κάθε n και $\mu(F_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Συνεπώς, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \supseteq E$ και $\mu(F) = \mu^*(E)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να γράψουμε

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F) = \mu^*(E)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

- Αν $A, F \in \mathcal{A}$, $\mu(F) = 0$ και $B \subseteq F$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.
- Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A) < \infty$, τότε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Πράγματι, από την παραπάνω παρατήρηση υπάρχει $F \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq F$ και $\mu(F) = \mu^*(A)$. Επειδή το A είναι μ^* -μετρήσιμο, εφαρμόζοντας το κριτήριο του Carathéodory στο F παίρνουμε

$$\mu(F) = \mu^*(F) = \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \setminus A) = \mu^*(A) + \mu^*(F \setminus A).$$

Οι δύο πρώτοι όροι είναι πεπερασμένοι και ίσοι, άρα $\mu^*(F \setminus A) = 0$. Επομένως το $F \setminus A$ ανήκει στην πλήρωση $\tilde{\mathcal{A}}$ (είναι υποσύνολο ενός μ -μηδενικού μετρήσιμου συνόλου), και συνεπώς $A = F \setminus (F \setminus A) \in \tilde{\mathcal{A}}$.

- Αν το μ είναι σ -πεπερασμένο τότε $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$. Πράγματι, γράφουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ με $X_n \in \mathcal{A}$ και $\mu(X_n) < \infty$. Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, τότε $A \cap X_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και

$$\mu^*(A \cap X_n) \leq \mu(X_n) < \infty.$$

Από το προηγούμενο βήμα $A \cap X_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ για κάθε n , και άρα

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap X_n) \in \tilde{\mathcal{A}}.$$

Μαζί με την αντίστροφη ένταξη που αποδείχθηκε παραπάνω, παίρνουμε $\mathcal{A}_{\mu^*} = \tilde{\mathcal{A}}$ και τα δύο μέτρα συμπίπτουν εκεί.

3.38. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$ (αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $E \in \mathcal{A}$).

(α) Αποδείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$, και ορίζουμε $\nu : \mathcal{A}_E \rightarrow [0, \infty]$ με $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ -άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \cap E = B \cap E$. Επειδή το μ^* είναι το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ , κάθε σύνολο της $\mathcal{A}$ είναι μ^* -μετρήσιμο κατά Carathéodory. Επομένως

$$\mu(X) = \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Από τη μονοτονία του μ^* και τις εγκλείσεις $E \cap A \subseteq A$, $E \cap A^c \subseteq A^c$ παίρνουμε

$$\mu^*(E \cap A) \leq \mu(A), \quad \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu(A^c).$$

Όμως $\mu(A) + \mu(A^c) = \mu(X) < \infty$. Άρα, αφού το άθροισμα των δύο αριστερών μελών είναι ίσο με το άθροισμα των δύο δεξιών, αναγκαστικά

$$\mu^*(E \cap A) = \mu(A), \quad \mu^*(E \cap A^c) = \mu(A^c).$$

Με τον ίδιο τρόπο $\mu^*(E \cap B) = \mu(B)$. Τώρα $E \cap A = E \cap B$, οπότε

$$\mu(A) = \mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap B) = \mu(B).$$

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ -άλγεβρα. Από το (α) η ν είναι καλά ορισμένη: αν $C \in \mathcal{A}_E$ και $C = A \cap E = B \cap E$ για κάποια $A, B \in \mathcal{A}$ τότε $\mu(A) = \mu(B)$ και η τιμή $\nu(C)$ δεν εξαρτάται από την αναπαράσταση του C που θα θεωρήσουμε ($A \cap E$ ή $B \cap E$). Γράφοντας $\emptyset = \emptyset \cap E$ έχουμε $\nu(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

Έστω τώρα $C_k = A_k \cap E$, ξένα ανά δύο, με $A_k \in \mathcal{A}$. Θέτουμε

$$B_1 = A_1, \quad B_k = A_k \setminus \bigcup_{j < k} A_j \quad (k \geq 2).$$

Τότε τα $B_k \in \mathcal{A}$ είναι ξένα ανά δύο και, επειδή $C_k \cap C_j = \emptyset$ για $j < k$, έχουμε

$$B_k \cap E = A_k \cap E = C_k.$$

Από το (α), αφού $A_k \cap E = B_k \cap E$, παίρνουμε $\mu(A_k) = \mu(B_k)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την αριθμητική προσθετικότητα του μ στα ξένα ανά δύο B_k ,

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) &= \nu\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cap E\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(C_k). \end{aligned}$$

Άρα, η ν είναι μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.

Κεφάλαιο 4

Βασικές ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Απλές ασκήσεις

4.1. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο N του Vitali. Έχουμε δει ότι αν θεωρήσουμε μια αρίθμηση $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ και ορίσουμε $N_n := N + q_n$, τότε:

(α) τα σύνολα N_n είναι ξένα ανά δύο,

(β) $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$,

(γ) το σύνολο $N_n - N_m = N - N$ δεν περιέχει κανέναν ρητό $q \neq 0$.

Έστω A υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Γράφουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap N_n)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* έχουμε

$$0 < \lambda^*(A) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap N_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap N_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda^*(A \cap N_m) > 0$. Το $A \cap N_m$ είναι μη μετρήσιμο. Αν ήταν μετρήσιμο τότε, από το θεώρημα του Steinhaus, θα υπήρχε $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$(-\delta, \delta) \subseteq (A \cap N_m) - (A \cap N_m) \subseteq N_m - N_m = N - N,$$

το οποίο είναι άτοπο αφού υπάρχουν ρητοί $q \neq 0$ στο $(-\delta, \delta)$.

4.2. Δώστε παράδειγμα Lebesgue μετρήσιμου υποσυνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε το $\pi_1(A)$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμο, όπου $\pi_1(x, y) = x$ για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη).

Υπόδειξη. Αν N είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε θεωρήστε το σύνολο $E = \{(x, 0) : x \in N\}$ και παρατηρήστε ότι:

(α) Το E περιέχεται στην ευθεία $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $\lambda_2(L) = 0$ (εξηγήστε γιατί) άρα το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda_2(E) = 0$.

(β) Το σύνολο $\pi_1(E) = N$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.3. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $\frac{1}{4} \in C$, παρόλο που το $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα διαστήματα που ορίζουν το σύνολο του Cantor.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε το n -οστό σύνολο C_n της κατασκευής του C και τα 2^n κλειστά διαστήματα I_k^n , $k = 1, \dots, 2^n$ που σχηματίζουν το C_n . Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα I_k^n και χωρίζει το I_k^n σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3 : 1$ αν ο n είναι περιττός και $1 : 3$ αν ο n είναι άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα I_k^n .

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^n = [a, b]$ και $x - a = 3(b - x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a, b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $[a, \frac{2a+b}{3}]$ και $[\frac{2b+a}{3}, b]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

4.4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ ισχύει $a + t \in A$ ή $a - t \in A$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) \geq \delta$.

Υπόδειξη. Έστω $t \in (-\delta, \delta)$. Αν $a + t \in A$ τότε $t \in -a + A$ και αν $a - t \in A$ τότε $t \in a - A := \{a - x : x \in A\}$. Σε κάθε περίπτωση, $t \in (-a + A) \cup (a - A)$. Άρα, $(-\delta, \delta) \subseteq (-a + A) \cup (a - A)$ και από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$2\delta = \lambda^*((-\delta, \delta)) \leq \lambda^*((-a + A) \cup (a - A)) \leq \lambda^*(-a + A) + \lambda^*(a - A).$$

Όμως, $\lambda^*(-a + A) = \lambda^*(a - A) = \lambda^*(A)$ από το αναλλοίωτο του λ^* ως προς μεταφορές και την $\lambda^*(\varrho \cdot A) = |\varrho| \lambda^*(A)$, $\varrho \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $2\delta \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(A)$, δηλαδή $\lambda^*(A) \geq \delta$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

4.5. Έστω E, F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $a \in (\lambda(E), \lambda(F))$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K με $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = a$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(W) > 0$, τότε, για κάθε $0 < \beta < \lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \beta$. Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q \subset \mathbb{R}^{k-1}$ ώστε $W \subseteq Q_1 := [a, b] \times Q$. Ορίζουμε $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \lambda(W \cap \{x = (x_1, \dots, x_k) \in Q_1 : a \leq x_1 \leq t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t) - f(s)| \leq \lambda_{k-1}(Q) |t - s|.$$

Αφού $f(a) = 0$ και $f(b) = \lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in (\lambda(E), \lambda(F))$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

4.6. Έστω $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

(β) Για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $\{I_n\}_{n=1}^m$ ανοικτών διαστημάτων με

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^m I_n \quad \text{ισχύει} \quad \sum_{n=1}^m \lambda(I_n) \geq 1.$$

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_n = \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $I_n = (a_n, b_n)$, $1 \leq n \leq m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_n = (a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon)$, $1 \leq n \leq m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq I_1 \cup \dots \cup I_m$,

$$[0, 1] = \overline{A} \subseteq \overline{I_1 \cup \dots \cup I_m} = \overline{I_1} \cup \dots \cup \overline{I_m} \subseteq T_1 \cup \dots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δει στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0, 1]) \leq \sum_{n=1}^m \ell(T_n) = \sum_{n=1}^m (\ell(I_n) + 2\varepsilon) = 2m\varepsilon + \sum_{n=1}^m \lambda(I_n).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο.

4.7. Έστω $\{q_n\}_{n \geq 1}$ μια αρίθμηση των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει ένα σύνολο B με $\lambda(B) = 0$ ώστε κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$ να έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $|x - q_n| \geq 1/n^2$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο B των $x \in \mathbb{R}$ που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Τότε, $x \in B$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq k$ ώστε $|x - q_n| < 1/n^2$. Δηλαδή,

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |x - q_n| < 1/n^2\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2).$$

Έπεται ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(B) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} (q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \lambda((q_n - 1/n^2, q_n + 1/n^2)) = 2 \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ έχουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, άρα $\lambda(B) = 0$.

4.8. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι Lipschitz συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

- (i) Δείξτε ότι η f απεικονίζει σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue σε σύνολα μηδενικού μέτρου Lebesgue.
- (ii) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.
- (β) Είναι σωστό ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα;

Υπόδειξη. (α) (i) Από την υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_k > 0$ τέτοια ώστε η $f : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C_k , δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq C_k |x - y|$ για κάθε $x, y \in [-k, k]$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leq C_{k+1} \lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq [-k, k]$. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^\infty$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ και ότι $I_n \subseteq [-(k+1), k+1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq C_{k+1} |x - y| \leq C_{k+1} \ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\text{diam}(f(A \cap I_n)) \leq C_{k+1} \ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leq C_{k+1} \ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) \leq C_{k+1} \sum_{n=1}^\infty \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(A)) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty J_n \right\} \leq \inf \left\{ \sum_{n=1}^\infty C_{k+1} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n \right\} \\ &= C_{k+1} \lambda^*(A). \end{aligned}$$

Έστω τώρα $B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 0$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_k = B \cap [-k, k]$. Τότε, $\lambda^*(f(B_k)) \leq C_{k+1} \lambda^*(B_k) = 0$, δηλαδή $\lambda^*(f(B_k)) = 0$. Ειδικότερα, κάθε $f(B_k)$ είναι μετρήσιμο. Η $\{f(B_k)\}_{k=1}^\infty$ είναι αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και $f(B) = \bigcup_{k=1}^\infty f(B_k)$. Έπεται ότι

$$\lambda(f(B)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(f(B_k)) = 0.$$

(ii) Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν F_σ σύνολο $H \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 0$ ώστε $A = H \cup B$. Παρατηρούμε επίσης ότι το H μπορεί να γραφτεί στη μορφή $H = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$, όπου κάθε K_n είναι συμπαγές σύνολο (εξηγήστε γιατί). Αφού η f είναι συνεχής, κάθε $f(K_n)$ είναι συμπαγές, και ειδικότερα μετρήσιμο, σύνολο. Από το (i) έχουμε ότι το $f(B)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(f(B)) = 0$. Τώρα,

$$f(A) = f(H \cup B) = f(H) \cup f(B) = \left(\bigcup_{n=1}^\infty f(K_n) \right) \cup f(B),$$

άρα το $f(A)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση Lebesgue μετρήσιμων συνόλων.

(β) Η απάντηση είναι αρνητική. Αρχικά ορίζουμε στο $[0, 1]$ τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) + x,$$

όπου f είναι η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η $h : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί. Επειδή η f είναι σταθερή σε κάθε συνιστώσα του $[0, 1] \setminus C$, για κάθε τέτοιο ανοικτό διάστημα I έχουμε $\lambda(h(I)) = \lambda(I)$. Τα διαστήματα αυτά είναι ξένα ανά δύο και έχουν συνολικό μήκος 1, οπότε

$$\lambda(h([0, 1] \setminus C)) = 1.$$

Καθώς h είναι 1-1 και επί του $[0, 2]$, τα σύνολα $h(C)$ και $h([0, 1] \setminus C)$ είναι ξένα και έχουν ένωση το $[0, 2]$. Άρα

$$\lambda(h(C)) = 2 - 1 = 1.$$

Συνεπώς το $h(C)$ έχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M . Θέτουμε $K = h^{-1}(M)$. Τότε $K \subseteq C$, άρα K είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(K) = 0$, ενώ $h(K) = M$ δεν είναι μετρήσιμο.

Για να πάρουμε ακριβώς αντιπαράδειγμα με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, επεκτείνουμε την h συνεχώς θέτοντας

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ h(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Επειδή $h(0) = 0$ και $h(1) = 2$, η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Επιπλέον, για το ίδιο μετρήσιμο σύνολο $K \subseteq [0, 1]$ έχουμε $g(K) = h(K) = M$, το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.9. Έστω G μη κενό, φραγμένο, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$.

- (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμο κάλυμμα $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε κάθε σημείο του G να ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.
- (β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών η οποία καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε κάθε σημείο του G να ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε κάθε $x \in G$ ανήκει, για κάθε m , σε κάποια B_j με $j \geq m$, άρα

$$G \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=m}^{\infty} B_j.$$

Επομένως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda(G) \leq \lambda\left(\bigcup_{j=m}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=m}^{\infty} \lambda(B_j).$$

Η τελευταία ουρά τείνει στο 0, αφού η σειρά $\sum_j \lambda(B_j)$ συγκλίνει. Άρα $\lambda(G) = 0$, άτοπο: επειδή το G είναι μη κενό και ανοικτό, περιέχει κάποια ανοικτή μπάλα και συνεπώς έχει θετικό μέτρο.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a . Θέτουμε $Q_1^0 = Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0 , και παίρνουμε 2^k κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \dots, 2^k$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1 , θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, \frac{3a\sqrt{k}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \dots, 2^k$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n -οστό βήμα παίρνουμε 2^{kn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $\frac{3a\sqrt{k}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p

δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p 2^{kn} \left(\frac{3a\sqrt{k}}{2^n} \right)^{kp} = [\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} 2^{nk(1-p)},$$

όπου B_k είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n -οστού βήματος, άρα και σε μία μπάλα του n -οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q , άρα και του G , με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j . Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p -δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_k)]^p (3a\sqrt{k})^{kp} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{k(1-p)} < 1$.

4.10. Έστω A το υποσύνολο του $[0, 1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

Υπόδειξη. Για να αποφύγουμε την αμφισημία των αριθμών που έχουν δύο δεκαδικά αναπτύγματα, επιλέγουμε για κάθε $x \in [0, 1)$ το δεκαδικό ανάπτυγμα που δεν καταλήγει σε ουρά από 9 (και χειριζόμαστε χωριστά το $x = 1$). Για $n \geq 1$ έστω A_n το σύνολο των $x \in [0, 1)$ των οποίων τα πρώτα n δεκαδικά ψηφία είναι διαφορετικά από 4. Τότε το A_n είναι πεπερασμένη ένωση ημιανοικτών διαστημάτων μήκους 10^{-n} : υπάρχουν ακριβώς 9^n επιτρεπτές ακολουθίες n ψηφίων. Άρα το A_n είναι Borel σύνολο και

$$\lambda(A_n) = \frac{9^n}{10^n} = \left(\frac{9}{10} \right)^n.$$

Επιπλέον $A_{n+1} \subseteq A_n$ και, με την παραπάνω σύμβαση για το δεκαδικό ανάπτυγμα,

$$A \cap [0, 1) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Συνεπώς το A είναι Lebesgue μετρήσιμο (η ενδεχόμενη προσθήκη του σημείου 1 δεν αλλάζει τίποτα) και, από τη συνέχεια του μέτρου από πάνω,

$$\lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{9}{10} \right)^n = 0.$$

4.11. Αν C είναι το σύνολο του Cantor, δείξτε ότι $C - C = [-1, 1]$ και συνεπώς δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος Steinhaus.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $C + C = [0, 2]$. Έστω $z \in [0, 2]$. Τότε,

$$\frac{z}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \quad \epsilon_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0, 0), (2, 0)$ ή $(2, 2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{και} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Τότε, $x, y \in C$ και

$$\frac{x+y}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{z}{2},$$

δηλαδή $z = x + y \in C + C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C + C \subseteq [0, 2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0, 1]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι το C είναι συμμετρικό ως προς το $\frac{1}{2}$: Έχουμε $x \in C$ αν και μόνο αν $1 - x \in C$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} C - C &= \{x - y \mid x, y \in C\} = \{x - (1 - y) \mid x, y \in C\} = \{x + y - 1 \mid x, y \in C\} \\ &= -1 + (C + C) = -1 + [0, 2] = [-1, 1]. \end{aligned}$$

4.12. Έστω $\theta \in (0, 1)$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n -οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοιχτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n - 1)$ -οστό βήμα. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

- (α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοιχτά διαστήματα.
- (β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.
- (γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geq 0$.
2. Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.
3. $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \dots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \theta \left(1 - (2/3)^n \right) \right] = 1 - \theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n} [1 - \theta(1 - (2/3)^n)] \rightarrow 0$. Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

4.13. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

1. Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές.
2. Αν το $E \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι F_σ -σύνολο τότε το E μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Από το προηγούμενο βήμα, το $T(E)$ είναι F_σ -σύνολο.
3. Η T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x) - T(y)\|_2 \leq M \|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$.
4. Αν R είναι ένας κύβος (διάστημα με ισομήκεις ακμές) στον $\mathbb{R}^k$, τότε το $T(R)$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας το πολύ ίσης με $\frac{M \cdot d}{2} = \frac{M \sqrt{k} \alpha}{2}$ όπου d η διάμετρος και α η ακμή του R . Δηλαδή, υπάρχει $c = c(M, k) > 0$ ώστε το $T(R)$ να περιέχεται σε κύβο ακμής $c\alpha$. Έπεται ότι $\lambda(T(R)) \leq c^k \lambda(R)$.
5. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την παρατήρηση ότι για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου του A αρκεί να θεωρήσουμε καλύψεις του A με κύβους, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Γράφοντας το τυχόν μετρήσιμο σύνολο σαν ένωση ενός F_σ -συνόλου και ενός συνόλου μέτρου 0 παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

4.14. Έστω Z υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$. Αποδείξτε ότι το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση αποδείξτε ότι αν $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$, τότε $f \equiv g$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $\mathbb{R} \setminus Z$ δεν είναι πυκνό. Τότε, υπάρχει μη τετριμμένο φραγμένο ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(\mathbb{R} \setminus Z) \cap (a, b) = \emptyset$, δηλαδή $(a, b) \subseteq Z$. Όμως τότε, $\lambda(Z) \geq \lambda((a, b)) = b - a > 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω για το $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\mathbb{R} \setminus Z =: D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία (d_n) στο D με $d_n \rightarrow x$. Από τη συνέχεια των f και g στο x και από το γεγονός ότι $f(d_n) = g(d_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(d_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(d_n) = g(x).$$

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv g$.

4.15. Έστω A και B δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

(α) Υποθέτουμε ότι για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ ισχύει $\lambda(A \cap (a, b)) \leq \frac{b-a}{2}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda(B) = 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο $C \subseteq B$ με $\lambda(C) = \frac{1}{2}$.

Υπόδειξη: (α) Υποθέτουμε αρχικά ότι $0 < \lambda(A) < \infty$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ φραγμένων ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$$

Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ και την υπόθεση παίρνουμε

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{1 + \varepsilon}{2} \lambda(A).$$

Επιλέγοντας $\varepsilon < 1$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lambda(A) = \infty$, παρατηρούμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε το $A_m := A \cap [-m, m]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda(A_m) < \infty$ και επίσης $\lambda(A_m \cap (a, b)) \leq \lambda(A \cap (a, b)) \leq \frac{b-a}{2}$ για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο για το σύνολο A_m , βλέπουμε ότι $\lambda(A_m) = 0$ και καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ έχουμε ότι

$$B \cap (-\infty, y] \subseteq (B \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(B \cap (-\infty, y]) \leq \lambda(B \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B \cap (-\infty, n]) = \lambda(B)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Αφού η f είναι συνεχής και

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(-n) < \frac{\lambda(B)}{2} < \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lambda(B),$$

υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = \lambda(B \cap (-\infty, x]) = \frac{\lambda(B)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Θέτοντας $C = B \cap (-\infty, x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

4.16. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

- (α) Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset [0, 1]$ το οποίο έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) > 0$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $x - y \notin \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

Υπόδειξη: (α) Αληθής. Το σύνολο $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ έχει μέτρο $\lambda(A) = 1$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό. Από την εσωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει συμπαγές (άρα κλειστό) $B \subseteq A$ με $\lambda(B) > \frac{3}{4}$. Δουλεύοντας όπως στο (β) της Άσκησης 4.15 βρίσκουμε $x \in \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο $F = B \cap (-\infty, x]$ να έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$. Το F είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων και δεν περιέχει κανέναν ρητό διότι $F \subseteq B \subseteq A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

(β) Αληθής. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A , είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(γ) Ψευδής. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue, C το σύνολο Cantor και $h(x) = f(x) + x$. Η h είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, με $h(0) = 0$, $h(1) = 2$. Επιπλέον, το $h(C)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(h(C)) = 1$. Επιλέγουμε λοιπόν μη μετρήσιμο σύνολο $M \subseteq h(C)$ και θέτουμε $K = h^{-1}(M)$. Επειδή $K \subseteq C$ και $\lambda(C) = 0$, το K είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Για να έχουμε συνάρτηση ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, επεκτείνουμε την h θέτοντας

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ h(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1. \end{cases}$$

Από τις ιδιότητες $h(0) = 0$ και $h(1) = 2$ η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Τέλος, $g(K) = h(K) = M$, που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο. Άρα μια συνεχής συνάρτηση $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι υποχρεωτικό να απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

4.17. (α) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda^*(E \setminus B) < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < +\infty$. Αν $B \subseteq A$ και

$$\lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda(A)$$

αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το B είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = 2n.$$

Υπόδειξη: (α) Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ για $n = 1, 2, \dots$ βρίσκουμε ακολουθία (E_n) Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με $B \subseteq E_n$ και $\lambda^*(E_n \setminus B) < \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Τότε, το E είναι Lebesgue μετρήσιμο, έχουμε $B \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$ και

$$\lambda^*(E \setminus B) \leq \lambda^*(E_n \setminus B) < \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

άρα $\lambda^*(E \setminus B) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι το $E \setminus B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, άρα και το $B = E \setminus (E \setminus B)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(β) Θέτουμε $D = A \setminus B$. Επειδή $D \subseteq A$ και $\lambda(A) < +\infty$, έχουμε $\lambda^*(D) < +\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ανοικτό $G_n \supseteq D$ ώστε

$$\lambda(G_n) < \lambda^*(D) + \frac{1}{n},$$

και θέτουμε $F_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Τότε το F_1 είναι μετρήσιμο, $D \subseteq F_1$ και, από τη μονοτονία,

$$\lambda^*(D) \leq \lambda(F_1) \leq \lambda(G_n) < \lambda^*(D) + \frac{1}{n}$$

για κάθε n , άρα $\lambda(F_1) = \lambda^*(D)$. Αν θέσουμε $F = A \cap F_1$, τότε $F \subseteq A$, $D = A \setminus B \subseteq F$ και

$$\lambda^*(D) \leq \lambda(F) \leq \lambda(F_1) = \lambda^*(D),$$

οπότε $\lambda(F) = \lambda^*(A \setminus B)$. Επίσης, $A \setminus F \subseteq B$, άρα

$$\lambda_*(B) \geq \lambda(A \setminus F) = \lambda(A) - \lambda(F) = \lambda(A) - \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B),$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιούμε την υπόθεση. Αυτό δείχνει ότι $\lambda_*(B) = \lambda^*(B)$, άρα το B είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν το B είναι μετρήσιμο, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = \lambda^*((-n, n)) = 2n.$$

Αντίστροφα, υποθέτοντας ότι $\lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = 2n = \lambda^*((-n, n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) για το $A = (-n, n)$ και το $B_n = (-n, n) \cap B$ και έχουμε ότι

$$\lambda(A) = \lambda^*((-n, n)) = \lambda^*((-n, n) \cap B) + \lambda^*((-n, n) \setminus B) = \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*(A \setminus B_n)$$

(διότι $(-n, n) \setminus B = (-n, n) \setminus ((-n, n) \cap B)$), άρα το $B_n = (-n, n) \cap B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.18. Έστω E το σύνολο των $x \in [0, 1]$ που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα περιέχει άπειρες φορές την τετράδα ψηφίων 2024 με αυτή τη σειρά. Αποδείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0, 1] : x = 0.a_1a_2 \dots a_n \dots \text{ και υπάρχει } m \geq 4n \text{ ώστε } (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) = (2, 0, 2, 4)\}.$$

Κάθε E_n είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$ ως αριθμήσιμη ένωση (πάνω από όλα τα $m \geq 4n$) των συνόλων $F_m = \{x : (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) = (2, 0, 2, 4)\}$ που είναι πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων (ένα

για κάθε επιλογή των $a_1, \dots, a_{m-1}$. Η (E_n) είναι επίσης φθίνουσα ακολουθία συνόλων και $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, άρα το E είναι μετρήσιμο και $\lambda(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n)$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lambda(E) = 1$.

Θεωρούμε το συμπλήρωμα του E_n . Έχουμε

$$\begin{aligned} E_n^c &= \bigcap_{m=4n}^{\infty} \{x \in [0, 1] : (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \\ &\subseteq \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \\ &\subseteq \bigcap_{k=n}^N \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \end{aligned}$$

για κάθε $N \geq n$. Όμως, επειδή οι τετράδες ψηφίων $(a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3})$ είναι ανεξάρτητες, με επαγωγή ως προς N μπορούμε να δούμε ότι

$$\lambda \left(\bigcap_{k=n}^N \{x \in [0, 1] : (a_{4k}, a_{4k+1}, a_{4k+2}, a_{4k+3}) \neq (2, 0, 2, 4)\} \right) = \left(\frac{9999}{10000} \right)^{N-n+1} \rightarrow 0$$

όταν $N \rightarrow \infty$, άρα $\lambda(E_n^c) = 0$ και έτσι βλέπουμε ότι $\lambda(E_n) = 1$.

4.19. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$, $x \neq y$, τέτοια ώστε $\frac{x+y}{2} \in A$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(A) < \infty$ (αλλιώς θεωρούμε $A_1 \subseteq A$ με $0 < \lambda(A_1) < +\infty$ και αποδεικνύουμε το ζητούμενο για το A_1).

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι για κάθε $\alpha \in (0, 1)$ υπάρχει ανοικτό διάστημα I στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda(A \cap I) > \alpha \lambda(I).$$

Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Γράφοντας $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n)$, από την υποπροσθετικότητα του λ παίρνουμε $\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n)$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1 + \varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_n).$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda(A \cap I_m) > \frac{1}{1+\varepsilon} \lambda(I_m)$. Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(A \cap [a, b]) > \frac{2}{3}(b - a).$$

Θέτουμε $C = A \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε 3 διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{3}$:

$$I_1 = [a, a + s), \quad I_2 = [a + s, a + 2s), \quad I_3 = [a + 2s, b],$$

και για κάθε $j = 1, 2, 3$ ορίζουμε $C_j = C \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, 2, 3$ θέτουμε $B_j = C_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, 2, 3$ και $B_1 = C_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \quad B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in B_1 \cap B_2 \cap B_3$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = C_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in C_j$ για κάθε $j = 1, 2, 3$. Αφού $C_j \subseteq C \subseteq A$ για κάθε j , έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s \in A.$$

Θέτοντας $y = x + 2s$ έχουμε ότι $x, y \in A$, $x \neq y$ και $\frac{x+y}{2} = x+s \in A$, δηλαδή το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της (*) γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda(I_1 \setminus (B_1 \cap B_2 \cap B_3)) &= \lambda((I_1 \setminus B_1) \cup (I_1 \setminus B_2) \cup (I_1 \setminus B_3)) \leq \sum_{j=1}^3 \lambda(I_1 \setminus B_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \setminus C_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \setminus (C \cap I_j)) = \sum_{j=1}^3 \lambda(I_j \cap C^c) = \lambda([a, b] \setminus C) < \frac{1}{3}(b-a) = \lambda(I_1). \end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus (B_1 \cap B_2 \cap B_3)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1 , και έπεται η (*).

4.20. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\lambda(E) = 0$ ισχύει ότι $\mu(E) = 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\lambda(E) < \delta$ τότε $\mu(E) < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) < \delta$ αλλά $\mu(E) \geq \varepsilon$. Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\delta_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ με

$$\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \mu(E_n) \geq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ορίζουμε $E = \limsup E_n$. Εφόσον $\sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n) < 1 < \infty$, από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(E) = 0$. Άρα, $\mu(E) = 0$. Όμως,

$$\mu(E) = \mu(\limsup E_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\right),$$

όπου $F_n = \bigcup_{k=n}^\infty E_k$, και παρατηρούμε ότι: $\mu(F_n) \geq \mu(E_n) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα, και $\mu(F_1) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) \geq \varepsilon > 0,$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

4.21. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$

υπάρχουν ανοικτά σύνολα U και V τέτοια ώστε $A \subseteq U$, $U \setminus A \subseteq V$ και $\lambda(V) < \varepsilon$.

Υπόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_m = A \cap [-m, m].$$

Από την εξωτερική κανονικότητα, για κάθε m υπάρχει ανοικτό $G_m \supseteq A_m$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(G_m \setminus A_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+2}}.$$

Θέτουμε

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} (G_m \cap (-m-1, m+1)).$$

Τότε το U είναι ανοικτό και $A \subseteq U$. Επιπλέον, αν $x \in U \setminus A$, τότε για κάποιο m έχουμε $x \in G_m \cap (-m-1, m+1)$ και $x \notin A$. Επειδή $A_m \subseteq A$, έπεται ότι $x \in G_m \setminus A_m$. Άρα

$$U \setminus A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} (G_m \setminus A_m)$$

και συνεπώς

$$\lambda(U \setminus A) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(G_m \setminus A_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το $U \setminus A$ είναι μετρήσιμο, οπότε, πάλι από την εξωτερική κανονικότητα, υπάρχει ανοικτό $V \supseteq U \setminus A$ με

$$\lambda(V) < \lambda(U \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η δοσμένη ιδιότητα. Αρκεί να ελέγξουμε το κριτήριο του Carathéodory για σύνολα $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(E) < \infty$, αφού όταν $\lambda^*(E) = \infty$ η απαιτούμενη ανισότητα είναι αυτόματη. Έστω λοιπόν τέτοιο E και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε ανοικτά U, V με

$$A \subseteq U, \quad U \setminus A \subseteq V, \quad \lambda(V) < \varepsilon.$$

Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει ανοικτό $G \supseteq E$ τέτοιο ώστε

$$\lambda(G) < \lambda^*(E) + \delta.$$

Επειδή το U είναι μετρήσιμο,

$$\lambda^*(E) + \delta > \lambda(G) = \lambda(G \cap U) + \lambda(G \cap U^c) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c).$$

Αφήνοντας $\delta \downarrow 0$ παίρνουμε

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c).$$

Ακόμη,

$$E \cap A^c = (E \cap U^c) \cup (E \cap (U \setminus A)),$$

οπότε

$$\lambda^*(E \cap A^c) \leq \lambda^*(E \cap U^c) + \lambda^*(E \cap (U \setminus A)) \leq \lambda^*(E \cap U^c) + \lambda(V) < \lambda^*(E \cap U^c) + \varepsilon,$$

ενώ $E \cap A \subseteq E \cap U$. Συνεπώς

$$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c) - \varepsilon.$$

Αφήνοντας $\varepsilon \downarrow 0$ και συνδυάζοντας με την υποπροσθετικότητα, παίρνουμε

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$

Άρα το A είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.22. Κατασκευάστε ένα ανοικτό σύνολο $U \subset [0, 1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) Το U είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

(β) $\lambda(U) < 1$.

(γ) Για κάθε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subset [0, 1]$ ισχύει ότι $\lambda(U \cap (a, b)) > 0$.

Υπόδειξη: Ορίζουμε $D = \mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε

$$0 < \delta_n < \min \left\{ \frac{1}{2^{n+2}}, \frac{q_n}{2}, \frac{1 - q_n}{2} \right\}$$

και θέτουμε $I_n = (q_n - \delta_n, q_n + \delta_n)$. Τότε I_n είναι ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, $I_n \subset (0, 1)$ και

$$\lambda(I_n) = 2\delta_n < \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Τότε το U είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ και $U \subset (0, 1) \subset [0, 1]$. Είναι επίσης πυκνό στο $[0, 1]$, διότι $D \subseteq U$ και $\overline{D} = [0, 1]$.

Για το μέτρο του U , από την υποπροσθετικότητα του λ έχουμε

$$\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Τέλος, έστω $(a, b) \subset [0, 1]$ ανοικτό διάστημα. Υπάρχει $q_n \in D \cap (a, b)$. Αν

$$\delta = \min\{\delta_n, q_n - a, b - q_n\} > 0,$$

τότε $(q_n - \delta, q_n + \delta) \subseteq I_n \cap (a, b)$, και συνεπώς

$$\lambda(U \cap (a, b)) \geq 2\delta > 0.$$

4.23. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda_2(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις αριθμήσιμες καλύψεις του A από ανοικτούς δίσκους $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\alpha(B) = \pi r^2$ για έναν δίσκο ακτίνας r . Συμπεράνατε ότι: αν T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ τότε $\lambda_2(A) = \lambda_2(T(A))$.

Υπόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι φραγμένο, και άρα $\lambda(A) < +\infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την εξωτερική κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, υπάρχει φραγμένο ανοικτό σύνολο G τέτοιο ώστε $A \subseteq G$ και $\lambda(G) < \lambda(A) + \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι

$$G = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right)$$

όπου $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανοικτών δίσκων και $\lambda(N) = 0$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ξένη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ από δυαδικά ημιανοικτά τετράγωνα που περιέχονται στο G : για κάθε σημείο του G επιλέγουμε το πρώτο δυαδικό επίπεδο στο οποίο το μοναδικό τετράγωνο που το περιέχει βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο G , και κρατάμε τα μέγιστα ως προς την ένταξη τέτοια τετράγωνα. Θεωρούμε τον ανοικτό δίσκο R_k που εγγράφεται στο I_k . Αν a_k είναι το μήκος της ακμής του I_k τότε η ακτίνα του R_k είναι $a_k/2$, δηλαδή

$$\lambda(R_k) = \pi a_k^2/4 = (\pi/4)\lambda(I_k).$$

Συνεπώς, η ένωση $\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ έχει μέτρο ίσο με $(\pi/4)\lambda(G)$. Θεωρούμε τώρα το $G \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{R_k}$, το οποίο είναι ανοικτό και έχει μέτρο $\leq (1 - \pi/4)\lambda(G)$, και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Στο δεύτερο βήμα, θα ορίσουμε μια νέα ακολουθία ανοικτών δίσκων που περιέχονται στο G και το σύνολο που θα απομείνει θα έχει μέτρο $\leq (1 - \pi/4)^2\lambda(G)$. Μετά από άπειρα βήματα θα εξαντλήσουμε το G , με την εξαίρεση ενός συνόλου μέτρου 0 και των περιφερειών των δίσκων που θα έχουμε επιλέξει, που επίσης θα έχουν συνολικά μέτρο 0. Μαζεύοντας όλους τους δίσκους (από όλα τα βήματα) σε μια ακολουθία $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$, έχουμε τελικά ότι

$$G = N \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right)$$

όπου $\lambda(N) = 0$.

Στη συνέχεια μπορούμε να καλύψουμε το N από μια άλλη ακολουθία $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών δίσκων με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(C_n) < \varepsilon$$

(εξηγήστε γιατί: βρείτε πρώτα ανοικτό $U \supset N$ με $\lambda(U) < \varepsilon/2$, γράψτε το U ως αριθμήσιμη ένωση μη επικαλυπτόμενων ημιανοικτών τετραγώνων και στη συνέχεια καλύψτε το U , άρα και το N , με τους περιγεγραμμένους δίσκους αυτών των τετραγώνων). Φτιάχνοντας μια ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ που αποτελείται από όλους τους δίσκους D_n και C_n μαζί, έχουμε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(D_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(C_n) < \lambda(G) + \varepsilon < \lambda(A) + 2\varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο. Για μη φραγμένο A εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα στα $A \cap B(0, m)$ και αφήνουμε $m \rightarrow \infty$.

Τέλος, αν T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, απεικονίζει κάθε ανοικτό δίσκο σε ανοικτό δίσκο της ίδιας ακτίνας. Επομένως κάθε κάλυψη $A \subseteq \bigcup_n B_n$ δίνει κάλυψη $T(A) \subseteq \bigcup_n T(B_n)$ με το ίδιο άθροισμα $\sum_n \alpha(B_n)$. Από τον τύπο που μόλις αποδείξαμε παίρνουμε $\lambda_2(T(A)) \leq \lambda_2(A)$. Εφαρμόζοντας το ίδιο στον ορθογώνιο T^{-1} παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα, άρα $\lambda_2(T(A)) = \lambda_2(A)$.

Δύσκολες ασκήσεις

4.24. Για κάθε $A \in \mathcal{M}_{\lambda^*}$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\rho(A, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t, x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Το όριο $\rho(A, x)$ είναι η *μετρική πυκνότητα* του A στο σημείο x .

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q}, x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A, 0) = \alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t)) = 0 \quad \text{και} \quad \lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x-t, x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t, x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q}, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t, x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x-t, x+t))}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n) = \alpha \lambda(C_n)$ (για παράδειγμα, σε καθεμία από τις δύο συνιστώσες του C_n μπορούμε να πάρουμε ένα υποδιάστημα μήκους α φορές το μήκος της αντίστοιχης συνιστώσας). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leq t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A \cap (-t, t))}{2t} \leq \frac{\lambda(A \cap (-1/n, 1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha \frac{n+1}{n} \leq \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(A \cap (-t, t))}{2t} &\geq \frac{\lambda(A \cap (-1/(n+1), 1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n} \\ &= \alpha \frac{n}{n+1} \geq \alpha(1-2t). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda(A \cap (-t, t))}{2t} = \alpha,$$

δηλαδή $\rho(A, 0) = \alpha$.

4.25. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0, 1]$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E \subset [0, 1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α . Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1, 1]$ και ορίζουμε $E_n = q_n + E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1, 2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1 = \lambda([0, 1]) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = +\infty > 3 = \lambda([-1, 2]) \geq \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(E) < \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$

Θεωρήστε τα σύνολα $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap A^c$, $E_3 = E_4 = \dots = \emptyset$.

4.26. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(E \cap (E + t)) = \lambda(E).$$

(β) Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x, x + s, x + 2s, \dots, x + (k - 1)s \in E.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $\lambda(E \cup E + t) \leq \lambda(E) + \lambda(E + t) = 2\lambda(E) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και

$$\lambda(E \cap (E + t)) = \lambda(E) + \lambda(E + t) - \lambda(E \cup (E + t)) = 2\lambda(E) - \lambda(E \cup (E + t)),$$

συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(E \cup (E + t)) = \lambda(E).$$

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει κάλυψη του E με φραγμένα ανοικτά διαστήματα (I_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(E) + \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$E \cup (E + t) \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n + t) \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup (I_n + t).$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon.$$

Θέτουμε $\theta := \min\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_N)\}$ και παρατηρούμε ότι αν $|t| < \theta$ τότε το $I_n \cup (I_n + t)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\lambda(I_n) + |t|$ διότι τα I_n και $I_n + t$ τέμνονται. Επιλέγουμε $0 < \delta < \min\{\theta, \varepsilon/N\}$ και για κάθε $t \in (-\delta, \delta)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda(E) &\leq \lambda(E \cup (E + t)) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup (I_n + t)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n \cup (I_n + t)) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \lambda(J_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda(I_n) + \lambda(I_n + t)) = \sum_{n=1}^N \lambda(J_n) + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) \\ &\leq \delta \cdot N + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(E) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(E \cup (E + t)) = \lambda(E)$, και έπεται το ζητούμενο.

(β) Για $k = 1$ το συμπέρασμα είναι άμεσο: επειδή $\lambda(E) > 0$, το E είναι μη κενό και αρκεί να πάρουμε οποιοδήποτε $x \in E$ (και, λόγου χάριν, $s = 1$). Υποθέτουμε λοιπόν στο εξής ότι $k \geq 2$.

Αφού $\lambda(E) > 0$, μπορούμε να βρούμε διάστημα $[a, b]$ στο οποίο το E έχει σχετική πυκνότητα όσο κοντά στο 1 θέλουμε. Πράγματι, καλύπτουμε ένα υποσύνολο του E θετικού και πεπερασμένου μέτρου με ανοικτά διαστήματα συνολικού μήκους μικρότερου από $\frac{k}{k-1}$ φορές το μέτρο του τότε σε ένα από αυτά η σχετική πυκνότητα είναι μεγαλύτερη από $\frac{k-1}{k}$. Επομένως υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k-1}{k}(b-a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a + s), \quad I_2 = [a + s, a + 2s), \quad \dots, \quad I_k = [a + (k-1)s, b],$$

και για κάθε $j = 1, \dots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \dots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \dots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \quad \bigcap_{j=1}^k B_j \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^k B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j , έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \dots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της (*) γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^k B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^k (I_1 \setminus B_j)\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda(I_1 \setminus B_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \setminus A_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a, b] \setminus A) \\ &< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1). \end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^k B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1 , και έπεται η (*).

4.27. Έστω μ ένα μη αρνητικό μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει κλειστό υποσύνολο F του $\mathbb{R}$ με $\mu(F) = 1$ και την εξής ιδιότητα: για κάθε κλειστό σύνολο E που περιέχεται γνήσια στο F ισχύει $\mu(E) < 1$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$G = \{x \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } \delta_x > 0 \text{ ώστε } \mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0\}.$$

Παρατηρήστε ότι το G είναι ανοιχτό: αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$ και βλέπουμε ότι $(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq G$, άρα $x \in G^\circ$. [Πράγματι, αν $y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ τότε μπορούμε να βρούμε $\delta_y > 0$ ώστε $(y - \delta_y, y + \delta_y) \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$ και από τη μονοτονία του μέτρου έπεται ότι $\mu((y - \delta_y, y + \delta_y)) = 0$, άρα $y \in G$.]

Παρατηρούμε επίσης ότι το G γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων I_n με $\mu(I_n) = 0$, απ' όπου έπεται ότι $\mu(G) = 0$. [Πράγματι, αν $x \in G$ τότε παίρνουμε $\delta_x > 0$ ώστε $\mu((x - \delta_x, x + \delta_x)) = 0$ και βρίσκουμε ανοικτό διάστημα I_x με άκρα στο $\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x \in I_x \subseteq (x - \delta_x, x + \delta_x)$. Τότε, όπως πριν έχουμε $x \in I_x$ και $I_x \subseteq G$. Άρα, $G = \bigcup_{x \in G} I_x$ και αυτή η ένωση είναι αριθμήσιμη διότι το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο.]

Ορίζουμε τώρα $F = \mathbb{R} \setminus G$. Το F είναι κλειστό σύνολο και

$$\mu(F) = \mu(\mathbb{R}) - \mu(G) = 1 - 0 = 1.$$

Έστω E κλειστό σύνολο το οποίο περιέχεται γνήσια στο F . Επιλέγουμε $x \in F \setminus E$. Έχουμε $x \notin G$, άρα

για κάθε $\delta > 0$ ισχύει ότι $\mu((x - \delta, x + \delta)) > 0$. Αφού $x \notin E$ και το E είναι κλειστό, μπορούμε να βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $(x - \delta_0, x + \delta_0) \cap E = \emptyset$. Τότε,

$$1 = \mu(\mathbb{R}) \geq \mu(E) + \mu((x - \delta_0, x + \delta_0)) > \mu(E).$$

4.28. Έστω E, F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) > 0$ και $\lambda_k(F) > 0$. Δείξτε ότι το $E + F$ έχει μη κενό εσωτερικό. Ειδικότερα, για $k = 1$ το $E + F$ περιέχει διάστημα.

Υπόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε μετρήσιμα υποσύνολα $E_0 \subseteq E$ και $F_0 \subseteq F$ με

$$0 < \lambda_k(E_0) < \infty, \quad 0 < \lambda_k(F_0) < \infty.$$

Θέτουμε

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{E_0}(x) \chi_{F_0}(z - x) d\lambda_k(x) = (\chi_{E_0} * \chi_{F_0})(z).$$

Επειδή $\chi_{E_0}, \chi_{F_0} \in L^1(\mathbb{R}^k)$, η h είναι συνεχής. Πράγματι, για $u \in \mathbb{R}^k$,

$$|h(z + u) - h(z)| \leq \|\chi_{E_0}\|_\infty \|\chi_{F_0}(\cdot + u) - \chi_{F_0}\|_1 = \|\chi_{F_0}(\cdot + u) - \chi_{F_0}\|_1 \rightarrow 0$$

καθώς $u \rightarrow 0$, από τη συνέχεια των μεταφορών στον L^1 .

Από το θεώρημα του Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^k} h(z) d\lambda_k(z) = \lambda_k(E_0) \lambda_k(F_0) > 0.$$

Άρα υπάρχει z_0 με $h(z_0) > 0$. Από τη συνέχεια της h υπάρχει ανοικτή περιοχή U του z_0 στην οποία $h(z) > 0$. Για κάθε $z \in U$ υπάρχει $x \in E_0$ με $z - x \in F_0$, οπότε

$$z = x + (z - x) \in E_0 + F_0 \subseteq E + F.$$

Συνεπώς $U \subseteq E + F$, και το $E + F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

4.29. Αποδείξτε ότι: αν $\lambda(E) > 0$ και για κάθε $x, y \in E$ έπεται ότι $\frac{1}{2}(x + y) \in E$, τότε το E έχει μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2} = \left\{ \frac{x}{2} : x \in E \right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{\lambda(E)}{2} > 0.$$

Από την Άσκηση 4.28, το σύνολο $\frac{E}{2} + \frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

4.30. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^\infty$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι $\lambda(E) = 0$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^n x) \rightarrow a$ τότε $a = 0$. Πράγματι, αν $\sin(2^n x) \rightarrow a \neq 0$ τότε, για

μεγάλα n , έχουμε $\sin(2^n x) \neq 0$, άρα

$$\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2 \sin(2^n x)} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε

$$\sin^2(2^n x) = \frac{1 - \cos(2^{n+1} x)}{2} \rightarrow \frac{1}{4},$$

άρα

$$1 = \cos^2(2^n x) + \sin^2(2^n x) \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το

$$A = \{x \in [0, 2\pi) : \sin(2^n x) \rightarrow 0\}.$$

Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x) = \sin(2^k x)$, και $A_{k,m} = \{x \in [0, 2\pi) : |f_k(x)| < \frac{1}{m}\}$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0, 2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k,m}.$$

Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in A$ τότε

$$\sin\left(2^n \frac{x+y}{2}\right) = \sin(2^{n-1} x) \cos(2^{n-1} y) + \cos(2^{n-1} x) \sin(2^{n-1} y) \rightarrow 0,$$

συνεπώς $\frac{x+y}{2} \in A$. Από την Άσκηση 4.29, το A έχει μη κενό εσωτερικό. Επομένως και το $\frac{1}{2\pi}A \subseteq [0, 1]$ έχει μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ με $0 < k < 3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε

$$\sin\left(\frac{2^{n+1}k}{3^m}\pi\right) \rightarrow 0.$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο. Πράγματι, η ακολουθία των υπολοίπων $2^{n+1}k \bmod 2 \cdot 3^m$ είναι περιοδική από κάποιο σημείο και μετά (μάλιστα, επειδή το 2 είναι αντιστρέψιμο modulo 3^m , αρκεί να εξετάσουμε τα υπόλοιπα modulo 3^m μαζί με την παραβολή). Συνεπώς η ακολουθία

$$\sin\left(\frac{2^{n+1}k}{3^m}\pi\right)$$

παίρνει μόνο πεπερασμένες τιμές και είναι περιοδική από κάποιο σημείο και μετά. Καμία από αυτές τις τιμές δεν είναι 0: αν

$$\sin\left(\frac{2^{n+1}k}{3^m}\pi\right) = 0,$$

τότε $3^m \mid 2^{n+1}k$, πράγμα αδύνατο αφού $3 \nmid k$. Μια τελικά περιοδική ακολουθία με πεπερασμένο σύνολο μη μηδενικών τιμών δεν μπορεί να συγκλίνει στο 0. Η αντίφαση δείχνει ότι $\lambda(A) = 0$.

4.31. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(1)$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{t \in [0, 1] : \text{υπάρχει } x \in [0, 1-t] \text{ ώστε } f(x+t) = f(x)\}.$$

(α) Δείξτε ότι το A είναι κλειστό, άρα και μετρήσιμο.

(β) Αν $B = \{t \in [0, 1] : 1-t \in A\}$, δείξτε ότι $A \cup B = [0, 1]$.

(γ) Δείξτε ότι $\lambda(A) \geq 1/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ακολουθία (t_n) στοιχείων του A η οποία συγκλίνει σε κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Προφανώς, αφού κάθε $t_n \in [0, 1]$, θα έχουμε και ότι $t \in [0, 1]$. Για κάθε n βρίσκουμε $x_n \in [0, 1]$ ώστε $x_n + t_n \in [0, 1]$ και $f(x_n + t_n) = f(x_n)$. Η ακολουθία των x_n περιέχεται ολόκληρη στο συμπαγές $[0, 1]$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x_0 \in [0, 1]$. Τότε όμως $x_0 + t \in [0, 1]$ (αφού $x_{k_n} + t_{k_n} \rightarrow x_0 + t$ και για κάθε n , $0 \leq x_{k_n} + t_{k_n} \leq 1$), ενώ από την συνέχεια της f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_0 + t).$$

Αφού για κάθε n , $f(x_{k_n} + t_{k_n}) = f(x_{k_n})$, συμπεραίνουμε ότι $f(x_0 + t) = f(x_0)$, που σημαίνει ότι $t \in A$.

(β) Αφού $f(0) = f(1)$, μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς την f σε μία 1-περιοδική συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (όπου $\tilde{f}(z) = f(z - [z])$). Έστω $t \in [0, 1]$. Ορίζουμε $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \tilde{f}(x+t) - \tilde{f}(x)$. Η g μηδενίζεται για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ (αφού, αν θεωρήσουμε $y \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(y) = \min f = \min \tilde{f}$, θα ισχύει $g(y-t) \leq 0 \leq g(y)$). Επειδή η g είναι και 1-περιοδική, μπορούμε να βρούμε $x_0 \in [0, 1]$ στο οποίο η g να μηδενίζεται. Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x_0 + t \leq 1$ τότε $t \in A$. Αλλιώς, αν $x_0 + t > 1$, τότε $0 < x_0 + t - 1 \leq 1$ και $g(x_0 - 1) = 0$, άρα $f(x_0 + t - 1) = f(x_0) = f((x_0 + t - 1) + 1 - t)$. Αυτό σημαίνει ότι $1 - t \in A$, ή ισοδύναμα ότι $t \in B$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $[0, 1] \setminus A \subseteq B$. Επίσης,

$$\lambda(B) = \lambda((-A + 1) \cap [0, 1]) \leq \lambda(-A + 1) = \lambda(A).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$1 = \lambda([0, 1]) = \lambda(A) + \lambda([0, 1] \setminus A) \leq \lambda(A) + \lambda(B) \leq 2\lambda(A),$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

4.32. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι

$$\lambda(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})) = 0.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x \in A - (\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q}))$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Q}$ τότε $-x \in \mathbb{Q}$ και ταυτόχρονα $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο μας δίνει $y = a - x \in A + \mathbb{Q}$, άτοπο.

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 4.28. Αν είχαμε $\lambda(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})) > 0$ τότε το σύνολο $A - (\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q}))$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I . Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

4.33. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε μη εκφυλισμένο διάστημα $J \subseteq [0, 1]$ ισχύει

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Λύση. Αριθμούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα με ρητά άκρα που περιέχονται στο $(0, 1)$ ως

$$I_1, I_2, \dots$$

Θα κατασκευάσουμε αναδρομικά συμπαγή, ξένα ανά δύο σύνολα

$$K_1, L_1, K_2, L_2, \dots$$

με θετικό μέτρο και κενό εσωτερικό, έτσι ώστε $K_n, L_n \subseteq I_n$ για κάθε n .

Υποθέτουμε ότι έχουν ήδη κατασκευαστεί τα σύνολα μέχρι τον δείκτη $n-1$. Η πεπερασμένη ένωση

$$F_{n-1} = \bigcup_{j < n} (K_j \cup L_j)$$

είναι κλειστή και έχει κενό εσωτερικό. Επομένως το $I_n \setminus F_{n-1}$ είναι μη κενό ανοικτό σύνολο και περιέχει δύο ξένα κλειστά διαστήματα θετικού μήκους. Μέσα σε καθένα από αυτά επιλέγουμε ένα συμπαγές σύνολο θετικού μέτρου και κενού εσωτερικού (για παράδειγμα, κατάλληλα μετατοπισμένο και ομοιόθετο παχύ σύνολο Cantor). Τα ονομάζουμε K_n και L_n . Έτσι η αναδρομή μπορεί να συνεχιστεί.

Θέτουμε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Το E είναι Borel, ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων. Επιπλέον, από την κατασκευή κάθε L_n είναι ξένο από όλα τα K_m : είναι ξένο από τα προηγούμενα κατά την επιλογή του, ενώ κάθε μεταγενέστερο K_m επιλέγεται έξω από το ήδη κατασκευασμένο L_n . Άρα $L_n \subseteq [0, 1] \setminus E$.

Έστω τώρα μη εκφυλισμένο διάστημα $J \subseteq [0, 1]$. Υπάρχει ανοικτό διάστημα με ρητά άκρα I_n τέτοιο ώστε $I_n \subseteq J$. Τότε

$$K_n \subseteq E \cap J, \quad L_n \subseteq J \setminus E,$$

και, επειδή $\lambda(K_n) > 0$ και $\lambda(L_n) > 0$, παίρνουμε

$$\lambda(E \cap J) > 0, \quad \lambda(J \setminus E) > 0,$$

όπως ζητείται.

4.34. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n} \right).$$

(β) Αν $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με $\sum_{n=1}^\infty \lambda(E_n) = \infty$, τότε

$$\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^\infty \lambda(E_k \cap E_n) = \infty.$$

Υπόδειξη. (α) Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty$. Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right) \subseteq [-1, 2]$, άρα $\lambda\left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leq 3$. Επίσης, $\sum_{n \in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{2}{k^2} < 4$. Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leq \lambda\left(\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) + \sum_{n \in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty.$$

(β) Έστω $N \in \mathbb{N}$. Γράφουμε

$$\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \chi_{E_k \cap E_n} = \sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \chi_{E_k} \chi_{E_n} = \sum_{k, n=1}^N \chi_{E_k} \chi_{E_n} - \sum_{k=1}^N \chi_{E_k}^2 = \left(\sum_{k=1}^N \chi_{E_k}\right)^2 - \sum_{k=1}^N \chi_{E_k}.$$

Αν θέσουμε $g_N = \sum_{k=1}^N \chi_{E_k}$, ολοκληρώνοντας την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \lambda(E_k \cap E_n) = \int_{[0,1]} \left(\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \chi_{E_k \cap E_n}\right) d\lambda \geq \int_{[0,1]} g_N^2 - \int_{[0,1]} g_N d\lambda.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε $\int_{[0,1]} g_N^2 \geq \left(\int_{[0,1]} g_N d\lambda\right)^2$, άρα τελικά

$$\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \lambda(E_k \cap E_n) \geq \left(\int_{[0,1]} g_N d\lambda\right)^2 - \int_{[0,1]} g_N d\lambda = \left(\int_{[0,1]} g_N d\lambda\right) \cdot \left(\int_{[0,1]} g_N d\lambda - 1\right).$$

Όμως, $\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^\infty \lambda(E_k \cap E_n) \geq \sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \lambda(E_k \cap E_n)$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $\int_{[0,1]} g_N d\lambda = \sum_{k=1}^N \lambda(E_k) \rightarrow \infty$ από την υπόθεση. Άρα, αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^\infty \lambda(E_k \cap E_n) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{k, n=1 \\ k \neq n}}^N \lambda(E_k \cap E_n) = +\infty.$$

4.35. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $U_n = \left\{x \in \mathbb{R}^k : \text{dist}(x, E) < \frac{1}{n}\right\}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το E είναι συμπαγές τότε $\lambda(U_n) \rightarrow \lambda(E)$.

(β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει αν το E είναι κλειστό και μη φραγμένο ή αν το E είναι ανοικτό και φραγμένο.

Υπόδειξη. (α) Έστω $E \subset \mathbb{R}^k$ συμπαγές, άρα φραγμένο. Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\|_2 \leq M$ για κάθε $x \in E$ και τότε $\|x\|_2 \leq M + 1$ για κάθε $x \in U_1$. Δηλαδή, το U_1 είναι φραγμένο και ειδικότερα $\lambda(U_1) < \infty$. Η ακολουθία $(U_n)_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \bar{E} = E$ διότι το E είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Λόγω συνέχειας του μέτρου συμπεραίνουμε ότι $\lambda(U_n) \rightarrow \lambda(E)$.

(β) Για την πρώτη περίπτωση παίρνουμε $E = \mathbb{Z}^k$. Το E είναι κλειστό και $\lambda_k(E) = 0$. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε

$$r_n = \min \left\{ \frac{1}{2n}, \frac{1}{4} \right\}.$$

Οι μπάλες $B(m, r_n)$, $m \in \mathbb{Z}^k$, είναι ξένες ανά δύο και, επειδή $r_n < 1/n$, περιέχονται στο U_n . Άρα

$$\lambda_k(U_n) \geq \sum_{m \in \mathbb{Z}^k} \lambda_k(B(m, r_n)) = +\infty.$$

Έτσι $\lambda_k(U_n) = \infty$ για κάθε n , ενώ $\lambda_k(E) = 0$.

Για τη δεύτερη περίπτωση αρκεί ήδη το $k = 1$. Παίρνουμε ανοικτό πυκνό $E \subset (0, 1)$ με $\lambda(E) < 1/2$ τέτοιο σύνολο κατασκευάζεται, για παράδειγμα, καλύπτοντας τους ρητούς του $(0, 1)$ με ανοικτά διαστήματα συνολικού μήκους μικρότερου από $1/2$. Τότε $\bar{E} = [0, 1]$. Τα

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{dist}(x, E) < \frac{1}{n} \right\}$$

είναι φθίνοντα, U_1 έχει πεπερασμένο μέτρο και $\bigcap_n U_n = \bar{E} = [0, 1]$. Επομένως, από τη συνέχεια του μέτρου από πάνω,

$$\lambda(U_n) \rightarrow \lambda([0, 1]) = 1 > \lambda(E).$$

4.36. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει σχετικά ανοικτό και πυκνό $U \subset [0, 1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$ και $\lambda(\partial_{[0,1]} U) > 1 - \varepsilon$, όπου $\partial_{[0,1]} U$ είναι το σύνορο του U ως υποσυνόλου του $[0, 1]$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ Lebesgue κλειστών μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ τέτοια ώστε όλα τα A_n να έχουν κενό εσωτερικό και η ένωσή τους να έχει μέτρο 1.

Υπόδειξη. (α) Έστω $D = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $(0, 1)$. Ορίζουμε

$$U = \bigcup_{n=1}^\infty \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right) \cap (0, 1).$$

Το U είναι σχετικά ανοικτό και πυκνό στο $[0, 1]$, αφού η σχετική κλειστότητά του ικανοποιεί $\bar{U}^{[0,1]} = [0, 1]$. Επίσης, $\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{2\varepsilon}{2^{n+2}} = \varepsilon < \varepsilon$. Επειδή το U είναι σχετικά ανοικτό και πυκνό,

$$\partial_{[0,1]} U = \bar{U}^{[0,1]} \setminus U = [0, 1] \setminus U,$$

και συνεπώς

$$\lambda(\partial_{[0,1]} U) = 1 - \lambda(U) > 1 - \varepsilon.$$

(β) Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε το ανοικτό σύνολο U_n που ορίζεται όπως στο (α) με $\varepsilon = 1/(n+1)$. Κατόπιν θέτουμε $A_n = [0, 1] \setminus U_n$. Κάθε A_n είναι κλειστό στο $[0, 1]$ και έχει κενό σχετικό εσωτερικό, επειδή το U_n είναι πυκνό στο $[0, 1]$. Επίσης, $\lambda(A_n) > 1 - 1/(n+1)$. Συνεπώς, $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq \lambda(A_n) > 1 - 1/(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq 1$. Αφού $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subseteq [0, 1]$ έχουμε επίσης $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \leq 1$ και έπεται το

ζητούμενο.

4.37. Στο $[0, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0, 1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0, 1] \setminus N$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(N \cup T).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $N - N$ δεν περιέχει κανένα μη μηδενικό ρητό αριθμό. Πράγματι, αν $x, y \in N$ και $x - y \in \mathbb{Q}$, τότε $x \sim y$, και επειδή το N περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση, έχουμε $x = y$. Επομένως το $N - N$ δεν μπορεί να περιέχει μη εκφυλισμένο διάστημα, αφού κάθε τέτοιο διάστημα περιέχει μη μηδενικό ρητό.

Έστω τώρα ότι $\lambda^*(T) < 1$. Υπάρχει μετρήσιμο $A \supseteq T$ με $\lambda(A) = \lambda^*(T) < 1$. Τότε το $B = [0, 1] \setminus A$ είναι μετρήσιμο, $\lambda(B) > 0$ και, επειδή $B \cap T = \emptyset$, έχουμε $B \subseteq N$. Από το λήμμα του Steinhaus, το $B - B$ περιέχει διάστημα γύρω από το 0, ενώ $B - B \subseteq N - N$, άτοπο. Άρα $\lambda^*(T) = 1$.

Μένει να δούμε ότι $\lambda^*(N) > 0$. Αν ήταν $\lambda^*(N) = 0$, τότε το N θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο και, για κάθε $q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, θα είχαμε $\lambda(N + q) = 0$. Όμως κάθε $x \in [0, 1]$ είναι ισοδύναμο με τον μοναδικό αντιπρόσωπό του $n_x \in N$, οπότε $x - n_x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ και συνεπώς

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (N + q).$$

Το δεξί μέλος θα είχε μέτρο 0, αντίφαση. Επομένως $\lambda^*(N) > 0$, και τελικά

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > 1 = \lambda^*(N \cup T).$$

4.38. Έστω $A \subset [0, 1]$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(α) Αν το A είναι ανοικτό τότε $\lambda(A) = \lambda(\bar{A})$.

(β) Αν $\lambda(A^\circ) = \lambda(\bar{A})$ τότε το A είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Γράφουμε $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε το ανοικτό διάστημα $J_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \cap (0, 1)$. Θεωρούμε το ανοικτό σύνολο $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$. Τότε, $A \subset [0, 1]$ και

$$\lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Όμως, $A \supseteq \mathbb{Q} \cap (0, 1)$, άρα $\bar{A} = [0, 1]$. Συνεπώς,

$$\lambda(A) \leq \varepsilon < 1 = \lambda(\bar{A}).$$

(β) Τα $A^\circ, \bar{A}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα (ως ανοικτό και κλειστό σύνολο αντίστοιχα) και $A^\circ \subseteq \bar{A} \subset [0, 1]$. Συνεπώς,

$$\lambda(\bar{A} \setminus A^\circ) = \lambda(\bar{A}) - \lambda(A^\circ) = 0$$

από την υπόθεση. Παρατηρούμε ότι $A \setminus A^\circ \subseteq \bar{A} \setminus A^\circ$, άρα το $A \setminus A^\circ$ είναι επίσης μετρήσιμο σύνολο, από την πληρότητα του μέτρου Lebesgue. Έπεται τώρα ότι το $A = A^\circ \cup (A \setminus A^\circ)$ είναι κι αυτό μετρήσιμο σύνολο.

4.39. Έστω C το σύνολο του Cantor. Αποδείξτε ότι $C + C = [0, 2]$ και εξετάστε αν το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C .

Υπόδειξη. Έστω $z \in [0, 2]$. Τότε,

$$\frac{z}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}, \quad \epsilon_k \in \{0, 1, 2\}.$$

Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0, 0), (2, 0)$ ή $(2, 2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \quad \text{και} \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Τότε, $x, y \in C$ και

$$\frac{x+y}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{z}{2},$$

δηλαδή $z = x + y \in C + C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C + C \subseteq [0, 2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0, 1]$.

Έστω $x \in C$. Υπάρχουν $a_k \in \{0, 2\}$ ώστε $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$. Είναι φανερό ότι $x_n \in \mathbb{Q}$. Θέτοντας $a'_k = a_k$ αν $1 \leq k \leq n$ και $a'_k = 0$ αν $k > n$, έχουμε $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a'_k}{3^k}$ και $a'_k \in \{0, 2\}$ για κάθε $k \geq 1$, απ' όπου φαίνεται ότι $x_n \in C$. Έχουμε λοιπόν $x_n \in C \cap \mathbb{Q}$ και

$$|x - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \right| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3^n} \rightarrow 0.$$

Άρα, $x \in \overline{C \cap \mathbb{Q}}$. Δηλαδή, το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C .

4.40. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \lambda((x + E) \cap E)$$

είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε πρώτα το γνωστό γεγονός ότι οι μεταφορές είναι συνεχείς στο $L^1(\mathbb{R})$: αν $h \in L^1(\mathbb{R})$, τότε

$$\|h(\cdot - t) - h\|_1 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow 0).$$

Για πληρότητα, αρκεί να το ελέγξουμε πρώτα για δείκτριες φραγμένων διαστημάτων, κατόπιν για βηματικές συναρτήσεις με φραγμένη στήριξη, και τέλος για κάθε $h \in L^1$ με προσέγγιση στο L^1 .

Επειδή $\chi_E \in L^1(\mathbb{R})$, γράφουμε

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(u - x) \chi_E(u) d\lambda(u).$$

Άρα, για $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(u - x) - \chi_E(u - y)| d\lambda(u) \\ &= \|\chi_E(\cdot - (x - y)) - \chi_E\|_1. \end{aligned}$$

Το τελευταίο μέλος τείνει στο 0 όταν $x \rightarrow y$, οπότε η g είναι συνεχής.

Για το όριο στο $+\infty$, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε φραγμένο μετρήσιμο $F \subseteq E$ με $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$ και

θέτουμε $B = E \setminus F$. Επειδή το F είναι φραγμένο, υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $(x + F) \cap F = \emptyset$ για κάθε $x > x_0$. Για τέτοιο x ,

$$(x + E) \cap E \subseteq [(x + F) \cap B] \cup [(x + B) \cap F] \cup [(x + B) \cap B],$$

και επομένως

$$0 \leq g(x) \leq \lambda(B) + \lambda(x + B) + \lambda(x + B) = 3\lambda(B) < 3\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

4.41. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ξένα σύνολα E_1, E_2 τέτοια ώστε $E = E_1 \cup E_2$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_2)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $D = \left\{ \frac{m}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Παρατηρήστε ότι $D - D = D$. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο $\mathbb{R}$ ως εξής:

$$x \sim y \iff x - y \in D.$$

Η $\sim$ χωρίζει το $\mathbb{R}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας, και εφαρμόζοντας το αξίωμα της επιλογής βρίσκουμε ένα σύνολο N το οποίο περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Τα σύνολα $x + N$, $x \in D$ είναι ξένα ανά δύο (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας την $D - D = D$) και $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in D} (x + N)$.

Χωρίζουμε τώρα το D στα ξένα υποσύνολα $D_1 = \left\{ \frac{2m}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$ και $D_2 = \left\{ \frac{2m+1}{3^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Παρατηρήστε ότι

$$D_2 - D_2 = D_1 - D_1 = D_1.$$

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_1 = E \cap \left(\bigcup_{x \in D_1} (x + N) \right) \quad \text{και} \quad E_2 = E \cap \left(\bigcup_{x \in D_2} (x + N) \right).$$

Τότε, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $E = E_1 \cup E_2$.

Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E_1) < \lambda(E)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο F τέτοιο ώστε $E_1 \subseteq F \subseteq E$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E_1) < \lambda(E)$. Τότε, $\lambda(E \setminus F) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} (-\delta, \delta) &\subseteq (E \setminus F) - (E \setminus F) \subseteq E_2 - E_2 \subseteq \bigcup_{x, y \in D_2} [(x + N) - (y + N)] = \bigcup_{x, y \in D_2} [(x - y) + N - N] \\ &= \bigcup_{z \in D_1} [z + N - N]. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{3^n} \in (-\delta, \delta)$. Τότε, υπάρχουν $z \in D_1$ και $x, y \in N$ ώστε $\frac{1}{3^n} = z + x - y$. Επειδή $z \in D_1$, ενώ $\frac{1}{3^n} \in D_2$, έχουμε $\frac{1}{3^n} - z \neq 0$. Επίσης, $\frac{1}{3^n} - z \in D$, άρα $x \sim y$. Δηλαδή, $x, y \in N$, $x \neq y$ και $x \sim y$, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του N .

Ομοίως, αν υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E_2) < \lambda(E)$ τότε μπορούμε να βρούμε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο F τέτοιο ώστε $E_2 \subseteq F \subseteq E$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E_2) < \lambda(E)$. Τότε, $\lambda(E \setminus F) > 0$ και από το λήμμα του Steinhaus

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} (-\delta, \delta) &\subseteq (E \setminus F) - (E \setminus F) \subseteq E_1 - E_1 \subseteq \bigcup_{x, y \in D_1} [(x + N) - (y + N)] = \bigcup_{x, y \in D_1} [(x - y) + N - N] \\ &= \bigcup_{z \in D_1} [z + N - N]. \end{aligned}$$

Αυτό οδηγεί, όπως έχουμε δει, σε άτοπο. Συνεπώς, όταν $0 < \lambda(E) < \infty$, ισχύει

$$\lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_2) = \lambda(E).$$

Μένει η περίπτωση $\lambda(E) = \infty$. Κρατάμε τον ίδιο, καθολικό διαμερισμό του $\mathbb{R}$ που ορίζεται από τα D_1, D_2, N και τα ίδια σύνολα E_1, E_2 . Θέτουμε $F_m = E \cap [-m, m]$. Τότε $\lambda(F_m) < \infty$ και, από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω,

$$\lambda(F_m) \longrightarrow \lambda(E) = \infty.$$

Για κάθε m με $\lambda(F_m) > 0$, εφαρμόζοντας το πεπερασμένο μέρος της απόδειξης στο F_m παίρνουμε

$$\lambda^*(F_m \cap E_i) = \lambda(F_m), \quad i = 1, 2.$$

Επειδή $F_m \cap E_i \subseteq E_i$, η μονοτονία του εξωτερικού μέτρου δίνει

$$\lambda^*(E_i) \geq \lambda(F_m) \quad (i = 1, 2).$$

Αφήνοντας $m \rightarrow \infty$, καταλήγουμε $\lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_2) = \infty = \lambda(E)$. Άρα το συμπέρασμα ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις.

4.42. Θεωρούμε το σύνολο $A := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1 \right\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $\lambda(A) = 0$.

Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $C_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1 \right\}$. Παρατηρήστε ότι το C_n έχει πληθάρημο $|C_n| \leq 2^n$. Ορίζουμε επίσης

$$A_n = \bigcup_{x \in C_n} \left(x + \left[0, \frac{2}{(n+1)!} \right] \right).$$

Έστω $n \geq 1$. Παρατηρούμε ότι αν $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \in A$ τότε $x = \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{k!} \in C_n$ και

$$0 \leq y - x = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{2}{(n+1)!},$$

δηλαδή $y \in A_n$. Έπεται ότι

$$\lambda(A) \leq \lambda(A_n) \leq 2^n \frac{2}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$ (το γεγονός ότι το όριο ισούται με 0 προκύπτει εύκολα με το κριτήριο του λόγου). Έπεται ότι $\lambda(A) = 0$. Είναι τώρα προφανές ότι το A έχει κενό εσωτερικό.

Θα δείξουμε επίσης ότι το A είναι κλειστό. Έστω $x_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{m,k}}{k!} \in A$ και ας υποθέσουμε ότι $x_m \rightarrow x \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε αρχικά ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(\delta_{m,k})_m$ είναι τελικά σταθερή. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει και έστω k_0 ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο υπάρχουν $s_1 < s_2 < \dots < s_m < \dots$ με την ιδιότητα $|\delta_{s_{m+1},k_0} - \delta_{s_m,k_0}| = 1$ για κάθε m . Υπάρχει m_0 τέτοιος ώστε για κάθε $1 \leq k < k_0$ η ακολουθία $(\delta_{s_m,k})_{m=m_0}^{\infty}$ να είναι σταθερή. Τότε, για κάθε $m \geq m_0$ έχουμε

$$|x_{s_{m+1}} - x_{s_m}| \geq \frac{|\delta_{s_{m+1},k_0} - \delta_{s_m,k_0}|}{k_0!} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{k_0!} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} =: \delta_{k_0}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\delta_{k_0} > \frac{1}{k_0!} - \frac{2}{(k_0+1)!} \geq 0.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο, αφού είχαμε υποθέσει ότι η (x_m) είναι συγκλίνουσα, άρα και βασική.

Είδαμε ότι για κάθε $k \geq 1$ υπάρχουν $\delta_k \in \{0, 1\}$ και $m_k \geq 1$ ώστε $\delta_{m,k} = \delta_k$ για κάθε $m \geq m_k$. Θέτουμε

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \in A$$

και θα δείξουμε ότι $x_m \rightarrow y$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon$. Αν θέσουμε $M = \max\{m_1, \dots, m_{k_0}\}$, τότε για κάθε $m > M$ έχουμε $\delta_{m,k} = \delta_k$ για κάθε $k = 1, \dots, k_0$, άρα

$$|x_m - y| = \left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{\delta_{m,k} - \delta_k}{k!} \right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \varepsilon.$$

Επομένως $x_m \rightarrow y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου έχουμε $x = y \in A$, οπότε το A είναι κλειστό.

Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε $s \in \mathbb{N}$ το σύνολο $s \cdot A$ είναι κλειστό. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f_s : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_s(x_1, x_2, \dots, x_s) = x_1 + x_2 + \dots + x_s$. Το A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα το $A \times A \times \dots \times A$ (s -φορές) είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$. Όμως, $s \cdot A = f_s(A \times A \times \dots \times A)$, άρα το $s \cdot A$ είναι συμπαγές και ειδικότερα είναι κλειστό.

Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $D_n = C_n + \dots + C_n$. Παρατηρήστε ότι $|D_n| \leq 2^{ns}$ και

$$s \cdot A_n \subseteq \bigcup_{x \in D_n} \left(x + \left[0, \frac{2s}{(n+1)!} \right] \right).$$

Συνεπώς,

$$\lambda(s \cdot A) \leq \lambda(s \cdot A_n) \leq 2^{ns} \frac{2s}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$ (πάλι από το κριτήριο του λόγου). Αυτό αποδεικνύει ότι $\lambda(s \cdot A) = 0$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$.

4.43. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) > 0$.

(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty], \quad f(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) \chi_A(x) d\lambda(x),$$

είναι συνεχής στο $t = 1$, όπου το $[0, +\infty]$ εφοδιάζεται με τη συνήθη τοπολογία των εκτεταμένων πραγματικών.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν $|t - 1| < \delta$ τότε η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A \times A$ στο $\mathbb{R}^2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $t_n \rightarrow 1$. Αφού τελικά $t_n > 0$, αρκεί να εξετάσουμε την ουρά της ακολουθίας και να δείξουμε ότι $f(t_n) \rightarrow f(1)$. Ορίζουμε $f_n(x) = \chi_A(t_n x) \chi_A(x)$. Υποθέτουμε αρχικά ότι το A είναι ανοικτό και $0 < \lambda(A) < \infty$. Από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων μέσω ακολουθιών έπεται ότι αν $x \in A$ τότε τελικά $t_n x \in A$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$f_n(x) = \chi_A(t_n x) \chi_A(x) = \chi_A(x)$$

τελικά, άρα $f_n \rightarrow \chi_A$. Επίσης, $0 \leq f_n \leq \chi_A$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχμένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x) \chi_A(x) d\lambda(x) = f(1).$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμα σύνολα και $A \subseteq B$ τότε

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \chi_B(tx) \chi_B(x) d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) \chi_A(x) d\lambda(x) \right| \leq \left(1 + \frac{1}{t}\right) \lambda(B \setminus A)$$

για κάθε $t > 0$. Πράγματι, θέτοντας $C_t = \frac{1}{t}C$ για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_B(tx) \chi_B(x) d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) \chi_A(x) d\lambda(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_{B \cap B_t}(x) d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_{A \cap A_t}(x) d\lambda(x) \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(B \cap B_t) \setminus (A \cap A_t)}(x) d\lambda(x) = \lambda((B \cap B_t) \setminus (A \cap A_t)) \leq \lambda((B \setminus A) \cup (B_t \setminus A_t)) \\ &\leq \lambda(B \setminus A) + \lambda(B_t \setminus A_t) = \lambda(B \setminus A) + \lambda((B \setminus A)_t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right) \lambda(B \setminus A), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $A_t \leq B_t$, $(B \cap B_t) \setminus (A \cap A_t) \subseteq (B \setminus A) \cup (B_t \setminus A_t)$ και $B_t \setminus A_t = (B \setminus A)_t$.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το ζητούμενο για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε ανοικτό $G \supseteq A$ με $\lambda(G) \leq \lambda(A) + \varepsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) - \lambda(A) \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_n x) \chi_G(x) d\lambda(x) \right| \\ &\quad + \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_n x) \chi_G(x) d\lambda(x) - \lambda(G) \right| + |\lambda(G) - \lambda(A)| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{t_n}\right) \lambda(G \setminus A) + \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_n x) \chi_G(x) d\lambda(x) - \lambda(G) \right| + |\lambda(G) - \lambda(A)| \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{t_n}\right) \varepsilon + \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_G(t_n x) \chi_G(x) d\lambda(x) - \lambda(G) \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα για τα ανοικτά σύνολα, παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) - \lambda(A) \right| \leq 3\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) \longrightarrow \lambda(A) = f(1).$$

Αν $\lambda(A) = \infty$, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$, από τη συνέχεια από κάτω για τα σύνολα $A \cap [-m, m]$ μπορούμε να επιλέξουμε $m = m(N)$ ώστε, θέτοντας $B_N = A \cap [-m, m]$, να έχουμε $N \leq \lambda(B_N) < \infty$. Επομένως

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{B_N}(t_n x) \chi_{B_N}(x) d\lambda(x) = \lambda(B_N) \geq N$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, άρα

$$f(t_n) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(t_n x) \chi_A(x) d\lambda(x) \longrightarrow +\infty = \lambda(A) = f(1).$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 1} \lambda(A \cap A_t) = \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \lambda(A) > 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε: αν $|t - 1| < \delta$ τότε $\lambda(A \cap A_t) > 0$. Ειδικότερα, για κάθε t με $|t - 1| < \delta$ έχουμε $A \cap \frac{1}{t}A = A \cap A_t \neq \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x = \frac{1}{t}y$. Δηλαδή, για το $(x, y) \in A \times A$ έχουμε $y = tx$. Ισοδύναμα, η ευθεία $y = tx$ τέμνει το $A \times A$ στο $\mathbb{R}^2$.

4.44. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq B$ ισχύει

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα E, F τέτοια ώστε $A \subseteq E$, $B \subseteq F$ και $\lambda(E \cap F) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Αφού το A είναι μετρήσιμο και $A \cap B = A$, έχουμε ότι

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(B \setminus A) = \lambda(A) + \lambda^*(B \setminus A).$$

Τέλος, αφού $\lambda(A) < \infty$, αφαιρώντας παίρνουμε

$$\lambda^*(B \setminus A) = \lambda^*(B) - \lambda(A).$$

(β) Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lambda^*(A) < \infty$ και $\lambda^*(B) < \infty$. Κατασκευάζουμε πρώτα ρητά μετρήσιμα καλύμματα που πραγματοποιούν τα εξωτερικά μέτρα. Για κάθε $n \geq 1$ επιλέγουμε ανοικτά σύνολα $G_n \supseteq A$ και $H_n \supseteq B$ τέτοια ώστε

$$\lambda(G_n) < \lambda^*(A) + \frac{1}{n}, \quad \lambda(H_n) < \lambda^*(B) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n, \quad F = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Τότε τα E, F είναι μετρήσιμα, $A \subseteq E$, $B \subseteq F$, και από τη μονοτονία

$$\lambda^*(A) \leq \lambda(E) \leq \lambda(G_n) < \lambda^*(A) + \frac{1}{n}$$

για κάθε n , οπότε $\lambda(E) = \lambda^*(A)$. Ομοίως $\lambda(F) = \lambda^*(B)$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\lambda(E \cup F) = \lambda(E \cap F) + \lambda(E \setminus F) + \lambda(F \setminus E) = \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(E \cap F).$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση, γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda(E \cup F) &= \lambda(E) + \lambda(F) - \lambda(E \cap F) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B) - \lambda(E \cap F) = \lambda^*(A \cup B) - \lambda(E \cap F) \\ &\leq \lambda(E \cup F) - \lambda(E \cap F), \end{aligned}$$

άρα $\lambda(E \cap F) \leq 0$, το οποίο δείχνει ότι $\lambda(E \cap F) = 0$.

4.45. (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει φραγμένο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(F) \leq \lambda^*(A) - 1$ για κάθε κλειστό σύνολο $F \subseteq A$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(G \setminus A) = \infty$ για κάθε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$.

Υπόδειξη: (α) Έχουμε δει ότι υπάρχει μη μετρήσιμο $N \subseteq [0, 1]$ με την ιδιότητα ότι το $N - N$ δεν περιέχει κανέναν μη μηδενικό ρητό. Αναγκαστικά, $\lambda^*(N) = \delta > 0$. Επίσης, για κάθε κλειστό σύνολο $B \subseteq N$ έχουμε $\lambda(B) = 0$ (αλλιώς, από το λήμμα Steinhaus το $B - B$ θα περιείχε μη τετριμμένο διάστημα με κέντρο το 0, άρα και το $N - N$ θα περιείχε το ίδιο διάστημα, άτοπο).

Θεωρούμε το σύνολο $A = \frac{1}{\delta}N$, το οποίο είναι φραγμένο αφού το N είναι φραγμένο. Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(A) = \frac{1}{\delta} \lambda^*(N) = 1.$$

Αν F είναι κλειστό σύνολο που περιέχεται στο A , τότε το $B = \delta F$ είναι κλειστό υποσύνολο του N , άρα $\lambda(B) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(F) = \frac{1}{\delta} \lambda(B) = 0 = \lambda^*(A) - 1.$$

(β) Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής βοηθητικό κριτήριο: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \Delta E) < \varepsilon$.

Πράγματι, η μία κατεύθυνση είναι άμεση, παίρνοντας $E = A$. Αντίστροφα, επιλέγουμε μετρήσιμα E_n ώστε

$$\lambda^*(A \Delta E_n) < 2^{-n}$$

και θέτουμε $E = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$, το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $x \in A \Delta E$, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα σύνολα $A \Delta E_n$, άρα

$$A \Delta E \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} (A \Delta E_n).$$

Επομένως, για κάθε $m \geq 1$,

$$\lambda^*(A \Delta E) \leq \lambda^*\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} (A \Delta E_n)\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda^*(A \Delta E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n}.$$

Αφήνοντας $m \rightarrow \infty$, παίρνουμε $\lambda^*(A \Delta E) = 0$. Το $A \Delta E$ είναι λοιπόν Lebesgue μετρήσιμο, και αφού $A = E \Delta (A \Delta E)$, το A είναι επίσης Lebesgue μετρήσιμο.

Θεωρούμε τώρα ένα μη μετρήσιμο σύνολο $N \subseteq [0, 1]$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, υπάρχει $\varepsilon > 0$

ώστε για κάθε ανοικτό $U \supseteq N$ να ισχύει

$$\lambda^*(U \setminus N) = \lambda^*(N \Delta U) \geq \varepsilon.$$

Τώρα θεωρούμε το σύνολο

$$A := \bigcup_{k=0}^{\infty} (2k + N),$$

μεταφέρουμε δηλαδή το N κατά $2k$ για κάθε $k \geq 0$ και παίρνουμε την ένωση όλων αυτών των συνόλων. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq G$. Για κάθε $k \geq 0$ ορίζουμε $U_k = G \cap (2k - \frac{1}{3}, 2k + \frac{4}{3})$. Τότε, κάθε U_k είναι ανοικτό και $U_k \supseteq 2k + N$, άρα το ανοικτό σύνολο $-2k + U_k$ περιέχει το N και έχουμε

$$\lambda^*(U_k \setminus (2k + N)) = \lambda^*((-2k + U_k) \setminus N) \geq \varepsilon.$$

Τα σύνολα $U_k \setminus (2k + N)$ περιέχονται στα ξένα μετρήσιμα σύνολα $(2k - \frac{1}{3}, 2k + \frac{4}{3})$, οπότε επειδή βρίσκονται σε ανά δύο ξένα μετρήσιμα διαστήματα, η εξωτερική μετρησιμότητα είναι προσθετική πάνω στην ένωσή τους: για κάθε m η συνθήκη Carathéodory, εφαρμοσμένη διαδοχικά στα παραπάνω διαστήματα, δίνει

$$\lambda^*\left(\bigcup_{k=0}^m (U_k \setminus (2k + N))\right) = \sum_{k=0}^m \lambda^*(U_k \setminus (2k + N)) \geq (m+1)\varepsilon.$$

Εφόσον η πεπερασμένη αυτή ένωση περιέχεται στο $G \setminus A$, παίρνουμε $\lambda^*(G \setminus A) \geq (m+1)\varepsilon$ για κάθε m , και συνεπώς $\lambda^*(G \setminus A) = +\infty$.

4.46. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Από την υπόθεση, η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά α , δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leq \alpha \lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$, οπότε αν $\lambda(A) = 0$ έπεται άμεσα ότι $\lambda^*(f(A)) = 0$ και έχουμε το ζητούμενο. Έστω $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_m \neq \emptyset$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x, y \in A \cap I_m$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| \leq \alpha \ell(I_m).$$

Συνεπώς, $\text{diam}(f(A \cap I_m)) \leq \alpha \ell(I_m)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_m)$ περιέχεται σε διάστημα J_m μήκους $\ell(J_m) \leq \alpha \ell(I_m)$. Η $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$, άρα

$$\lambda^*(f(A)) \leq \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(J_m) \leq \alpha \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλες τις καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του A από ανοικτά διαστήματα, βλέπουμε

ότι $\lambda^*(f(A)) \leq \alpha \lambda^*(A)$.

(β) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $n, k \geq 1$ θεωρούμε τα σύνολα $B_n = \{x \in A : |f'(x)| < n\}$ και $B_{n,k} = \{x \in A : |f(y) - f(x)| \leq n|y - x| \text{ εάν } |y - x| < 1/k\}$. Παρατηρήστε ότι $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει $B_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{n,k}$ (αυτό προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της παραγώγου). Συνεπώς, $A \subseteq \bigcup_{n,k \geq 1} B_{n,k}$.

Δείχνουμε ότι $\lambda(f(B_{n,k})) = 0$ για κάθε $n, k \geq 1$. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν στο (α), με μόνη διαφορά ότι μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του $B_{n,k}$ από ανοικτά διαστήματα που ικανοποιούν την $\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m) < \frac{1}{k}$ (αφού $\lambda(B_{n,k}) = 0$ και στη συνέχεια θα θεωρήσουμε το infimum των $\sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m)$). Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $B_{n,k} \cap I_m \neq \emptyset$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in B_{n,k} \cap I_m$, τότε $|x - y| < 1/k$ άρα

$$|f(x) - f(y)| \leq n|x - y| \leq n\ell(I_m).$$

Συνεπώς, $\text{diam}(f(B_{n,k} \cap I_m)) \leq n\ell(I_m)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(B_{n,k} \cap I_m)$ περιέχεται σε διάστημα J_m μήκους $\ell(J_m) \leq n\ell(I_m)$. Η $\{J_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(B_{n,k})$, άρα

$$\lambda^*(f(B_{n,k})) \leq \lambda\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} J_m\right) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(J_m) \leq n \sum_{m=1}^{\infty} \ell(I_m).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλες τις καλύψεις $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ του $B_{n,k}$ που έχουμε θεωρήσει, βλέπουμε ότι $\lambda^*(f(B_{n,k})) \leq n\lambda^*(B_{n,k}) = 0$.

Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(f\left(\bigcup_{n,k=1}^{\infty} B_{n,k}\right)\right) \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \lambda^*(f(B_{n,k})) = 0.$$

4.47. Αποδείξτε ότι υπάρχει διαμέριση $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $[0, 1]$ και ακολουθία (x_n) πραγματικών αριθμών

τέτοια ώστε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (x_n + A_n)$, όπου $x_n + A_n$ είναι η μεταφορά του A_n κατά x_n .

Υπόδειξη: Θεωρούμε στο $[0, 1]$ τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και επιλέγουμε ένα σύνολο Vitali $V \subseteq [0, 1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Αριθμούμε τους ρητούς του $[0, 1]$ ως $(p_n)_{n \geq 1}$ και θέτουμε

$$B_{n,1} = (p_n + V) \cap [0, 1), \quad B_{n,2} = -1 + ((p_n + V) \cap [1, 2)).$$

Τα μη κενά σύνολα $B_{n,j}$ είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους είναι το $[0, 1)$. Πράγματι, αυτό ισοδυναμεί με το ότι τα σύνολα $(p_n + V) \pmod{1}$ αποτελούν διαμέριση του $[0, 1)$: η κάλυψη προκύπτει από τον ορισμό του V , ενώ αν

$$v + p_n \equiv w + p_m \pmod{1},$$

τότε $v - w \in \mathbb{Q}$, άρα $v = w$, και επομένως $p_n \equiv p_m \pmod{1}$. Επειδή $p_n, p_m \in [0, 1]$, παίρνουμε $p_n = p_m$ και $n = m$.

Αριθμούμε τώρα όλους τους ρητούς ως $(s_n)_{n \geq 1}$ και θέτουμε $E_n = s_n + V$. Τότε

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επιλέγουμε $v \in V$ που είναι ισοδύναμο modulo $\mathbb{Q}$ με το κλασματικό μέρος του x . Τότε $x - v \in \mathbb{Q}$, άρα $x = s_n + v \in E_n$ για κάποιο n .

Για κάθε n έχουμε

$$\begin{aligned} E_n &= (p_n + V) + (s_n - p_n) \\ &= (B_{n,1} + (s_n - p_n)) \cup (B_{n,2} + (1 + s_n - p_n)). \end{aligned}$$

Άρα οι μεταφορές των μη κενών μελών της διαμέρισης $\{B_{n,j} : n \geq 1, j = 1, 2\}$ καλύπτουν το $\mathbb{R}$. Τέλος προσθέτουμε στη διαμέριση το μονοσύνολο $\{1\}$ (με οποιαδήποτε μεταφορά, π.χ. κατά 0) και αριθμούμε εκ νέου τη συνολικά αριθμήσιμη οικογένεια ως $\{A_m\}_{m \geq 1}$. Έτσι παίρνουμε διαμέριση του $[0, 1]$ και πραγματικούς x_m με

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (x_m + A_m).$$

4.48. Έστω C το σύνολο Cantor και $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

- (α) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C ;
- (β) Αποδείξτε ότι $C + C = [0, 2]$, δηλαδή κάθε $x \in [0, 2]$ γράφεται ως άθροισμα $x = t + s$ δύο αριθμών $t, s \in C$.
- (γ) Αποδείξτε ότι αν ο $q \in [0, 1]$ είναι ρητός τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$.
- (δ) Αποδείξτε ότι αν $x \in C$ και $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε $x \in \mathbb{Q}$.
- (ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^1 f(x) dx$.

Υπόδειξη: (α) Έστω $x \in C$. Υπάρχει μοναδική ακολουθία κλειστών τριαδικών διαστημάτων $I_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, με $x \in I_n(x)$, $I_n(x) \subset C_n$ και $\ell(I_n(x)) = \frac{1}{3^n}$. Η ακολουθία $(\alpha_n(x))$ των αριστερών άκρων των $I_n(x)$ περιέχεται στο C , $\alpha_n(x) \in \mathbb{Q}$ και $|\alpha_n(x) - x| \leq \ell(I_n(x)) \rightarrow 0$. Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία σημείων του $C \cap \mathbb{Q}$ που συγκλίνει στο x . Αυτό δείχνει ότι το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C .

(β) Έστω $x \in [0, 2]$. Τότε, $\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k}$ για κάποιους $\epsilon_k \in \{0, 1, 2\}$. Ορίζουμε $(a_k, b_k) = (0, 0), (2, 0)$ ή $(2, 2)$ αν $\epsilon_k = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα, και θεωρούμε τους $t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ και $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}$. Τότε, $t, s \in C$ και

$$\frac{t+s}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + b_k}{2} \cdot \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{3^k} = \frac{x}{2},$$

δηλαδή $x = t + s \in C + C$. Ο άλλος εγκλεισμός, $C + C \subseteq [0, 2]$, είναι άμεσος αφού $C \subseteq [0, 1]$.

(γ) Από τον ορισμό της f , αν $q \in [0, 1] \setminus C$ τότε $f(q) \in \mathbb{Q}$ (η σταθερή τιμή που παίρνει η f σε κάθε ανοικτό διάστημα του $[0, 1] \setminus C$ είναι ρητός της μορφής $m/2^n$). Έστω $q \in [0, 1] \cap C$. Τότε, το τριαδικό ανάπτυγμα του q είναι της μορφής $q = 0.\epsilon_1 \dots \epsilon_m \overline{\theta_1 \dots \theta_k}$ για κάποιους $\epsilon_j, \theta_i \in \{0, 2\}$ (από την $(m+1)$ -θέση και πέρα επαναλαμβάνονται περιοδικά τα ψηφία $\theta_1, \dots, \theta_k$ με αυτή τη σειρά). Τότε, το δυαδικό ανάπτυγμα του $f(q)$ είναι $f(q) = 0.r_1 \dots r_m \overline{s_1 \dots s_k}$, όπου $r_j = \epsilon_j/2$ και $s_i = \theta_i/2 \in \{0, 1\}$, δηλαδή έχουμε πάλι ότι από την $(m+1)$ -θέση και πέρα επαναλαμβάνονται περιοδικά τα ψηφία $s_1, \dots, s_k$ με αυτή τη σειρά. Άρα, ο $f(q)$ είναι ρητός.

(δ) Όπως και στο (γ), αν ο $x \in C$ έχει το τριαδικό ανάπτυγμα $x = 0, \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n \dots$ με $\epsilon_j \in \{0, 2\}$ τότε $f(x) = 0.r_1 r_2 \dots r_n \dots$, όπου $r_j = \epsilon_j/2$. Αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ τότε υπάρχει $m \geq 0$ τέτοιος ώστε από την $(m+1)$ -θέση και μετά να εμφανίζεται περιοδικά μια k -άδα ψηφίων $s_1 \dots s_k$. Τότε, από την $(m+1)$ -θέση και μετά, στο τριαδικό ανάπτυγμα του x θα εμφανίζεται η k -άδα ψηφίων $\theta_1 \dots \theta_k$, όπου $\theta_i = 2s_i$, $i = 1, \dots, k$. Αυτό σημαίνει ότι ο x είναι ρητός.

(ε) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ακολουθεί την κατασκευή του συνόλου Cantor και συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Λόγω της συμμετρίας της f_n ως προς την ευθεία $y = \frac{1}{2}$ μπορείτε να δείξετε επαγωγικά ότι $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ έχουμε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2} \right| = \left| \int_0^1 (f(x) - f_n(x)) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx \leq \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0,$$

άρα το ολοκλήρωμα της f είναι επίσης ίσο με $\frac{1}{2}$.

4.49. Για A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

(α) Έστω A, B μη κενά Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε το $A + B$ να είναι Lebesgue μετρήσιμο. Αποδείξτε ότι $\lambda(A + B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν μη κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ τέτοια ώστε $A + B = \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Αν $\lambda(A) = 0$ τότε για τυχόν $a \in A$ έχουμε ότι

$$\lambda(A + B) \geq \lambda(a + B) = \lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε το ζητούμενο αν $\lambda(B) = 0$. Επίσης, αν $\lambda(A) = +\infty$ ή $\lambda(B) = +\infty$ τότε εύκολα ελέγχουμε ότι $\lambda(A + B) = +\infty$, οπότε πάλι το ζητούμενο ισχύει.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα A και B έχουν θετικό και πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Για τυχόν $0 < \varepsilon < \min\{\lambda(A), \lambda(B)\}$ βρίσκουμε συμπαγή $E \subseteq A$ και $F \subseteq B$ τέτοια ώστε $\lambda(E) > \lambda(A) - \varepsilon$ και $\lambda(F) > \lambda(B) - \varepsilon$. Το σύνολο $E + F$ είναι συμπαγές, άρα Lebesgue μετρήσιμο. Θα δείξουμε ότι

$$\lambda(E + F) \geq \lambda(E) + \lambda(F)$$

οπότε $\lambda(A + B) \geq \lambda(E + F) > \lambda(A) + \lambda(B) - 2\varepsilon$, και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ θα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω t το ελάχιστο στοιχείο του F και s το μέγιστο στοιχείο του E . Τότε το $F_1 = -t + F$ έχει ελάχιστο στοιχείο το 0 και το $E_1 = -s + E$ έχει μέγιστο στοιχείο το 0. Τότε, $E_1 + F_1 \supseteq (E_1 + \{0\}) \cup (\{0\} + F_1) = E_1 \cup F_1$ και τα δύο αυτά σύνολα έχουν μοναδικό κοινό στοιχείο το 0. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda(E + F) &= \lambda((s + E_1) + (t + F_1)) = \lambda((t + s) + E_1 + F_1) = \lambda(E_1 + F_1) \geq \lambda(E_1 \cup F_1) = \lambda(E_1) + \lambda(F_1) \\ &= \lambda(-s + E) + \lambda(-t + F) = \lambda(E) + \lambda(F). \end{aligned}$$

(β) Από την Άσκηση 4.48(β) γνωρίζουμε ότι $C + C = [0, 2]$, όπου C είναι το σύνολο του Cantor. Για

κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $A_n = B_n = n + C$ και κατόπιν ορίζουμε

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_n =: B.$$

Αφού $\lambda(n + C) = \lambda(C) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$. Τέλος,

$$\begin{aligned} A + B &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) \right) + \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + C) \right) \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} ((n + C) + (n + C)) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n + (C + C)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (2n + [0, 2]) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n + 2] = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4.50. Έστω D πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $\lambda(A \Delta (A + x)) = 0$ για κάθε $x \in D$, τότε $\lambda(A) = 0$ ή $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$.

Υπόδειξη: Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(A^c) > 0$. Τότε, μπορούμε να βρούμε συμπαγή σύνολα $E \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τέτοια ώστε $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείχνουμε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \lambda((E + x) \cap F) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(t - x) \chi_F(t) d\lambda(t)$$

είναι συνεχής. Επίσης (απλή συνέπεια του θεωρήματος Fubini)

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) d\lambda(x) = \lambda(E)\lambda(F) > 0.$$

Άρα, το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0\}$ περιέχει κάποιο μη τετριμμένο διάστημα I . Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να επιλέξουμε $x_0 \in D \cap I$. Τότε,

$$\lambda((E + x_0) \cap F) > 0.$$

Όμως, $E \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$, άρα

$$(E + x_0) \cap F \subseteq (A + x_0) \cap A^c \subseteq A \Delta (A + x_0),$$

οπότε

$$0 < g(x_0) = \lambda((E + x_0) \cap F) \leq \lambda(A \Delta (A + x_0)).$$

Αυτό είναι άτοπο, διότι $x_0 \in D$ και από την υπόθεση $\lambda(A \Delta (A + x_0)) = 0$.

4.51. Αποδείξτε ότι υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ συνόλων $A_n \subset [0, 1]$ τέτοια ώστε $\lambda^*(A_n) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

Υπόδειξη: Στο $[0, 1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$, και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0, 1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0, 1] \setminus N$. Μπορούμε να δείξουμε ότι $\lambda^*(T) = 1$. Αν όχι, τότε υπάρχει μετρήσιμο $A \supseteq T$ με $\lambda(A) = \lambda^*(T) < 1$. Τότε το $B = [0, 1] \setminus A$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) > 0$. Από το λήμμα του Steinhaus, το

$B - B$ περιέχει ένα μη τετριμμένο διάστημα γύρω από το 0. Όμως $B \subseteq N$, άρα $B - B \subseteq N - N$. Από τον ορισμό του N , αν $u, v \in N$ και $u - v \in \mathbb{Q}$, τότε $u = v$. Συνεπώς

$$(N - N) \cap \mathbb{Q} = \{0\}.$$

Κάθε μη τετριμμένο διάστημα γύρω από το 0 περιέχει μη μηδενικό ρητό, άρα το $N - N$ δεν μπορεί να περιέχει τέτοιο διάστημα. Παίρνουμε αντίφαση και επομένως $\lambda^*(T) = 1$.

Τώρα, θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $N_n = (N + q_n) \pmod{1}$. Τότε τα N_n είναι ξένα ανά δύο και

$$[0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n.$$

Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε

$$H_n = \bigcup_{k=1}^n N_k.$$

Θα δείξουμε ότι κάθε μετρήσιμο $B \subseteq H_n$ έχει μέτρο 0. Αν, αντίθετα, $\lambda(B) > 0$, από το λήμμα του Steinhaus το $B - B$ περιέχει ένα διάστημα γύρω από το 0. Επιλέγουμε ρητό r σε αυτό το διάστημα τέτοιο ώστε

$$r \not\equiv q_i - q_j \pmod{1} \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

κάτι που είναι δυνατό επειδή αποκλείουμε μόνο πεπερασμένα υπόλοιπα modulo 1. Υπάρχουν τότε $x, y \in B \subseteq H_n$ με $x - y = r$. Γράφοντας $x \in N_i$, $y \in N_j$, υπάρχουν $u, v \in N$ με $x \equiv u + q_i$ και $y \equiv v + q_j \pmod{1}$. Επειδή $x - y = r \in \mathbb{Q}$, παίρνουμε $u - v \in \mathbb{Q}$. Από τον ορισμό του N , που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση modulo $\mathbb{Q}$, έπεται $u = v$. Άρα $r \equiv q_i - q_j \pmod{1}$, αντίφαση. Συνεπώς κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του H_n έχει μέτρο 0.

Ορίζουμε τώρα

$$A_n = [0, 1) \setminus H_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} N_k.$$

Η ακολουθία (A_n) είναι φθίνουσα. Επιπλέον, αν $G \supseteq A_n$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$, τότε $[0, 1) \setminus G \subseteq H_n$. Επειδή κάθε μετρήσιμο υποσύνολο του H_n έχει μέτρο 0, έχουμε $\lambda([0, 1) \setminus G) = 0$. Το σύνολο $[0, 1] \setminus G$ διαφέρει από το $[0, 1) \setminus G$ το πολύ κατά το μονοσύνολο $\{1\}$, άρα επίσης

$$\lambda([0, 1] \setminus G) = 0.$$

Συνεπώς $\lambda(G) = 1$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A_n) = 1 \quad \text{για κάθε } n.$$

Τέλος, επειδή τα N_k αποτελούν διαμέριση του $[0, 1)$, κάθε $x \in [0, 1)$ ανήκει σε ακριβώς ένα N_k και άρα δεν ανήκει στο A_n για όλα τα αρκετά μεγάλα n . Επομένως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

4.52. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο σύνολο στον $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < +\infty$, το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x \in E$ υπάρχει $\rho(x) > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $0 < r < \rho(x)$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)),$$

όπου $B(x, r)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r . Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $F \subseteq E$ τέτοιο ώστε $\lambda_k(E \setminus F) \leq \varepsilon$ και υπάρχει $t > 0$, ανεξάρτητος από το x , τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in F$ και για κάθε $0 < r \leq t$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)).$$

Ισχύει η προηγούμενη πρόταση αν $\lambda_k(E) = +\infty$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη: Για $r > 0$ θέτουμε

$$\Phi_r(x) = \lambda_k(E \cap B(x, r)) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_E(y) \chi_{B(0, r)}(y - x) d\lambda_k(y).$$

Επειδή $\lambda_k(E) < \infty$, η χ_E ανήκει στο $L^1(\mathbb{R}^k)$. Για σταθερό r , η Φ_r είναι συνεχής ως προς x : αν $h \rightarrow 0$, τότε

$$|\Phi_r(x + h) - \Phi_r(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^k} |\chi_E(y - h) - \chi_E(y)| \chi_{B(0, r)}(y) d\lambda_k(y) \leq \|\chi_E(\cdot - h) - \chi_E\|_1 \rightarrow 0.$$

Επίσης, για σταθερό x , η $r \mapsto \Phi_r(x)$ είναι συνεχής, αφού για $s, r > 0$

$$|\Phi_s(x) - \Phi_r(x)| \leq \lambda_k(B(x, s) \Delta B(x, r)) = |\lambda_k(B(0, s)) - \lambda_k(B(0, r))|.$$

Άρα, για κάθε $m \geq 1$, το σύνολο

$$E_m = E \cap \bigcap_{r \in \mathbb{Q}, 0 < r \leq 1/m^2} \left\{ x : \Phi_r(x) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(0, r)) \right\}$$

είναι μετρήσιμο. Από τη συνέχεια ως προς r , ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με

$$E_m = \left\{ x \in E : \lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)) \text{ για κάθε } 0 < r \leq \frac{1}{m^2} \right\}.$$

Η ακολουθία $\{E_m\}_{m=1}^\infty$ είναι αύξουσα και, από την υπόθεση για το $\rho(x)$, $E = \bigcup_{m=1}^\infty E_m$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\lambda_k(E_m) \geq \lambda_k(E) - \varepsilon$, και αφού $\lambda_k(E) < \infty$ έπεται ότι

$$\lambda_k(E \setminus E_m) = \lambda_k(E) - \lambda_k(E_m) \leq \varepsilon.$$

Θέτουμε $F = E_m$. Τότε, $F \subseteq E$, $\lambda_k(E \setminus F) \leq \varepsilon$, και αν θέσουμε $t = 1/m^2$ τότε από τον ορισμό του E_m βλέπουμε ότι, για κάθε $x \in F$ και για κάθε $0 < r \leq t$,

$$\lambda_k(E \cap B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \lambda_k(B(x, r)).$$

Η παραπάνω πρόταση δεν ισχύει απαραίτητα αν $\lambda_k(E) = +\infty$. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε το σύνολο

$$E = \bigcup_{k=3}^{\infty} \left[k, k + \frac{1}{k} \right],$$

για το οποίο $\lambda(E) = +\infty$. Για κάθε ακέραιο $k \geq 7$ και κάθε $x \in E \cap [k, +\infty)$, το σημείο x ανήκει σε κάποιο $[j, j + 1/j]$ με $j \geq k$. Επειδή $3/k < 1/2$ και τα διαστήματα της ουράς απέχουν μεταξύ τους περισσότερο από $1/2$, η μπάλα $B(x, 3/k)$ τέμνει το E μόνο μέσα στο συγκεκριμένο διάστημα. Επομένως

$$\lambda(E \cap B(x, \tfrac{3}{k})) \leq \frac{1}{j} \leq \frac{1}{k} < \frac{3}{k} = \frac{1}{2} \lambda(B(x, \tfrac{3}{k})).$$

Επιπλέον,

$$\lambda(E \cap [k, +\infty)) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty.$$

Άρα, αν υπήρχαν $F \subseteq E$ με $\lambda(E \setminus F) < \infty$ και ένας ομοιόμορφος $t > 0$ με την παραπάνω ιδιότητα, θα επιλέγαμε $k \geq 7$ τόσο μεγάλο ώστε $3/k \leq t$. Επειδή η ουρά $E \cap [k, +\infty)$ έχει άπειρο μέτρο, το F τέμνει αυτήν την ουρά για x σε αυτή την τομή και $r = 3/k$ παίρνουμε αντίφαση. Έτσι η πρόταση αποτυγχάνει όταν το E έχει άπειρο μέτρο.

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Απλές ασκήσεις

5.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $\{f \leq q\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία (q_n) ρητών ώστε $q_n \rightarrow b$. Τότε,

$$\{x \in X : f(x) \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \leq q_n\}.$$

Αφού $\{x \in X : f(x) \leq q_n\} \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $\{f \leq b\} \in \mathcal{A}$. Το $b \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι μετρήσιμη.

5.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{αν } f(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η g είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη, άρα το σύνολο $f^{-1}(\mathbb{Q}) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}(\{q\}) \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε $B = X \setminus f^{-1}(\mathbb{Q})$. Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και παρατηρούμε ότι $g = \chi_B$. Πράγματι, έχουμε $g(x) = 1$ αν και μόνο αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in B$ και έχουμε $g(x) = 0$ αν και μόνο αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \notin B$.

Αφού $B \in \mathcal{A}$, η $g = \chi_B$ είναι μετρήσιμη.

5.3. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με την f να είναι Lebesgue μετρήσιμη και το σύνολο $\{f \neq g\}$ να είναι λ -μηδενικό. Δείξτε ότι και η g είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $Z = \{f \neq g\}$. Από την υπόθεση, $\lambda(Z) = 0$. Συνεπώς, αν $Z_1 \subseteq Z$ έχουμε ότι το Z_1 είναι Lebesgue μετρήσιμο και $\lambda(Z_1) = 0$. Τώρα, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq b\} &= \{x \in Z : g(x) \leq b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leq b\} \\ &= (Z \cap \{g \leq b\}) \cup ((\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{f \leq b\}), \end{aligned}$$

αφού στο $\mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε $g = f$. Το σύνολο $Z_1 = Z \cap \{g \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z , ενώ το $(\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{f \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο ως τομή δύο Lebesgue μετρήσιμων συνόλων (το $\{f \leq b\}$ είναι μετρήσιμο διότι η f είναι μετρήσιμη). Αφού το $b \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη.

5.4. Έστω μια συνάρτηση $f : (a, b) \rightarrow [-\infty, \infty]$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < b - a$ ο περιορισμός $f|_{(a, b-\varepsilon)}$ να είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < b - a$. Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left(a, b - \frac{1}{n+k}\right), \\ 0, & x \in \left[b - \frac{1}{n+k}, b\right). \end{cases}$$

Κάθε f_n είναι μετρήσιμη: στο $\left(a, b - \frac{1}{n+k}\right)$ συμπίπτει με τον μετρήσιμο περιορισμό της f , ενώ στο συμπλήρωμά του είναι σταθερή. Επιπλέον, για κάθε $x \in (a, b)$ έχουμε $x < b - 1/(n+k)$ για όλα τα αρκετά μεγάλα n , άρα $f_n(x) = f(x)$ τελικά. Επομένως $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και η f είναι μετρήσιμη ως κατά σημείο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων.

5.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, $\{s_n\}$ μια ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $s_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X . Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Υπόδειξη. Κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, αφού παίρνει πεπερασμένες το πλήθος πραγματικές τιμές. Αφού $s_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο X , υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(x) - s_m(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in X$. Υπάρχει $A_m > 0$ τέτοιος ώστε $|s_m(x)| \leq A_m$ για κάθε $x \in X$, και τότε

$$|f(x)| \leq |f(x) - s_m(x)| + |s_m(x)| \leq 1 + A_m$$

για κάθε $x \in X$, δηλαδή η f είναι φραγμένη.

5.6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $N \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(N) = 0$ τότε το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \phi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Γράφουμε $(f \circ \phi)^{-1}((-\infty, b]) = \phi^{-1}(A)$, όπου $A = f^{-1}((-\infty, b])$. Η f είναι Lebesgue μετρήσιμη, άρα το A είναι Lebesgue μετρήσιμο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A = B \cup N$, όπου $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\lambda(N) = 0$ (μάλιστα, το B μπορεί να επιλεγεί F_σ -σύνολο). Αφού η ϕ είναι συνεχής, το $\phi^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel. Από την υπόθεση έχουμε επίσης ότι το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έπεται ότι το

$$(f \circ \phi)^{-1}((-\infty, b]) = \phi^{-1}(A) = \phi^{-1}(B \cup N) = \phi^{-1}(B) \cup \phi^{-1}(N)$$

είναι Lebesgue μετρήσιμο, και έχουμε το ζητούμενο.

5.7. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του X τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{S} = \{\bigcup_{k \in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N}\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{S}$ είναι σ -άλγεβρα στο X . Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{S}$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η $g|_{E_k}$ είναι σταθερή για κάθε $k = 1, 2, \dots$

Υπόδειξη. Η $\mathcal{S}$ έχει την εξής ιδιότητα: αν $C \in \mathcal{S}$ τότε $C = \bigcup_{m \in A} E_m$ για κάποιο $A \subseteq \mathbb{N}$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $C \cap E_k = \emptyset$ αν $k \notin A$ και $C \cap E_k = E_k$ αν $k \in A$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι η g είναι $\mathcal{S}$ -μετρήσιμη. Έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε η $g|_{E_k}$ να μην είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $x, y \in E_k$ ώστε $g(x) = a$ και $g(y) = b$. Τότε, το σύνολο $\{g < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{S}$ αφού η g είναι $\mathcal{S}$ μετρήσιμη, άρα το σύνολο $C = \{z \in E_k : g(z) < b\} = E_k \cap \{g <$

$b\} \in \mathcal{S}$. Όμως, το C είναι μη κενό (διότι $x \in C$) και γνήσιο υποσύνολο του E_k (διότι $y \notin C$). Αυτό είναι άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι η $g|_{E_k}$ είναι σταθερή και παίρνει την τιμή a_k στο E_k , για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{k \in \mathbb{N} : a_k < b\}$. Τότε, αν $k \in A$ έχουμε ότι $E_k \subseteq \{g < b\}$ ενώ αν $k \notin A$ έχουμε ότι $E_k \cap \{g < b\} = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\{x \in X : g(x) < b\} = \bigcup_{k \in A} E_k \in \mathcal{S},$$

άρα η g είναι $\mathcal{S}$ -μετρήσιμη.

5.8. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}$ είναι σύνολο Borel. Γράφουμε

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\} = A_1 \cup A_2 := \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leq b\} \cup \{x \in D : f(x) \leq b\}.$$

Το A_2 είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου D , άρα είναι F_σ -σύνολο (αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων) και συνεπώς σύνολο Borel. Από την υπόθεση, η συνάρτηση $f|_{\mathbb{R} \setminus D}$ είναι συνεχής. Επομένως, το σύνολο

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f|_{\mathbb{R} \setminus D}(x) \leq b\}$$

είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \setminus D$ και γράφεται ως $A_1 = (\mathbb{R} \setminus D) \cap F$ για κάποιο κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$. Αφού το $\mathbb{R} \setminus D$ είναι G_δ -σύνολο, έπεται ότι το A_1 είναι Borel. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $A = A_1 \cup A_2$ είναι σύνολο Borel.

5.9. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα στο X . Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \emptyset\}$. Θεωρήστε γνωστό ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ -άλγεβρα.

Έστω τώρα $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A .

Υπόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη. Τότε, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\{f < b\} \in \mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{A}$, άρα η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή στο A . Τότε υπάρχουν $x, y \in A$ με $f(x) < f(y)$. Επιλέγουμε $c \in (f(x), f(y))$. Επειδή η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη, το σύνολο $E = \{f < c\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$. Όμως $x \in A \cap E$, οπότε το E δεν είναι ξένο προς το A , ενώ $y \in A \setminus E$, οπότε δεν περιέχει το A . Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό της $\mathcal{F}_A$. Άρα η f είναι σταθερή στο A .

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη και παίρνει την τιμή a στο A . Έστω $b \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $b \leq a$ έχουμε ότι $A \cap \{x \in X : f(x) < b\} = \emptyset$ ενώ αν $a < b$ έχουμε ότι $\{x \in X : f(x) < b\} \supseteq \{x \in X : f(x) = a\} \supseteq A$. Έπεται ότι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X : f(x) < b\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_A$, άρα η f είναι $\mathcal{F}_A$ -μετρήσιμη.

5.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_n)_{n \geq 1}, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $0 < \alpha < \mu(X)$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq m$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) > \alpha.$$

Υπόδειξη: Έστω $0 < \alpha < \mu(X)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$A_m = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq m\} = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Η ακολουθία συνόλων (A_m) περιέχεται στην $\mathcal{A}$, είναι αύξουσα, και από την υπόθεση ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ βλέπουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $m = m_x \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x \in A_m$, δηλαδή $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. Από τη συνέχεια του μέτρου έχουμε ότι $\mu(A_m) \rightarrow \mu(X)$, και αφού $\alpha < \mu(X)$, υπάρχει m τέτοιος ώστε $\mu(A_m) > \alpha$. Τότε, για κάθε $n \geq m$ έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}) \geq \mu(A_m) > \alpha.$$

5.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) > 0$ και $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει ότι $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $I_n = (n\varepsilon, (n+1)\varepsilon]$, οπότε $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} I_n$. Συνεπώς,

$$X = f^{-1}(\mathbb{R}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^{-1}(I_n).$$

Καθένα από τα σύνολα $A_n = f^{-1}(I_n)$ ανήκει στην $\mathcal{A}$, διότι η f είναι μετρήσιμη. Επίσης,

$$0 < \mu(X) \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(A_n),$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_m) > 0$. Θέτουμε $A = A_m$. Τότε, $\mu(A) > 0$ και για κάθε $x, y \in A$ ισχύει ότι $f(x), f(y) \in I_m = (m\varepsilon, (m+1)\varepsilon]$, άρα $|f(x) - f(y)| < (m+1)\varepsilon - m\varepsilon = \varepsilon$.

5.12. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι για μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ μ-σχεδόν για κάθε $x \in X$. Να δείξετε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ με $\mu(X \setminus B) < \delta$ ώστε

$$\sup_{n \in \mathbb{N}, x \in B} |f_n(x)| < \infty.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $A_k = \left\{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq k\right\}$. Τότε, $A_k \subseteq A_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και η υπόθεση εξασφαλίζει ότι $A_k \nearrow X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Άρα, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) = \mu(X)$.

Έστω $\delta > 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, μπορούμε να γράψουμε $\mu(X \setminus A_k) = \mu(X) - \mu(A_k) \rightarrow 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(X \setminus A_{k_0}) < \delta$. Θέτουμε $B = A_{k_0}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) < \delta$ και $|f_n(x)| \leq k_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in B$, δηλαδή $\sup_{n \in \mathbb{N}, x \in B} |f_n(x)| \leq k_0 < \infty$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

5.13. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη, ενώ οι $|f|$ και f^2 είναι Lebesgue μετρήσιμες.

Υπόδειξη. Θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \chi_E(x) - \chi_{E^c}(x).$$

Τότε, $\{f > 0\} = E$ άρα η f δεν είναι μετρήσιμη, όμως $|f| = f^2 \equiv 1$ στο $\mathbb{R}$.

5.14. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}$ αυξουσών απλών συναρτήσεων με $s_n \nearrow f$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η f είναι μετρήσιμη, διότι είναι αύξουσα. Για να ορίσουμε την ακολουθία $\{s_n\}$ ακολουθούμε την απόδειξη του βασικού θεωρήματος προσέγγισης μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης από απλές συναρτήσεις. Για κάθε $n \geq 1$ θέτουμε

$$P_n = \left\{ 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \dots < \frac{n2^n}{2^n} = n \right\}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$s_n = \sum_{j=0}^{n2^n-1} \frac{j}{2^n} \chi_{B_{n,j}} + n \chi_{C_n},$$

όπου

$$B_{n,j} = \left[\frac{j}{2^n} \leq f < \frac{j+1}{2^n} \right], \quad j = 0, 1, \dots, n2^n - 1 \text{ και } C_n = [f \geq n].$$

Γνωρίζουμε ότι κάθε s_n είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση, ότι $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$ και ότι $s_n \nearrow f$. Μένει να δείξουμε ότι κάθε s_n είναι αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $B_{n,j}$ και C_n είναι ξένα ανά δύο και ότι $\mathbb{R} = \left(\bigcup_{j=0}^{n2^n-1} B_{n,j} \right) \cup C_n$.

Θεωρούμε $x < y$ στο $\mathbb{R}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- (α) Αν $x \in C_n$ τότε $f(y) \geq f(x) \geq n$, δηλαδή $y \in C_n$ και τότε $s_n(x) = s_n(y) = n$.
- (β) Αλλιώς, υπάρχει $j \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ ώστε $x \in B_{n,j}$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το y :
- Αν $y \in C_n$ τότε $s_n(x) = \frac{j}{2^n} < n = s_n(y)$.
 - Αλλιώς, υπάρχει $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ ώστε $y \in B_{n,k}$. Αν υποθέσουμε ότι $k < j$ τότε

$$f(y) < \frac{k+1}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq f(x),$$

οπότε $f(y) < f(x)$ το οποίο είναι άτοπο, διότι η f είναι αύξουσα. Άρα, $j \leq k$ και έχουμε

$$s_n(x) = \frac{j}{2^n} \leq \frac{k}{2^n} = s_n(y).$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $x < y$ έχουμε ότι $s_n(x) \leq s_n(y)$. Συνεπώς, η s_n είναι αύξουσα.

5.15. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\{E_n\}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$.

- (α) Αν $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $\mu(\{x : \chi_{E_n}(x) \not\rightarrow 0\}) = 0$. (Υπόδειξη: θυμηθείτε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli.)
- (β) Ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα με την ασθενέστερη υπόθεση $\mu(E_n) \rightarrow 0$;

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(\chi_{E_n}(x))$ δεν συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν το x ανήκει σε άπειρα από τα E_n . Δηλαδή,

$$\{x \in X : \chi_{E_n}(x) \not\rightarrow 0\} = E := \limsup_n E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, από την υποπροσθετικότητα έχουμε

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Το τελευταίο άθροισμα τείνει στο 0 όταν $m \rightarrow \infty$, άρα $\mu(E) = 0$. Επομένως

$$\mu(\{x \in X : \chi_{E_n}(x) \not\rightarrow 0\}) = 0.$$

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $E_n \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(E_n) \leq \frac{1}{n}$, τέτοια η $\chi_{E_n}(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $E_1 = [0, \frac{1}{2}]$, $E_2 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}]$, $E_3 = [\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0, 1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $E_4, E_5, \dots, E_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(E_k) \leq \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων E_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(E_n) \leq \frac{1}{n}$ και

$$\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} E_i = [0, 1]$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Μέσα σε κάθε τέτοιο μπλοκ τα διαστήματα επιλέγονται διαδοχικά, με ξένα εσωτερικά. Άρα κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε τουλάχιστον ένα E_i από κάθε μπλοκ, οπότε $\chi_{E_n}(x) = 1$ για άπειρα n . Από την άλλη, επειδή $1/n \rightarrow 0$, για όλα τα αρκετά μεγάλα μπλοκ χρειάζονται τουλάχιστον τρία διαστήματα για να καλυφθεί το $[0, 1]$ αφού ένα σημείο μπορεί να ανήκει το πολύ σε δύο διαδοχικά από αυτά, σε κάθε τέτοιο μπλοκ υπάρχει και δείκτης i με $x \notin E_i$. Επομένως $\chi_{E_n}(x) = 0$ επίσης για άπειρα n , και έτσι η $\chi_{E_n}(x)$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0, 1]$.

5.16. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτησης.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει και $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ σε F_σ υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $K_n = [-n, n] \cap K$ είναι συμπαγές, άρα το $f(K_n)$ είναι συμπαγές, συνεπώς κλειστό σύνολο. Αφού $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, έπεται ότι το $f(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n)$ είναι F_σ σύνολο. Αν τώρα $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι F_σ σύνολο, όπου κάθε F_n είναι κλειστό, τότε το $f(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ είναι F_σ σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση F_σ συνόλων.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. Πράγματι, αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό

σύνολο και F_σ -σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ , ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα, έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά σύνολα. Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Θεωρούμε το $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μηδενικό μέτρο. Όμως, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο και έχουμε αντίφαση.

5.17. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $(E_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ οικογένεια συνόλων στην $\mathcal{A}$ με τις εξής ιδιότητες:

- (i) Αν $\alpha < \beta$ τότε $E_\alpha \subseteq E_\beta$,
- (ii) $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha$,
- (iii) $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$.

Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα εξής: αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leq \alpha$ ενώ αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geq \alpha$.

Υπόδειξη. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\}.$$

Αφού $X = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha$, το σύνολο $\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\}$ είναι μη κενό, άρα $f(x) < +\infty$. Επίσης, αφού $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} E_\alpha = \emptyset$, υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \notin E_\beta$ και τότε για κάθε $\gamma \leq \beta$ έχουμε $E_\gamma \subseteq E_\beta$, άρα $\{\alpha \in \mathbb{R} : x \in E_\alpha\} \subseteq (\beta, +\infty)$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x) \geq \beta > -\infty$. Δηλαδή, $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in X$.

Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό της f είναι φανερό ότι αν $x \in E_\alpha$ τότε $f(x) \leq \alpha$. Επίσης, είδαμε προηγουμένως ότι αν $x \notin E_\alpha$ τότε $f(x) \geq \alpha$.

Μένει να δείξουμε ότι η f είναι μετρήσιμη. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) < t$ τότε από τον χαρακτηρισμό του infimum υπάρχει $\alpha < t$ τέτοιος ώστε $x \in E_\alpha$ και αν επιλέξουμε $q \in \mathbb{Q}$ με $\alpha < q < t$ έχουμε $x \in E_\alpha \subseteq E_q$. Αντίστροφα, αν $x \in E_q$ για κάποιον $q < t$ τότε $f(x) \leq q < t$. Δηλαδή,

$$f(x) < t \iff \text{υπάρχει } q \in \mathbb{Q}, q < t \text{ ώστε } x \in E_q.$$

Έπεται ότι

$$f^{-1}((-\infty, t)) = \bigcup_{\{q \in \mathbb{Q} : q < t\}} E_q \in \mathcal{A}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι μετρήσιμη.

5.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε: για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ και $M > 0$ ώστε

$$\mu(X \setminus A) < \varepsilon \text{ και για κάθε } x \in A : \sup_n |f_n(x)| \leq M.$$

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι $|f_n|$ είναι μετρήσιμες. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_k = \{x \in X : |f(x)| > k\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in X$, βλέπουμε ότι η (E_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X με $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$. Αφού $\mu(X) < \infty$ έχουμε $\mu(E_k) \rightarrow \mu(\emptyset) = 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(E_{k_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = X \setminus E_{k_0}$ και $M = k_0$, έχουμε

$$\mu(X \setminus A) = \mu(E_{k_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leq k_0 = M.$$

5.19. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor-Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω $\phi_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor-Lebesgue και ϕ η επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ και $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επειδή η ϕ είναι μη φθίνουσα, για $x < y$ έχουμε

$$f(y) - f(x) = (y - x) + (\phi(y) - \phi(x)) > 0,$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον είναι συνεχής και $f(x) \rightarrow \pm\infty$ όταν $x \rightarrow \pm\infty$. Συνεπώς η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ομοιομορφισμός και η αντίστροφη f^{-1} είναι συνεχής. Εφόσον η f είναι 1-1 και $V \subseteq f(C)$, έχουμε $A = f^{-1}(V) \subseteq C$. Άρα το A είναι Lebesgue μετρήσιμο, ως υποσύνολο του μηδενικού συνόλου C . Θεωρούμε τώρα την $g = f^{-1}$ και την $h = \chi_A$, η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού

$$\{x : (h \circ g)(x) > 0\} = \{x : g(x) \in A\} = \{x : f^{-1}(x) \in A\} = V.$$

5.20. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\omega_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_n, f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_n \nearrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_n} \nearrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει ότι $\omega_f(t_n) \rightarrow \omega_f(t)$. Ορίζουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > t_n\}$. Τότε, $E_n \subseteq E_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{x \in E : f(x) > t\}$. Επομένως, από την συνέχεια του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της ω_f από δεξιά.

Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει ότι $\omega_f(t_n) \rightarrow \omega_f(t)$. Παρατηρούμε ότι $\{f \geq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση $\lambda(E) < \infty$ συμπεραίνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in E : f(x) > t_n\}) = \lambda(\{x \in E : f(x) \geq t\}).$$

Επομένως, η ω_f είναι συνεχής από αριστερά αν και μόνον αν

$$\lambda(\{x \in E : f(x) > t\}) = \lambda(\{x \in E : f(x) \geq t\}) \iff \lambda(\{x \in E : f(x) = t\}) = 0.$$

Με άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_n}(t) \leq \omega_{f_{n+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_n = \{x \in E : f_n(x) > t\}$. Τότε, $B_n \subseteq B_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \{x \in E : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{f_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in E : f_n(x) > t\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

5.21. Αποδείξτε ότι η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Υπόδειξη: ($\Leftarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(Z) = 0$ όπου $Z = \{f \neq g\}$. Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{f \leq b\} = \{x \in Z : f(x) \leq b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : f(x) \leq b\} = \{x \in Z : f(x) \leq b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leq b\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in Z : f(x) \leq b\} \subseteq Z$ και αφού $\lambda(Z) = 0$ έπεται ότι το $\{x \in Z : f(x) \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leq b\} = (\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{g \leq b\},$$

το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, αφού το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και το $\{g \leq b\}$ είναι σύνολο Borel. Επομένως, το $\{f \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο για κάθε $b \in \mathbb{R}$, και συνεπώς η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

($\Rightarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει G_δ -σύνολο B ώστε $E \subseteq B$ και $\lambda(B \setminus E) = 0$. Αν θέσουμε $g = \chi_B$ τότε η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} = B \setminus E$, άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Έστω τώρα απλή μετρήσιμη συνάρτηση $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$. Από το προηγούμενο βήμα μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις g_j ώστε $\lambda(\{\chi_{E_j} \neq g_j\}) = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Τότε, για την Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g = \sum_{j=1}^m a_j g_j$ έχουμε

$$\{f \neq g\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{\chi_{E_j} \neq g_j\},$$

άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχούσα Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f \geq 0$. Υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leq s_n \nearrow f$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε n μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση g_n ώστε $\lambda(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{s_n \neq g_n\}$. Ορίζουμε $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και $g_n = s_n \nearrow f$ στο $\mathbb{R} \setminus Z$. Θέτουμε πρώτα

$$h = \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n,$$

οπότε η $h : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ είναι Borel μετρήσιμη. Επειδή στο $\mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε $h = f < +\infty$, το Borel σύνολο

$$N = \{x : h(x) = +\infty\}$$

περιέχεται στο Z και συνεπώς $\lambda(N) = 0$. Ορίζουμε τώρα

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Τότε η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη και, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$, έχουμε

$$g(x) = h(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x).$$

Επομένως $\{f \neq g\} \subseteq Z$ και έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση, από το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(\{f^+ \neq g_1\}) = \lambda(\{f^- \neq g_2\}) = 0$ και θέτοντας $g = g_1 - g_2$ έχουμε ότι η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} \subseteq \{f^+ \neq g_1\} \cup \{f^- \neq g_2\}$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

5.22. Έστω $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [0, \infty)$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $A \subseteq [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\lambda([0, +\infty) \setminus A) < \varepsilon$ και $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A .

Υπόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$(5.0.1) \quad A_{k,m} = \left\{ x \in [0, +\infty) : |f_n(x)| < \frac{1}{k} \text{ για κάθε } n \geq m \right\}.$$

Για σταθερό k , η ακολουθία $(A_{k,m})_m$ είναι αύξουσα και, επειδή $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε x , έχουμε $\bigcup_m A_{k,m} = [0, +\infty)$. Επιπλέον, αν $x \notin A_{k,m}$, τότε για κάποιο $n \geq m$ ισχύει $|f_n(x)| \geq 1/k$. Από την υπόθεση $|f_n(x)| \leq e^{-x}$ έπεται

$$[0, +\infty) \setminus A_{k,m} \subseteq \{x \geq 0 : e^{-x} \geq 1/k\},$$

και το σύνολο στο δεξί μέλος έχει πεπερασμένο μέτρο. Άρα, από τη συνέχεια του μέτρου από πάνω,

$$\lambda([0, +\infty) \setminus A_{k,m}) \longrightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Για κάθε k επιλέγουμε λοιπόν m_k ώστε

$$\lambda([0, +\infty) \setminus A_{k, m_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Θέτουμε

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{k, m_k}.$$

Τότε

$$\lambda([0, +\infty) \setminus A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([0, +\infty) \setminus A_{k, m_k}) < \varepsilon.$$

Τέλος, για κάθε k και κάθε $n \geq m_k$ έχουμε $|f_n(x)| < 1/k$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A .

5.23. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $r_k \rightarrow 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} r_k = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $A_k \in \mathcal{A}$, $k \geq 1$, τέτοια ώστε

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k \chi_{A_k}(x)$$

για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη: Θέτουμε $f_0 = 0$ και ορίζουμε επαγωγικά

$$A_k = \{x \in X : f(x) \geq f_{k-1}(x) + r_k\}, \quad f_k = f_{k-1} + r_k \chi_{A_k}, \quad k \geq 1.$$

Η κατασκευή είναι νόμιμη: αν το f_{k-1} είναι μετρήσιμο, τότε και το $A_k = \{f - f_{k-1} \geq r_k\}$ είναι μετρήσιμο, άρα και το f_k είναι μετρήσιμο. Επιπλέον $f_k - f_{k-1} = r_k \chi_{A_k} \geq 0$, οπότε η (f_k) είναι αύξουσα. Επαγωγικά έχουμε επίσης $f_k \leq f$: αν $x \in A_k$, τότε $f_k(x) = f_{k-1}(x) + r_k \leq f(x)$, ενώ αν $x \notin A_k$, τότε $f_k(x) = f_{k-1}(x) \leq f(x)$. Συνεπώς $0 \leq f_k \leq f$ για κάθε k . Μένει να αποδείξουμε ότι $f_k(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Έστω $x \in X$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $f(x) = +\infty$ τότε $f(x) \geq \sum_{j=1}^k r_j \geq r_k + \sum_{j=1}^{k-1} r_j \chi_{A_j}(x)$ για κάθε $k \geq 1$, άρα $x \in A_k$ για κάθε $k \geq 1$. Έπεται ότι

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k r_j \chi_{A_j}(x) = \sum_{j=1}^k r_j \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} r_j = +\infty = f(x).$$

2. Αν $f(x) < +\infty$ τότε, αφού $\sum_{j=1}^{\infty} r_j = +\infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k > n$ τέτοιος ώστε $x \notin A_k$. Πράγματι, αν για κάποιον n έχουμε ότι $x \in A_k$ για κάθε $k > n$ τότε για κάθε $k > n$ έχουμε $f(x) \geq \sum_{j=1}^n r_j \chi_{A_j}(x) + \sum_{j=n+1}^k r_j \rightarrow +\infty$ όταν $k \rightarrow \infty$, το οποίο είναι άτοπο. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $x \notin A_k$, τότε από τον ορισμό του A_k έχουμε $f(x) < f_{k-1}(x) + r_k$. Επειδή στην περίπτωση αυτή $f_k(x) = f_{k-1}(x)$, παίρνουμε

$$0 \leq f(x) - f_k(x) < r_k.$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών (k_m) τέτοια ώστε $x \notin A_{k_m}$ για κάθε m , οπότε $0 \leq f(x) - f_{k_m}(x) < r_{k_m} \rightarrow 0$.

Η ακολουθία $(f(x) - f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα, έχει μη αρνητικούς όρους και έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο 0. Άρα, $f(x) - f_k(x) \rightarrow 0$, δηλαδή $f_k(x) \rightarrow f(x)$.

Δύσκολες ασκήσεις

5.24. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup_n f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \in Z^c$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$ και

$$Z = \limsup A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n.$$

Για κάθε m έχουμε $Z \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$, οπότε

$$\lambda(Z) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ συγκλίνει, το δεξί μέλος τείνει στο 0 όταν $m \rightarrow \infty$. Άρα $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$, υπάρχει N_x ώστε $x \notin A_n$ για κάθε $n \geq N_x$, δηλαδή $f_n(x) \leq \alpha$ τελικά. Συνεπώς $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq \alpha$.

5.25. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών με $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Δείξτε ότι αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty,$$

τότε υπάρχει $Z \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in Z^c$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}$. Από την υπόθεση $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$. Από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε

$$\lambda(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

Θέτουμε $Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$. Αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει N_x ώστε για κάθε $n \geq N_x$ να ισχύει $x \notin A_n$, δηλαδή $0 \leq f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Επειδή $\varepsilon_n \rightarrow 0$, παίρνουμε $f_n(x) \rightarrow 0$.

5.26. Έστω $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια χωριστά συνεχής συνάρτηση, δηλαδή συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in [0, 1]$ θέτουμε

$$k_n(x) = \min\{[nx], n - 1\}$$

και ορίζουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{k_n(x)}{n}, y\right), \quad (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in [0, 1]^2 : f_n(x, y) > \alpha\} &= \bigcup_{m=0}^{n-2} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right) \times \{y \in [0, 1] : f(m/n, y) > \alpha\} \\ &\cup \left[\frac{n-1}{n}, 1 \right] \times \{y \in [0, 1] : f((n-1)/n, y) > \alpha\}. \end{aligned}$$

Για κάθε σταθερό m , η συνάρτηση $y \mapsto f(m/n, y)$ είναι συνεχής, άρα τα παραπάνω σύνολα είναι Borel. Επομένως κάθε f_n είναι Borel μετρήσιμη.

Για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει $k_n(x)/n \rightarrow x$ (και για $x = 1$ έχουμε $k_n(1)/n = 1 - 1/n$). Από τη συνέχεια της συνάρτησης $u \mapsto f(u, y)$ για σταθερό y παίρνουμε

$$f_n(x, y) = f(k_n(x)/n, y) \rightarrow f(x, y).$$

Άρα η f είναι Borel μετρήσιμη ως κατά σημείο όριο Borel μετρήσιμων συναρτήσεων.

5.27. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (α_n) και σύνολο $Z \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in Z^c.$$

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε πρώτα τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(\{x \in [0, 1] : |g(x)| > \beta\}) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n) = \lambda([0, 1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(\{x : |g(x)| > k\}) < \varepsilon$. $\square$

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για την $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε

$$\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n.$$

Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ και $Z = \limsup E_n$. Για κάθε m ,

$$Z \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n,$$

άρα

$$\lambda(Z) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda(E_n) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \rightarrow 0.$$

Επομένως $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$, υπάρχει N_x ώστε $|f_n(x)| \leq \beta_n$ για κάθε $n \geq N_x$. Θέτουμε $\alpha_n = n\beta_n$. Τότε, για κάθε $x \notin Z$ και $n \geq N_x$,

$$\left| \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \right| \leq \frac{1}{n},$$

οπότε $f_n(x)/\alpha_n \rightarrow 0$.

5.28. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow [0, \infty]$ γράφεται στη μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leq a_n < \infty$ και $A_n \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων s_m με $s_m \geq 0$ και $s_m \rightarrow f$. Ορίζουμε $g_1 = s_1$ και $g_k = s_k - s_{k-1}$ για $k \geq 2$. Τότε, $g_k \geq 0$, οι g_k είναι απλές μετρήσιμες, και $\sum_{k=1}^m g_k = s_m \rightarrow f$, άρα $f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$.

Γράφουμε $g_1 = \sum_{n=0}^{t_1} a_n \chi_{A_n}$ και, αναριθμώντας διαδοχικά τους όρους, για κάθε $k \geq 2$ γράφουμε $g_k = \sum_{n=t_{k-1}+1}^{t_k} a_n \chi_{A_n}$, όπου $0 \leq a_n < \infty$, $A_n \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\sum_{n=0}^{t_m} a_n \chi_{A_n} = \sum_{k=1}^m g_k = s_m \rightarrow f.$$

Η ακολουθία $G_N := \sum_{n=0}^N a_n \chi_{A_n}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων και για την υπακολουθία (G_{t_m}) έχουμε $G_{t_m} = s_m \rightarrow f$. Έπεται ότι $G_N \rightarrow f$, άρα $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{A_n}$.

5.29. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση χ_E είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων αν και μόνο αν το E είναι ταυτόχρονα G_δ και F_σ σύνολο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f_n(x) \rightarrow \chi_E(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι $E = \{x : \lim f_n(x) = 1\}$ και $E^c = \{x : \lim f_n(x) = 0\}$, και έπεται ότι

$$E = \{x : \lim f_n(x) > 1/2\} \quad \text{και} \quad E^c = \{x : \lim f_n(x) < 1/2\}.$$

Πράγματι, για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι αν $x \in E$ τότε $\lim f_n(x) = 1 > 1/2$ και, αντίστροφα, αν $\lim f_n(x) > 1/2$ τότε, αφού $\lim f_n(x) \in \{0, 1\}$, αναγκαστικά $\lim f_n(x) = 1$. Η δεύτερη ισότητα εξηγείται με τον ίδιο τρόπο.

Τώρα, παρατηρούμε ότι (εξηγήστε γιατί)

$$E = \{x : \lim f_n(x) > 1/2\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{x : f_n(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right\}.$$

Από τη συνέχεια των f_n έχουμε ότι όλα τα σύνολα $\left\{x : f_n(x) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right\}$ είναι κλειστά, άρα το E είναι F_σ -σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων. Όμοια,

$$E^c = \{x : \lim(-f_n)(x) > -1/2\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \left\{x : -f_n(x) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right\}$$

και όπως πριν συμπεραίνουμε ότι το E^c είναι F_σ -σύνολο, άρα το E είναι G_δ -σύνολο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το E είναι G_δ και F_σ -σύνολο. Μπορούμε να βρούμε (εξηγήστε γιατί) φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ ανοικτών συνόλων και αύξουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ κλειστών συνόλων ώστε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{και} \quad E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Επειδή $F_n \subseteq E \subseteq G_n$, τα κλειστά σύνολα F_n και G_n^c είναι ξένα. Ορίζουμε απευθείας

$$f_n(x) = \frac{d(x, G_n^c)}{d(x, G_n^c) + d(x, F_n)}.$$

Ο παρονομαστής είναι θετικός για κάθε x : αν μηδενιζόταν, επειδή τα F_n και G_n^c είναι κλειστά, θα είχαμε $x \in F_n \cap G_n^c$, άτοπο. Επομένως η f_n είναι συνεχής και $0 \leq f_n \leq 1$. Επιπλέον, $f_n = 1$ στο F_n και

$f_n = 0$ στο G_n^c . Τώρα δείχνουμε ότι $\lim f_n(x) = \chi_E(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι:

1. Αν $x \in E$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in F_{n_0}$, άρα $x \in F_n$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $f_n(x) = 1$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $f_n(x) \rightarrow 1 = \chi_E(x)$.
2. Αν $x \notin E$ τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin G_{n_0}$, άρα $x \notin G_n$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $f_n(x) \rightarrow 0 = \chi_E(x)$.

5.30. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \setminus \{c_1, \dots, c_n\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_1}{x - c_1} + \frac{a_2}{x - c_2} + \dots + \frac{a_n}{x - c_n},$$

όπου $a_1, \dots, a_n > 0$ και $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \lambda(\{x : f(x) < -t\}) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{t}.$$

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(c_1, c_2), \dots, (c_{n-1}, c_n), (c_n, +\infty)$ και η εξίσωση $f(x) = t$ έχει ακριβώς n ρίζες $x_1 < \dots < x_n$, ακριβώς μία σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. Δηλαδή,

$$c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 < \dots < c_{n-1} < x_{n-1} < c_n < x_n < +\infty.$$

Άρα, $\{x : f(x) > t\} = \bigcup_{k=1}^n (c_k, x_k)$ και

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \sum_{k=1}^n (x_k - c_k) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n c_k.$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $f(x) = t$. Πολλαπλασιάζοντάς την με $\prod_{k=1}^n (x - c_k)$ παίρνουμε ισοδύναμα την πολυωνυμική εξίσωση

$$t \prod_{k=1}^n (x - c_k) - \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j \neq k} (x - c_j) = 0.$$

Το πολυώνυμο στο αριστερό μέλος γράφεται

$$tx^n - \left(t \sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=1}^n a_k \right) x^{n-1} + p(x),$$

όπου $p(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n - 2$. Από τους τύπους του Viète,

$$\sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{t} \left(t \sum_{k=1}^n c_k + \sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n c_k + \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\lambda(\{x : f(x) > t\}) = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^n c_k = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Για το σύνολο $\{f < -t\}$ λύνουμε αντίστοιχα την εξίσωση $f(x) = -t$. Έχει ακριβώς n ρίζες

$$y_1 < c_1 < y_2 < c_2 < \cdots < y_n < c_n,$$

και $\{x : f(x) < -t\} = \bigcup_{k=1}^n (y_k, c_k)$. Η πολυωνυμική εξίσωση είναι τώρα

$$t \prod_{k=1}^n (x - c_k) + \sum_{k=1}^n a_k \prod_{j \neq k} (x - c_j) = 0,$$

οπότε, πάλι από τους τύπους του Viète,

$$\sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n c_k - \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Άρα

$$\lambda(\{x : f(x) < -t\}) = \sum_{k=1}^n (c_k - y_k) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n a_k,$$

όπως θέλαμε.

5.31. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε το σύνολο $D = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ασυνεχής στο } x\}$ να είναι αριθμήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $b \in \mathbb{R}$ το σύνολο $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\}$ είναι σύνολο Borel. Γράφουμε

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq b\} = A_1 \cup A_2 := \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leq b\} \cup \{x \in D : f(x) \leq b\}.$$

Το A_2 είναι αριθμήσιμο, ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου D , άρα είναι F_σ -σύνολο (αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων) και συνεπώς σύνολο Borel. Από την υπόθεση, η συνάρτηση $f|_{\mathbb{R} \setminus D}$ είναι συνεχής. Άρα, το σύνολο

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f(x) \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus D : f|_{\mathbb{R} \setminus D}(x) \leq b\}$$

είναι κλειστό στο $\mathbb{R} \setminus D$ και γράφεται ως $A_1 = (\mathbb{R} \setminus D) \cap F$ για κάποιο κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$. Αφού το $\mathbb{R} \setminus D$ είναι G_δ -σύνολο, έπεται ότι το A_1 είναι Borel. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το $A = A_1 \cup A_2$ είναι σύνολο Borel.

(β) ($\Leftarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda(Z) = 0$ όπου $Z = \{f \neq g\}$. Για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{f \leq b\} = \{x \in Z : f(x) \leq b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : f(x) \leq b\} = \{x \in Z : f(x) \leq b\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leq b\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\{x \in Z : f(x) \leq b\} \subseteq Z$ και αφού $\lambda(Z) = 0$ έπεται ότι το $\{x \in Z : f(x) \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus Z : g(x) \leq b\} = (\mathbb{R} \setminus Z) \cap \{g \leq b\},$$

το οποίο είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο, αφού το $\mathbb{R} \setminus Z$ είναι Lebesgue μετρήσιμο και το $\{g \leq b\}$ είναι

σύνολο Borel. Άρα, το $\{f \leq b\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο για κάθε $b \in \mathbb{R}$, και συνεπώς η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

($\Rightarrow$) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει G_δ -σύνολο B ώστε $E \subseteq B$ και $\lambda(B \setminus E) = 0$. Αν θέσουμε $g = \chi_B$ τότε η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} = B \setminus E$, άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Έστω τώρα απλή μετρήσιμη συνάρτηση $f = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$. Από το προηγούμενο βήμα μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις g_j ώστε $\lambda(\{\chi_{E_j} \neq g_j\}) = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, m$. Τότε, για την Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g = \sum_{j=1}^m a_j g_j$ έχουμε

$$\{f \neq g\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m \{\chi_{E_j} \neq g_j\},$$

άρα $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχούσα Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f \geq 0$. Υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leq s_n \nearrow f$. Από το προηγούμενο βήμα, για κάθε n μπορούμε να βρούμε Borel μετρήσιμη συνάρτηση g_n ώστε $\lambda(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{s_n \neq g_n\}$. Ορίζουμε $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Τότε, $\lambda(Z) = 0$ και $g_n = s_n \nearrow f$ στο $\mathbb{R} \setminus Z$. Ορίζουμε αρχικά την εκτεταμένη πραγματική συνάρτηση $h := \limsup g_n$. Η h είναι Borel μετρήσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ έχουμε

$$h(x) = \limsup g_n(x) = \limsup s_n(x) = \lim s_n(x) = f(x).$$

Επειδή η f είναι πραγματική, το Borel σύνολο

$$N = \{x : h(x) = +\infty\} \cup \{x : h(x) = -\infty\}$$

περιέχεται στο Z , άρα $\lambda(N) = 0$. Θέτουμε τώρα

$$g(x) = \begin{cases} h(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Τότε η $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} \subseteq Z$, οπότε $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχούσα μετρήσιμη συνάρτηση, από το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\lambda(\{f^+ \neq g_1\}) = \lambda(\{f^- \neq g_2\}) = 0$ και θέτοντας $g = g_1 - g_2$ έχουμε ότι η g είναι Borel μετρήσιμη και $\{f \neq g\} \subseteq \{f^+ \neq g_1\} \cup \{f^- \neq g_2\}$, απ' όπου έπεται ότι $\lambda(\{f \neq g\}) = 0$.

5.32. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ με

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x - a_k|}$$

αν $x \notin A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ και $f(x) = \infty$ αν $x \in A$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = \infty.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : |x - a_k| \leq 1/2^k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k - 1/2^k, a_k + 1/2^k].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda([a_k - 1/2^k, a_k + 1/2^k]) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} = 2.$$

Συνεπώς, $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{R} \setminus B$ τότε $|x - a_k| > 1/2^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\frac{1}{4^k |x - a_k|} < \frac{2^k}{4^k} = \frac{1}{2^k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus B$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x - a_k|} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

δηλαδή $\mathbb{R} \setminus B \subseteq \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}$. Αφού $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) < 1\}) = \infty$.

5.33. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και θεωρούμε ακολουθία $f_n : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμων συναρτήσεων με $|f_n| < \infty$ μ -σχεδόν παντού.

- (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών ώστε $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού.
- (β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty)$ και ακολουθία (r_n) θετικών αριθμών ώστε $|f_n| \leq r_n g$ μ -σχεδόν παντού για κάθε n .

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι αν $g : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b > 0$ ώστε $\mu(\{x \in X : |g(x)| > b\}) < \varepsilon$. Θέτουμε $T = \{x \in X : |g(x)| = +\infty\}$. Τότε, $\mu(T) = 0$. Αν $A_n = \{x : |g(x)| \leq n\}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus T$ και η $\{A_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(X \setminus T) = \mu(X)$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A_k) > \mu(X) - \varepsilon$. Τότε, $\mu(\{x \in X : |g(x)| > k\}) < \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $b_n > 0$ ώστε $\mu(\{x : |f_n(x)| > b_n\}) < 1/2^n$. Θέτουμε $A_n = \{x : |f_n(x)| > b_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup A_n$, τότε για κάθε $m \geq 1$ έχουμε

$$Z \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

οπότε, από την υποπροσθετικότητα,

$$\mu(Z) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} \rightarrow 0.$$

Άρα $\mu(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leq b_n$. Αν θεωρήσουμε την $\lambda_n = \frac{1}{nb_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $|\lambda_n f_n(x)| \leq 1/n \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

(β) Από την υπόθεση, αν $Z_n = \{|f_n| = +\infty\}$ και $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ τότε $\mu(Z) = 0$. Δουλεύοντας στο $X \setminus Z$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|f_n(x)| < +\infty$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in X$. Από το (α) έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_n > 0$ ώστε $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, συνεπώς μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ παντού.

Από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_1 \subseteq X$ ώστε $\mu(X \setminus A_1) < 1$ και $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A_1 . Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_1 , δηλαδή υπάρχει $t_1 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_1$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_1$. Πάλι από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_2 \subseteq X \setminus A_1$ ώστε $\mu((X \setminus A_1) \setminus A_2) < 1/2$ και $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A_2 . Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_2 , δηλαδή υπάρχει $t_2 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_2$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_2$. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων (A_k) και ακολουθία θετικών αριθμών (t_k) ώστε $\mu(X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)) < 1/k$ και $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_k$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_k$.

Ορίζουμε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty)$ με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x).$$

Αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ και, από την κατασκευή, για κάθε $x \in A$ και $n \geq 1$ έχουμε

$$|f_n(x)| \leq r_n g(x)$$

όπου $r_n = 1/\lambda_n$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

5.34. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού.

- (α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (λ_n) θετικών αριθμών με $\lambda_n \rightarrow \infty$ ώστε $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού.
- (β) Αποδείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty)$ και ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών και $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ώστε $|f_n| \leq \varepsilon_n g$ μ -σχεδόν παντού για κάθε n .

Υπόδειξη. (α) Υπάρχει $N \subset X$ με $\mu(N) = 0$ ώστε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in X \setminus N$. Για κάθε $m, s \geq 1$ ορίζουμε

$$A_{s,m} = \left\{ x \in X : \sup_{n \geq s} |f_n(x)| \leq \frac{1}{m} \right\}.$$

Για κάθε σταθερό m , η ακολουθία $(A_{s,m})_{s=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Επειδή $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in X \setminus N$, για κάθε τέτοιο x υπάρχει $s = s(x, m)$ ώστε $x \in A_{s,m}$. Επομένως

$$X \setminus N \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} A_{s,m} \subseteq X.$$

Αφού $\mu(N) = 0$ και $\mu(X) < \infty$, έχουμε

$$\mu\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} A_{s,m}\right) = \mu(X).$$

Από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω υπάρχει λοιπόν $n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(X \setminus A_{n_m,m}) < 2^{-m}$. Αυξάνοντας, αν χρειάζεται, τους n_m , μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(n_m)_{m=1}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ορίζουμε $\lambda_n = \sqrt{m}$ για κάθε $n \in \{n_m, \dots, n_{m+1} - 1\}$. Τότε, $\lambda_n \rightarrow \infty$ και θα δείξουμε ότι $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ μ -σχεδόν παντού. Θέτουμε $B_m = A_{n_m,m}$ και έχουμε $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(X \setminus B_m) < \infty$, άρα $\mu(\limsup (X \setminus B_m)) = 0$ από το λήμμα Borel-Cantelli. Έστω $x \notin \limsup (X \setminus B_m)$. Τότε υπάρχει $m_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_m$ για κάθε $m \geq m_x$. Τότε, για κάθε $n \geq n_{m_x}$ υπάρχει $m(n) \geq m_x$ ώστε $n_{m(n)} \leq n < n_{m(n)+1}$. Παρατηρήστε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} m(n) = \infty$.

Αφού $x \in B_m$ έχουμε

$$|\lambda_n f_n(x)| = \sqrt{m(n)} |f_n(x)| \leq \sqrt{m(n)} \cdot \frac{1}{m(n)} = \frac{1}{\sqrt{m(n)}} \rightarrow 0.$$

(β) Δουλεύουμε ακριβώς όπως στο (β) της Άσκησης 5.33. Από το (α) έχουμε ότι υπάρχουν $\lambda_n \rightarrow \infty$ ώστε $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, συνεπώς μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ παντού.

Από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_1 \subseteq X$ ώστε $\mu(X \setminus A_1) < 1$ και $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A_1 . Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_1 , δηλαδή υπάρχει $t_1 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_1$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_1$. Πάλι από το θεώρημα Egorov υπάρχει $A_2 \subseteq X \setminus A_1$ ώστε $\mu((X \setminus A_1) \setminus A_2) < 1/2$ και $\lambda_n f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο A_2 . Ειδικότερα, η $(\lambda_n f_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο A_2 , δηλαδή υπάρχει $t_2 > 0$ ώστε $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_2$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_2$. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων (A_k) και ακολουθία θετικών αριθμών (t_k) ώστε $\mu(X \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)) < 1/k$ και $\lambda_n |f_n(x)| \leq t_k$ για κάθε $n \geq 1$ και $x \in A_k$.

Ορίζουμε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty)$ με

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \chi_{A_k}(x).$$

Αν $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ και, από την κατασκευή, για κάθε $x \in A$ και $n \geq 1$ έχουμε

$$|f_n(x)| \leq \varepsilon_n g(x)$$

όπου $\varepsilon_n = 1/\lambda_n \rightarrow 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

5.35. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$, συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο για $k = 2$ (η γενική περίπτωση είναι παρόμοια). Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$,

$$E(B) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) \in B\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) \in B\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, η συνάρτηση

$$y \mapsto f(m/n, y)$$

είναι συνεχής, επειδή η f είναι συνεχής ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Επομένως, για κάθε Borel σύνολο $B \subseteq \mathbb{C}$, το σύνολο

$$\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) \in B\}$$

είναι Borel. Άρα κάθε όρος της παραπάνω αριθμήσιμης ένωσης είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, οπότε το $E(B)$ είναι μετρήσιμο. Αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \rightarrow f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \rightarrow x$ καθώς

το $n \rightarrow \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \rightarrow f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

5.36. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$ -μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\limsup n^2 \mu(\{|f_n| \geq 1/n^2\}) < \infty.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει μ -σχεδόν για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha := \limsup n^2 \mu(\{|f_n| \geq 1/n^2\}) < \infty$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n^2 \mu(\{|f_n| \geq 1/n^2\}) < \alpha + 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, αν ορίσουμε $A_n = \{x : |f_n(x)| \geq 1/n^2\}$ τότε $\mu(A_n) < (\alpha + 1)/n^2$ για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται ότι

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mu(A_n) < (\alpha + 1) \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι

$$\mu\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

. Τώρα, για κάθε $x \notin \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, δηλαδή μ -σχεδόν για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι υπάρχει $n_x \geq n_0$ τέτοιος ώστε για κάθε $k > n_x$ να έχουμε $x \notin A_k$, δηλαδή για κάθε $k > n_x$ να έχουμε $|f_k(x)| < 1/k^2$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < \sum_{k=1}^{n_x} |f_k(x)| + \sum_{k=n_x+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Άρα, μ -σχεδόν για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει (ακριβέστερα, συγκλίνει απολύτως).

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

Απλές ασκήσεις

6.1. (Ανισότητα Chebyshev-Markov) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για κάθε $t > 0$ είναι

$$\mu(\{x \in X : f(x) > t\}) \leq \frac{1}{t} \int f \, d\mu.$$

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$ και έστω $A_t := \{x \in X : f(x) > t\}$. Παρατηρούμε ότι

$$t \cdot \mu(A_t) = \int_{A_t} t \, d\mu \leq \int_{A_t} f \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

6.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ με

$$F(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}).$$

Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά και $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Markov έχουμε $t \cdot \mu(\{f > t\}) \leq \int f \, d\mu$, άρα $F(t) = \mu(\{x \in X : f(x) > t\}) < \infty$ για κάθε $t > 0$. Επίσης,

$$F(t) \leq \frac{1}{t} \int f \, d\mu \rightarrow 0$$

όταν $t \rightarrow +\infty$, το οποίο αποδεικνύει ότι $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $F(t_n) \rightarrow F(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in X : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in X : f(x) > t\}$. Επομένως, από την συνέχεια του μέτρου παίρνουμε:

$$F(t) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n),$$

που αποδεικνύει την συνέχεια της F από δεξιά.

6.3. Δείξτε ότι $\int_{[1, \infty)} \frac{1}{x} \, d\lambda = +\infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda \geq \int_{[1,n)} \frac{1}{x} d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{x} d\lambda \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[k,k+1)} \frac{1}{k+1} d\lambda = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Η αρμονική σειρά αποκλίνει, συνεπώς

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Έπεται ότι $\int_{[1,\infty)} \frac{1}{x} d\lambda = +\infty$.

6.4. Βρείτε μια ακολουθία $\{f_n\}$ μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιεί τα εξής: $f_n \rightarrow 0$ αλλά $\lim_n \int f_n d\lambda = 1$. Μπορείτε να επιλέξετε την $\{f_n\}$ έτσι ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση;

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}(x).$$

Παρατηρήστε ότι $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα. Όμως,

$$\int f_n d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0, n]) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

6.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι f και f_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει k τέτοιος ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Υπόδειξη. Επειδή $\int f_k d\mu < \infty$, το σύνολο

$$N = \{x \in X : f_k(x) = +\infty\}$$

έχει μέτρο μηδέν. Από τη μονοτονία $f_n \leq f_k$ για κάθε $n \geq k$ και $f \leq f_k$, άρα στο $X \setminus N$ όλες οι διαφορές $f_k - f_n$ και $f_k - f$ είναι καλά ορισμένες και μη αρνητικές. Θέτουμε εκεί

$$g_n = f_k - f_n, \quad n \geq k.$$

Η (g_n) είναι αύξουσα και $g_n \nearrow f_k - f$. Επεκτείνοντας, αν θέλουμε, τις g_n με τιμή 0 στο N , το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δίνει

$$\int_X g_n d\mu \longrightarrow \int_X (f_k - f) \chi_{X \setminus N} d\mu.$$

Επειδή $0 \leq g_n \leq f_k$ και $0 \leq (f_k - f) \chi_{X \setminus N} \leq f_k$, όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα. Επιπλέον, τα N και οι μεταβολές των συναρτήσεων πάνω στο N δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα. Επομένως, για $n \geq k$,

$$\int_X f_n d\mu = \int_X f_k d\mu - \int_X g_n d\mu,$$

και περνώντας στο όριο παίρνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f_k d\mu - \int_X (f_k - f) \chi_{X \setminus N} d\mu = \int_X f d\mu.$$

Έτσι αποφεύγεται και η απροσδιόριστη διαφορά $+\infty - +\infty$ στα σημεία του N .

6.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σχεδόν παντού. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E , δείξτε ότι $\mu(E) = 0$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E , δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n} \mu(E_n) \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0,$$

άρα $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Για τη γενική περίπτωση θέτουμε

$$N = \{x \in E : f(x) \leq 0\}.$$

Από την υπόθεση $f > 0$ σχεδόν παντού έχουμε $\mu(N) = 0$. Επομένως $\int_N f d\mu = 0$ και, αφού $\int_E f d\mu = 0$,

$$\int_{E \setminus N} f d\mu = 0.$$

Στο $E \setminus N$ ισχύει $f > 0$ παντού, οπότε από το προηγούμενο επιχείρημα $\mu(E \setminus N) = 0$. Άρα

$$\mu(E) \leq \mu(E \setminus N) + \mu(N) = 0.$$

6.7. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ μη αρνητική Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \geq 1/n\}} f d\lambda.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x) \chi_{[-n, n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^n f d\lambda = \int f \chi_{[-n, n]} d\lambda = \int g_n d\lambda \rightarrow \int f d\lambda.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x) \chi_{\{f \geq 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geq 1/n\} \subseteq \{f \geq 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geq 1/n$

άρα $h_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n , οπότε πάλι $h_n(x) \rightarrow 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f \geq 1/n\}} f \, d\lambda = \int f \chi_{\{f \geq 1/n\}} \, d\lambda = \int h_n \, d\lambda \rightarrow \int f \, d\lambda.$$

6.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \leq n\}} f \, d\mu.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x) \chi_{\{f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leq n\} \subseteq \{f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ με $f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \leq n$ άρα $g_n(x) = f(x) \rightarrow f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n \chi_E \nearrow f \chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f \leq n\}} f \, d\mu = \int f \chi_{\{f \leq n\}} \, d\mu = \int g_n \, d\mu = \int g_n \chi_E \, d\mu \rightarrow \int f \chi_E \, d\mu.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\mu(E^c) = 0$ και $\int f \chi_{E^c} \, d\mu = 0$. Έπεται ότι

$$\int f \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu + \int f \chi_{E^c} \, d\mu = \int f \chi_E \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{f \leq n\}} f \, d\mu.$$

6.9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$;

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f \, d\lambda = 0$. Όμως, ούτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ούτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ υπάρχει. Πράγματι, αν $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τότε

$$f(n) = 1, \quad f(n + \alpha) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ και οι δύο ακολουθίες n και $n + \alpha$ τείνουν στο $+\infty$. Ομοίως,

$$f(-n) = 1, \quad f(-n + \alpha) = 0,$$

και οι δύο αντίστοιχες ακολουθίες τείνουν στο $-\infty$.

6.10. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n, n+1]}$, τότε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1]$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\lambda = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\lambda = 0,$$

ενώ $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = 1.$$

6.11. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_n \int f_n d\mu \leq \int \limsup_n f_n d\mu ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leq f_n \leq 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda = 0,$$

αλλά $\int f_n d\lambda = \frac{1}{n} \lambda([0, n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\lambda = 1.$$

6.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_X |f_n - f| d\mu \leq \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ μ -σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Από το θεώρημα Βερρο Levi έχουμε

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty,$$

δηλαδή η $g = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι μ -σχεδόν παντού ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| < +\infty \implies |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \implies f_n(x) \rightarrow f(x).$$

6.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_X f d\mu \geq \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\mu(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}) > 0$.

Υπόδειξη: Υποθέτουμε ότι $\mu(\{x \in X : f(x) \geq \alpha\}) = 0$. Τότε, η συνάρτηση $g(x) = \alpha - f(x)$ είναι γνησίως θετική μ -σχεδόν παντού. Αν $A = \{g > 0\}$ και $A_n = \{g \geq 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τότε $\mu(X \setminus A) = 0$ (άρα $\int_{X \setminus A} g d\mu = 0$) και $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A) = 1$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mu(A_{n_0}) > 1/2$. Έπεται ότι

$$\int_X g d\mu = \int_{X \setminus A} g d\mu + \int_A g d\mu = \int_A g d\mu \geq \int_{A_{n_0}} g d\mu \geq \frac{1}{n_0} \mu(A_{n_0}) > \frac{1}{2n_0} > 0.$$

Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_X g \, d\mu = \int_X \alpha \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \alpha - \int_X f \, d\mu \leq 0,$$

και έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο.

6.14. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

(α) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, dx.$

(β) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \, dx.$

Υπόδειξη: (α) Ορίζουμε $f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)$, $x \geq 0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 + x + \frac{n-1}{2n} x^2 \geq 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2,$$

άρα

$$|f_n(x)| = |(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leq \frac{1}{(1 + (x/2))^2} |\sin(x/n)| \leq g(x) := \frac{1}{(1 + (x/2))^2}.$$

Επίσης,

$$f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \rightarrow e^{-x} \cdot 0 = 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ (εξηγήστε γιατί), άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_0^\infty (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

(β) Ορίζουμε $g_n(x) = (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n}$. Παρατηρούμε ότι $(1 + x^2)^n \geq 1 + nx^2$ από την ανισότητα Bernoulli, άρα $g_n(x) \leq g(x) := 1$ στο $[0, 1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $x \in (0, 1]$ και $n \geq 2$ τότε

$$(1 + x^2)^n \geq 1 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2} x^4 > \frac{n(n-1)}{2} x^4,$$

άρα

$$g_n(x) \leq 2 \frac{1 + nx^2}{n(n-1)x^4} \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \, d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

6.15. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής:

(α) Αν το E είναι κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$ τότε η $\chi_E : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Υπάρχει ακολουθία μη αρνητικών Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow 0$ και $\sup\{f_k(x) : k \geq n\} = +\infty$ για κάθε $n \geq 1$ και κάθε $x \in [0, 1]$.

Υπόδειξη: (α) *Ψευδής:* Γνωρίζουμε ότι υπάρχει σύνολο C_θ τύπου Cantor με $0 < \theta = \lambda(C_\theta) < 1$. Το C_θ είναι κλειστό και $\partial(C_\theta) = C_\theta$ (κάθε σημείο x του C_θ ανήκει στο σύνορο του C_θ διότι $(x - \delta, x + \delta) \setminus C_\theta \neq \emptyset$, αφού το C_θ δεν περιέχει διαστήματα).

Η χ_{C_θ} είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in \partial(C_\theta)$, άρα το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της χ_{C_θ} έχει θετικό μέτρο. Συνεπώς, η χ_{C_θ} δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) *Αληθής:* Για κάθε $n \geq 0$ και $1 \leq k \leq 2^n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$. Κατόπιν, θεωρούμε την ακολουθία διαστημάτων

$$I_{0,1}, I_{1,1}, I_{1,2}, I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, I_{2,4}, \dots$$

με αυτή τη σειρά, και την αντίστοιχη ακολουθία Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f_{n,k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $f_{n,k} = 2^{n/2} \chi_{I_{n,k}}$. Για σταθερό $n \geq 0$ και οποιονδήποτε $1 \leq k \leq 2^n$ βλέπουμε ότι

$$\|f_{n,k}\|_1 = \int_0^1 f_{n,k} d\lambda = 2^{n/2} \lambda(I_{n,k}) = 2^{n/2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n/2}} \rightarrow 0$$

Αριθμούμε τώρα διαδοχικά όλες αυτές τις συναρτήσεις κατά επίπεδα,

$$f_{0,1}, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}, \dots, f_{2,4}, \dots,$$

και συμβολίζουμε την προκύπτουσα απλή ακολουθία με $(g_j)_{j \geq 1}$. Καθώς το επίπεδο των όρων τείνει στο άπειρο όταν $j \rightarrow \infty$, η προηγούμενη εκτίμηση δίνει $\int_0^1 g_j d\lambda \rightarrow 0$.

Για να ελέγξουμε προσεκτικά τη δεύτερη ιδιότητα, έστω $x \in [0, 1]$ και $N \geq 1$. Για κάθε αρκετά μεγάλο επίπεδο m , ολόκληρο το m -οστό μπλοκ εμφανίζεται μετά τον N -οστό όρο της ακολουθίας. Υπάρχει $k_m(x) \in \{1, \dots, 2^m\}$ με $x \in I_{m,k_m(x)}$, οπότε ένας όρος αυτού του μπλοκ παίρνει στο x την τιμή

$$f_{m,k_m(x)}(x) = 2^{m/2}.$$

Επειδή το m μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλο, παίρνουμε

$$\sup\{g_j(x) : j \geq N\} = +\infty.$$

Άρα η (g_j) έχει ακριβώς τις δύο ζητούμενες ιδιότητες.

6.16. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι το μέτρο μ είναι σ -πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $E_n = \{x \in X : f(x) \geq 1/n\}$. Από την ανισότητα Markov έχουμε ότι

$$\mu(E_n) \leq n \int_X f d\mu < +\infty$$

διότι, από την υπόθεση, το ολοκλήρωμα της f είναι πεπερασμένο. Αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x \in X$,

έχουμε ότι

$$X = \{x \in X : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \geq 1/n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Άρα, το μ είναι σ -πεπερασμένο.

6.17. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: Από το θεώρημα Beppo Levi και την αλλαγή μεταβλητής $u = nx$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) \right) d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(nx) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\lambda \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \lambda(E). \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx)$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) = h(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$.

6.18. Έστω $\delta > 0$ και $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\delta x}{x+1}$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\alpha > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \alpha]} f(nx) d\lambda(x) = \delta \alpha.$$

Υπόδειξη. Η τιμή της f στο 0 δεν επηρεάζει το ολοκλήρωμα. Για $x > 0$ γράφουμε

$$f(nx) = \frac{\sin(nx)}{nx} + \delta \frac{nx}{nx+1}.$$

Για τον δεύτερο όρο έχουμε $0 \leq nx/(nx+1) \leq 1$ και $nx/(nx+1) \rightarrow 1$ για κάθε $x > 0$, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\delta \int_0^{\alpha} \frac{nx}{nx+1} dx \rightarrow \delta \alpha.$$

Για τον πρώτο όρο, με την αλλαγή μεταβλητής $u = nx$,

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin(nx)}{nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\alpha} \frac{\sin u}{u} du.$$

Τα μερικά ολοκληρώματα $\int_0^R (\sin u)/u du$ είναι ομοιόμορφα φραγμένα ως προς $R > 0$: στο $[0, 1]$ αυτό είναι άμεσο, ενώ για $R > 1$ ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει

$$\int_1^R \frac{\sin u}{u} du = \left[-\frac{\cos u}{u} \right]_1^R - \int_1^R \frac{\cos u}{u^2} du,$$

και το δεξί μέλος είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Επομένως

$$\frac{1}{n} \int_0^{n\alpha} \frac{\sin u}{u} du \longrightarrow 0,$$

και συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο όριο $\delta\alpha$.

6.19. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και μ, ν δύο μέτρα στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\mu(A) \leq \nu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ ισχύει ότι $\int_X f d\mu \leq \int_X f d\nu$.

Υπόδειξη. Αν $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$ είναι μη αρνητική απλή συνάρτηση, όπου τα A_j είναι ανά δύο ξένα και $a_j \geq 0$, τότε

$$\int_X s d\mu = \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j) \leq \sum_{j=1}^m a_j \nu(A_j) = \int_X s d\nu.$$

Για γενική μη αρνητική μετρήσιμη f , επιλέγουμε μη αρνητικές απλές συναρτήσεις $s_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\nu = \int_X f d\nu.$$

6.20. (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\mu(X) > 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένη στο E .

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $\int |f| d\mu < +\infty$ τότε $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

Υπόδειξη: (α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$. Τότε, $E_n \in \mathcal{A}$ διότι η f είναι μετρήσιμη, και αφού $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]$ έχουμε ότι

$$X = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n]\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}([-n, n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Από την αριθμίσμη υποπροσθετικότητα του μ ,

$$0 < \mu(X) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(E_m) > 0$. Θέτουμε $E := E_m$. Τότε, $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) > 0$ και $|f(x)| \leq m$ για κάθε $x \in E$, δηλαδή η f είναι φραγμένη στο E .

(β) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu.$$

Επίσης, $\{x \in X : |f(x)| = +\infty\} \subseteq \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$, άρα,

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq n\})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$0 \leq \mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| d\mu \rightarrow 0,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι $\mu(\{x \in X : |f(x)| = +\infty\}) = 0$.

6.21. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ και $\int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \leq 1$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $\int_{[0,1]} |f_n| d\lambda \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$ με $\lambda([0, 1] \setminus E) < \varepsilon^2/4$ τέτοιο ώστε $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο E . Άρα, για όλα τα αρκετά μεγάλα n ,

$$\int_E |f_n| d\lambda \leq \lambda(E) \sup_{x \in E} |f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Στο συμπλήρωμα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την υπόθεση $\|f_n\|_2 \leq 1$,

$$\int_{[0,1] \setminus E} |f_n| d\lambda \leq \lambda([0, 1] \setminus E)^{1/2} \left(\int_{[0,1] \setminus E} |f_n|^2 d\lambda \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως, για όλα τα αρκετά μεγάλα n ,

$$\int_{[0,1]} |f_n| d\lambda < \varepsilon,$$

και συνεπώς $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

6.22. Έστω f και f_n , $n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ με $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \rightarrow f$. Δείξτε ότι

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leq f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int f d\mu.$$

Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Άρα,

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

6.23. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n d\lambda - \int_a^b f d\lambda \right| \leq \int_a^b |f_n - f| d\lambda \leq \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, από την ίδια εκτίμηση παίρνουμε αμέσως

$$\int_a^b |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0,$$

και, ως συνέπεια, $\int_a^b f_n d\lambda \rightarrow \int_a^b f d\lambda$.

6.24. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$;

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geq 0$, $g_n \geq g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 d\mu < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυικό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – δείτε και την Άσκηση 6.12):

$$\begin{aligned} \int f d\mu - \lim_n \int f_n d\mu &= \lim_n \left(\int f d\mu - \int f_n d\mu \right) = \lim_n \int (f - f_n) d\mu \\ &= \lim_n \int g_n d\mu = \int \left(\lim_n g_n \right) d\mu = 0, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

6.25. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Δείξτε ότι $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ και $\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left| \int |f_n| d\mu - \int |f| d\mu \right| \leq \int ||f_n| - |f|| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_n - f) d\mu \right| \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

6.26. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Δείξτε ότι $\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E , και $\int f_n^+ d\mu \rightarrow \int f^+ d\mu$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την προηγούμενη Άσκηση 6.25. Αφού $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, έχουμε δείξει ότι $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$ και $\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+ d\mu &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} d\mu = \frac{1}{2} \int f_n d\mu + \frac{1}{2} \int |f_n| d\mu \rightarrow \frac{1}{2} \int f d\mu + \frac{1}{2} \int |f| d\mu \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} d\mu = \int f^+ d\mu. \end{aligned}$$

6.27. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\mu(E) < \infty$ τέτοιο ώστε

$$\int_E f d\mu > \int f d\mu - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E .

Υπόδειξη. Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, το μετρήσιμο σύνολο $N = \{x : f(x) = +\infty\}$ έχει μέτρο μηδέν. Αντικαθιστώντας, αν χρειάζεται, τη f με τη μετρήσιμη συνάρτηση $f\chi_{X \setminus N}$, δεν αλλάζει κανένα ολοκλήρωμα και μπορούμε πλέον να υποθέσουμε ότι $f(x) < +\infty$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leq f \leq n\} \subseteq \{1/(n+1) \leq f \leq n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in X$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $1/n \leq f(x) \leq n$, άρα $g_n(x) = f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n . Επομένως $g_n \nearrow f$ κατά σημείο. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n \leq f \leq n\}} f d\mu = \int f\chi_{\{1/n \leq f \leq n\}} d\mu = \int g_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leq f \leq n\}$ τότε

$$\int_E f d\mu > \int f d\mu - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E . Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\mu(E) \leq \mu(\{f \geq 1/n\}) \leq n \int f d\mu < +\infty.$$

6.28. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E f d\mu < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leq n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \rightarrow f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) d\mu = \int f d\mu - \int f_n d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \in \mathcal{A}$ με $\mu(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_E f_n d\mu + \int_E (f - f_n) d\mu \leq \int_E f_n d\mu + \int (f - f_n) d\mu \\ &\leq n\mu(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

6.29. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μη αρνητική Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^x f d\lambda$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leq F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \rightarrow x$ ισχύει $F(x_n) \rightarrow F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty, x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty, x]}$, οπότε $F(x_n) = \int g_n d\lambda$ και $F(x) = \int g d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο και $|g_n| \leq f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f d\lambda = \int g_n d\lambda \rightarrow \int g d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής από δεξιά. Για την αριστερή συνέχεια, αν $x_n \uparrow x$, τότε οι δείκτριες $\chi_{(-\infty, x_n]}$ συγκλίνουν στην $\chi_{(-\infty, x]}$ για κάθε $t \neq x$. Επειδή το μονοσύνολο $\{x\}$ έχει μέτρο Lebesgue μηδέν, έχουμε $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού και το ίδιο επιχείρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει $F(x_n) \rightarrow F(x)$.

6.30. Έστω ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \rightarrow f$ και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο $A \in \mathcal{A}$. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f d\mu = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_A f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu$$

και

$$\int_{A^c} f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{A^c} f_n d\mu$$

δηλαδή

$$\int f d\mu - \int_A f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu - \int_A f_n d\mu \right).$$

Αφού

$$- \int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \int f_n d\mu \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$- \int_A f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int_A f_n d\mu \right) = - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu \leq \int_A f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

Η υπόθεση $\int f d\mu < \infty$ είναι ουσιώδης. Πράγματι, έστω $X = \mathbb{N}$ με το μέτρο απαρίθμησης, $A = 2\mathbb{N}$, $f = \chi_{\mathbb{N} \setminus A}$ και

$$f_n = f + \chi_{\{2n\}}.$$

Τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο και

$$\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = +\infty$$

για κάθε n . Ωστόσο,

$$\int_A f_n d\mu = 1 \quad \text{για κάθε } n, \quad \int_A f d\mu = 0,$$

οπότε το συμπέρασμα αποτυγχάνει.

6.31. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε

$$A_j = \{2^j < |f| \leq 2^{j+1}\}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Αν $\mu(\{|f| = +\infty\}) > 0$, τότε τόσο $\int_X |f| d\mu$ όσο και $\sum_k 2^k \mu(\{|f| > 2^k\})$ είναι άπειρα, οπότε δεν υπάρχει τίποτε να αποδείξουμε. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $|f| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε

$$s = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \chi_{A_j}.$$

Τότε, σχεδόν παντού,

$$s \leq |f| \leq 2s,$$

και συνεπώς

$$\int_X s d\mu \leq \int_X |f| d\mu \leq 2 \int_X s d\mu.$$

Από το θεώρημα Tonelli για μη αρνητικές σειρές,

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \sum_{j \geq k} \mu(A_j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(A_j) \sum_{k \leq j} 2^k = 2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^j \mu(A_j) = 2 \int_X s \, d\mu.\end{aligned}$$

Οι ισότητες αυτές ισχύουν και με τιμή $+\infty$, επειδή όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί. Άρα

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) \leq \int_X |f| \, d\mu \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}),$$

και το ζητούμενο ακολουθεί αμέσως.

2η λύση: Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f| \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{|f| > t\}) \, dt = \sum_{k=-\infty}^\infty \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(\{|f| > t\}) \, dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \mu(\{|f| > t\})$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1} \mu(\{|f| > 2^k\}) \leq \int_{2^{k-1}}^{2^k} \mu(\{|f| > t\}) \, dt \leq 2^k \mu(\{|f| > 2^{k-1}\}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, άρα

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) \leq \int_0^\infty \mu(\{|f| > t\}) \, dt \leq 2 \sum_{k=-\infty}^\infty 2^{k-1} \mu(\{|f| > 2^{k-1}\}) = 2 \sum_{k=-\infty}^\infty 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}).$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f| \, d\mu$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^\infty 2^k \mu(\{|f| > 2^k\}) < +\infty$.

6.32. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \, dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n(x) = (1 - x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$, για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leq e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \rightarrow e^{-x} \chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

6.33. Υπολογίστε (αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας) το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2} \, dx.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n e^{x/2} \chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leq e^{-x/2} \chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2} \chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκληρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n \, d\lambda = \int \lim_n f_n \, d\lambda$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geq 0$ έχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \right] = e^{-x} e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} dx = \int_0^\infty e^{-x/2} dx = 2.$$

6.34. Έστω $\{f_n\}$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και έστω ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu.$$

Υπόδειξη. ($\Rightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| d\mu - \int |f| d\mu \right| \leq \int ||f_n| - |f|| d\mu \leq \int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu.$$

($\Leftarrow$) Έχουμε $||f_n - f| - |f_n|| \leq |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \rightarrow -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) d\mu \rightarrow \int (-|f|) d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0.$$

6.35. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και f μια μετρήσιμη συνάρτηση.

(i) Αν $f \geq 0$ σχεδόν παντού και αν $f_n = \min\{f, n\}$, τότε $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

(ii) Αν $n f$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, τότε $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο X . Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leq |f|$ και ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο X . Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

6.36. Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[a,x]} f d\lambda = 0,$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Να δείξετε ότι $f = 0$ λ -σχεδόν παντού στο $[a, b]$.

Υπόδειξη. Αφού $n f$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_Z f d\lambda = 0 \quad \text{αν } Z \subset [a, b] \text{ με } \lambda(Z) = 0.$$

Από την υπόθεση έπεται ότι αν $a \leq c < d \leq b$ τότε

$$\int_{[c,d]} f d\lambda = \int_{[a,d]} f d\lambda - \int_{[a,c]} f d\lambda = 0.$$

Έστω $G \subset [a,b]$ ανοικτό ως προς τη σχετική τοπολογία. Γράφουμε το G ως αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο διαστημάτων I_n (ενδεχομένως με ένα άκρο a ή b). Για κάθε n έχουμε $\int_{I_n} f d\lambda = 0$: αυτό προκύπτει από την προηγούμενη σχέση, αφού η προσθήκη ή αφαίρεση πεπερασμένου πλήθους άκρων δεν αλλάζει το ολοκλήρωμα. Επειδή $f \in L^1([a,b])$, μπορούμε να αθροίσουμε πάνω στα ξένα ανά δύο I_n (ή, ισοδύναμα, να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στις πεπερασμένες ενώσεις) και παίρνουμε

$$\int_G f d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f d\lambda = 0.$$

Αν H είναι ένα G_δ υποσύνολο του $[a,b]$, τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}$ ανοικτών υποσυνόλων του $[a,b]$ ώστε $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $f\chi_H = \lim_{n \rightarrow \infty} (f\chi_{G_n})$ και $|f\chi_{G_n}| \leq |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$0 = \int_{G_n} f d\lambda = \int_{[a,b]} f\chi_{G_n} d\lambda \rightarrow \int_{[a,b]} f\chi_H d\lambda = \int_H f d\lambda.$$

Τέλος, αν E είναι τυχόν μετρήσιμο υποσύνολο του $[a,b]$, μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή $E = H \setminus Z$ όπου H είναι G_δ υποσύνολο του $[a,b]$ και Z ξένο προς το E , με $\lambda(Z) = 0$. Τότε,

$$\int_E f d\lambda = \int_H f d\lambda - \int_Z f d\lambda = 0 - 0 = 0.$$

Αφού $\int_E f d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [a,b]$, θέτουμε $E^+ = \{f > 0\}$. Για κάθε $n \geq 1$ το σύνολο $E_n^+ = \{f \geq 1/n\}$ είναι μετρήσιμο και

$$0 = \int_{E_n^+} f d\lambda \geq \frac{1}{n} \lambda(E_n^+),$$

άρα $\lambda(E_n^+) = 0$. Επειδή $E^+ = \bigcup_{n \geq 1} E_n^+$, έχουμε $\lambda(E^+) = 0$. Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα στη $-f$ και στο $E^- = \{f < 0\}$, παίρνουμε $\lambda(E^-) = 0$. Επομένως $f = 0$ λ -σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

2η λύση: Για κάθε $a \leq c < d \leq b$ η υπόθεση δίνει, όπως παραπάνω,

$$\int_{[c,d]} f d\lambda = 0.$$

Επομένως, για κάθε $x \in (a,b)$ και κάθε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε $[x-r, x+r] \subseteq [a,b]$,

$$\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t) dt = 0.$$

Από το θεώρημα διαφορίσεως του Lebesgue, για σχεδόν κάθε $x \in (a,b)$ το αριστερό μέλος συγκλίνει στο $f(x)$ όταν $r \downarrow 0$. Άρα $f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο (a,b) , και συνεπώς και στο $[a,b]$, αφού τα άκρα a, b αποτελούν μηδενικό σύνολο.

6.37. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} dx = 0.$$

Υπόδειξη. Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο: θέτοντας $y = 1 + n^2 x^2$, παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{2n} \int_1^{1+n^2} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \rightarrow 0.$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2} dx = \sqrt{n} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = \frac{\ln(1+n^2)}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

6.38. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Από την ανισότητα Markov, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(E_n) \leq \frac{1}{\alpha_n} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \frac{1}{\alpha_n} \cdot \alpha_n^2 = \alpha_n,$$

άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

Θέτοντας $U_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} E_n$, από την αριθμίσμη υποπροσθετικότητα έχουμε

$$\lambda(U_N) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \lambda(E_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n \rightarrow 0.$$

Άρα

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

(Ισοδύναμα, το λήμμα Borel–Cantelli δίνει ότι $\limsup E_n$ είναι μηδενικό σύνολο η παραπάνω εκτίμηση δίνει απευθείας το ισχυρότερο ζητούμενο για τα μέτρα των ουρών.)

(β) Από το (α) έχουμε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ ανήκει σε πεπερασμένα το πλήθος E_n , δηλαδή υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N_x$ να ισχύει

$$f_n(x) \leq \alpha_n \implies \frac{f_n(x)}{\alpha_n} \leq 1.$$

Για κάθε τέτοιο x είναι φανερό ότι η $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη, άρα έχουμε το ζητούμενο.

6.39. (α) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^4 d\lambda \leq \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. [Υπόδειξη: Θεώρημα Beppo Levi.]

(β) Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geq 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = +\infty.$$

Υπόδειξη: (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\int_{[0,1]} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^4 \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n|^4 d\lambda \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^4$ είναι ολοκληρώσιμη, σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^4 < +\infty \implies |f_n(x)|^4 \rightarrow 0 \implies f_n(x) \rightarrow 0.$$

(β) Ας υποθέσουμε, προς άτοπο, ότι η $g = \sup_n f_n$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_{[0,1]} \left(\sup_n f_n \right) d\lambda = \int g d\lambda < \infty.$$

Αφού $0 \leq f_n \leq g$ για κάθε n και $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$1 = \int_{[0,1]} f_n d\lambda \rightarrow 0.$$

6.40. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\int_{\mathbb{R}} f(nx) d\lambda(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια αποδείξτε για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha} |f(nx)| d\lambda(x) < +\infty$$

και συμπεράνατε ότι $n^{-\alpha} f(nx) \rightarrow 0$ λ -σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: (α) Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία δείχνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f(nx) d\lambda(x) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Το πρώτο βήμα είναι να επαληθεύσουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $f = \chi_A$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(nx) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\frac{1}{n}A}(x) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{n}A\right) = \frac{1}{n}\lambda(A) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda.$$

(β) Από το (α) και το θεώρημα Beppo Levi βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} |f(nx)| \right) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} n^{-\alpha} |f(nx)| d\lambda(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \right) \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < +\infty.$$

Έπεται ότι λ -σχεδόν παντού ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} |f(nx)| < +\infty \implies n^{-\alpha} |f(nx)| \rightarrow 0 \implies n^{-\alpha} f(nx) \rightarrow 0.$$

6.41. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x).$$

Υπόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά ότι $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-m, m]$. Αν $t > 2m$ τότε έχουμε $g(x+t) = 0$ για κάθε $x \in [-m, m]$. Επίσης, αν $g(x+t) \neq 0$ τότε $x \in [-t-m, -t+m]$ άρα $g(x) = 0$ αφού $-t+m < -m$. Δηλαδή, για κάθε $t > 2m$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)| d\lambda(x) = \int_{[-m, m]} |g(x)| d\lambda(x) + \int_{[-t-m, -t+m]} |g(x+t)| d\lambda(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)| d\lambda(x).$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι φανερό ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)| d\lambda(x) = 2\|f\|_1$$

για κάθε $t > 0$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $[-m, m]$ ώστε $\|f - g\|_1 \leq \epsilon$. Τότε, υπάρχει $t_0 > 0$ ώστε

$$2\|g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)| d\lambda(x) + \epsilon$$

για κάθε $t \geq t_0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 2\|f\|_1 &\leq 2\|g\|_1 + 2\epsilon \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) + g(x)| d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x+t) - f(x+t)| d\lambda(x) + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)| d\lambda(x) + 3\epsilon \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x) + 2\|g - f\|_1 + 3\epsilon \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x) + 5\epsilon \end{aligned}$$

για κάθε $t \geq t_0$ και έπεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| d\lambda(x) = 2\|f\|_1.$$

6.42. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $g_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ (δηλαδή, $g_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού).

Υπόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $f_n : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-n, n]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Luzin βρίσκουμε κλειστό σύνολο $F_n \subseteq [-n, n]$ τέτοιο ώστε $\lambda([-n, n] \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}$ και η $h_n := f_n|_{F_n}$ να είναι συνεχής. Εφαρμόζοντας τώρα το θεώρημα Tietze βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g_n : [-n, n] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g_n|_{F_n} = h_n$. Τέλος, επεκτείνουμε την g_n συνεχώς στο $\mathbb{R}$ θέτοντας $g_n(x) = g_n(n)$ αν $x > n$ και $g_n(x) = g_n(-n)$ αν $x < -n$. Με αυτήν την κατασκευή, η $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και αν ορίσουμε

$$E_n = \{x \in [-n, n] : g_n(x) \neq f(x)\}$$

τότε $\lambda(E_n) < \frac{1}{2^n}$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$, για το σύνολο $Z = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ έχουμε ότι $\lambda(Z) = 0$.

Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus Z$. Τότε, υπάρχει $n_0(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n_0(x) \geq |x|$ και $x \notin E_n$ για κάθε $n \geq n_0(x)$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $n \geq n_0(x)$ έχουμε $x \in [-n, n]$ αλλά $x \notin E_n$, άρα $g_n(x) = f(x)$. Δηλαδή, η ακολουθία $(g_n(x))$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(x)$. Ειδικότερα, $g_n(x) \rightarrow f(x)$.

6.43. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt^2) d\lambda(t).$$

Αποδείξτε ότι η g είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $h_x(t) = f(t) \sin(xt^2)$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |h_x(t)| d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(t) \sin(xt^2)| d\lambda(t) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\lambda(t) < +\infty$$

διότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, η h_x είναι ολοκληρώσιμη και ο

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(xt^2) d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} h_x(t) d\lambda(t)$$

είναι (καλά ορισμένος) πραγματικός αριθμός. Για να δείξουμε ότι η g είναι συνεχής χρησιμοποιούμε την αρχή της μεταφοράς. Θεωρούμε ακολουθία $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ και δείχνουμε ότι $g(x_n) \rightarrow g(x)$. Ισοδύναμα, πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} h_{x_n}(t) d\lambda(t) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} h_x(t) d\lambda(t).$$

Όμως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $h_{x_n}(t) = f(t) \sin(x_n t^2) \rightarrow f(t) \sin(x t^2) = h_x(t)$, δηλαδή $h_{x_n} \rightarrow h_x$ κατά σημείο, και $|h_{x_n}| \leq |f|$ για κάθε $n \geq 1$, και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για τις $h_{x_n} \rightarrow h_x$ και έχουμε το ζητούμενο.

6.44. Έστω $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{(1-x)^n \cos \frac{n}{x}}{\sqrt{x}}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n d\lambda = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε $0 < 1-x < 1$, άρα $(1-x)^n \rightarrow 0$. Έπεται ότι

$$|f_n(x)| = (1-x)^n \frac{|\cos \frac{n}{x}|}{\sqrt{x}} \leq (1-x)^n \frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0,$$

δηλαδή, $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Επίσης, $|f_n(x)| \leq g(x) := \frac{1}{\sqrt{x}}$ και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$ με $\int_{(0,1)} g d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow 0.$$

6.45. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $(f_n)_{n=1}^\infty$, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$ και $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $E \in \mathcal{A}$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{X \setminus E} f_n d\mu \right| \leq \varepsilon \quad \text{και} \quad |f_n(x)| \leq |f(x)| + 1 \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Υπόδειξη: Από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε

$$\int_A |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{3}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$. Από το θεώρημα Egorov, υπάρχει $E \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\mu(X \setminus E) < \delta$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Θεωρούμε τώρα $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύουν οι

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{3} \min\{1, \varepsilon\} \quad \text{και} \quad \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in E$ έχουμε ότι

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x) - f(x)| \leq |f(x)| + 1,$$

και

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{X \setminus E} f_n d\mu \right| &= \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu + \int_{X \setminus E} f d\mu + \int_E (f - f_n) d\mu \right| \\
 &\leq \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| + \int_{X \setminus E} |f| d\mu + \int_E |f - f_n| d\mu \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \mu(E) \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{3} \min\{1, \varepsilon\} \leq \varepsilon,
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $\mu(E) \leq \mu(X) = 1$.

6.46. (α) Υπολογίστε το $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx$.

(β) Αποδείξτε την ταυτότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 x^{-x} dx$.

Υπόδειξη: (α) Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Άρα, για κάθε $x \in (0, 1)$ (δηλαδή, σχεδόν παντού στο $[0, 1]$) έχουμε ότι

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ln x.$$

Οι συναρτήσεις $f_n(x) = -x^n \ln x$ είναι μη αρνητικές στο $(0, 1)$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi:

$$\int_0^1 \left(-\frac{\ln x}{1-x} \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x^n \ln x) dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 (-x^n \ln x) dx = \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(β) Ξεκινώντας από την $x^{-x} = \exp(-x \ln x)$ γράφουμε

$$x^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n, \quad x > 0.$$

Οι συναρτήσεις $f_n(x) = \frac{1}{n!} x^n (-\ln x)^n$ είναι μη αρνητικές στο $(0, 1)$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Beppo Levi:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (-\ln x)^n dx.$$

Ορίζουμε

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p (-\ln x)^q dx, \quad p, q \geq 0.$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι αν $p \geq 0$ και $q \geq 1$ τότε

$$I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p,q-1}.$$

Επίσης, $I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$ για κάθε $p \geq 0$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις, και με επαγωγή, δείχνουμε ότι

$$I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_{n,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

6.47. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f' είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

Υπόδειξη: Η f είναι συνεχής, και ειδικότερα Lebesgue μετρήσιμη. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g_n(x) = n \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right).$$

Οι g_n είναι συνεχείς και από τον ορισμό της παραγώγου βλέπουμε ότι $g_n(x) \rightarrow f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f' είναι μετρήσιμη. Υπολογίζουμε το

$$\int_0^1 g_n(x) dx = n \int_{1/n}^{1+1/n} f(x) dx - n \int_0^1 f(x) dx = n \int_1^{1+1/n} f(x) dx - n \int_0^{1/n} f(x) dx$$

και έχουμε ότι

$$(6.0.1) \quad \int_0^1 g_n(x) dx \longrightarrow f(1) - f(0)$$

λόγω της συνέχειας της f .

Η f' είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f'(\xi)| \leq M$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_{x,n} \in (x, x + 1/n)$ τέτοιο ώστε $f(x + 1/n) - f(x) = \frac{1}{n} f'(\xi_{x,n})$, άρα

$$|g_n(x)| = |f'(\xi_{x,n})| \leq M.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι οι $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες, $g_n \rightarrow f'$ κατά σημείο, και $|g_n| \leq M$ στο $[0, 1]$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης και την (6.0.1),

$$\int_0^1 f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx = f(1) - f(0).$$

6.48. Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx.$$

Υπόδειξη. Οι συναρτήσεις $f_n : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x$ είναι μη αρνητικές και μετρήσιμες, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Beppo Levi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \right) d\lambda.$$

Επίσης, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

για κάθε $x \in (0, \pi/2]$. Άρα,

$$\int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x \right) d\lambda = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} d\lambda.$$

Για κάθε $0 < \delta < \pi/2$ έχουμε

$$\int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} d\lambda = \int_{\delta}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_{\sin \delta}^1 \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2(1 - \sqrt{\sin \delta}).$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} d\lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{\sin \delta}) = 2.$$

Άρα,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx = 2.$$

Θα μπορούσε κανείς να υπολογίσει και απευθείας το $\int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx$ για κάθε n και στη συνέχεια να υπολογίσει το άθροισμα της σειράς.

6.49. Έστω $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$, $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Υπόδειξη. Από την $|f_n| \leq g_n$ έπεται πρώτα ότι $g_n \geq 0$ σχεδόν παντού. Περνώντας στο όριο,

$$|f| \leq g \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Επειδή η g είναι ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε αμέσως ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον,

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Fatou στην πρώτη ακολουθία και χρησιμοποιώντας την $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$, παίρνουμε

$$\int f d\mu + \int g d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int f_n d\mu + \int g_n d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \int g d\mu,$$

άρα

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Fatou στη δεύτερη ακολουθία,

$$\int g \, d\mu - \int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int g_n \, d\mu - \int f_n \, d\mu \right) = \int g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu,$$

οπότε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu,$$

και επομένως $\int f_n \, d\mu \rightarrow \int f \, d\mu$.

6.50. Έστω f Lebesgue μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0, 1]$.

(i) Αν $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ λ -σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

(ii) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι $\inf\{\int_E f \, d\lambda : \lambda(E) = 1/2\} > 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 0$ (διότι το $[0, 1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$). Έστω $A, B \subset [0, 1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0, 1] \setminus (A \cup B)) \geq 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0, 1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f \, d\lambda = \int_{A \cup C} f \, d\lambda - \int_C f \, d\lambda = - \int_C f \, d\lambda = \int_{B \cup C} f \, d\lambda - \int_C f \, d\lambda = \int_B f \, d\lambda,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A \cup C} f \, d\lambda = 0 = \int_{B \cup C} f \, d\lambda$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A \cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f \, d\lambda = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0, 1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \emptyset$, συνεπώς

$$0 = \int_{A \cup B} f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda = 2 \int_A f \, d\lambda.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geq 1$, αν $A \subset [0, 1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f \, d\lambda = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυναδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leq m \leq 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0, m/2^k]} f \, d\lambda = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f \, d\lambda$. Η F είναι συνεχής: πράγματι, από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) < \delta$ να συνεπάγεται $\int_E |f| \, d\lambda < \varepsilon$. Άρα, αν $|x - y| < \delta$, τότε $|F(x) - F(y)| \leq \int_{[x,y]} |f| \, d\lambda < \varepsilon$. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυναδικό ρητό $x \in [0, 1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ειδικότερα, $\int_I f \, d\lambda = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0, 1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f \, d\lambda = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0, 1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 0$, έπεται ότι $\int_F f \, d\lambda = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0, 1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geq 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f d\lambda \geq \frac{1}{k} \lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$, τότε $E_k \nearrow \{f > 0\}$. Επειδή $f > 0$ σχεδόν παντού, $\lambda(\{f > 0\}) = 1$, και από τη συνέχεια του μέτρου από κάτω έχουμε $\lambda(E_k) \rightarrow 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : f(x) > \varepsilon\}$, τότε $\lambda(F) > 2/3$ και μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geq 1/2$ τότε

$$\int_E f d\lambda \geq \int_{E \cap F} f d\lambda \geq \varepsilon \lambda(E \cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E \cap F) \geq \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f d\lambda \geq \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E , που αποδεικνύει το ζητούμενο.

6.51. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$ και $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $A \subseteq E$ ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > \alpha$, τότε

$$\int_A f d\lambda \geq \delta.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_n = \{x \in E : f(x) < \frac{1}{n}\}$. Η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του E , και $\bigcap_n E_n = \emptyset$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(E) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_n \lambda(E_n) = 0$.

Έστω $\alpha > 0$. Επιλέγουμε $n(\alpha)$ ώστε $\lambda(E_{n(\alpha)}) < \frac{\alpha}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq E$ με $\lambda(A) > \alpha$, έχουμε

$$\lambda(A \setminus E_{n(\alpha)}) \geq \lambda(A) - \lambda(E_{n(\alpha)}) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f d\lambda \geq \int_{A \setminus E_{n(\alpha)}} f d\lambda \geq \frac{1}{n(\alpha)} \lambda(A \setminus E_{n(\alpha)}) \geq \frac{\alpha}{2n(\alpha)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(\alpha) = \frac{\alpha}{2n(\alpha)}$.

6.52. Έστω μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1[0,1]$, συνεχής στο 0. Να δείξετε ότι για κάθε n και η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ ανήκει στον $\mathcal{L}^1[0,1]$.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leq M$ για

κάθε $t \in [0, \delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(x)| d\lambda(x) &= \frac{1}{n} \int_0^1 |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\delta |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) + \frac{1}{n} \int_\delta^1 |f(t)| t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) \\ &\leq \frac{M}{n} \int_0^\delta t^{\frac{1}{n}-1} d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}} \int_\delta^1 |f(t)| d\lambda(t) \\ &\leq M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n} \int_0^1 |f(t)| d\lambda(t) < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in \mathcal{L}^1[0, 1]$.

6.53. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < +\infty.$$

Δείξτε ότι:

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(ii) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| d\mu < +\infty,$$

δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Δηλαδή, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(β) Έστω $N = \{x \in X : F(x) = +\infty\}$. Έχουμε $\mu(N) = 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Έτσι η f είναι μετρήσιμη και ορίζεται σε όλο το X . Σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία

ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \int (\lim_n s_n) d\mu = \lim_n \int s_n d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^n \int f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k d\mu.$$

6.54. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| = \infty,$$

η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$, και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{\infty} ae^{-nax} dx = -\frac{a}{na} e^{-nax} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{n}$$

και όμοια $\int_0^{\infty} be^{-nbx} dx = \frac{1}{n}$. Συνεπώς,

$$\int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} (ae^{-nax} - be^{-nbx}) dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

και έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n d\lambda = 0.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $\delta_n := \frac{\ln(b/a)}{n(b-a)}$ τότε $f_n(x) < 0$ στο $[0, \delta_n)$ και $f_n(x) > 0$ στο (δ_n, ∞) . Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |f_n| d\lambda &= \int_0^{\delta_n} [be^{-nbx} - ae^{-nax}] dx + \int_{\delta_n}^{\infty} [ae^{-nax} - be^{-nbx}] dx \\ &= \left(\frac{e^{-nax}}{n} - \frac{e^{-nbx}}{n} \right) \Big|_0^{\delta_n} + \left(\frac{e^{-nbx}}{n} - \frac{e^{-nax}}{n} \right) \Big|_{\delta_n}^{\infty} \\ &= \frac{2}{n} (e^{-na\delta_n} - e^{-nb\delta_n}) = \frac{2}{n} \left(e^{-\frac{a \ln(b/a)}{b-a}} - e^{-\frac{b \ln(b/a)}{b-a}} \right) = \frac{C_{a,b}}{n}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| d\lambda = +\infty$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} ae^{-nax} = \sum_{n=1}^{\infty} a(e^{-ax})^n = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}},$$

συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - b \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}}.$$

Με την αντικατάσταση $y = e^{-ax}$ βλέπουμε ότι

$$\int a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} dx = \ln(1 - e^{-ax}),$$

Θέτουμε

$$h(x) = a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} - b \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}}, \quad x > 0.$$

Η h είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, \infty)$. Πράγματι, καθώς $x \rightarrow 0^+$ έχουμε

$$c \frac{e^{-cx}}{1 - e^{-cx}} = \frac{1}{x} - \frac{c}{2} + O(x),$$

οπότε $h(x) \rightarrow (b - a)/2$, ενώ για $x \geq 1$ οι δύο όροι φθίνουν εκθετικά. Επιπλέον,

$$\int a \frac{e^{-ax}}{1 - e^{-ax}} dx = \ln(1 - e^{-ax}), \quad \int b \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-bx}} dx = \ln(1 - e^{-bx}).$$

Άρα

$$\int_0^{\infty} h(x) d\lambda = \left(\ln(1 - e^{-ax}) - \ln(1 - e^{-bx}) \right) \Big|_0^{\infty} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{1 - e^{-ax}}{1 - e^{-bx}} \right) = \ln(b/a).$$

Συνοψίζοντας,

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \ln(b/a) \neq 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n.$$

6.55. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ και $E_1, \dots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \dots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leq n$ ώστε $\lambda(E_i) \geq k/n$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0, 1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \dots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^n \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x) d\lambda = \int_{[0,1]} f d\lambda \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leq i \leq n} \lambda(E_i) \geq \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{n}$.

6.56. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0, 1]$ και έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_n |a_n| < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη. Για να μην υπάρχει ζήτημα στο μοναδικό σημείο q_n , ορίζουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{a_n}{\sqrt{|x - q_n|}}, & x \neq q_n, \\ 0, & x = q_n. \end{cases}$$

Η αλλαγή της τιμής στο q_n δεν επηρεάζει ούτε το ολοκλήρωμα ούτε το συμπέρασμα σχεδόν παντού. Η f_n είναι μετρήσιμη και

$$\int_{[0,1]} |f_n| d\lambda = |a_n| \left(\int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{q_n - x}} dx + \int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x - q_n}} dx \right) = 2|a_n| (\sqrt{q_n} + \sqrt{1 - q_n}) \leq 4|a_n|.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n| \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty,$$

η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0, 1]$.

6.57. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών και θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x - r_n)}{2^n}.$$

- (i) Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\lambda)$. Ειδικότερα, δείξτε ότι $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.
- (ii) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα.
- (iii) Δείξτε ότι η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα, παρόλο που $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (i) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x - r_n)|}{2^n} d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x - r_n)| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{r_n}^{r_n+1} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2 \sqrt{t} \Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < \infty. \end{aligned}$$

Αφού $f \geq 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x - r_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| d\lambda < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(ii) Έστω (a, b) ένα διάστημα και έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $r_m \in (a, b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(r_m, r_m + \epsilon) \subset (a, b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geq \frac{f(x - r_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m \sqrt{x - r_m}} > M$$

για κάθε $x \in (r_m, r_m + \delta)$, όπου

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2^{2m} M^2}, \epsilon, 1 \right\}.$$

Αφού το $(r_m, r_m + \delta)$ είναι υποδιάστημα του (a, b) , έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a, b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a, b) .

Η προηγούμενη εκτίμηση δίνει μάλιστα το ακόλουθο ισχυρότερο συμπέρασμα: κάθε πραγματική συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο. Πράγματι, για κάθε μη κενό διάστημα I και κάθε $M > 0$ το σύνολο $\{x \in I : g(x) > M\}$ έχει θετικό μέτρο. Επειδή $h = g$ σχεδόν παντού, υπάρχει λοιπόν $y \in I$ με $h(y) = g(y) > M$. Άρα η h δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Αν ήταν συνεχής σε κάποιο x , θα ήταν τοπικά φραγμένη σε μια περιοχή του x , άτοπο. Ειδικότερα, αν στο μηδενικό σύνολο όπου η παραπάνω σειρά έχει τιμή $+\infty$ της δώσουμε οποιεσδήποτε πεπερασμένες τιμές, παίρνουμε μια πραγματική αντιπρόσωπο της κλάσης L^1 που παραμένει ασυνεχής παντού.

(iii) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Επιλέγουμε ρητό $r_m \in (a, b)$. Αφού

$$g(x) \geq \frac{f(x - r_m)}{2^m} \geq 0,$$

έχουμε

$$\int_{(a,b)} g^2(x) d\lambda \geq \int_{(a,b)} \frac{f^2(x - r_m)}{2^{2m}} d\lambda = \frac{1}{2^{2m}} \int_{r_m}^{\min\{b, r_m+1\}} \frac{1}{x - r_m} d\lambda = \frac{1}{2^{2m}} \int_0^{\min\{b-r_m, 1\}} \frac{1}{t} dt = \infty.$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a, b) , παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

6.58. Έστω $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} d\lambda = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leq f(x) + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Πράγματι, αν $0 \leq f(x) \leq 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leq 1 \leq f(x) + 1$, ενώ αν $f(x) \geq 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leq f(x) \leq f(x) + 1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leq g_n \leq f + 1$, και η συνάρτηση $f + 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x) = 0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \rightarrow 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε

$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leq f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \rightarrow \chi_{\{x: f(x) > 0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} d\lambda = \int_0^1 g_n(x) d\lambda \rightarrow \int_0^1 \chi_{\{x: f(x) > 0\}}(x) d\lambda = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

6.59. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt} d\lambda.$$

Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Θέτουμε $g_t(x) = e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g'_t(x) = -te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0 > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| = |g'_t(z)||x - x_0| = te^{-tz}|x - x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x, x_0 . Αφού $z \geq x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz} \leq e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leq te^{-tx_0/2}|x - x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t) = te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t \rightarrow 0^+} h_{x_0}(t) = 0$ και $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{x_0}(t) = 0$, υπάρχει $M_{x_0} > 0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)| \leq M_{x_0}$ για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left| \int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0t}) d\lambda \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|te^{-tx_0/2}|x - x_0| d\lambda \\ &\leq M_{x_0}|x - x_0| \int_0^\infty |f(t)| d\lambda. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x \rightarrow x_0$ βλέπουμε ότι $g(x) \rightarrow g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, θεωρούμε τυχόν $0 < \varepsilon < 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta |f| d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $x > \frac{-\log \varepsilon}{\delta}$ και $t > \delta$, τότε $-xt < \log \varepsilon$. Άρα, αν $x > \frac{-\log \varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} d\lambda = \int_0^\delta |f(t)|e^{-xt} d\lambda + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{-xt} d\lambda \\ &\leq \int_0^\delta |f(t)| d\lambda + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{\log \varepsilon} d\lambda < \varepsilon + \varepsilon \int_0^\infty |f| d\lambda. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^\infty |f| d\lambda < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

6.60. Έστω $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με

$$(*) \quad \int_0^1 |f_n|^3 d\lambda \leq 1,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $E \subseteq [0, 1]$ Lebesgue μετρήσιμο με $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E |f_n| d\lambda < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Δείξτε ότι το συμπέρασμα του (i) δεν ισχύει αν η $(*)$ αντικατασταθεί από την $\int_0^1 |f_n| d\lambda \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (i) Από την ανισότητα Hölder, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$,

$$\int_E |f_n| d\lambda \leq \left(\int_E |f_n|^3 d\lambda \right)^{1/3} \lambda(E)^{2/3} \leq \lambda(E)^{2/3}.$$

Δοθέντος $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \varepsilon^{3/2}$. Τότε, αν $\lambda(E) < \delta$,

$$\int_E |f_n| d\lambda \leq \lambda(E)^{2/3} < \delta^{2/3} = \varepsilon$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι η εκτίμηση είναι ομοιόμορφη ως προς n .

(ii) Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = n \cdot \chi_{[0, 1/n]}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\int_0^1 |f_n| d\lambda = 1$ αλλά αν πάρουμε $\varepsilon = 1/2$ τότε για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $n > 1/\delta$ και να θεωρήσουμε το $E_n = [0, 1/n]$ για το οποίο $\lambda(E_n) = \frac{1}{n} < \delta$ αλλά $\int_{E_n} |f_n| d\lambda = \int_0^1 |f_n| d\lambda = 1 > \frac{1}{2}$.

6.61. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\}$, να δείξετε ότι $n \cdot \mu(E_n) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη έχουμε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Ορίζουμε $g_n : X \rightarrow [0, \infty]$ με $g_n(x) = |f(x)| \chi_{\{|f| \geq n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι $|g_n| = g_n \leq |f|$ και $g_n(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in X$ για το οποίο $|f(x)| < \infty$, δηλαδή $g_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\int g_n d\mu \rightarrow 0.$$

Όμως, $E_n = \{x : |f(x)| \geq n\} = \{x : g_n(x) \geq n\}$, άρα

$$n \cdot \mu(E_n) = n\mu(\{x : g_n(x) \geq n\}) \leq \int g_n d\mu.$$

Συνεπώς, $n \cdot \mu(E_n) \rightarrow 0$.

6.62. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

- (i) Αν $\int_U f d\lambda = 0$ για κάθε ανοικτό σύνολο U με $\lambda(U) = 1$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.
- (ii) Αν $\int_G f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$, για κάθε ανοικτό σύνολο G , δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (i) Χρησιμοποιεί το θεώρημα παραγωγίσις του Lebesgue. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το ανοικτό διάστημα $(a, a+1)$ έχει μέτρο 1, άρα από την υπόθεση

$$\int_{(a,a+1)} f d\lambda = 0.$$

Επειδή τα άκρα έχουν μέτρο μηδέν, μπορούμε ισοδύναμα να γράφουμε $\int_a^{a+1} f d\lambda = 0$. Επομένως, ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $t \neq 0$ ισχύει $\int_a^{a+t} f d\lambda = \int_{a+1}^{a+1+t} f d\lambda$. Άρα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $t \neq 0$ ισχύει

$$\frac{1}{t} \int_a^{a+t} f d\lambda = \frac{1}{t} \int_{a+1}^{a+1+t} f d\lambda$$

και αφήνοντας το $t \rightarrow 0$ από το θεώρημα παραγωγίσις του Lebesgue συμπεραίνουμε ότι $f(a) = f(a+1)$ σχεδόν παντού.

Αυτό αρκεί ήδη. Πράγματι, από την αναλλοιωτότητα του μέτρου Lebesgue ως προς μεταφορές έχουμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{[k,k+1]} |f(x)| d\lambda(x) = \int_{[0,1]} |f(x+k)| d\lambda(x) = \int_{[0,1]} |f(x)| d\lambda(x),$$

διότι από $f(x+1) = f(x)$ σχεδόν παντού προκύπτει, με πεπερασμένη επανάληψη, $f(x+k) = f(x)$ σχεδόν παντού. Αν το κοινό αυτό ολοκλήρωμα ήταν θετικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{[k,k+1]} |f| d\lambda = +\infty,$$

σε αντίθεση με την ολοκληρωσιμότητα της f . Άρα $\int_{[0,1]} |f| d\lambda = 0$, οπότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$ και, από την ίδια σχεδόν παντού περιοδικότητα, στο $\mathbb{R}$.

(ii) Χρησιμοποιεί το θεώρημα παραγωγίσις του Lebesgue. Έστω $I = [a, b]$ ένα μη τετριμμένο φραγμένο κλειστό διάστημα. Για κάθε $n \geq 1$ κατασκευάζουμε ανοικτό σύνολο $G_n \subset (a, b)$, πυκνό στο I , με $\lambda(G_n) < 1/n$. Πράγματι, αν $\{q_j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι αρίθμηση των ρητών του (a, b) , επιλέγουμε για κάθε j ανοικτό διάστημα J_j με

$$q_j \in J_j \subset (a, b), \quad \lambda(J_j) < \frac{1}{n2^{j+1}},$$

και θέτουμε $G_n = \bigcup_j J_j$. Τότε G_n είναι ανοικτό, $\lambda(G_n) < 1/n$ και, επειδή περιέχει όλους τους ρητούς του (a, b) ,

$$\overline{G_n} = I.$$

Από την υπόθεση της άσκησης έχουμε λοιπόν

$$\int_I f d\lambda = \int_{\overline{G_n}} f d\lambda = \int_{G_n} f d\lambda.$$

Επειδή $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\lambda(G_n) \rightarrow 0$, η απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος δίνει $\int_{G_n} f d\lambda \rightarrow 0$. Άρα

$$\int_I f d\lambda = 0$$

για κάθε φραγμένο κλειστό διάστημα I . Από το θεώρημα παραγωγίσης του Lebesgue,

$$0 = \frac{1}{t} \int_{[x, x+t]} f d\lambda \longrightarrow f(x)$$

καθώς $t \rightarrow 0^+$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως $f = 0$ σχεδόν παντού.

6.63. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^1(\mu)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C \in \mathbb{R}$ ώστε $\int_E f d\mu \leq C$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \leq C.$$

Ισχύει το συμπέρασμα χωρίς την υπόθεση της ολοκληρωσιμότητας της f ;

Υπόδειξη. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $\int_X f^+ d\mu = A < \infty$ και $\int_X f^- d\mu = B < \infty$. Για κάθε $n \geq 1$ το σύνολο $E_n = \{x : f^+(x) \geq 1/n\}$ έχει πεπερασμένο μέτρο: από την ανισότητα Markov έχουμε $\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_X f^+ d\mu = A$, άρα $\mu(E_n) \leq nA$. Συνεπώς,

$$C \geq \int_{E_n} f d\mu = \int_{E_n} f^+ d\mu - \int_{E_n} f^- d\mu \geq \int_{E_n} f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_{E_n} f^+ d\mu - B.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{E_n} f^+ d\mu \longrightarrow \int_X f^+ d\mu = A,$$

άρα

$$C \geq \lim \int_{E_n} f^+ d\mu - B = A - B = \int_X f d\mu.$$

Η υπόθεση της ολοκληρωσιμότητας της f είναι απαραίτητη. Θεωρήστε το σύνολο $X = \mathbb{R}$ και την σ -άλγεβρα των υποσυνόλων E του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή έχουν αριθμήσιμο συμπλήρωμα. Στον $(X, \mathcal{A})$ θεωρήστε το μέτρο μ με $\mu(E) = 0$ αν το E είναι αριθμήσιμο και $\mu(E) = \infty$ αν το $X \setminus E$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι για τη σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$ έχουμε $\int_X f d\mu = \infty$ ενώ για κάθε $E \in \mathcal{A}$ που έχει πεπερασμένο μέτρο ισχύει ότι $\mu(E) = 0$ και συνεπώς $\int_E f d\mu = 0 \leq C := 1$.

6.64. Έστω μια ακολουθία $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α') $\lambda(A_k) \geq 1/2$, για κάθε k και

(β') $\lambda(A_k \cap A_s) \leq 1/4$ για κάθε $k \neq s$.

Δείξτε ότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq 1.$$

Υπόδειξη. Αν $\lambda(A_{k_0}) \geq 1$ για κάποιον k_0 τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \lambda(A_{k_0}) \geq 1.$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\lambda(A_k) < 1$ για κάθε $k \geq 1$. Θεωρούμε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$ και τη συνάρτηση $g_n(x) = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}(x)$. Θέτουμε $B_n = A_1 \cup \dots \cup A_n$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στη μορφή

$$\left(\int_{B_n} g_n d\lambda \right)^2 \leq \left(\int_{B_n} g_n^2 d\lambda \right) \left(\int_{B_n} 1^2 d\lambda \right) = \lambda(B_n) \left(\int_{B_n} g_n^2 d\lambda \right).$$

Έχουμε

$$\int_{B_n} g_n d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{B_n} \chi_{A_k} d\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda(B_n \cap A_k) = \sum_{k=1}^n \lambda(A_k) \geq \frac{n}{2}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{B_n} g_n^2 d\lambda &= \int_{B_n} \left(\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} \right)^2 d\lambda = \sum_{k=1}^n \int_{B_n} \chi_{A_k} d\lambda + \sum_{k \neq s} \int_{B_n} \chi_{A_k} \chi_{A_s} d\lambda \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda(A_k) + \sum_{k \neq s} \lambda(A_k \cap A_s) \leq n + n(n-1) \frac{1}{4} = \frac{n^2 + 3n}{4}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lambda(B_n) \geq \frac{n^2}{4} \cdot \frac{4}{n^2 + 3n} = \frac{n}{n+3}.$$

Αφού $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \supseteq B_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \geq \lim \lambda(B_n) \geq \lim \frac{n}{n+3} = 1.$$

6.65. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_{[x, x+1]} f d\lambda.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε: για κάθε μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$ ισχύει $\int_E |f| d\lambda < \epsilon$ (απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος). Επίσης, επειδή $|f| \in L^1(\mathbb{R})$, από τη μονότονη σύγκλιση για τα σύνολα $[-M, M] \uparrow \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-M, M]} |f| d\lambda \rightarrow 0.$$

Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\int_{[M, \infty)} |f| d\lambda < \epsilon$.

Έστω $x < y \in \mathbb{R}$ με $|y - x| < \delta/2$. Τότε,

$$|g(x) - g(y)| = \left| \int_{[x, x+1]} f d\lambda - \int_{[y, y+1]} f d\lambda \right| = \left| \int_{[x, y]} f d\lambda - \int_{(x+1, y+1]} f d\lambda \right| \leq \int_{[x, y) \cup (x+1, y+1]} |f| d\lambda < \epsilon,$$

αφού $\lambda([x, y) \cup (x+1, y+1]) = 2(y - x) < \delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι η g είναι συνεχής. Για τον δεύτερο

ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι, για κάθε $x > M$,

$$|g(x)| \leq \int_{[x, x+1]} |f| d\lambda \leq \int_{[M, \infty)} |f| d\lambda < \epsilon.$$

2η λύση για τη συνέχεια. Γράφουμε, με την αλλαγή μεταβλητής $u = t - x$,

$$g(x) = \int_0^1 f(x+u) du.$$

Αν $h \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\leq \int_0^1 |f(x+h+u) - f(x+u)| du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(v+h) - f(v)| dv. \end{aligned}$$

Το τελευταίο μέλος τείνει στο 0 όταν $h \rightarrow 0$, από τη συνέχεια των μεταφορών στο $L^1(\mathbb{R})$. Η εκτίμηση είναι μάλιστα ανεξάρτητη του x , οπότε η g είναι ομοιόμορφα συνεχής. Η σύγκλιση $g(x) \rightarrow 0$ για $x \rightarrow +\infty$ προκύπτει όπως στην πρώτη λύση από την ουρά της $|f|$.

6.66. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{1}{\lambda(A)} \int_A f d\lambda \right| \leq M$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq E$ με $\lambda(A) > 0$. Αποδείξτε ότι $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού στο E .

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $B_n = \{x \in E : |f(x)| > M + 1/n\}$. Θα δείξουμε ότι $\lambda(B_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για το σύνολο $B = \{x \in E : |f(x)| > M\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ θα έχουμε $\lambda(B) = 0$, άρα $|f(x)| \leq M$ σχεδόν παντού στο E .

Γράφουμε το $B_n = B_{n,1} \cup B_{n,2}$, όπου $B_{n,1} = \{x \in E : f(x) > M + 1/n\}$ και $B_{n,2} = \{x \in E : -f(x) > M + 1/n\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(B_{n,1}) = \lambda(B_{n,2}) = 0$. Αν $\lambda(B_{n,1}) > 0$, τότε από την υπόθεση, εφαρμοσμένη στο $A = B_{n,1}$, έχουμε

$$\left(M + \frac{1}{n} \right) \lambda(B_{n,1}) \leq \int_{B_{n,1}} f d\lambda \leq \left| \int_{B_{n,1}} f d\lambda \right| \leq M \lambda(B_{n,1}),$$

άτοπο. Άρα $\lambda(B_{n,1}) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο, αν $\lambda(B_{n,2}) > 0$, εφαρμόζουμε την υπόθεση στο $A = B_{n,2}$ και παίρνουμε

$$\left(M + \frac{1}{n} \right) \lambda(B_{n,2}) \leq - \int_{B_{n,2}} f d\lambda = \left| \int_{B_{n,2}} f d\lambda \right| \leq M \lambda(B_{n,2}),$$

πάλι άτοπο. Επομένως $\lambda(B_{n,2}) = 0$.

6.67. (α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$, και $f : A \rightarrow [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $G : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με

$$G(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\}).$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f d\lambda$.

(β) Έστω B μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) < \infty$, και $g : B \rightarrow [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n := \{x \in B : |g(x)| \geq n\}$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση

$$g_\varepsilon := \sum_{k=0}^{\infty} k\varepsilon \cdot \chi_{\{x \in A : k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon\}}.$$

Παρατηρούμε ότι $g_\varepsilon \leq f$, άρα $G(\varepsilon) = \int_A g_\varepsilon d\lambda$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \left| \int_A f d\lambda - \int_A g_\varepsilon d\lambda \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{x \in A : k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon\}} |f - g_\varepsilon| d\lambda \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\{x \in A : k\varepsilon \leq f < (k+1)\varepsilon\})\varepsilon \leq \varepsilon \lambda(A), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G(\varepsilon) = \int_A f d\lambda$.

(β) Θέτουμε απευθείας

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{B_n}(x), \quad x \in B.$$

Η h είναι μετρήσιμη με τιμές στο $[0, +\infty]$. Αν $|g(x)| < \infty$, τότε $h(x) = \lfloor |g(x)| \rfloor$, ενώ αν $|g(x)| = +\infty$, τότε $h(x) = +\infty$. Συνεπώς, με τη συνήθη σύμβαση για τις εκτεταμένες πραγματικές τιμές, σημειακά ισχύει

$$h \leq |g| \leq h + 1.$$

Επειδή $B_n = \{|g| \geq n\}$, από το θεώρημα Beppo Levi παίρνουμε

$$\int_B h d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n).$$

Άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) = \int_B h d\lambda \leq \int_B |g| d\lambda \leq \int_B (h + 1) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) + \lambda(B).$$

Επειδή $\lambda(B) < \infty$, η μεσαία ποσότητα είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$. Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n) < \infty$.

6.68. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ -σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Ακολουθήστε τη γνωστή διαδικασία. Αρκεί να επαληθεύσουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που $f = \chi_A$ για κάποιο Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(tx) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{\frac{1}{t}A}(x) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{t}A\right) = \frac{1}{t}\lambda(A) = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \chi_A d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

(β) Θεωρούμε την $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|$. Από το θεώρημα Beppo Levi και το (α),

$$\int_{\mathbb{R}} |g| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(n^2x)| d\lambda(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < \infty,$$

αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα, η g είναι ολοκληρώσιμη και, ειδικότερα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n^2x)|$ συγκλίνει λ -σχεδόν παντού. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2x)$ συγκλίνει λ -σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Εφαρμόζοντας το (β) για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f = \chi_A$ βλέπουμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|D(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_A(n^2x) < \infty$, όπου $|D(x)|$ ο πληθάριθμος του $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2x \in A\}$. Δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x)$ είναι πεπερασμένο.

6.69. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω f_n, f ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_n} f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| &= \left| \int_{A_n} f_n d\mu - \int_{A_n} f d\mu + \int_{A_n} f d\mu - \int_A f d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_{A_n} f_n d\mu - \int_{A_n} f d\mu \right| + \left| \int_{A_n} f d\mu - \int_A f d\mu \right| \\ &= \left| \int_{A_n} (f_n - f) d\mu \right| + \left| \int_{A_n \cap A} f d\mu + \int_{A_n \setminus A} f d\mu - \int_{A \setminus A_n} f d\mu - \int_{A \cap A_n} f d\mu \right| \\ &\leq \int_{A_n} |f_n - f| d\mu + \left| \int_{A_n \setminus A} f d\mu \right| + \left| \int_{A \setminus A_n} f d\mu \right| \\ &\leq \int |f_n - f| d\mu + \int_{A_n \setminus A} |f| d\mu + \int_{A \setminus A_n} |f| d\mu \\ &= \int |f_n - f| d\mu + \int_{A_n \Delta A} |f| d\mu. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και $\mu(A_n \Delta A) \rightarrow 0$, από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος έχουμε $\int_{A_n \Delta A} |f| d\mu \rightarrow 0$, και από την υπόθεση έχουμε $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Έπεται το ζητούμενο.

6.70. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, τα όρια

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x d\lambda(x)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $f_n(x) = \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x$, $x \in [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\ln(x+n)}{n} \leq \frac{x+n-1}{n} \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, συνεπώς

$$|f_n(x)| \leq |\cos x| e^{-x} \leq g(x) := e^{-x}$$

στο $[0, 1]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε $\frac{\ln(x+n)}{n} \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$, απ' όπου έπεται ότι $f_n(x) \rightarrow 0$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_{[0, 1]} \frac{\ln(x+n)}{n} e^{-x} \cos x d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

(β) Θέτουμε $f_n(x) = \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}}$, $x \in (0, \infty)$. Παρατηρούμε ότι:

- Για $x \in (0, 1]$ και $n \geq 2$ έχουμε $|f_n(x)| \leq \frac{1}{x^{1/n}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$ όταν $n \rightarrow \infty$, διότι $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ και $x^{1/n} \rightarrow 1$. Αφού η $1/\sqrt{x}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1]$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{(0, 1]} f_n(x) d\lambda(x) \rightarrow \int_{(0, 1]} e^{-x} d\lambda(x).$$

- Για $x \in (1, \infty)$ και $n \geq 2$ έχουμε $(1 + \frac{x}{n})^n \geq \frac{n(n-1)}{2} \frac{x^2}{n^2} \geq \frac{x^2}{4}$ και $x^{1/n} > 1$, άρα $|f_n(x)| \leq \frac{4}{x^2}$. Επίσης, $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$ όπως πριν. Αφού η $4/x^2$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(1, \infty)$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{(1, \infty)} f_n(x) d\lambda(x) \rightarrow \int_{(1, \infty)} e^{-x} d\lambda(x).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\int_{[0, \infty)} \frac{1}{(1+x/n)^n x^{1/n}} d\lambda(x) \rightarrow \int_{(0, \infty)} e^{-x} d\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

6.71. Υπολογίστε τα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x dx$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n (1 + \sqrt{n} |\sin t|) dt.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x \cdot \chi_{[0, n]}(x)$. Τότε,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x dx = \int_0^\infty f_n d\lambda.$$

Έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x} x \cdot \cos x, \quad x > 0.$$

Για $0 \leq x \leq n$ έχουμε $(1 - x/n)^n \leq e^{-x}$ και $\frac{1+nx}{n+x} \leq x+1$. Επειδή η f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, n]$, συμπεραίνουμε ότι

$$|f_n(x)| = \left| \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x \cdot \chi_{[0,n]}(x) \right| \leq e^{-x}(x+1)$$

για κάθε $x > 0$. Η $g(x) = e^{-x}(x+1)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{1+nx}{n+x} \cos x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n \, d\lambda = I := \int_0^\infty e^{-x} x \cdot \cos x \, dx.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι $I = 0$.

(β) Η συνάρτηση $t \mapsto (1 - t^2)^n(1 + \sqrt{n}|\sin t|)$ είναι άρτια, άρα

$$\sqrt{n} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n(1 + \sqrt{n}|\sin t|) \, dt = 2 \sqrt{n} \int_0^1 (1 - t^2)^n(1 + \sqrt{n}|\sin t|) \, dt.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t\sqrt{n}$ βλέπουμε ότι

$$2 \sqrt{n} \int_0^1 (1 - t^2)^n(1 + \sqrt{n}|\sin t|) \, dt = 2 \int_0^{\sqrt{n}} (1 - x^2/n)^n(1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|) \, dx.$$

Ορίζουμε $g_n(x) = (1 - x^2/n)^n(1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\chi_{[0,\sqrt{n}]}(x)$. Τότε,

$$2 \int_0^{\sqrt{n}} (1 - x^2/n)^n(1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|) \, dx = 2 \int_0^\infty g_n \, d\lambda.$$

Έχουμε $(1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|) \rightarrow 1 + x$ για κάθε $x > 0$, άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = e^{-x^2}(1+x), \quad x > 0.$$

Για $0 \leq x \leq \sqrt{n}$ έχουμε $(1 - x^2/n)^n \leq e^{-x^2}$ και $1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})| \leq 1 + x$. Επειδή η g_n μηδενίζεται έξω από το $[0, \sqrt{n}]$, συμπεραίνουμε ότι

$$|g_n(x)| = \left| (1 - x^2/n)^n(1 + \sqrt{n}|\sin(x/\sqrt{n})|)\chi_{[0,\sqrt{n}]}(x) \right| \leq e^{-x^2}(x+1)$$

για κάθε $x > 0$. Η $g(x) = e^{-x^2}(x+1)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, +\infty)$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n(1 + \sqrt{n}|\sin t|) \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty g_n \, d\lambda = J := 2 \int_0^\infty e^{-x^2}(x+1) \, dx.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

βλέπουμε ότι $J = \sqrt{\pi} + 1$.

6.72. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $0 < \mu(X) < \infty$ και $f \in L^1(\mu)$ φραγμένη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_X f^2 \, d\mu = \int_X f^3 \, d\mu = \int_X f^4 \, d\mu.$$

Αποδείξτε ότι $f = \chi_A$ μ -σχεδόν παντού για κατάλληλο $A \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. Αφού $\mu(X) < \infty$ και η f είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, οι f^2, f^3, f^4 είναι ολοκληρώσιμες. Το ίδιο ισχύει για την $g = f^2(1-f)^2$, η οποία είναι επιπλέον μη αρνητική. Παρατηρούμε ότι

$$\int_X g \, d\mu = \int_X f^2 \, d\mu - 2 \int_X f^3 \, d\mu + \int_X f^4 \, d\mu = 0$$

λόγω της υπόθεσης. Έπεται ότι $g(x) = f^2(x)(1-f(x))^2 = 0$ μ -σχεδόν παντού. Θέτουμε $A = \{x \in X : f(x) = 1\}$ και $B = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Παρατηρούμε ότι $X \setminus (A \cup B) = \{x \in X : g(x) \neq 0\}$, άρα $\mu(X \setminus (A \cup B)) = 0$. Αφού $f = \chi_A$ στο $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι $f = \chi_A$ μ -σχεδόν παντού. Άρα, $f = \chi_A$ στον $L^1(\mu)$.

6.73. Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{g(t)}{t} \right| \leq \alpha$$

για κάθε $t \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t f(s)g(s) \, d\lambda(s) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^\infty |f(s)| \, d\lambda(s) = 0$ (εξηγήστε γιατί), άρα υπάρχει $M > 1$ ώστε

$$\int_M^\infty |f(s)| \, d\lambda(s) < \frac{\varepsilon}{2\alpha}.$$

Θέτουμε

$$N = \max \left\{ M, \frac{2\alpha \|f\|_1 M}{\varepsilon} \right\}.$$

Για κάθε $t > N$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{t} \int_1^t f(s)g(s) \, d\lambda(s) \right| &\leq \frac{1}{t} \int_1^t |f(s)g(s)| \, d\lambda(s) \leq \frac{\alpha}{t} \int_1^t s|f(s)| \, d\lambda(s) \\ &= \frac{\alpha}{t} \int_1^M s|f(s)| \, d\lambda(s) + \frac{\alpha}{t} \int_M^t s|f(s)| \, d\lambda(s) \\ &\leq \frac{\alpha}{t} \int_1^M M|f(s)| \, d\lambda(s) + \alpha \int_M^t \frac{s}{t} |f(s)| \, d\lambda(s) \\ &\leq \frac{M\alpha}{t} \int_1^\infty |f(s)| \, d\lambda(s) + \alpha \int_M^t |f(s)| \, d\lambda(s) \\ &\leq \frac{M\alpha \|f\|_1}{t} + \alpha \int_M^\infty |f(s)| \, d\lambda(s) \\ &\leq \frac{M\alpha \|f\|_1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του ορίου,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_1^t f(s)g(s) \, d\lambda(s) = 0.$$

6.74. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^\infty f(x+k)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Σταθεροποιούμε $m \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x+k)| d\lambda(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_m^{m+1} |f(x+k)| d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{m+k}^{m+k+1} |f(x)| d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < \infty \end{aligned}$$

αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως) σχεδόν για κάθε $x \in [m, m+1)$. Αφού το $m \in \mathbb{Z}$ ήταν τυχόν, εξαιρώντας ένα σύνολο μέτρου 0 σε κάθε $[m, m+1)$, βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει απολύτως σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.75. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 1$ ορίζουμε

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \mu(\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}).$$

Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = \int_X |f| d\mu.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $t > 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \chi_{\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}}$. Παρατηρήστε ότι $s_t \leq |f|$ για κάθε $t > 1$ και, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X s_t d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_X t^n \chi_{\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}} d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \mu(\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}) = g(t).$$

Γράφοντας $X = \{f = 0\} \cup \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}\right)$ βλέπουμε ότι

$$\int_X |f| d\mu = \int_{\{f=0\}} |f| d\mu + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}} |f| d\mu = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}} |f| d\mu.$$

Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$t^n \mu(\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}) \leq \int_{\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}} |f| d\mu \leq t^{n+1} \mu(\{t^n \leq |f| < t^{n+1}\}).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$g(t) \leq \int_X |f| d\mu \leq t g(t)$$

για κάθε $t > 1$. Αν $\int_X |f| d\mu = \infty$ τότε αυτή η ανισότητα δείχνει ότι $g(t) = \infty$ για κάθε $t > 1$, οπότε το ζητούμενο ισχύει κι αυτό.

Υποθέτουμε τώρα ότι $I := \int_X |f| d\mu < \infty$. Από την ίδια ανισότητα έχουμε, για κάθε $t > 1$,

$$\frac{I}{t} \leq g(t) \leq I.$$

Καθώς $t \rightarrow 1^+$, και τα δύο άκρα συγκλίνουν στο I . Επομένως, από το θεώρημα παρεμβολής,

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = I = \int_X |f| d\mu.$$

Έτσι αποφεύγεται οποιοδήποτε επιχείρημα με υπακολουθίες: η βασική δυαδικού τύπου προσέγγιση δίνει απευθείας το ζητούμενο.

6.76. (α) Έστω $\alpha \in [0, 1]$ και $E_1, \dots, E_N$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με $\lambda(E_j) = \alpha$ για κάθε $j = 1, \dots, N$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $i \neq j$ ώστε

$$\lambda(E_i \cap E_j) \geq \alpha^2 - \frac{\alpha}{N}.$$

(β) Έστω $\alpha \in [0, 1]$ και $E_1, \dots, E_n, \dots$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$ με $\lambda(E_n) = \alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < c < 1$ υπάρχουν $n \neq m$ ώστε

$$\lambda(E_n \cap E_m) \geq c\alpha^2.$$

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $N \geq 2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \sum_{j=1}^N \chi_{E_j}(x)$. Παρατηρήστε ότι

$$\|g\|_1 = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j} d\lambda = \sum_{j=1}^N \lambda(E_j) = \alpha N$$

και

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N \chi_{E_j} \right)^2 d\lambda = \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j}^2 d\lambda + \sum_{i \neq j} \int_0^1 \chi_{E_i} \chi_{E_j} d\lambda \\ &= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{E_j} d\lambda + \sum_{i \neq j} \int_0^1 \chi_{E_i \cap E_j} d\lambda = \alpha N + \sum_{i \neq j} \lambda(E_i \cap E_j) \\ &\leq \alpha N + N(N-1) \max_{i \neq j} \lambda(E_i \cap E_j). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε $\|g\|_1^2 = \|g \cdot 1\|_1^2 \leq \|g\|_2^2 \|1\|_2^2 = \|g\|_2^2$, δηλαδή

$$\alpha^2 N^2 \leq \alpha N + N(N-1) \max_{i \neq j} \lambda(E_i \cap E_j).$$

Συνεπώς, υπάρχουν $i \neq j$ ώστε

$$\lambda(E_i \cap E_j) \geq \frac{\alpha^2 N - \alpha}{N-1} \geq \frac{\alpha^2 N - \alpha}{N} = \alpha^2 - \frac{\alpha}{N}.$$

(β) Αν $\alpha = 0$, το ζητούμενο είναι άμεσο: για οποιαδήποτε $n \neq m$ έχουμε $\lambda(E_n \cap E_m) \geq 0 = c\alpha^2$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\alpha > 0$. Επειδή $0 < c < 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $N \geq 2$ τόσο μεγάλο ώστε

$$\frac{1}{N} \leq (1-c)\alpha,$$

ή, ισοδύναμα, $\alpha^2 - \alpha/N \geq c\alpha^2$. Εφαρμόζοντας το (α) στα $E_1, \dots, E_N$, βρίσκουμε $n \neq m$ στο $\{1, \dots, N\}$

ώστε

$$\lambda(E_n \cap E_m) \geq \alpha^2 - \frac{\alpha}{N} \geq c\alpha^2.$$

6.77. Έστω $k \in \{1, \dots, n\}$ και $E_1, \dots, E_n$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, 1]$. Αν $\lambda(E_1) + \dots + \lambda(E_n) \geq k$, αποδείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1 < \dots < i_k$ στο $\{1, \dots, n\}$ τέτοιοι ώστε

$$E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k} \neq \emptyset.$$

[Υπόδειξη: $\lambda(E_j) = \int_{[0,1]} \chi_{E_j} d\lambda$.]

Υπόδειξη: Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$. Παρατηρήστε ότι

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \chi_{E_i} d\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda(E_i) \geq k.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq k$: αλλιώς, αφού η f παίρνει ακέραιες τιμές, θα είχαμε $f(x) \leq k-1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και συνεπώς

$$\int_{[0,1]} f d\lambda \leq (k-1)\lambda([0,1]) = k-1 < k.$$

Θεωρούμε λοιπόν $x \in [0, 1]$ με $f(x) \geq k$ και θέτουμε $A = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ και } x \in E_i\}$. Τότε, $f(x) = \sum_{i \in A} 1 \geq k$, δηλαδή το A έχει τουλάχιστον k στοιχεία. Αν $i_1 < \dots < i_k$ είναι τα k μικρότερα στοιχεία του A τότε $x \in E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}$ και, ειδικότερα, $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k} \neq \emptyset$.

6.78. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n^2}^{n^2} f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} d\lambda(x).$$

(β) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$ (δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε

$$f_n(x) = f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} \chi_{[-n^2, n^2]}(x).$$

Επειδή $f \geq 0$, η ακολουθία (f_n) είναι αύξουσα: πράγματι, $[-n^2, n^2] \subseteq [-(n+1)^2, (n+1)^2]$ και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-x^2/n} \leq e^{-x^2/(n+1)}.$$

Επιπλέον, για κάθε σταθερό $x \in \mathbb{R}$, από κάποιον δείκτη και μετά έχουμε $|x| \leq n^2$ και $e^{-x^2/n} \rightarrow 1$, οπότε $f_n(x) \uparrow f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-n^2}^{n^2} f(x) e^{-\frac{x^2}{n}} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με την αλλαγή κλίμακας $u = nx$ έχουμε απευθείας

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_E(nx) d\lambda(x) = \lambda\left(\frac{1}{n}E\right) = \frac{\lambda(E)}{n}.$$

Θέτουμε

$$h_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \chi_E(nx).$$

Τότε $0 \leq h_N \uparrow h$, όπου

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) \in [0, +\infty].$$

Επομένως το θεώρημα Beppo Levi εφαρμόζεται χωρίς καμία υπόθεση εκ των προτέρων για τη σύγκλιση της σειράς και δίνει

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) \right) d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(nx) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} \chi_E d\lambda \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \lambda(E). \end{aligned}$$

Αφού η συνάρτηση $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx)$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(nx) = h(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus Z$.

6.79. Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \int_0^1 |t - g(x)| dx$$

είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\lambda(\{x \in [0, 1] : g(x) = t_0\}) = 0$.

Υπόδειξη: Έστω $t_0 \in \mathbb{R}$ και έστω (h_n) ακολουθία με $h_n \rightarrow 0^+$. Για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε

$$\frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \rightarrow 1 \quad \text{αν} \quad t_0 \geq g(x)$$

και

$$\frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \rightarrow -1 \quad \text{αν} \quad t_0 < g(x).$$

Επιπλέον,

$$\left| \frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} \right| \leq 1$$

από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται

ότι

$$\begin{aligned}\frac{F(t_0 + h_n) - F(t_0)}{h_n} &= \int_0^1 \frac{|t_0 + h_n - g(x)| - |t_0 - g(x)|}{h_n} dx \\ &\longrightarrow \int_0^1 (\chi_{\{g \leq t_0\}} - \chi_{\{t_0 < g\}}) dx \\ &= \lambda(\{x : g(x) \leq t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) > t_0\}).\end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει η

$$F'_+(t_0) = \lambda(\{x : g(x) \leq t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) > t_0\}).$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$F'_-(t_0) = \lambda(\{x : g(x) < t_0\}) - \lambda(\{x : g(x) \geq t_0\}).$$

Συνεπώς, η F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 αν και μόνο αν

$$2\lambda(\{x : g(x) = t_0\}) = F'_+(t_0) - F'_-(t_0) = 0,$$

και έχουμε το ζητούμενο.

6.80. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(tx) d\lambda(x)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

[Υπόδειξη: Μπορείτε, αν θέλετε, να χρησιμοποιήσετε την αρχή της μεταφοράς.]

Λύση. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|f(x) \sin(tx)| \leq |f(x)|,$$

και επειδή $f \in L^1(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $x \mapsto f(x) \sin(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα η $g(t)$ είναι καλά ορισμένη.

Έστω τώρα $t_n \rightarrow t$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \sin(t_n x) \longrightarrow f(x) \sin(tx),$$

ενώ

$$|f(x) \sin(t_n x)| \leq |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$g(t_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(t_n x) d\lambda(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(tx) d\lambda(x) = g(t).$$

Επομένως η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6.81. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=0}^\infty$ ξένων ανά δύο Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E ώστε $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ και $0 \leq \lambda(E_n) \leq 2$ για κάθε $n \geq 0$.

(β) Υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$.

Υπόδειξη: (α) Θέτουμε $E_0 = E \cap \{x : |x| < 1\}$ και, για $n \geq 1$, $E_n = E \cap \{x : n \leq |x| < n+1\}$. Τότε τα E_n είναι Lebesgue μετρήσιμα, ξένα ανά δύο, $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$ και $0 \leq \lambda(E_n) \leq 2$ για κάθε $n \geq 0$.

(β) Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε $\alpha_n = 1$ αν $\lambda(E_n) = 0$ και $\alpha_n = \frac{1}{\lambda(E_n)} \cdot \frac{1}{2^n}$ αν $\lambda(E_n) > 0$. Παρατηρήστε ότι $\alpha_n \lambda(E_n) \leq 1/2^n$ για κάθε $n \geq 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi_{E_n}.$$

Η f είναι καλά ορισμένη, μετρήσιμη και παίρνει παντού γνήσια θετικές τιμές. Τέλος, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_E f \, d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda(E_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2,$$

άρα η f είναι ολοκληρώσιμη.

6.82. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και υπάρχει η $f'(0)$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι η g είναι Lebesgue μετρήσιμη. Πράγματι, στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι το πηλίκο της μετρήσιμης f με τη συνεχή συνάρτηση $x \mapsto x$, ενώ η αλλαγή της τιμής σε ένα μόνο σημείο διατηρεί τη μετρησιμότητα.

Αφού υπάρχει η $f'(0)$ και $f(0) = 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $0 < |x| < \delta$ τότε $|f(x)/x - f'(0)| \leq 1$, δηλαδή $|g(x)| = |f(x)/x| \leq 1 + |f'(0)|$ στο $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Για $|x| \geq \delta$ έχουμε $|g(x)| = |f(x)/x| \leq |f(x)|/\delta$. Αφού $g(0) = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$|g| \leq (1 + |f'(0)|) \chi_{(-\delta, \delta)} + \frac{1}{\delta} |f| \chi_{\{|x| \geq \delta\}}.$$

Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, έπεται ότι

$$\int |g| \, d\lambda \leq (1 + |f'(0)|) \cdot 2\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\{|x| \geq \delta\}} |f| \, d\lambda \leq (1 + |f'(0)|) \cdot 2\delta + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda < \infty,$$

άρα η g είναι ολοκληρώσιμη.

6.83. (α) Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(G) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : 0 \leq f \leq \chi_G, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda(F) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : f \geq \chi_F, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

Υπόδειξη. (α) Αν $G = \mathbb{R}$, το δεξί μέλος είναι $+\infty$: για παράδειγμα, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $0 \leq h_n \leq 1$ με συμπαγή στήριξη και $h_n \equiv 1$ στο $[-n, n]$, οπότε $\int h_n \, d\lambda \geq 2n$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $G^c \neq \emptyset$. Θεωρούμε τις $f_n(x) = \left(\frac{d(x, G^c)}{1+d(x, G^c)} \right)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Κάθε f_n είναι συνεχής. Παρατηρούμε ότι $f_n \equiv 0$ στο G^c και ότι, αφού το G^c είναι κλειστό, $d(x, G^c) > 0$ για κάθε $x \in G$, άρα $0 < \frac{d(x, G^c)}{1+d(x, G^c)} < 1$ για κάθε $x \in G$. Άρα, $0 \leq f_n \leq \chi_G$ και $f_n \leq f_{n+1}$ με $f_n(x) \rightarrow \chi_G(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} \chi_G \, d\lambda = \lambda(G),$$

άρα

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : 0 \leq f \leq \chi_G, f \text{ συνεχής} \right\} \geq \lambda(G).$$

Από την άλλη, για κάθε συνεχή f με $0 \leq f \leq \chi_G$ ισχύει $\int f \, d\lambda \leq \int \chi_G \, d\lambda = \lambda(G)$, οπότε το παραπάνω supremum είναι $\leq \lambda(G)$. Οι δύο ανισότητες δίνουν την ισότητα.

(β) Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε f συνεχή με $f \geq \chi_F$ έχουμε $\int f \, d\lambda \geq \int \chi_F \, d\lambda = \lambda(F)$, άρα

$$\lambda(F) \leq \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : f \geq \chi_F, f \text{ συνεχής} \right\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(F) < \infty$. Για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε ανοικτό $G \supseteq F$ με $\lambda(G) < \lambda(F) + \epsilon$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{d(x, G^c)}{d(x, G^c) + d(x, F)}$, η οποία είναι καλά ορισμένη γιατί $G^c \cap F = \emptyset$ και μη αρνητική. Για $x \in F$ έχουμε $g(x) = 1$, άρα $\chi_F \leq g$. Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \int_G g \, d\lambda + \int_{G^c} g \, d\lambda = \int_G g \, d\lambda \leq \int_G 1 \, d\lambda = \lambda(G) < \lambda(F) + \epsilon.$$

Έπεται ότι

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda : f \geq \chi_F, f \text{ συνεχής} \right\} < \lambda(F) + \epsilon,$$

και αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε το ζητούμενο.

6.84. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Έστω $f_n \in L^1(E)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχουν $1 < p < \infty$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε $\|f_n\|_p \leq \alpha$ για κάθε $n \geq 1$.

(β) Υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση f στο E τέτοια ώστε $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού.

Αποδείξτε ότι $f \in L^1(E)$ και $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: (α) Από το λήμμα του Fatou,

$$\int_E |f|^p \, d\lambda \leq \liminf \int_E |f_n|^p \, d\lambda \leq \alpha^p,$$

δηλαδή $\|f\|_p \leq \alpha$. Από την ανισότητα Hölder,

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_p \|\chi_E\|_q \leq M := \alpha(\lambda(E))^{1/q}$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p , δηλαδή $f \in L^1(E)$.

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε $\delta < \lambda(E)$ και $2\alpha\delta^{1/q} < \varepsilon/2$. Από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $F \subseteq E$ με $\lambda(E \setminus F) < \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο F . Επειδή $\delta < \lambda(E)$, έχουμε $\lambda(F) > 0$, οπότε το F είναι μη κενό και το $\sup_{x \in F} |f_n(x) - f(x)|$ που ακολουθεί είναι κανονικά ορισμένο. Για κάθε n γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f_n - f| d\lambda &= \int_F |f_n - f| d\lambda + \int_{E \setminus F} |f_n - f| d\lambda \\ &\leq \lambda(F) \sup_{x \in F} |f_n(x) - f(x)| + \lambda(E \setminus F)^{1/q} \|f_n - f\|_p \\ &\leq \lambda(E) \sup_{x \in F} |f_n(x) - f(x)| + 2\alpha\delta^{1/q}. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος τείνει στο 0 λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης στο F , ενώ ο δεύτερος είναι μικρότερος από $\varepsilon/2$. Άρα, για όλα τα αρκετά μεγάλα n ,

$$\int_E |f_n - f| d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

6.85. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι: Αν (E_n) είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0$.

Υπόδειξη: Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_k = \{g < \frac{1}{k}\}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του X , και $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$ διότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αφού $\mu(B_1) \leq \mu(X) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = 0.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\mu(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\int_{E_n} g d\mu < \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$, αφού $g \geq \frac{1}{k_0}$ στο $X \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(E_n) &\leq \mu(B_{k_0}) + \mu(E_n \cap (X \setminus B_{k_0})) \\ &\leq \mu(B_{k_0}) + k_0 \int_{E_n \cap (X \setminus B_{k_0})} g d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{E_n} g d\mu < \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mu(E_n) \rightarrow 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το μ είναι πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $g(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1, \infty)$, τότε η g είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} g \, d\lambda \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\rightarrow 0$.

6.86. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $\{A_n\}$ ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$, και $k \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο B όλων των $x \in X$ που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα σύνολα A_n . Αποδείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και ότι $\mu(B) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Υπόδειξη. Θέτουμε

$$N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x).$$

Η $N : X \rightarrow [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη ως όριο των μετρήσιμων μερικών αθροισμάτων και

$$B = \{x \in X : N(x) \geq k\},$$

άρα $B \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, $k\chi_B \leq N$. Από το θεώρημα του Beppo Levi,

$$k\mu(B) = \int_X k\chi_B \, d\mu \leq \int_X N \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Διαιρώντας με k παίρνουμε το ζητούμενο, με την ανισότητα να ισχύει και όταν το δεξί μέλος είναι $+\infty$.

6.87. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια και αιτιολογήστε τον υπολογισμό τους:

$$(α) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, d\lambda(x).$$

$$(β) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (1 + nx^2)(1 + x^2)^{-n} \, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)$, $x \geq 0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{x^2}{n^2} = 1 + x + \frac{n-1}{2n} x^2 \geq 1 + x + \frac{x^2}{4} = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2,$$

άρα

$$|f_n(x)| = |(1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n)| \leq \frac{1}{(1 + (x/2))^2} |\sin(x/n)| \leq g(x) := \frac{1}{(1 + (x/2))^2}.$$

Επίσης,

$$f_n(x) = (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \rightarrow e^{-x} \cdot 0 = 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, \infty)$ (εξηγήστε γιατί), άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε

$$\int_0^{\infty} (1 + (x/n))^{-n} \sin(x/n) \, d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

(β) Ορίζουμε $g_n(x) = (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$. Παρατηρούμε ότι $(1+x^2)^n \geq 1+nx^2$ από την ανισότητα Bernoulli, άρα $g_n(x) \leq g(x) := 1$ στο $[0,1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $x \in (0,1]$ και $n \geq 2$ τότε

$$(1+x^2)^n \geq 1+nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^4 > \frac{n(n-1)}{2}x^4,$$

άρα

$$g_n(x) \leq 2 \frac{1+nx^2}{n(n-1)x^4} \rightarrow 0$$

καθώς το $n \rightarrow \infty$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

6.88. Έστω $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n| d\lambda \leq \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geq 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$. Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n d\lambda \rightarrow \int_0^1 f d\lambda.$$

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Fatou, για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$ έχουμε

$$\int_E |f| d\lambda \leq \liminf \int_E |f_n| d\lambda \leq \sqrt{\lambda(E)}.$$

Ειδικότερα,

$$\int_0^1 |f| d\lambda \leq 1,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Από το θεώρημα του Egorov υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq [0,1]$ τέτοιο ώστε $\lambda(E) > 1 - \varepsilon^2/4$ και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n d\lambda - \int_0^1 f d\lambda \right| &\leq \int_0^1 |f_n - f| d\lambda \leq \int_E |f_n - f| d\lambda + \int_{[0,1] \setminus E} |f_n| d\lambda + \int_{[0,1] \setminus E} |f| d\lambda \\ &\leq \int_E |f_n - f| d\lambda + 2\sqrt{\lambda([0,1] \setminus E)} < \int_E |f_n - f| d\lambda + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_E |f_n - f| d\lambda + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E και $\lambda(E) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |f_n - f| d\lambda \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_n \left| \int_0^1 f_n d\lambda - \int_0^1 f d\lambda \right| \leq \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε το ζητούμενο.

6.89. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n d\lambda \rightarrow 0$.

- (i) $|f_n| \leq 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\}) \leq 1$ για κάθε n .
- (ii) $|f_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n .
- (iii) $f_n \geq 0$ και $\int f_n d\lambda \leq 1$ για κάθε n .

Υπόδειξη. (i) Δεν ισχύει. Αν θεωρήσουμε τις $f_n = \chi_{[n, n+1]}$ τότε $|f_n| \leq 1$ και $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\} = [n, n+1]$ άρα $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \neq 0\}) = \lambda([n, n+1]) = 1$ για κάθε n . Επίσης, $f_n(x) = \chi_{[n, n+1]}(x) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ διότι $x < n$ για όλους τελικά τους $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\int f_n d\lambda = \lambda([n, n+1]) = 1 \not\rightarrow 0.$$

(ii) Ισχύει. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n| \leq g$ για κάθε n , συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(iii) Δεν ισχύει. Μπορούμε να θεωρήσουμε το ίδιο παράδειγμα με εκείνο στο (i).

6.90. Έστω $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με τις ακόλουθες ιδιότητες: υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε n και για κάθε $x \in [0, 1]$, και

$$\int_E g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow 0$$

για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$. Αποδείξτε ότι: για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x)g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $f = \chi_E$ για κάποιο μετρήσιμο $E \subseteq [0, 1]$. Τότε,

$$\int_0^1 f(x)g_n(x) d\lambda(x) = \int_0^1 \chi_E(x)g_n(x) d\lambda(x) = \int_E g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow 0$$

από την υπόθεση. Αν $s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{E_j}$ είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0, 1]$, δηλαδή κάθε E_j είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0, 1]$, τότε από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\int_0^1 s(x)g_n(x) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^m a_j \int_0^1 \chi_{E_j}(x)g_n(x) d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

Έστω τώρα $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τυχούσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε απλή

μετρήσιμη s ώστε $\int_0^1 |f(x) - s(x)| d\lambda(x) \leq \varepsilon/M$. Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x)g_n(x) d\lambda(x) \right| &\leq \int_0^1 |f(x) - s(x)| |g_n(x)| d\lambda(x) + \left| \int_0^1 s(x)g_n(x) d\lambda(x) \right| \\ &\leq M \int_0^1 |f(x) - s(x)| d\lambda(x) + \left| \int_0^1 s(x)g_n(x) d\lambda(x) \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_0^1 s(x)g_n(x) d\lambda(x) \right|. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα βλέπουμε ότι

$$\limsup \left| \int_0^1 f(x)g_n(x) d\lambda(x) \right| \leq \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται το ζητούμενο.

6.91. Έστω $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι περιοδική με περίοδο

1. Αποδείξτε ότι, για κάθε $f \in L^1(\lambda)$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(nx) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου $f = \chi_I$ για κάποιο φραγμένο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$. Τότε,

$$\int \chi_I(x)g(nx) d\lambda(x) = \int_a^b g(nx) d\lambda(x) = \frac{1}{n} \int_{na}^{nb} g(y) d\lambda(y) = \frac{1}{n} \int_{na}^{na+k_n} g(y) d\lambda(y) + \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} g(y) d\lambda(y),$$

όπου $k_n = [nb - na]$. Αφού η g είναι περιοδική με περίοδο 1, έχουμε

$$\frac{1}{n} \int_{na}^{na+k_n} g(y) d\lambda(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k_n-1} \int_{na+k}^{na+k+1} g(y) d\lambda(y) = \frac{k_n}{n} \int_0^1 g d\lambda.$$

Η g είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} g(y) d\lambda(y) \right| \leq \frac{1}{n} \int_{na+k_n}^{nb} |g(y)| d\lambda(y) \leq \frac{M}{n} (nb - na - k_n) = \frac{M}{n} (nb - na - [nb - na]) \leq \frac{M}{n} \rightarrow 0.$$

Επίσης,

$$\frac{k_n}{n} = \frac{[nb - na]}{n} = \frac{[n(b - a)]}{n} \rightarrow b - a = \lambda(I) = \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(nx) d\lambda(x) = \int \chi_I(x)g(nx) d\lambda(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda.$$

Αν $I_1, \dots, I_N$ είναι ξένα ανά δύο φραγμένα κλειστά διαστήματα και $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ τότε για την $f = \chi_F$

έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx) d\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^N \chi_{I_j}(x) \right) g(nx) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{I_j}(x)g(nx) d\lambda(x) \\ &\rightarrow \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{I_j} d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^N \chi_{I_j} \right) d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda, \end{aligned}$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το προηγούμενο βήμα.

Έστω τώρα E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue και την προσέγγιση ανοικτών συνόλων πεπερασμένου μέτρου από πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων, μπορούμε να βρούμε $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ όπως παραπάνω, τέτοιο ώστε $\lambda(E \Delta F) \leq \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_E(x) - \chi_F(x)| |g(nx)| d\lambda(x) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_F - \chi_E| d\lambda \cdot \int_0^1 |g| d\lambda \\ &\leq M\lambda(F \Delta E) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_F d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| + M\lambda(F \Delta E). \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \leq 2M\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int \chi_E(x)g(nx) d\lambda(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \chi_E d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda.$$

Τώρα, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$ ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx) d\lambda(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda.$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε απλή

μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$, τέτοια ώστε $\int |f - s| d\lambda \leq \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} & \left| \int f(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - s(x)| |g(nx)| d\lambda(x) + \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} s d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \\ & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} |f - s| d\lambda \cdot \int_0^1 |g| d\lambda \\ & \leq M\varepsilon + \left| \int_{-\infty}^{\infty} s(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} s d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| + M\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(x)g(nx) d\lambda(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda \right| \leq 2M\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int f(x)g(nx) d\lambda(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f d\lambda \cdot \int_0^1 g d\lambda.$$

Για τη γενική περίπτωση όπου $f \in L^1(\lambda)$ γράφουμε $f = u + iv$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις u και v .

6.92. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^1(\mu)$. Υπολογίστε το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X n \ln \left(1 + \frac{|f|^2}{n^2} \right) d\mu.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \leq \left(1 + \frac{|f(x)|}{n} \right)^2$, άρα

$$n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \leq 2n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|}{n} \right) \leq 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln \left(1 + \frac{|f(x)|}{n} \right) \leq \frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right)$, έχουμε $|g_n| \leq 2|f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)| = n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) \leq n \frac{|f(x)|^2}{n^2} = \frac{|f(x)|^2}{n} \rightarrow 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_X n \ln \left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2} \right) d\mu(x) = \int_X g_n(x) d\mu(x) \rightarrow 0.$$

6.93. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \infty$. Ορίζουμε

$$\delta(x) := \text{dist}(x, F) = \inf\{|x - y| : y \in F\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y).$$

Αποδείξτε ότι $I(x) = \infty$ για κάθε $x \notin F$ και $I(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in F$. Θα βοηθήσει να θεωρήσετε το $\int_F I(x) d\lambda(x)$.

Υπόδειξη. Έστω $x \notin F$. Το F είναι κλειστό, άρα υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap F = \emptyset$. Τότε, για κάθε $y \in (x - \epsilon/2, x + \epsilon/2)$ έχουμε $(y - \epsilon/2, y + \epsilon/2) \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon)$, άρα $(y - \epsilon/2, y + \epsilon/2) \cap F = \emptyset$. Έπεται ότι $\delta(y) \geq \epsilon/2$ για κάθε $y \in (x - \epsilon/2, x + \epsilon/2)$. Άρα, για κάθε $0 < t < \epsilon/2$,

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y) \geq \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y) \\ &\geq \frac{\epsilon}{2} \int_{x+t}^{x+\epsilon/2} \frac{1}{|x-y|^2} d\lambda(y) = \frac{\epsilon}{2} \int_t^{\epsilon/2} \frac{1}{s^2} ds = \frac{\epsilon}{2t} - 1 \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

καθώς το $t \rightarrow 0^+$. Συνεπώς, $I(x) = +\infty$.

Θα δείξουμε ότι

$$\int_F I(x) d\lambda(x) = \int_F \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_F \left(\int_{\mathbb{R} \setminus F} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) < \infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $I(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in F$. Το $G = \mathbb{R} \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο (και έχει πεπερασμένο μέτρο από την υπόθεση), επομένως γράφεται ως ξένη (πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη) ένωση $G = \bigcup_k I_k$ φραγμένων ανοικτών διαστημάτων $I_k = (a_k, b_k)$, όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ και $a_k < b_k$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli και την αριθμήσιμη προσθετικότητα του ολοκληρώματος, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_F I(x) d\lambda(x) &= \int_F \left(\int_{\mathbb{R} \setminus F} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R} \setminus F} \left(\int_F \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \sum_k \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \leq \sum_k \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y), \end{aligned}$$

όπου $\delta_k(y) = \text{dist}(y, \mathbb{R} \setminus I_k)$. Επειδή το $I_k = (a_k, b_k)$ είναι φραγμένη συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $\mathbb{R} \setminus F$ και το F είναι κλειστό, τα άκρα a_k, b_k ανήκουν στο F . Για $y \in I_k$ κάθε σημείο του F βρίσκεται έξω από το (a_k, b_k) , ενώ τα a_k, b_k ανήκουν στο F . Επομένως

$$\delta(y) = \text{dist}(y, F) = \min\{y - a_k, b_k - y\} = \delta_k(y).$$

Άρα η τελευταία ανισότητα παραπάνω είναι στην πραγματικότητα ισότητα.

Αν $I_k = (a_k, b_k)$ είναι οποιοδήποτε από αυτά τα διαστήματα, τότε

$$\begin{aligned}
 \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) &\leq \int_{I_k} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus I_k} \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\
 &= \int_{a_k}^{b_k} \delta_k(y) \left(\int_{-\infty}^{a_k} \frac{1}{(x-y)^2} dx + \int_{b_k}^{\infty} \frac{1}{(x-y)^2} dx \right) dy \\
 &= \int_{a_k}^{b_k} \delta_k(y) \left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y} \right) dy \\
 &= \int_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} (y-a_k) \left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y} \right) dy + \int_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k} (b_k-y) \left(\frac{1}{b_k-y} - \frac{1}{a_k-y} \right) dy \\
 &= \int_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} \frac{b_k-a_k}{b_k-y} dy + \int_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k} \frac{b_k-a_k}{y-a_k} dy \\
 &= (b_k-a_k) \left[-\ln(b_k-y) \Big|_{a_k}^{\frac{a_k+b_k}{2}} + \ln(y-a_k) \Big|_{\frac{a_k+b_k}{2}}^{b_k} \right] \\
 &= (b_k-a_k) \left[\ln(b_k-a_k) - \ln \frac{b_k-a_k}{2} + \ln(b_k-a_k) - \ln \frac{b_k-a_k}{2} \right] = (2 \ln 2) \cdot (b_k-a_k) \\
 &= (2 \ln 2) \cdot \lambda(I_k).
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\int_F I(x) d\lambda(x) \leq \sum_k \int_{I_k} \left(\int_F \frac{\delta_k(y)}{|x-y|^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = (2 \ln 2) \sum_k \lambda(I_k) = (2 \ln 2) \lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \infty.$$

6.94. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f| d\mu \leq 1$$

και από αυτό συμπεράνατε ότι $f_{k_n} \rightarrow f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη: Από την υπόθεση ότι $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ έπεται εύκολα ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία (k_n) φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $\int_X |f_{k_n} - f| d\mu < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Από το θεώρημα Beppo Levi έπεται ότι

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n} - f| \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f| d\mu \leq 1 < +\infty,$$

άρα $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n} - f| < +\infty$ σχεδόν παντού. Δηλαδή, σχεδόν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k_n}(x) - f(x)| < +\infty \implies |f_{k_n}(x) - f(x)| \rightarrow 0 \implies f_{k_n}(x) \rightarrow f(x).$$

6.95. Έστω $\delta > 0$ και $(A_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0, 1]$ με $\lambda(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(a_n)_{n=1}^\infty$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) < +\infty$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Υπόδειξη: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$B_m = \left\{ x \in [0, 1] : \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) \leq m \right\}.$$

Η (B_m) είναι αύξουσα ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων συνόλων και από την υπόθεση ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) < +\infty$ για κάθε $x \in [0, 1]$ έπεται ότι $[0, 1] = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Άρα, $\lambda(B_m) \rightarrow 1 = \lambda([0, 1])$ και συνεπώς μπορούμε να βρούμε $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\lambda([0, 1] \setminus B_{m_0}) < \frac{\delta}{2}$.

Από την υπόθεση ότι $\lambda(A_n) \geq \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\lambda(A_n \cap B_{m_0}) \geq \frac{\delta}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in B_{m_0}$ έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n}(x) \leq m_0$. Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda = \int_{B_{m_0}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{A_n} \right) d\lambda \leq m_0 \lambda(B_{m_0}) \leq m_0,$$

ενώ, ταυτόχρονα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda(A_n \cap B_{m_0}) \geq \frac{\delta}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Άρα, τελικά,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{2}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{B_{m_0}} a_n \chi_{A_n} d\lambda \leq \frac{2m_0}{\delta} < +\infty.$$

6.96. Έστω $(a_n)_{n=0}^\infty, (b_n)_{n=0}^\infty$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ ώστε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

να συγκλίνει για κάθε $x \in A$. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow 0$ και $b_n \rightarrow 0$.

Υπόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι αν $0 < \lambda(A) < \infty$ τότε

$$\int_A \cos(nx) d\lambda(x) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \int_A \sin(nx) d\lambda(x) \rightarrow 0.$$

Ο ισχυρισμός αυτός προκύπτει με απευθείας υπολογισμό όταν $A = [a, b]$. Για γενικό μετρήσιμο A πεπερασμένου μέτρου, έστω $\varepsilon > 0$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue υπάρχει πεπερασμένη

ένωση E φραγμένων διαστημάτων τέτοια ώστε $\lambda(A \Delta E) < \varepsilon$. Τότε

$$\left| \int_A e^{inx} d\lambda - \int_E e^{inx} d\lambda \right| \leq \lambda(A \Delta E) < \varepsilon,$$

ενώ, επειδή το E είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων, $\int_E e^{inx} d\lambda \rightarrow 0$. Άρα $\int_A e^{inx} d\lambda \rightarrow 0$, και παίρνοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος προκύπτουν οι δύο ζητούμενες συγκλίσεις.

Περνάμε τώρα στην άσκηση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, επιπλέον, $0 < \lambda(A) < \infty$. Πράγματι, αν $\lambda(A) = +\infty$, τότε από $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A \cap [-m, m])$ υπάρχει m τέτοιο ώστε $\lambda(A \cap [-m, m]) > 0$, και αρκεί να αντικαταστήσουμε το A με αυτό το υποσύνολο, αφού η σειρά εξακολουθεί να συγκλίνει σε κάθε σημείο του. Θέτουμε $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Αν $r_n > 0$, επιλέγουμε $\vartheta_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\cos \vartheta_n = a_n/r_n$ και $\sin \vartheta_n = b_n/r_n$, οπότε

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx - \vartheta_n).$$

Αν $r_n = 0$, η παραπάνω ταυτότητα ισχύει για οποιαδήποτε επιλογή του ϑ_n . Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $r_n \rightarrow 0$, αφού $|a_n|, |b_n| \leq r_n$.

Αν, προς άτοπο, η (r_n) δεν συγκλίνει στο 0, τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) τέτοια ώστε $r_{k_n} \geq \delta$ για κάθε n . Αφού

$$r_{k_n} \cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) = a_{k_n} \cos k_n x + b_{k_n} \sin k_n x \rightarrow 0$$

για κάθε $x \in A$, αναγκαστικά έχουμε $\cos(k_n x - \vartheta_{k_n}) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in A$, άρα και $\cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) \rightarrow 0$ για κάθε $x \in A$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_A \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) \rightarrow 0,$$

όμως

$$\int_A \cos^2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) = \frac{1}{2} \int_A (1 + \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n})) d\lambda(x) \rightarrow \frac{1}{2} \lambda(A),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $\lambda(A) > 0$.

Για να εξηγήσουμε το γεγονός ότι $\int_A \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) \rightarrow 0$ χρησιμοποιούμε τον προηγούμενο ισχυρισμό, αφού πρώτα γράψουμε

$$\int_A \cos 2(k_n x - \vartheta_{k_n}) d\lambda(x) = \cos(2\vartheta_{k_n}) \int_A \cos(2k_n x) d\lambda(x) + \sin(2\vartheta_{k_n}) \int_A \sin(2k_n x) d\lambda(x).$$

6.97. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν ισχύουν και οι δύο ακόλουθες συνθήκες:

$$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\},$$

και για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα ισχύει

$$\int f_n d\mu \rightarrow 0.$$

Υπόδειξη. ($\implies$) Έστω ότι $0 < \mu(X) < \infty$ (αν $\mu(X) = 0$ τότε το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα – εξηγήστε

γιατί). Αφού $X \in \mathcal{A}$ έχουμε $\mu(X) \in \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ άρα $\mu(X) \leq \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$. Από την άλλη πλευρά για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $A \subseteq X$ άρα $\mu(A) \leq \mu(X)$. Συνεπώς, $\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} \leq \mu(X)$. Έπεται ότι

$$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}.$$

Έστω τώρα (f_n) ακολουθία μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in X$ να ισχύει $|f_n(x)| \leq \varepsilon/\mu(X)$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left| \int f_n d\mu \right| \leq \int |f_n| d\mu \leq \int \frac{\varepsilon}{\mu(X)} d\mu = \mu(X) \cdot \frac{\varepsilon}{\mu(X)} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\int f_n d\mu \rightarrow 0$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) = \infty$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την υπόθεση έχουμε

$$\sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\} = \mu(X) = \infty,$$

συνεπώς μπορούμε να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A_n) = a_n < \infty$ και $a_n \rightarrow \infty$. Θεωρούμε τις μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f_n = \frac{1}{a_n} \chi_{A_n}$. Τότε $0 \leq f_n \leq 1/a_n$ και $1/a_n \rightarrow 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα. Όμως,

$$\int f_n d\mu = \frac{1}{a_n} \int \chi_{A_n} d\mu = \frac{1}{a_n} \mu(A_n) = 1$$

για κάθε n , δηλαδή $\int f_n d\mu \not\rightarrow 0$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

Σε όλες τις παρακάτω ασκήσεις, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, όλα τα υποσύνολα του X που εμφανίζονται ανήκουν στην $\mathcal{A}$ και οι $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες.

Απλές ασκήσεις

7.1. Έστω $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού, τότε είναι και $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Υπάρχει $Z \subseteq X$ με $\mu(Z) = 0$ τέτοιο ώστε $f_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \notin Z$. Αφού η φ είναι συνεχής, από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $\varphi(f_n(x)) \rightarrow \varphi(f(x))$ για κάθε $x \notin Z$. Άρα, $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού.

7.2. Να δείξετε ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση f κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $f = \chi_A$ μ -σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι $\chi_{A_n} \rightarrow f$ κατά μέτρο. Υπάρχει υπακολουθία $\chi_{A_{k_n}} \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Θέτουμε $B = \{x \in X : \chi_{A_{k_n}}(x) \rightarrow f(x)\}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) = 0$ και για κάθε $x \in B$ έχουμε $f(x) \in \{0, 1\}$. Αν ορίσουμε $A = B \cap \{x \in X : f(x) = 1\}$ τότε $f(x) = \chi_A(x)$ για κάθε $x \in B$. Αφού $\mu(X \setminus B) = 0$, έπεται ότι $f = \chi_A$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω ότι $\chi_{A_n} \rightarrow f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B_\varepsilon \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(X \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\chi_{A_n} \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο B_ε . Ορίζουμε $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{1/k}$. Τότε, $\mu(X \setminus B) = 0$. Επίσης, για κάθε $x \in B$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in B_{1/k}$, άρα $\chi_{A_n}(x) \rightarrow f(x)$, απ' όπου έπεται ότι $f(x) \in \{0, 1\}$. Αν ορίσουμε $A = B \cap \{x \in X : f(x) = 1\}$ τότε $f(x) = \chi_A(x)$ για κάθε $x \in B$. Αφού $\mu(X \setminus B) = 0$, έπεται ότι $f = \chi_A$ σχεδόν παντού.

7.3. Αν $f_n \geq 0$ και $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $J := \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$. Υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{k_n} d\mu.$$

Έχουμε $f_{k_n} \rightarrow f$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ ώστε $f_{k_{\lambda_n}} \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Από το λήμμα του Fatou,

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{k_{\lambda_n}} \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_{k_{\lambda_n}} \, d\mu = J.$$

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

7.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ομοιόμορφα συνεχής. Αποδείξτε ότι αν $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα), τότε είναι και $\varphi(f_n) \rightarrow \varphi(f)$ κατά μέτρο (αντίστ. σχεδόν ομοιόμορφα).

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. Η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\varphi(z) - \varphi(y)| < \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}.$$

Αφού $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) < \eta.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta.$$

Αφού το $\eta > 0$ ήταν τυχόν,

$$\mu(\{x \in X : |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \rightarrow 0.$$

Δηλαδή, $\varphi \circ f_n \rightarrow \varphi \circ f$ κατά μέτρο.

Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \varepsilon$, ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Αφού η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\varphi \circ f_n \rightarrow \varphi \circ f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$: θεωρήστε τυχόν $\eta > 0$ και βρείτε $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\varphi(z) - \varphi(y)| < \eta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus A$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \text{ και συνεπώς } |(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| < \eta.$$

7.5. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(A_n \Delta A_m) \rightarrow 0$ για $n, m \rightarrow \infty$. Δείξτε επίσης ότι αν η ακολουθία $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα τότε $\mu(A_n \Delta A_m) \rightarrow 0$ για $n, m \rightarrow \infty$. Ισχύει το αντίστροφο;

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι $\chi_{A_n \Delta A_m} = |\chi_{A_n} - \chi_{A_m}|$. Συνεπώς,

$$\mu(A_n \Delta A_m) = \int_X \chi_{A_n \Delta A_m} \, d\mu = \int_X |\chi_{A_n} - \chi_{A_m}| \, d\mu$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(A_n \Delta A_m) \rightarrow 0$ όταν $m, n \rightarrow \infty$.

(β) Έστω ότι η $\{\chi_{A_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε: για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geq n_0$,

$$|\chi_{A_n}(x) - \chi_{A_m}(x)| < \varepsilon \text{ αν } x \notin A.$$

Αφού $\varepsilon < 1$, αυτό σημαίνει ότι $A_n \Delta A_m \subseteq A$, άρα $\mu(A_n \Delta A_m) < \delta$ για κάθε $m, n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\mu(A_n \Delta A_m) \rightarrow 0$ όταν $m, n \rightarrow \infty$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Έστω $X = [0, 1)$ και μ το μέτρο Lebesgue στο $[0, 1)$. Θεωρήστε τη φυσιολογική αρίθμηση $\{I_s\}$ των διαστημάτων $I_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, $n \geq 1$, $1 \leq k \leq 2^n$ (πρώτα τα $I_{1,1}, I_{1,2}$, μετά τα $I_{2,1}, I_{2,2}, I_{2,3}, I_{2,4}$ και ούτω καθεξής). Τότε $\mu(I_s \Delta I_r) \rightarrow 0$ όταν $r, s \rightarrow \infty$, αλλά η ακολουθία $\chi_{I_s}(x)$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0, 1)$ (παιρνει άπειρες φορές την τιμή 0 και άπειρες φορές την τιμή 1), άρα η χ_{I_s} δεν συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

7.6. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Για $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τα σύνολα

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο μ σχεδόν παντού αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)\right) = 0.$$

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, αυτό σημαίνει ότι $\mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$Z = \bigcup_{s=1}^{\infty} \limsup_n E_n(1/s).$$

Τότε, $\mu(Z) = 0$. Θα δείξουμε ότι, αν $x \in A = X \setminus Z$ τότε $f_n(x) \rightarrow f(x)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $s \in \mathbb{N}$ ώστε $1/s < \varepsilon$. Αφού $x \notin \limsup_n E_n(1/s)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$, τότε $x \notin E_n(1/s)$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{s} < \varepsilon.$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n \rightarrow f$ στο $A = X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in A$, τότε τελικά ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Δηλαδή, $\limsup_n E_n(\varepsilon) \subseteq Z$. Θέτουμε $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)$. Τότε $F_n \searrow \limsup_n E_n(\varepsilon)$ και, επειδή $F_1 \subseteq X$ και $\mu(X) < \infty$, η συνέχεια του μέτρου από πάνω δίνει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu\left(\limsup_n E_n(\varepsilon)\right).$$

Επομένως,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = \mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) \leq \mu(Z) = 0.$$

7.7. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αποδείξτε ότι αν για ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_n\}, \{g_n\}$ ισχύει $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο και $g_n \rightarrow g$ κατά μέτρο, τότε είναι και $f_n g_n \rightarrow fg$ κατά μέτρο.

Υπόδειξη. Αφού $\mu(X) < \infty$, για να δείξουμε ότι $f_n g_n \rightarrow fg$ κατά μέτρο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $\{f_n g_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην fg μ -σχεδόν παντού (χρησιμοποιούμε το

γνωστό κριτήριο: σε χώρο πεπερασμένου μέτρου, $h_n \rightarrow h$ κατά μέτρο αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην h σχεδόν παντού).

Θεωρούμε την $\{f_{k_n}g_{k_n}\}$. Τότε, $f_{k_n} \rightarrow f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Ομοίως, $g_{k_{\lambda_n}} \rightarrow g$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{g_{k_{\lambda_{s_n}}}\}$ της $\{g_{k_{\lambda_n}}\}$ η οποία συγκλίνει στην g σχεδόν παντού. Τότε, $f_{k_{\lambda_{s_n}}}g_{k_{\lambda_{s_n}}} \rightarrow fg$ σχεδόν παντού. Έπεται το ζητούμενο.

7.8. Αν για μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty]$ ισχύει $|f_n| \leq g$ και επιπλέον $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο, να δείξετε ότι

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$(*) \quad \left| \int_X (f_{k_n} - f) d\mu \right| \geq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο, έχουμε $f_{k_n} \rightarrow f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_{\lambda_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ με $f_{k_{\lambda_n}} \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Από $|f_{k_{\lambda_n}}| \leq g$ και $f_{k_{\lambda_n}} \rightarrow f$ σχεδόν παντού έπεται πρώτα ότι $|f| \leq g$ σχεδόν παντού. Επομένως f είναι ολοκληρώσιμη και

$$|f_{k_{\lambda_n}} - f| \leq |f_{k_{\lambda_n}}| + |f| \leq 2g$$

σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στη διαφορά $f_{k_{\lambda_n}} - f$ και παίρνουμε

$$\int_X |f_{k_{\lambda_n}} - f| d\mu \rightarrow 0.$$

Άρα, ειδικότερα,

$$\left| \int_X (f_{k_{\lambda_n}} - f) d\mu \right| \rightarrow 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω της (*).

7.9. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Λέμε ότι οι f_n είναι *ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες* αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$, τότε να ισχύει

$$\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά μέσο αν και μόνο αν οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \rightarrow f$ κατά μέσο. Από την ανισότητα του Chebyshev βλέπουμε ότι $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\int_X |f_n - f| d\mu < \varepsilon/2$. Επειδή οι $f, f_1, \dots, f_{n_0-1}$ ανήκουν στο $L^1(\mu)$, από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος, εφαρμοσμένη σε καθεμία από αυτές τις πεπερασμένες πολλές συναρτήσεις, υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{n_0-1}$ τέτοιοι ώστε

$$\mu(A) < \delta_0 \implies \int_A |f| d\mu < \varepsilon/2,$$

και

$$\mu(A) < \delta_j \implies \int_A |f_j| d\mu < \varepsilon/2, \quad 1 \leq j < n_0.$$

Θέτοντας $\delta = \min\{\delta_0, \dots, \delta_{n_0-1}\} > 0$, οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν ταυτόχρονα. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ έχουμε

$$\int_A |f_n| d\mu \leq \int_A |f_n - f| d\mu + \int_A |f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu + \int_A |f| d\mu < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα, οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\int_A |f_n| d\mu < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και αφού υπάρχει $f_{k_n} \rightarrow f$ σχεδόν παντού, από το λήμμα του Fatou έχουμε επίσης $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$. Αφού $f_n \rightarrow f$ κατά μέτρο, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| d\mu &= \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f - f_n| d\mu + \int_{\{|f-f_n| < \varepsilon\}} |f - f_n| d\mu \\ &\leq \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f - f_n| d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\ &\leq \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}} |f_n| d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mu(X) \\ &= (2 + \mu(X))\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\int_X |f - f_n| d\mu \rightarrow 0$.

7.10. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: $f_n \rightarrow f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Υπόδειξη. ($\implies$) Ισχύει. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\left| \int_A f_n d\mu - \int_A f d\mu \right| = \left| \int_A (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_A |f_n - f| d\mu \leq \int_X |f_n - f| d\mu.$$

Αν $f_n \rightarrow f$ κατά μέσο, τότε $\int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$, απ' όπου έπεται ότι $\int_A f_n d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$.

($\impliedby$) Δεν ισχύει. Πάρτε $X = [0, 2\pi]$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n(x) = \sin(nx)$. Ελέγξτε ότι

$$\int_A f_n d\mu \rightarrow 0$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subset [0, 2\pi]$: ξεκινήστε από την περίπτωση που το A είναι υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$ και προσεγγίστε το τυχόν μετρήσιμο $A \subseteq [0, 2\pi]$ με πεπερασμένες ενώσεις ξένων διαστημάτων.

Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\int_{[0, 2\pi]} |f_n| d\lambda = \int_{[0, 2\pi]} |\sin(nx)| d\lambda = 4$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 8

Μετρήσιμες συναρτήσεις και ολοκλήρωμα

Απλές ασκήσεις

8.1. Έστω X, Y μετρικοί χώροι εφοδιασμένοι με τις σ -άλγεβρες των Borel υποσυνόλων τους. Αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(Y)$ ισχύει ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Αν B είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του Y , τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X , διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του Y . Εύκολα ελέγχουμε επίσης ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα, συνεπώς

$$\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{A}.$$

Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε συνόλου $B \in \mathcal{B}(Y)$ είναι σύνολο Borel στον X . Άρα, η f είναι μετρήσιμη.

8.2. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$ και $g(y) = y^3 + y$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{(0,1)} g df_*(\lambda).$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f^{-1}((0,1)) = (-\infty, 0)$. Από τον ορισμό του μέτρου εικόνας $f_*(\lambda)$ και την ταυτότητα ολοκλήρωσης ως προς μέτρο εικόνας,

$$\int_{(0,1)} g df_*(\lambda) = \int_{f^{-1}((0,1))} g \circ f d\lambda = \int_{(-\infty, 0)} g \circ f d\lambda.$$

Όμως,

$$(g \circ f)(x) = g(e^x) = e^{3x} + e^x.$$

Άρα,

$$\int_{(0,1)} g df_*(\lambda) = \int_{-\infty}^0 (e^{3x} + e^x) dx = \left(\frac{1}{3} e^{3x} + e^x \right) \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

8.3. Έστω X ένας μετρικός χώρος. Μια συνάρτηση $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ λέγεται *άνω* (αντίστ. *κάτω*)

ημισυνεχής αν το σύνολο $\{x \in X : f(x) < a\}$ (αντίστ. $\{x \in X : f(x) > a\}$) είναι ανοικτό στο X για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι μια τέτοια συνάρτηση f είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Υπόδειξη. Αν η f είναι συνεχής τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα σύνολα

$$\{x \in X : f(x) < a\} = f^{-1}([-\infty, a)) \quad \text{και} \quad \{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty])$$

είναι ανοικτά ως αντίστροφες εικόνες ανοικτών υποσυνόλων του $[-\infty, \infty]$. Άρα, η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Αντίστροφα, αν η f είναι άνω και κάτω ημισυνεχής, τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ τα σύνολα

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in X : f(x) < a\} \quad \text{και} \quad f^{-1}((a, \infty]) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

είναι ανοικτά στο X . Τα διαστήματα $[-\infty, a)$ και $(a, \infty]$, $a \in \mathbb{R}$, αποτελούν υποβάση της συνήθους τοπολογίας του $[-\infty, \infty]$. Επομένως, η αντίστροφη εικόνα κάθε βασικού ανοικτού συνόλου (πεπερασμένης τομής υποβασικών συνόλων) είναι ανοικτή, και άρα το ίδιο ισχύει για κάθε ανοικτό $G \subseteq [-\infty, \infty]$, αφού κάθε τέτοιο G είναι ένωση βασικών ανοικτών συνόλων. Συνεπώς, η f είναι συνεχής.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

8.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, Y μετρικός χώρος και $f_n : X \rightarrow Y$, $n = 1, 2, \dots$ μια ακολουθία $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$ -μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$, να δείξετε ότι και η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$ -μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Έστω B μη κενό κλειστό υποσύνολο του (Y, d) και θέτουμε

$$h_n(x) = \text{dist}(f_n(x), B).$$

Η συνάρτηση $y \mapsto \text{dist}(y, B)$ είναι συνεχής, άρα κάθε h_n είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Επειδή $f_n(x) \rightarrow f(x)$ και η απόσταση από κλειστό σύνολο είναι συνεχής,

$$h_n(x) \rightarrow \text{dist}(f(x), B).$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x : \text{dist}(f(x), B) = 0\} \\ &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ x : h_n(x) < \frac{1}{m} \right\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

(Η τελευταία ισότητα εκφράζει απλώς ότι $h_n(x) \rightarrow 0$.) Άρα η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού υποσυνόλου του Y είναι μετρήσιμη. Εφόσον τα κλειστά σύνολα παράγουν τη $\mathcal{B}(Y)$, η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(Y))$ -μετρήσιμη.

8.5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, μ πεπερασμένο κανονικό μέτρο Borel στο X και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $g_n \rightarrow f$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού στο X .

Υπόδειξη. Από το θεώρημα του Luzin, σε συνδυασμό με το θεώρημα επέκτασης του Tietze, για κάθε $n \geq 1$ μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mu(Z_n) < \frac{1}{2^n}$, όπου $Z_n = \{x \in X :$

$f(x) \neq g_n(x)\}$. Θέτουμε $Z = \limsup Z_n$. Για κάθε $m \geq 1$ έχουμε

$$Z \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} Z_n,$$

και επομένως, από την υποπροσθετικότητα,

$$\mu(Z) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(Z_n) < \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-n} = 2^{1-m}.$$

Αφήνοντας $m \rightarrow \infty$ παίρνουμε $\mu(Z) = 0$. Παρατηρήστε ότι, αν $x \in X \setminus Z$ τότε υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $x \notin Z_n$ για κάθε $n \geq n_x$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq n_x$ ισχύει ότι $g_n(x) = f(x)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \setminus Z$ έχουμε $g_n(x) \rightarrow f(x)$, άρα $g_n \rightarrow f$ κατά σημείο μ -σχεδόν παντού στο X .

8.6. Έστω X ένας μετρικός χώρος και ένα υποσύνολο $A \subseteq X$. Πότε η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A είναι άνω ημισυνεχής και πότε κάτω ημισυνεχής;

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$[\chi_A > a] = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } a \geq 1 \\ A, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \\ X, & \text{αν } a < 0. \end{cases}$$

Άρα, η χ_A είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν το A είναι ανοικτό. Ομοίως, παρατηρούμε ότι

$$[\chi_A < a] = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } a \leq 0 \\ A^c, & \text{αν } 0 < a \leq 1 \\ X, & \text{αν } a > 1. \end{cases}$$

Άρα, η χ_A είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό, δηλαδή αν και μόνο αν το A είναι κλειστό.

Γενικά, από τους ορισμούς είναι φανερό ότι η $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν η $-f$ είναι άνω ημισυνεχής. Συνεπώς, αφού $\chi_A = 1 - \chi_{A^c}$, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η χ_A είναι άνω ημισυνεχής αν και μόνο αν η χ_{A^c} είναι κάτω ημισυνεχής (δηλαδή αν και μόνο αν το A^c είναι ανοικτό).

8.7. Έστω X ένας μετρικός χώρος και $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ δύο άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχείς συναρτήσεις. Να δείξετε ότι για κάθε $a, b > 0$, η συνάρτηση $af + bg$ είναι και αυτή άνω (αντίστ. κάτω) ημισυνεχής.

Υπόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση των άνω ημισυνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x : (f + g)(x) < \gamma\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{x : f(x) < q\} \cap \{x : g(x) < \gamma - q\}).$$

Πράγματι, αν $f(x) + g(x) < \gamma$, υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $f(x) < q < \gamma - g(x)$. Το δεξί μέλος είναι ανοικτό ως αριθμήσιμη ένωση τομών ανοικτών συνόλων, άρα η $f + g$ είναι άνω ημισυνεχής. Επίσης, για $b > 0$,

$$\{x : (bf)(x) < \gamma\} = \{x : f(x) < \gamma/b\},$$

οπότε και η bf είναι άνω ημισυνεχής. Η περίπτωση των κάτω ημισυνεχών προκύπτει εφαρμόζοντας το προηγούμενο στις $-f, -g$.

Δύσκολες ασκήσεις

8.8. (Θεώρημα Vitali-Καραθεοδωρή) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ένα μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) < \infty$, μια συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(A)$ και ένα $\varepsilon > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη συνάρτηση ϕ και κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη συνάρτηση ψ στο A ώστε $\phi \leq f \leq \psi$ και επιπλέον

$$\int_A (\psi - \phi) d\lambda < \varepsilon,$$

ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Υποθέστε πρώτα ότι $f \geq 0$ και αποδείξτε ότι η f μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(*) \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}$$

για κάποια μετρήσιμα σύνολα B_k και $b_k \geq 0$.

(ii) Χρησιμοποιώντας την (*) και την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue καταλήξτε στο ζητούμενο στην περίπτωση που $f \geq 0$.

(iii) Ολοκληρώστε την απόδειξη γράφοντας $f = f^+ - f^-$ και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 8.7.

Υπόδειξη. (i) Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \geq 0$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (s_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $s_n \rightarrow f$. Ορίζουμε $s_0 = 0$ και $u_k = s_k - s_{k-1}$ για κάθε $k \geq 1$. Αφού η (s_n) είναι αύξουσα, οι u_k είναι μη αρνητικές απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, δηλαδή

$$u_k = \sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} \chi_{A_{k,j}}$$

όπου $c_{k,j} \geq 0$ και $A_{k,j} \subseteq A$ μετρήσιμο. Επίσης, $s_n = \sum_{k=1}^n u_k$, άρα

$$f = \lim_n s_n = \lim_n \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} \chi_{A_{k,j}},$$

δηλαδή

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}$$

για κάποια (όχι αναγκαστικά ξένα) σύνολα $B_k \subseteq A$ μετρήσιμο και κάποιους $b_k \geq 0$.

(ii) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda(B_k) = \int_A f d\lambda < \infty.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \lambda(B_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για κάθε $k \geq 1$ με $b_k > 0$, από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue και το γεγονός ότι $B_k \subseteq A$ με

$\lambda(A) < \infty$, μπορούμε να βρούμε κλειστό F_k και ανοικτό G_k ώστε

$$F_k \subseteq B_k \subseteq G_k \quad \text{και} \quad \lambda(G_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}b_k}.$$

Αν $b_k = 0$, επιλέγουμε απλώς $F_k = \emptyset$ και $G_k = \mathbb{R}^k$ ο αντίστοιχος όρος δεν συνεισφέρει ούτε στις συναρτήσεις ούτε στα ολοκληρώματα. Έτσι, σε κάθε περίπτωση,

$$b_k \lambda(G_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Ορίζουμε

$$\phi = \sum_{k=1}^{k_0} b_k \chi_{F_k} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{G_k},$$

όπου οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις νοούνται περιορισμένες στο A . Τότε $\phi \leq f \leq \psi$, η ϕ είναι άνω φραγμένη και η ψ είναι κάτω φραγμένη. Από τις Ασκήσεις 8.6 και 8.7 βλέπουμε ότι η ϕ είναι άνω ημισυνεχής και για κάθε $n \geq 1$ η $\psi_n = \sum_{k=1}^n b_k \chi_{G_k}$ είναι κάτω ημισυνεχής. Επειδή $\psi_n \uparrow \psi$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A : \psi(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : \psi_n(x) > a\},$$

που είναι ανοικτό στο A . Άρα η ψ είναι κάτω ημισυνεχής. Τέλος, επειδή $F_k \subseteq B_k \subseteq A$ και $B_k \subseteq G_k$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_A (\psi - \phi) d\lambda &= \sum_{k=1}^{k_0} b_k \lambda(A \cap (G_k \setminus F_k)) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \lambda(A \cap G_k) \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} b_k \lambda(G_k \setminus F_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k (\lambda(B_k) + \lambda(G_k \setminus F_k)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda(G_k \setminus F_k) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} b_k \lambda(B_k) \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) Γράφουμε $f = f^+ - f^-$, όπου f^+, f^- μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Από τα προηγούμενα, μπορούμε να βρούμε άνω ημισυνεχείς και άνω φραγμένες ϕ_1, ϕ_2 και κάτω ημισυνεχείς και κάτω φραγμένες ψ_1, ψ_2 ώστε $\phi_1 \leq f^+ \leq \psi_1$, $\phi_2 \leq f^- \leq \psi_2$ και

$$\int_A (\psi_1 - \phi_1) d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \int_A (\psi_2 - \phi_2) d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $-\psi_2 \leq -f^- \leq -\phi_2$, η $-\psi_2$ είναι άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη, και η $-\phi_2$ είναι κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη. Αν ορίσουμε $\phi = \phi_1 - \psi_2$, $\psi = \psi_1 - \phi_2$, τότε η ϕ είναι άνω

ημισυνεχής και άνω φραγμένη, η ψ είναι κάτω ημισυνεχής και κάτω φραγμένη, και $\phi \leq f \leq \psi$. Τέλος,

$$\begin{aligned} \int_A (\psi - \phi) d\lambda &= \int_A ((\psi_1 - \phi_2) - (\phi_1 - \psi_2)) d\lambda \\ &= \int_A (\psi_1 - \phi_1) d\lambda + \int_A (\psi_2 - \phi_2) d\lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

8.9. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μια κάτω ημισυνεχής συνάρτηση, όχι ταυτοτικά ίση με ∞ . Για $n = 1, 2, \dots$ και $x \in X$ ορίζουμε

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + nd(x, p) : p \in X\}.$$

Αποδείξτε ότι:

- (i) Ισχύει η ανισότητα $|g_n(x) - g_n(y)| \leq nd(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$.
- (ii) Ισχύει $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f$.
- (iii) Η $\{g_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f για $n \rightarrow \infty$.

Συνάγετε ότι μια μη αρνητική συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων.

Υπόδειξη. (i) Παρατηρούμε αρχικά ότι $g_n(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, διότι η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με $+\infty$, δηλαδή υπάρχει $q \in X$ με $f(q) < +\infty$ και τότε

$$g_n(x) \leq f(q) + nd(q, x) < +\infty.$$

Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $p \in X$ έχουμε

$$g_n(x) \leq f(p) + nd(x, p) \leq f(p) + nd(y, p) + nd(x, y)$$

από τον ορισμό του $g_n(x)$ και την τριγωνική ανισότητα. Έπεται ότι

$$g_n(x) \leq \inf\{f(p) + nd(y, p)\} + nd(x, y) = g_n(y) + nd(x, y),$$

και λόγω συμμετρίας έπεται το ζητούμενο.

(ii) Για κάθε $x \in X$ και $p \in X$ έχουμε $f(p) + nd(x, p) \leq f(p) + (n+1)d(x, p)$. Παίρνοντας infimum ως προς p και στα δύο μέλη, βλέπουμε ότι $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$. Άρα, η (g_n) είναι αύξουσα. Επειδή $f \geq 0$ και $d \geq 0$, έχουμε επίσης $g_n \geq 0$. Τέλος,

$$g_n(x) = \inf\{f(p) + nd(x, p) : p \in X\} \leq f(x) + nd(x, x) = f(x),$$

οπότε $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f$.

(iii) Έστω $x \in X$. Η ακολουθία $(g_n(x))$ είναι αύξουσα, οπότε έχει όριο $q_x = \lim_n g_n(x) \in [0, +\infty]$ με $q_x \leq f(x)$. (Αν $f(x) = +\infty$, το q_x δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένο.) Υποθέτουμε ότι $q_x < f(x)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Τότε αναγκαστικά $q_x < +\infty$, οπότε μπορούμε να επιλέξουμε a_x τέτοιον ώστε $q_x < a_x < f(x)$ και αφού το $\{p \in X : f(p) > a_x\}$ είναι ανοικτό (διότι η f είναι κάτω ημισυνεχής) βρίσκουμε $\delta > 0$ τέτοιον ώστε αν $d(p, x) < \delta$ να ισχύει $f(p) > a_x$. Αν το n_0 είναι αρκετά μεγάλο ώστε $n_0\delta > a_x$, παρατηρούμε ότι:

- αν $d(p, x) < \delta$ τότε $f(p) + n_0 d(p, x) \geq f(p) > a_x$, και
- αν $d(p, x) \geq \delta$ τότε $f(p) + n_0 d(p, x) \geq f(p) + n_0 \delta > a_x$, διότι η f είναι μη αρνητική.

Έπεται ότι

$$g_{n_0}(x) = \inf\{f(p) + n_0 d(p, x) : p \in X\} \geq a_x > q_x = \lim_n g_n(x),$$

το οποίο είναι άτοπο αφού η $(g_n(x))$ είναι αύξουσα. Συνεπώς,

$$\lim_n g_n(x) = q_x = f(x).$$

Για το τελευταίο συμπέρασμα, έχουμε ήδη δείξει ότι κάθε μη αρνητική κάτω ημισυνεχής f είναι κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας των συνεχών συναρτήσεων (g_n) . Αντίστροφα, έστω ότι $g_n : X \rightarrow [0, \infty)$ είναι συνεχείς, $g_n \leq g_{n+1}$ και $g_n(x) \rightarrow f(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε

$$f(x) = \sup_{n \geq 1} g_n(x),$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : g_n(x) > a\}.$$

Το δεξί μέλος είναι ανοικτό ως ένωση ανοικτών συνόλων, αφού κάθε g_n είναι συνεχής. Άρα η f είναι κάτω ημισυνεχής. Έτσι αποδεικνύεται και η αντίστροφη κατεύθυνση του χαρακτηρισμού.

Κεφάλαιο 9

Μέτρα γινόμενα

Απλές ασκήσεις

9.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu_i)$, $i = 1, 2$ χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου. Να δείξετε ότι

$$\mu \times (\nu_1 + \nu_2) = (\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2).$$

Υπόδειξη. Το αριστερό και το δεξιό μέλος είναι μέτρα στον $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Πριν χρησιμοποιήσουμε τη μοναδικότητα, σημειώνουμε ότι είναι και τα δύο σ -πεπερασμένα. Πράγματι, επιλέγουμε $X = \bigcup_m X_m$ με $\mu(X_m) < \infty$ και $Y = \bigcup_n Y_n^{(i)}$ με $\nu_i(Y_n^{(i)}) < \infty$, $i = 1, 2$. Θέτοντας $Z_n = Y_n^{(1)} \cap Y_n^{(2)}$ (και, αν χρειάζεται, αντικαθιστώντας πρώτα τις δύο καλύψεις από αύξουσες καλύψεις), παίρνουμε $Y = \bigcup_n Z_n$ και $(\nu_1 + \nu_2)(Z_n) < \infty$. Επομένως τα ορθογώνια $X_m \times Z_n$ δίνουν κοινή αριθμήσιμη κάλυψη από σύνολα πεπερασμένου μέτρου για τα δύο μέτρα.

Άρα, από το θεώρημα μοναδικότητας για σ -πεπερασμένα μέτρα, αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$(\mu \times (\nu_1 + \nu_2))(A \times B) = ((\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2))(A \times B).$$

Όμως, από τον ορισμό του μέτρου γινομένου και του αθροίσματος μέτρων έχουμε

$$\begin{aligned} (\mu \times (\nu_1 + \nu_2))(A \times B) &= \mu(A)(\nu_1 + \nu_2)(B) \\ &= \mu(A)(\nu_1(B) + \nu_2(B)) \\ &= \mu(A)\nu_1(B) + \mu(A)\nu_2(B) \\ &= (\mu \times \nu_1)(A \times B) + (\mu \times \nu_2)(A \times B) \\ &= ((\mu \times \nu_1) + (\mu \times \nu_2))(A \times B). \end{aligned}$$

9.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι τα σύνολα

(i) $\text{Gr}_-(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x)\}$

(ii) $\text{Gr}_+(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y > f(x)\}$ και

(iii) $\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$

ανήκουν στη σ -άλγεβρα $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Gr}_-(f) &= \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y < f(x)\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y < q < f(x)\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left((X \times (-\infty, q)) \cap (\{x \in X : f(x) > q\} \times \mathbb{R}) \right). \end{aligned}$$

Αφού τα $X \times (-\infty, q)$ και $\{x \in X : f(x) > q\} \times \mathbb{R}$ ανήκουν στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, έπεται ότι $\text{Gr}_-(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\text{Gr}_+(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι

$$\text{Gr}(f) = (X \times \mathbb{R}) \setminus (\text{Gr}_-(f) \cup \text{Gr}_+(f)) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

9.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου και $f : X \rightarrow [0, \infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$R(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\} \quad \text{και} \quad S(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}.$$

Να δείξετε ότι $R(f), S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και επιπλέον

$$\int_X f \, d\mu = (\mu \times \lambda)(R(f)) = (\mu \times \lambda)(S(f)) = \int_{[0, \infty)} \mu([f \geq y]) \, d\lambda(y).$$

Συνάγεται ότι αν για μια μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow [0, \infty)$ ισχύει $\mu([f \geq y]) \leq \mu([g \geq y])$ για κάθε $y \geq 0$, τότε $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$.

Υπόδειξη. Με το συμβολισμό της Άσκησης 9.2, και χρησιμοποιώντας όσα αποδείχθηκαν εκεί, έχουμε

$$S(f) = \text{Gr}_-(f) \cap (X \times [0, \infty)) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και

$$R(f) = S(f) \cup \text{Gr}(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Για το δεύτερο ερώτημα, γράφουμε

$$(\mu \times \lambda)(R(f)) = \int_X \lambda(R(f)_x) \, d\mu(x) = \int_X \lambda([0, f(x)]) \, d\mu(x) = \int_X f(x) \, d\mu(x)$$

και

$$(\mu \times \lambda)(R(f)) = \int_{[0, \infty)} \mu(R(f)^y) \, d\lambda(y) = \int_{[0, \infty)} \mu([f \geq y]) \, d\lambda(y).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $\lambda(S(f)_x) = \lambda([0, f(x))) = f(x) = \lambda(R(f)_x)$ για κάθε $x \in X$, άρα

$$(\mu \times \lambda)(S(f)) = \int_X \lambda(S(f)_x) \, d\mu(x) = \int_X \lambda(R(f)_x) \, d\mu(x) = (\mu \times \lambda)(R(f)).$$

Αν $g : X \rightarrow [0, \infty)$ είναι επίσης μετρήσιμη συνάρτηση και $\mu([f \geq y]) \leq \mu([g \geq y])$ για κάθε $y \geq 0$, τότε από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\int_X f \, d\mu = \int_{[0, \infty)} \mu([f \geq y]) \, d\lambda(y) \leq \int_{[0, \infty)} \mu([g \geq y]) \, d\lambda(y) = \int_X g \, d\mu.$$

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

9.4. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο Borel $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ ώστε A_x αριθμήσιμο για κάθε $x \in [0, 1]$ και $[0, 1] \setminus A^y$ αριθμήσιμο για κάθε $y \in [0, 1]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο σύνολο A . Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις θα έχουμε

$$\int_0^1 \lambda(A_x) d\lambda(x) = \int_0^1 \lambda(A^y) d\lambda(y) = \lambda_2(A).$$

Όμως, αφού το A_x είναι αριθμήσιμο για κάθε $x \in [0, 1]$ έχουμε $\lambda(A_x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, συνεπώς

$$\int_0^1 \lambda(A_x) d\lambda(x) = 0,$$

ενώ, αφού το $[0, 1] \setminus A^y$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $y \in [0, 1]$ έχουμε $\lambda(A^y) = 1$ για κάθε $y \in [0, 1]$, συνεπώς

$$\int_0^1 \lambda(A^y) d\lambda(y) = 1$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

9.5. Δώστε παράδειγμα συνόλου $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ώστε $C \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ και να ισχύουν τα εξής:

(α') $C_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C^y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και

(β') Οι συναρτήσεις $x \mapsto \lambda(C_x)$ και $y \mapsto \lambda(C^y)$ είναι Borel μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(C^y) d\lambda(y).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο B του $[0, 1]$ το οποίο δεν είναι Borel, και ορίζουμε

$$C = \{(x, x) : x \in B\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Το C δεν είναι Borel σύνολο: αν ήταν, τότε για τη συνεχή συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $h(x) = (x, x)$ θα είχαμε $B = h^{-1}(C)$, άρα το B θα ήταν κι αυτό Borel σύνολο.

Παρατηρούμε ότι $C_x = \{x\}$ αν $x \in B$ και $C_x = \emptyset$ αν $x \notin B$, άρα $C_x \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ομοίως, παρατηρούμε ότι $C^y = \{y\}$ αν $y \in B$ και $C^y = \emptyset$ αν $y \notin B$, άρα $C^y \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Αφού, προφανώς, $\lambda(C_x) = \lambda(C^y) = 0$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, οι συναρτήσεις $x \mapsto \lambda(C_x)$ και $y \mapsto \lambda(C^y)$ είναι Borel μετρήσιμες και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(C^y) d\lambda(y).$$

9.6. Δώστε παράδειγμα Borel μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$ και να ισχύει $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και $f^y \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq x + 1\}$ και $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 1 \leq y \leq x\}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = \chi_A(x, y) - \chi_B(x, y).$$

Τα A, B είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$, άρα η f είναι Borel μετρήσιμη.

Τα σύνολα A και B τέμνονται μόνο στη διαγώνιο $D = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$, η οποία έχει $(\lambda \times \lambda)$ -μέτρο μηδέν. Επομένως

$$|f| = \chi_{A \Delta B} = \chi_{A \cup B} \quad (\lambda \times \lambda)\text{-σχεδόν παντού.}$$

Ειδικότερα, από $A \setminus D \subseteq A \Delta B$ και $(\lambda \times \lambda)(D) = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |f| d(\lambda \times \lambda) &\geq (\lambda \times \lambda)(A \setminus D) = (\lambda \times \lambda)(A) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_x) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda([x, x+1]) d\lambda(x) = +\infty. \end{aligned}$$

Άρα $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$.

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f_x = (\chi_A)_x - (\chi_B)_x = \chi_{A_x} - \chi_{B_x} = \chi_{[x, x+1]} - \chi_{[x-1, x]}.$$

Έπεται ότι $f_x \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f_x d\lambda = \lambda([x, x+1]) - \lambda([x-1, x]) = 1 - 1 = 0.$$

Ομοίως, για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^y = (\chi_A)^y - (\chi_B)^y = \chi_{A^y} - \chi_{B^y} = \chi_{[y-1, y]} - \chi_{[y, y+1]}.$$

Άρα, $f^y \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f^y d\lambda = \lambda([y-1, y]) - \lambda([y, y+1]) = 1 - 1 = 0.$$

Έπεται ότι τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα υπάρχουν ως πεπερασμένα ολοκληρώματα και είναι ίσα. Πράγματι, οι εσωτερικές συναρτήσεις ολοκληρώνονται σε 0 για κάθε τιμή της εξωτερικής μεταβλητής, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda(y) = 0$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda(x) = 0.$$

Προσέξτε ότι εδώ δεν εφαρμόζουμε το θεώρημα Fubini στη f : αυτό δεν επιτρέπεται, αφού μόλις αποδείξαμε ότι $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda \times \lambda)$. Η ισότητα των δύο διαδοχικών ολοκληρωμάτων προκύπτει απευθείας από τον ρητό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων των τομών.

9.7. Έστω $(a_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ μια διπλή ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n,k} |a_{n,k}|$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\mu = \nu =$ το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{N}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(n, k) = a_{n,k}$. Η υπόθεση ότι η σειρά $\sum_{n,k} |a_{n,k}|$ συγκλίνει σημαίνει ότι

$$\int_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} |f| d(\mu \times \nu) < \infty.$$

Από το θεώρημα Fubini έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n, k) d\mu(n) \right) d\nu(k) = \int_{\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{N}} f(n, k) d\nu(k) \right) d\mu(n),$$

δηλαδή, με την ίδια σειρά δεικτών όπως στην εκφώνηση,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

Δύσκολες ασκήσεις

9.8. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η συνάρτηση $g(x, y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1) \times (0, 1)$, να δείξετε ότι $f \in \mathcal{L}^1(0, 1)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι οι $g_1(x, y) = f(x)$ και $g_2(x, y) = f(y)$ είναι μετρήσιμες. Πράγματι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε $g_1^{-1}((-\infty, b]) = \{(x, y) : f(x) \leq b\} = f^{-1}((-\infty, b]) \times (0, 1)$ και όμοια για την g_2 . Άρα, η $g = g_1 - g_2$ είναι μετρήσιμη.

Για κάθε $x, y \in (0, 1)$ έχουμε $|f(x)| \leq |g(x, y)| + |f(y)|$, άρα, ολοκληρώνοντας ως προς x , για κάθε $y \in (0, 1)$ ισχύει ότι

$$(*) \quad \int_0^1 |f(x)| d\lambda(x) \leq \int_0^1 (|g(x, y)| + |f(y)|) d\lambda(x) = |f(y)| + \int_0^1 |g(x, y)| d\lambda(x).$$

Όμως,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |g(x, y)| d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{(0,1) \times (0,1)} |g(x, y)| d\lambda_2(x, y) < +\infty$$

διότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Συνεπώς, σχεδόν για κάθε y έχουμε $\int_0^1 |g(x, y)| d\lambda(x) < +\infty$. Επιλέγοντας ένα τέτοιο y_0 , από την (*) έχουμε

$$\int_0^1 |f(x)| d\lambda(x) \leq |f(y_0)| + \int_0^1 |g(x, y_0)| d\lambda(x) < +\infty,$$

δηλαδή $f \in \mathcal{L}^1(0, 1)$.

Ένας άλλος τρόπος είναι ο εξής. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0, 1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0, 1) : |f(x)| \leq m\}$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0, 1) : |f(x)| > m\} = (0, 1) \setminus A$. Τότε, αν $(x, y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)| \geq |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{(0,1) \times (0,1)} |f(x) - f(y)| d\lambda(x, y) &\geq \int_{B \times A} |f(x) - f(y)| d\lambda(x, y) \geq \int_{B \times A} (|f(x)| - m) d\lambda(x, y) \\ &= \int_B \int_A (|f(x)| - m) d\lambda(y) d\lambda(x) = \lambda(A) \int_B (|f(x)| - m) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)| d\lambda(x) \leq \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $|f| \leq m$ στο A , συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} |f(x)| d\lambda(x) &= \int_A |f(x)| d\lambda(x) + \int_B |f(x)| d\lambda(x) \leq m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) \\ &= m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} = m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

9.9. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Να δείξετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g \, d\lambda = \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq y\}} f(x) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Συνάγετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) \geq y\}) \, d\lambda(y).$$

Υπόδειξη. Στο γινόμενο δύο συναρτήσεων με τιμές στο $[0, +\infty]$ χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = 0$. Ξεκινώντας από το δεξιό μέλος και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq y\}} f(x) \, d\lambda_n(x) \right) d\lambda(y) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : y \leq g(x)\}}(x, y) f(x) \, d\lambda_n(x) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \chi_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : g(x) \geq y\}}(x, y) f(x) \, d\lambda(y) d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_0^\infty \chi_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty) : g(x) \geq y\}}(x, y) \, d\lambda(y) d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_0^\infty \chi_{[0, g(x)]}(y) \, d\lambda(y) d\lambda_n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) \, d\lambda_n(x). \end{aligned}$$

Στο τελευταίο βήμα, αν $g(x) < +\infty$ το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι $g(x)$, ενώ αν $g(x) = +\infty$ είναι $+\infty$. Συνεπώς η τελευταία ισότητα ισχύει και όταν $f(x) = 0$ και $g(x) = +\infty$, χάρη στη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = 0$. Παίρνοντας $f \equiv 1$ σε αυτή τη σχέση, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \, d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x : g(x) \geq y\}) \, d\lambda(y).$$

9.10. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C_1 > 0$ ώστε, για κάθε $t > 0$

$$\lambda(\{x : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{C_1}{t^2}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $C_2 > 0$ ώστε, για κάθε μετρήσιμο σύνολο E με $0 < \lambda(E) < \infty$ να ισχύει

$$\int_E |f(x)| \, dx \leq C_2 \sqrt{\lambda(E)}.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)| \, dx &= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) \, dt \\ &= \int_0^\alpha \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) \, dt + \int_\alpha^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) \, dt \\ &\leq \int_0^\alpha \lambda(E) \, dt + \int_\alpha^\infty \frac{C_1}{t^2} \, dt = \alpha \lambda(E) + \frac{C_1}{\alpha}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω εκτίμηση ισχύει για κάθε $\alpha > 0$. Επιλέγοντας

$$\alpha = \sqrt{\frac{C_1}{\lambda(E)}}$$

(που είναι θετικό, αφού $C_1 > 0$ και $0 < \lambda(E) < \infty$), παίρνουμε την οξύτερη εκτίμηση

$$\int_E |f(x)| dx \leq 2\sqrt{C_1} \sqrt{\lambda(E)}.$$

Άρα μπορούμε να πάρουμε $C_2 = 2\sqrt{C_1}$.

9.11. Έστω μια μετρήσιμη συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(0, 1)$. Για $x \in (0, 1)$ θέτουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt.$$

Δείξτε ότι $g \in \mathcal{L}^1(0, 1)$ και

$$\int_0^1 g(x) d\lambda(x) = \int_0^1 f(x) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(x)| d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t} d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t} d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 |f(t)| d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in \mathcal{L}^1((0, 1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t} d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 f(t) d\lambda(t) = \int_0^1 f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

9.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ τυχόντες χώροι μέτρου. Αποδείξτε ότι στο χώρο γινόμενο $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$

ορίζεται ένα μέτρο γινόμενο ρ ακολουθώντας τα εξής βήματα:

(i) Αποδείξτε ότι αν ένα μετρήσιμο ορθογώνιο $A \times B$ γράφεται στη μορφή

$$A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n),$$

όπου $\{A_n \times B_n\}$ ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων, τότε

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n).$$

(ii) Αν $\{A_n \times B_n\}$ και $\{E_n \times F_n\}$ δύο ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n),$$

τότε είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)\nu(F_n).$$

(iii) Θεωρήστε $\mathcal{R}$ την οικογένεια όλων των πεπερασμένων ξένων ενώσεων μετρήσιμων ορθογωνίων. Για ένα $C = \bigcup_{k=1}^n (A_k \times B_k) \in \mathcal{R}$ θέτουμε

$$\rho_0(C) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)\nu(B_k).$$

Αποδείξτε ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα και το ρ_0 ένα προμέτρο στην $\mathcal{R}$.

(iv) Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή συνάγετε το ζητούμενο.

Υπόδειξη. (i) Σε όλη την άσκηση, για γινόμενα αριθμών του $[0, +\infty]$ χρησιμοποιούμε τη συνήθη σύμβαση $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$. Αν $E \in \mathcal{A}$ και $F \in \mathcal{B}$, τότε για κάθε $y \in Y$

$$\int_X \chi_E(x) \chi_F(y) d\mu(x) = \begin{cases} \mu(E), & y \in F, \\ 0, & y \notin F. \end{cases}$$

Επομένως

$$\int_Y \int_X \chi_E(x) \chi_F(y) d\mu(x) d\nu(y) = \mu(E)\nu(F),$$

με την παραπάνω σύμβαση. Η διατύπωση αυτή αποφεύγει την ακαθόριστη γραφή $+\infty \cdot 0$ όταν $\mu(E) = +\infty$ και $y \notin F$. Από την $A \times B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)$ και το γεγονός ότι τα $A_n \times B_n$ είναι ξένα, έχουμε

$$\chi_A(x) \chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y),$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \nu(B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_Y \int_X \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\mu(x) d\nu(y) = \int_Y \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x) \chi_{B_n}(y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \int_Y \int_X \chi_A(x) \chi_B(y) d\mu(x) d\nu(y) = \mu(A) \nu(B).\end{aligned}$$

(ii) Έστω $\{A_n \times B_n\}$ και $\{E_n \times F_n\}$ δύο ακολουθίες ξένων ανά δύο μετρήσιμων ορθογωνίων τέτοιες ώστε

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \times F_n).$$

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$A_n \times B_n = (A_n \times B_n) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E_m \times F_m) \right) = \bigcup_{m=1}^{\infty} ((A_n \cap E_m) \times (B_n \cap F_m))$$

και τα ορθογώνια $(A_n \cap E_m) \times (B_n \cap F_m)$ είναι ξένα ανά δύο, οπότε το (i) μας δίνει

$$\mu(A_n) \nu(B_n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_m) \nu(B_n \cap F_m).$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_m) \nu(B_n \cap F_m).$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(E_m) \nu(F_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E_m) \nu(B_n \cap F_m).$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \nu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \nu(F_n).$$

(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα. Έστω $C = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i)$ και $D = \bigcup_{j=1}^m (E_j \times F_j)$ δύο σύνολα στην $\mathcal{R}$, όπου τα $A_i \times B_i$ είναι ξένα και τα $E_j \times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια. Γράφουμε

$$C \cap D = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m ((A_i \cap E_j) \times (B_i \cap F_j)),$$

και παρατηρούμε ότι τα $(A_i \cap E_j) \times (B_i \cap F_j)$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, συνεπώς $C \cap D \in \mathcal{R}$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $A \times B$ είναι μετρήσιμο ορθογώνιο τότε

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) = ((X \setminus A) \times B) \cup (A \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times (Y \setminus B)) \in \mathcal{R},$$

άρα

$$(X \times Y) \setminus C = \bigcap_{i=1}^n ((X \times Y) \setminus (A_i \times B_i)) \in \mathcal{R}$$

ως πεπερασμένη τομή συνόλων από την $\mathcal{R}$. Έπεται ότι η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα.

Αν $C \in \mathcal{R}$ και $C = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times B_i) = \bigcup_{j=1}^m (E_j \times F_j)$, όπου τα $A_i \times B_i$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια και τα $E_j \times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, τότε από το (ii) έχουμε ότι $\sum_{i=1}^n \mu(A_i)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^m \mu(E_j)\nu(F_j)$, άρα η ρ_0 είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι η ρ_0 είναι αριθμήσιμα προσθετική, δηλαδή ότι αν (C_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{R}$ και $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{R}$ τότε

$$\rho_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(C_n).$$

Γράφουμε

$$C_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} (A_{n,i} \times B_{n,i}),$$

όπου τα $A_{n,i} \times B_{n,i}$, $i = 1, \dots, k_n$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια, και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{j=1}^m (E_j \times F_j)$$

όπου τα $E_j \times F_j$ είναι ξένα μετρήσιμα ορθογώνια. Τότε,

$$\bigcup_{j=1}^m (E_j \times F_j) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} (A_{n,i} \times B_{n,i})$$

και τα ορθογώνια στο δεξιό μέλος είναι ξένα ανά δύο, συνεπώς από το (ii) έχουμε

$$\sum_{j=1}^m \mu(E_j)\nu(F_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \mu(A_{n,i})\nu(B_{n,i}),$$

δηλαδή

$$\rho_0\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(C_n).$$

Έχουμε επίσης $\rho_0(\emptyset) = 0$, άρα η ρ_0 είναι προμέτρο.

(iv) Από το θεώρημα επέκτασης του Καραθεοδωρή, υπάρχει μέτρο $\rho : \sigma(\mathcal{R}) \rightarrow [0, \infty]$ που επεκτείνει το προμέτρο ρ_0 . Αφού $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και η $\mathcal{R}$ περιέχει τα μετρήσιμα ορθογώνια, Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, συνεπώς η ρ είναι μέτρο στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ που από την κατασκευή ικανοποιεί την

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

για κάθε μετρήσιμο ορθογώνιο.

9.13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, όπου

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Έστω $\pi : X \times Y \rightarrow X$ με $\pi(x, y) = x$ η προβολή του X παράλληλα στη διαγώνιο $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$

του $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $\rho, \tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ από τις σχέσεις

$$\rho(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\tau(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \cup D \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B), \pi(D) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι:

- (i) Τα ρ και τ είναι μέτρα στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.
- (ii) $\rho(A \times B) = \tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.
- (iii) Για τη διαγώνιο Δ ισχύει $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\rho(\Delta) = \infty$, ενώ $\tau(\Delta) = 0$.

Έτσι, η μοναδικότητα του μέτρου γινομένου αποτυγχάνει δίχως την υπόθεση του σ -πεπερασμένου.

Υπόδειξη. (i) Η αριθμήσιμη προσθετικότητα ελέγχεται εύκολα από τον ορισμό των ρ και τ . Ουσιαστικά, αρκεί να εξετάσετε την περίπτωση μιας ακολουθίας (C_n) ξένων συνόλων στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με $\tau(C_n) = 0$ για κάθε n ή $\rho(C_n) = 0$ για κάθε n , και να δείξετε ότι $\tau(\bigcup_n C_n) = 0$ ή $\rho(\bigcup_n C_n) = 0$ αντίστοιχα.

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι αν A, B είναι μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και το $\pi(A \times B)$ είναι αριθμήσιμο, τότε τα A και B είναι αριθμήσιμα. Πράγματι, αν σταθεροποιήσουμε $y \in B$ τότε η $f : A \rightarrow \pi(A \times B)$ με $f(x) = x - y$ είναι 1-1 και, όμοια, αν σταθεροποιήσουμε $x \in A$ τότε η $g : B \rightarrow \pi(A \times B)$ με $g(y) = x - y$ είναι 1-1.

Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Για την $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(A)\nu(B) = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα A και B είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$. Τότε, $A \times B = K \cup L \cup M$, όπου τα $\pi_1(K)$, $\pi_2(L)$ και $\pi(M)$ είναι αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι

$$(A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)) \subseteq M.$$

Αφού το $\pi(M)$ είναι αριθμήσιμο, έχουμε ότι το $\pi((A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)))$ είναι αριθμήσιμο. Αν ένα από τα $A \setminus \pi_1(K)$ και $B \setminus \pi_2(L)$ είναι κενό, τότε αντίστοιχα το A ή το B είναι αριθμήσιμο, επειδή τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα. Αν και τα δύο είναι μη κενά, η προηγούμενη παρατήρηση δείχνει ότι και τα δύο είναι αριθμήσιμα, οπότε πάλι τα A και B είναι αριθμήσιμα. Σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο, και συνεπώς $\mu(A)\nu(B) = 0$. Αντίστροφα, αν τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο τότε κάποιο από τα $\pi_1(A \times B) = A$ και $\pi_2(A \times B) = B$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφοντας $A \times B = (A \times B) \cup \emptyset \cup \emptyset$ ή $A \times B = \emptyset \cup (A \times B) \cup \emptyset$ αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι $\tau(A \times B) = 0$.

Για την $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(A)\nu(B) = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν τουλάχιστον ένα από τα A και B είναι αριθμήσιμο. Υποθέτουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$. Τότε, $A \times B = K \cup L$, όπου τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι

$$(A \setminus \pi_1(K)) \times (B \setminus \pi_2(L)) = \emptyset.$$

Άρα, τουλάχιστον ένα από τα $A \setminus \pi_1(K)$ και $B \setminus \pi_2(L)$ είναι το κενό σύνολο, το οποίο σημαίνει ότι είτε $A = \pi_1(K)$ είτε $B = \pi_2(L)$, και αφού τα $\pi_1(K)$ και $\pi_2(L)$ είναι αριθμήσιμα συμπεραίνουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο. Αντίστροφα, αν τουλάχιστον ένα από τα A, B είναι αριθμήσιμο τότε

κάποιο από τα $\pi_1(A \times B) = A$ και $\pi_2(A \times B) = B$ είναι αριθμήσιμο, οπότε γράφοντας $A \times B = (A \times B) \cup \emptyset$ ή $A \times B = \emptyset \cup (A \times B)$ αντίστοιχα, συμπεραίνουμε ότι $\rho(A \times B) = 0$.

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $\Delta_n = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \times \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$. Τότε, $\Delta_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Έστω ότι $\rho(\Delta) = 0$. Τότε, $\Delta = A \cup B$ για κάποια σύνολα A, B με τα $\pi_1(A)$ και $\pi_2(B)$ αριθμήσιμα. Παρατηρούμε ότι οι π_1 και π_2 είναι 1-1 στο Δ . Συνεπώς, τα A και B είναι αριθμήσιμα, άρα το $\Delta = A \cup B$ είναι αριθμήσιμο, το οποίο είναι άτοπο. Αυτό δείχνει ότι $\rho(\Delta) = \infty$.

Από την άλλη πλευρά, $\pi(\Delta) = \{x - y : (x, y) \in \Delta\} = \{x - x : x \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Γράφοντας $\Delta = \emptyset \cup \emptyset \cup \Delta$ και παρατηρώντας ότι τα $\pi_1(\emptyset) = \emptyset$, $\pi_2(\emptyset) = \emptyset$ και $\pi(\Delta) = \{0\}$ είναι αριθμήσιμα, συμπεραίνουμε ότι $\tau(\Delta) = 0$.

9.14. (α) Θεωρούμε το σύνολο $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x < y + 2\pi\}$. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x, y) = \sin(x) \cdot \chi_A(x, y)$. Αποδείξτε ότι το επαναληπτικό ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx$$

δεν υπάρχει ως πεπερασμένο ολοκλήρωμα Lebesgue, ενώ

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

Εξηγήστε γιατί αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini.

(β) Έστω B Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(B) = 1$. Υπολογίστε το

$$\lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + x^2)(y - e^x) \in B\}).$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \chi_A(x, y) dy = \sin(x) \int_{x-2\pi}^x dy = 2\pi \sin(x).$$

Η $u(x) = \sin(x)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα δεν υπάρχει το

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x) \chi_A(x, y) dx = \int_y^{y+2\pi} \sin(x) dx = 0,$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy = 0.$$

Άρα το δεύτερο επαναληπτικό ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι ίσο με 0, ενώ το πρώτο δεν υπάρχει ως πεπερασμένο ολοκλήρωμα Lebesgue. Αυτό δεν έρχεται σε αντίθεση με το θεώρημα Fubini, διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν ήταν, το θεώρημα Fubini θα εξασφάλιζε την ύπαρξη και των δύο επαναληπτικών ολοκληρωμάτων και την ισότητά τους.

(β) Θέτουμε $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + x^2)(y - e^x) \in B\}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $(x, y) \in C$ αν και μόνο αν $y - e^x \in \frac{1}{1+x^2}B$ δηλαδή αν και μόνο αν $y \in e^x + \frac{1}{1+x^2}B$. Άρα,

$$C_x = e^x + \frac{1}{1+x^2}B, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις,

$$\begin{aligned} \lambda_2(C) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(C_x) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(e^x + \frac{1}{1+x^2}B\right) d\lambda(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\frac{1}{1+x^2}B\right) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \lambda(B) d\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} d\lambda(x) = \pi. \end{aligned}$$

9.15. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και $t > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u) d\lambda(u)$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t| d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} f(u) \chi_{[-t,t]}(u-x) d\lambda(u)$$

και θεωρούμε επίσης

$$g_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \chi_{[-t,t]}(u-x) d\lambda(u).$$

Οι συναρτήσεις $(x, u) \mapsto f(u) \chi_{[-t,t]}(u-x)$ και $(x, u) \mapsto |f(u)| \chi_{[-t,t]}(u-x)$ είναι μετρήσιμες. Από το θεώρημα Tonelli, η g_t είναι μετρήσιμη και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| d\lambda(u) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-t, x+t]}(u) |f(u)| d\lambda(u) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-t, x+t]}(u) d\lambda(x) \right) d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[u-t, u+t]}(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(u) \\ &= \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \cdot (2t) d\lambda(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)| d\lambda(u). \end{aligned}$$

Επειδή $g_t \in L^1(\mathbb{R})$, από το Fubini η φ_t είναι μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$|\varphi_t(x)| = \left| \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u) d\lambda(u) \right| \leq \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f(u)| d\lambda(u) = g_t(x),$$

οπότε $\varphi_t \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t| d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g_t d\lambda = \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda.$$

9.16. Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x) d\mu(x).$$

Υπόδειξη. (α) Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι αν $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε

$$A_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Έστω $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : A_* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό τότε ελέγχουμε εύκολα ότι το G_* είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $x + y \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x + y - \varepsilon, x + y + \varepsilon) \subseteq G$. Τότε, αν $(u, v) \in B((x, y), \varepsilon/2)$ έχουμε $|(u+v) - (x+y)| \leq |u-x| + |v-y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, άρα $(u, v) \in (x+y-\varepsilon, x+y+\varepsilon) \subseteq G$. Δηλαδή, κάθε $(x, y) \in G_*$ είναι εσωτερικό σημείο του G_* . Αυτό δείχνει ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα, παρατηρώντας ότι:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_* \quad \text{και} \quad (\mathbb{R} \setminus A)_* = \mathbb{R}^2 \setminus A_*$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία (A_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$, και έτσι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Το $\mu \times \nu$ ορίζεται στην σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, άρα ορίζεται καλά η ποσότητα

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Το γεγονός ότι η ρ είναι μέτρο έπεται από τις $(\emptyset)_* = \emptyset$ και $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)_*$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το $\mu \times \nu$ είναι μέτρο. Επιπλέον,

$$\rho(\mathbb{R}) = (\mu \times \nu)(\mathbb{R}^2) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R}) = 1,$$

οπότε η ρ είναι μέτρο πιθανότητας.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$(A_*)_x = \{y \in \mathbb{R} : x + y \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : y \in A - x\} = A - x.$$

Από το θεώρημα Fubini για δείκτριες συναρτήσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(A_*) = \int_{\mathbb{R}} \nu((A_*)_x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x) d\mu(x).$$

9.17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ -πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση και $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $h : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = f(x)g(y)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη και ότι αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ τότε $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ και

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_Y g d\nu \right).$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $F : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(x, y) = f(x)$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $b \in \mathbb{R}$,

$$\{(x, y) \in X \times Y : F(x, y) \leq b\} = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \leq b\} = \{x \in X : f(x) \leq b\} \times Y \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

διότι $\{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}$ αφού η f είναι $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη. Άρα, η F είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η $G : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $G(x, y) = g(y)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη. Αφού

$$h(x, y) = f(x)g(y) = F(x, y)G(x, y),$$

συμπεραίνουμε ότι η $h = F \cdot G$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη.

Έστω ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $g \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} |h| d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y |f(x)| \cdot |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X |f(x)| \left(\int_Y |g(y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \left(\int_X |f| d\mu \right) \left(\int_Y |g| d\nu \right) < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ και από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x) \cdot g(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_X f(x) \left(\int_Y g(y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_Y g d\nu \right). \end{aligned}$$

9.18. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ (με $f(0, 0) = 0$) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\int_{[-1, 1]^2} |f(x, y)| d\lambda_2(x, y) = \int_{-1}^1 |y| \left(\int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^2 + y^2} d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

Για $y \neq 0$ βλέπουμε ότι

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|}{x^2 + y^2} d\lambda(x) = 2 \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} d\lambda(x) = \ln(x^2 + y^2) \Big|_0^1 = \ln \left(\frac{1 + y^2}{y^2} \right).$$

Άρα, με την αλλαγή μεταβλητής $u = y^2$,

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1]^2} |f| d\lambda_2 &= 2 \int_0^1 y \ln \left(\frac{1+y^2}{y^2} \right) dy \\ &= \int_0^1 \ln \left(\frac{1+u}{u} \right) du \\ &= \int_0^1 \ln(1+u) du - \int_0^1 \ln u du = 2 \ln 2 < \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1] \times [-1,1]$, άρα και η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1] \times [-1,1]$.

9.19. Έστω μ και ν δύο σ -πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E+x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

Υπόδειξη. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση f έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x).$$

(Επαληθεύουμε αυτή την ισότητα αρχικά για τη δείκτρια συνάρτηση $f = \chi_E$ οποιουδήποτε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Σε αυτή την περίπτωση η ισότητα παίρνει τη μορφή $\mu(E) = \mu(E-y)$, που ισχύει από την υπόθεση. Στη συνέχεια ελέγχουμε την ισότητα για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση s και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f .)

Έστω $E, F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Θεωρώντας την $f_y(x) = \chi_E(x-y)\chi_F(x)$ και χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ισχυρισμό παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-y)\chi_F(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\chi_F(x+y) d\mu(x).$$

Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-y)\chi_F(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x)\chi_F(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Αφού τα μ και ν είναι σ -πεπερασμένα, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Tonelli και έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-y)\chi_F(x) d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(x) \nu(x-E) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(x) \nu(-E) d\mu(x) = \nu(-E) \mu(F) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) \chi_F(x+y) d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(x+y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) \nu(F-x) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x) \nu(F) d\mu(x) = \nu(F) \mu(E). \end{aligned}$$

Για να αποφύγουμε οποιαδήποτε αμφισημία από γινόμενα εκτεταμένων πραγματικών του τύπου $0 \cdot \infty$, δεν χρειάζεται να γράψουμε την παραπάνω ταυτότητα για αυθαίρετα E, F . Θέτουμε αμέσως $F = B$. Επειδή

$$0 < \mu(B) = \nu(B) < \infty,$$

οι δύο προηγούμενοι υπολογισμοί δίνουν, για κάθε $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\nu(-E) \mu(B) = \nu(B) \mu(E),$$

και συνεπώς

$$\nu(-E) = \mu(E).$$

Ειδικότερα, για $E = -B$ παίρνουμε $\nu(B) = \mu(-B)$, άρα $\mu(-B) = \mu(B)$. Τώρα επαναλαμβάνουμε τους δύο υπολογισμούς με $E = -B$ και αυθαίρετο $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Επειδή $\nu(-E) = \nu(B) = \mu(B)$ και $\mu(E) = \mu(-B) = \mu(B)$, προκύπτει

$$\mu(B) \mu(F) = \mu(B) \nu(F).$$

Διαιρώντας με το πεπερασμένο θετικό $\mu(B)$ παίρνουμε $\mu(F) = \nu(F)$ για κάθε $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή $\mu \equiv \nu$.

Κεφάλαιο 10

Το Θεώρημα Radon-Nikodym

Απλές ασκήσεις

10.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ένας χώρος μέτρου και μ το μέτρο απαρίθμησης στο X . Αποδείξτε ότι $\nu \ll \mu$.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αφού το μ είναι το μέτρο απαρίθμησης στο X , αναγκαστικά έχουμε $A = \emptyset$, και αφού το ν είναι μέτρο έχουμε $\nu(A) = 0$. Συνεπώς, $\nu \ll \mu$.

10.2. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ, ν_1, ν_2 σ -πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$$

και ότι για $a \geq 0$

$$\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a \frac{d\nu_1}{d\mu},$$

μ -σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$. Αφού $\nu_1 \ll \mu$ και $\nu_2 \ll \mu$, έχουμε $\nu_1(A) = 0$ και $\nu_2(A) = 0$, άρα $(\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$. Επιπλέον, το $\nu_1 + \nu_2$ είναι σ -πεπερασμένο: αν (E_n) και (F_m) είναι αντίστοιχες αριθμήσιμες καλύψεις του X με $\nu_1(E_n) < \infty$ και $\nu_2(F_m) < \infty$, τότε τα $E_n \cap F_m$ καλύπτουν το X και έχουν πεπερασμένο $(\nu_1 + \nu_2)$ -μέτρο. Επομένως, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχουν οι παράγωγοι $\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu}$, $\frac{d\nu_1}{d\mu}$, $\frac{d\nu_2}{d\mu}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A \frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} d\mu = (\nu_1 + \nu_2)(A) = \nu_1(A) + \nu_2(A) = \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu} d\mu + \int_A \frac{d\nu_2}{d\mu} d\mu = \int_A \left(\frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu} \right) d\mu.$$

Έπεται ότι $\frac{d(\nu_1 + \nu_2)}{d\mu} = \frac{d\nu_1}{d\mu} + \frac{d\nu_2}{d\mu}$ μ -σχεδόν παντού.

Εντελώς ανάλογα, αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = 0$, από την $\nu_1 \ll \mu$ έχουμε $\nu_1(A) = 0$, άρα $(a\nu_1)(A) = a\nu_1(A) = 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι $a\nu_1 \ll \mu$. Το $a\nu_1$ είναι επίσης σ -πεπερασμένο (για $a = 0$ είναι το μηδενικό μέτρο, ενώ για $a > 0$ χρησιμοποιούμε μια σ -πεπερασμένη κάλυψη για το ν_1). Επομένως υπάρχουν οι παράγωγοι Radon-Nikodym $\frac{d(a\nu_1)}{d\mu}$ και $\frac{d\nu_1}{d\mu}$, και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A \frac{d(a\nu_1)}{d\mu} d\mu = (a\nu_1)(A) = a\nu_1(A) = a \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu} d\mu = \int_A \left(a \frac{d\nu_1}{d\mu} \right) d\mu.$$

Έπεται ότι $\frac{d(a\nu_1)}{d\mu} = a \frac{d\nu_1}{d\mu}$ μ -σχεδόν παντού.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

10.3. Έστω μ, ν δύο μέτρα στον χώρο $(X, \mathcal{A})$. Αποδείξτε ότι $\mu \perp \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(A) < \varepsilon \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A) < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\mu \perp \nu$. Τότε, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A) = 0$ και $\nu(X \setminus A) = 0$. Γι' αυτό το (ίδιο πάντα) A είναι φανερό ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι

$$\mu(A) < \varepsilon \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A) < \varepsilon.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση, να βρούμε $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε

$$\mu(A_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{και} \quad \nu(X \setminus A_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Θεωρούμε το σύνολο $A = \limsup A_n$. Για κάθε $m \geq 1$ έχουμε

$$A = \limsup A_n \subseteq \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n,$$

και συνεπώς, από την αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα,

$$\mu(A) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2^{1-m}.$$

Αφήνοντας $m \rightarrow \infty$ παίρνουμε $\mu(A) = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus A = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c.$$

Η ακολουθία $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c$ είναι αύξουσα, άρα

$$\nu(X \setminus A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right).$$

Όμως,

$$\nu \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \leq \nu(A_n^c) < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0,$$

άρα τελικά $\nu(X \setminus A) = 0$. Έπεται ότι $\mu \perp \nu$.

10.4. Έστω μ, ν μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το ν είναι σ -πεπερασμένο τότε $f < \infty$ μ -σ.π.

(β) Αν το μ είναι σ -πεπερασμένο και $f < \infty$ μ -σ.π. τότε το ν είναι σ -πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Το ν είναι σ -πεπερασμένο, άρα υπάρχουν ξένα ανά δύο $A_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

και $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Έχουμε

$$\int_{A_n} f d\mu = \nu(A_n) < \infty,$$

άρα $\mu(Z_n) = 0$, όπου $Z_n = \{x \in A_n : f(x) = \infty\}$. Ορίζουμε $Z = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Αφού $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, βλέπουμε εύκολα ότι $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. Τότε, $\mu(Z) = 0$ και $f(x) < \infty$ για κάθε $x \in X \setminus Z$, δηλαδή $f < \infty$ μ -σ.π.

(β) Το μ είναι σ -πεπερασμένο, άρα υπάρχουν ξένα ανά δύο $B_n \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ και $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Θεωρούμε το σύνολο $Z = \{x \in X : f(x) = \infty\}$. Από την υπόθεση έχουμε $\mu(Z) = 0$, άρα

$$\nu(Z) = \int_Z f d\mu = 0.$$

Για κάθε $k \geq 1$ ορίζουμε $A_k = \{x \in X \setminus Z : k-1 \leq f(x) < k\}$. Παρατηρούμε ότι

$$X \setminus Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_k \cap B_n).$$

Τα σύνολα $A_k \cap B_n$ είναι ξένα και για κάθε $k, n \geq 1$ έχουμε

$$\nu(A_k \cap B_n) = \int_{A_k \cap B_n} f d\mu \leq \int_{A_k \cap B_n} k d\mu = k\mu(A_k \cap B_n) \leq k\mu(B_n) < \infty.$$

Γράφοντας

$$X = Z \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_k \cap B_n) \right)$$

βλέπουμε από τα παραπάνω ότι το X είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ που έχουν πεπερασμένο ν -μέτρο. Συνεπώς, το ν είναι σ -πεπερασμένο.

10.5. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Αποδείξτε ότι $f > 0$ μ -σ.π. αν και μόνο αν $\mu \ll \nu$.

Υπόδειξη. ($\implies$) Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\nu(A) = 0$. Υποθέτουμε ότι $\mu(A) > 0$. Αφού $f > 0$ μ -σ.π. υπάρχει $Z \subset A$ με $\mu(Z) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A \setminus Z$. Θέτουμε $B_k = \{x \in A \setminus Z : f(x) \geq 1/k\}$ και παρατηρούμε ότι η (B_k) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A \setminus Z$, άρα

$$\lim \mu(B_k) = \mu(A \setminus Z) = \mu(A) > 0,$$

άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(B_m) > 0$. Έχουμε $B_m \subseteq A$, άρα $\nu(B_m) = 0$ και

$$\nu(B_m) = \int_{B_m} f d\mu \geq \frac{1}{m} \mu(B_m) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\mu(A) = 0$. Αυτό δείχνει ότι $\mu \ll \nu$.

($\impliedby$) Υποθέτουμε ότι το σύνολο $A = \{x \in X : f(x) = 0\}$ έχει μέτρο $\mu(A) > 0$. Τότε,

$$\nu(A) = \int_A f d\mu = 0.$$

Όμως, τότε, από την υπόθεση ότι $\mu \ll \nu$ παίρνουμε $\mu(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

10.6. Έστω μ, ν σ -πεπερασμένα μέτρα στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\mu \ll \nu$ και $\nu \ll \mu$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\nu} = 1, \quad \mu - \sigma.π.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε

$$h = \frac{d\nu}{d\mu}, \quad k = \frac{d\mu}{d\nu}.$$

Επειδή τα μ, ν είναι σ -πεπερασμένα, οι δύο παράγωγοι υπάρχουν. Επιπλέον, από την αμοιβαία απόλυτη συνέχεια έχουμε $h > 0$ μ -σ.π. και $k > 0$ ν -σ.π., ενώ από τη σ -πεπεραστικότητα του μέτρου που παριστάνεται μέσω της αντίστοιχης παραγώγου έχουμε $h < \infty$ μ -σ.π. και $k < \infty$ ν -σ.π. Συνεπώς, μετά από μεταβολή σε μηδενικά σύνολα αν χρειάζεται, δεν εμφανίζεται καμία ακαθόριστη έκφραση στο γινόμενο hk .

Για κάθε $A \in \mathcal{A}$, χρησιμοποιούμε πρώτα τον τύπο αλλαγής μέτρου για τη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $h\chi_A$:

$$\int_A hk \, d\nu = \int_X h\chi_A k \, d\nu = \int_X h\chi_A \, d\mu = \nu(A) = \int_A 1 \, d\nu.$$

Άρα, από τη μοναδικότητα της πυκνότητας,

$$hk = 1 \quad \nu\text{-}\sigma.π.$$

Επειδή $\mu \ll \nu$, κάθε ν -μηδενικό σύνολο είναι και μ -μηδενικό. Επομένως,

$$\frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\nu} = 1 \quad \mu\text{-}\sigma.π.,$$

όπως ζητείται.

10.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου. Αποδείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{A})$ ώστε $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$.

Υπόδειξη. Το μ είναι σ -πεπερασμένο, άρα υπάρχει ακολουθία (A_n) ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Θεωρούμε τη μετρήσιμη συνάρτηση

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g_n,$$

όπου $g_n = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}$ αν $\mu(A_n) > 0$ και $g_n = 0$ αν $\mu(A_n) = 0$. Παρατηρούμε ότι, από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{\{n: \mu(A_n) > 0\}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\mu(A_n)} \int_X \chi_{A_n} \, d\mu = \sum_{\{n: \mu(A_n) > 0\}} \frac{1}{2^n} \leq 1 < \infty,$$

δηλαδή η f είναι μ -ολοκληρώσιμη. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Από τον ορισμό του ν έχουμε ότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$, άρα $\nu \ll \mu$.

Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{A}$ και $\nu(A) = 0$, τότε

$$0 = \nu(A) = \int_A f d\mu = \sum_{\{n: \mu(A_n) > 0\}} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\mu(A_n)} \int_A \chi_{A_n} d\mu = \sum_{\{n: \mu(A_n) > 0\}} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(A \cap A_n)}{\mu(A_n)},$$

άρα $\mu(A \cap A_n) = 0$ για κάθε n για το οποίο $\mu(A_n) > 0$, το οποίο σημαίνει ότι $\mu(A \cap A_n) = 0$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\mu \ll \nu$.

10.8. Έστω μ, ν μέτρα στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ -πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\nu \leq \mu$ αν και μόνο αν η Radon-Nikodym παράγωγος $\frac{d\nu}{d\mu}$ ορίζεται και ισχύει $\frac{d\nu}{d\mu} \leq 1$ μ -σ.π. στο X .

Υπόδειξη. ($\Leftarrow$) Από την υπόθεση ότι $\frac{d\nu}{d\mu} \leq 1$ μ -σ.π. στο X έπεται ότι

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu} d\mu \leq \int_A 1 d\mu = \mu(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δηλαδή, $\nu \leq \mu$.

($\Rightarrow$) Αν $\nu \leq \mu$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = 0$ έχουμε $\nu(A) = 0$, δηλαδή $\nu \ll \mu$. Επιπλέον, επειδή το μ είναι σ -πεπερασμένο, υπάρχουν $X_n \in \mathcal{A}$ με $X = \bigcup_n X_n$ και $\mu(X_n) < \infty$. Τότε

$$\nu(X_n) \leq \mu(X_n) < \infty,$$

οπότε και το ν είναι σ -πεπερασμένο. Συνεπώς εφαρμόζεται το θεώρημα Radon-Nikodym και ορίζεται η παράγωγος $h = \frac{d\nu}{d\mu}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\int_A h d\mu = \nu(A) \leq \mu(A) = \int_A 1 d\mu.$$

Για να δείξουμε ότι $h \leq 1$ μ -σ.π., θέτουμε $E_m = \{h > 1 + 1/m\}$. Αν $\mu(E_m) > 0$, τότε, από τη σ -περατότητα του μ , υπάρχει μετρήσιμο $F \subseteq E_m$ με $0 < \mu(F) < \infty$. Άρα

$$\nu(F) = \int_F h d\mu \geq \left(1 + \frac{1}{m}\right) \mu(F) > \mu(F),$$

αντίφαση. Επομένως $\mu(E_m) = 0$ για κάθε m , και επειδή $\{h > 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$, παίρνουμε $h \leq 1$ μ -σ.π. στο X .

Δύσκολες ασκήσεις

10.9. Έστω μ_1, ν_1 σ -πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και μ_2, ν_2 σ -πεπερασμένα μέτρα στο χώρο $(Y, \mathcal{B})$ ώστε $\nu_1 \ll \mu_1$ και $\nu_2 \ll \mu_2$. Να δείξετε ότι

$$\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$$

και επιπλέον

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y), \quad (\mu_1 \times \mu_2) - \sigma.π.$$

Υπόδειξη. Έστω $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ με $(\mu_1 \times \mu_2)(C) = 0$. Έχουμε

$$0 = (\mu_1 \times \mu_2)(C) = \int_X \mu_2(C_x) d\mu_1(x),$$

άρα υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu_1(Z) = 0$ τέτοιο ώστε $\mu_2(C_x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Αφού $\nu_1 \ll \mu_1$ έχουμε $\nu_1(Z) = 0$ και αφού $\nu_2 \ll \mu_2$ έχουμε $\nu_2(C_x) = 0$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Δηλαδή, $\nu_2(C_x) = 0$ ν_1 -σχεδόν παντού, και έπεται ότι

$$(\nu_1 \times \nu_2)(C) = \int_X \nu_2(C_x) d\nu_1(x) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$.

Θέτουμε

$$h_1 = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}, \quad h_2 = \frac{d\nu_2}{d\mu_2}.$$

Επειδή τα ν_i είναι σ -πεπερασμένα, μπορούμε (τροποποιώντας τις πυκνότητες σε μ_i -μηδενικά σύνολα, αν χρειάζεται) να θεωρήσουμε τις h_i πεπερασμένες και μη αρνητικές παντού. Έτσι το γινόμενο

$$(x, y) \mapsto h_1(x)h_2(y)$$

είναι καλά ορισμένη μη αρνητική $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση, χωρίς να εμφανίζονται ακαθόριστες εκφράσεις του τύπου $0 \cdot (+\infty)$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, από το θεώρημα Tonelli έχουμε

$$\begin{aligned} \int_C h_1(x)h_2(y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) &= \int_Y \int_X \chi_C(x, y) h_1(x)h_2(y) d\mu_1(x) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_C(x, y) h_1(x) d\mu_1(x) \right) h_2(y) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X (\chi_C)_y(x) h_1(x) d\mu_1(x) \right) h_2(y) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_{C^y}(x) d\nu_1(x) \right) h_2(y) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y \nu_1(C^y) h_2(y) d\mu_2(y) \\ &= \int_Y \nu_1(C^y) d\nu_2(y) = (\nu_1 \times \nu_2)(C). \end{aligned}$$

Επειδή τα μ_1, μ_2 είναι σ -πεπερασμένα, το $\mu_1 \times \mu_2$ είναι σ -πεπερασμένο. Ομοίως, το $\nu_1 \times \nu_2$ είναι σ -πεπερασμένο: αν $X = \bigcup_n E_n$, $Y = \bigcup_m F_m$ με $\nu_1(E_n) < \infty$ και $\nu_2(F_m) < \infty$, τότε τα $E_n \times F_m$ καλύπτουν το $X \times Y$ και

$$(\nu_1 \times \nu_2)(E_n \times F_m) = \nu_1(E_n)\nu_2(F_m) < \infty.$$

Άρα, μαζί με την $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$, εφαρμόζεται πράγματι το θεώρημα Radon-Nikodym και έχουμε

$$\int_C \frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) = (\nu_1 \times \nu_2)(C),$$

δηλαδή

$$\int_C \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y) = \int_C \frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) d(\mu_1 \times \mu_2)(x, y)$$

για κάθε $C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Άρα,

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x, y) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y), \quad (\mu_1 \times \mu_2) - \sigma.\pi.$$

10.10. (Δεσμευμένη μέση τιμή) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια σ -άλγεβρα και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς τη σ -άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι μια $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

(ii) Αποδείξτε ότι αν g είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$, τότε

$$\int |g| d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty.$$

(iii) Αποδείξτε ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική, δηλαδή αν g, g_1 είναι δύο δεσμευμένες μέσες τιμές της f , τότε $g = g_1$ μ -σ.π.

Η δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$ συμβολίζεται με $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

Υπόδειξη. (i) Υποθέτουμε αρχικά ότι $f \geq 0$. Ορίζουμε $\nu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\nu(B) = \int_B f d\mu.$$

Γνωρίζουμε ότι το ν είναι μέτρο στην $\mathcal{B}$ και $\nu \ll \mu|_{\mathcal{B}}$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ώστε

$$\nu(B) = \int_B g d\mu, \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

Η g είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$, παρατηρούμε ότι $f^+, f^- \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και εφαρμόζοντας το προηγούμενο βήμα βρίσκουμε δεσμευμένες μέσες τιμές g_1, g_2 των f^+, f^- αντίστοιχα. Η $g = g_1 - g_2$ είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς $\mathcal{B}$.

(ii) Θέτουμε $B = \{g > 0\}$ και $C = \{g \leq 0\}$. Αφού η g είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη, έχουμε $B, C \in \mathcal{B}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $-f, f \leq |f|$ και τις

$$\int_B g d\mu = \int_B f d\mu \quad \text{και} \quad \int_C g d\mu = \int_C f d\mu,$$

βλέπουμε ότι

$$\int_X |g| d\mu = \int_B g d\mu - \int_C g d\mu = \int_B f d\mu - \int_C f d\mu \leq \int_B |f| d\mu + \int_C |f| d\mu = \int_X |f| d\mu.$$

(iii) Θέτουμε $B = \{g - g_1 > 0\} \in \mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_B (g - g_1) d\mu = \int_B g d\mu - \int_B g_1 d\mu = \int_B f d\mu - \int_B f d\mu = 0.$$

Έπεται ότι $\mu(B) = 0$. Όμοια, για το $C = \{g_1 - g > 0\} \in \mathcal{B}$ βλέπουμε ότι $\mu(C) = 0$. Άρα, $g = g_1$ μ -σχεδόν παντού.

10.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(f|\{\emptyset, X\})$ και $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$.

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$. Κάθε πραγματική $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση είναι σταθερή. Πράγματι, αν η g έπαιρνε δύο τιμές $a < b$, τότε για κάποιο $c \in (a, b)$ το σύνολο $\{g < c\}$ θα ήταν μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του X , άτοπο αφού $\{g < c\} \in \mathcal{B}$. Επομένως η $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ είναι σταθερή. Αφού

$$\int_X g \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

και $\mu(X) = 1$, έπεται ότι η σταθερή τιμή της $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ είναι η μέση τιμή $\mathbb{E}(f) = \int_X f \, d\mu$ της f .

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε ότι η f ικανοποιεί τον ορισμό της δεσμευμένης τιμής της f (του εαυτού της) ως προς $\mathcal{A}$. Από τη μοναδικότητα της δεσμευμένης τιμής συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = f$.

10.12. (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και δύο σ -άλγεβρες $C \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι:

(i) Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι γραμμική: για $a, b \in \mathbb{R}$ και $f, g \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(af + bg|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(g|\mathcal{B}).$$

(ii) Αν $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$, η $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη και $\int_X |fg| \, d\mu < \infty$, τότε

$$\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

(iii) Για κάθε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|C)|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(f|C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|C).$$

Υπόδειξη. (i) Θέτουμε $h_1 = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ και $h_2 = \mathbb{E}(g|\mathcal{B})$. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$\int_B f \, d\mu = \int_B h_1 \, d\mu \quad \text{και} \quad \int_B g \, d\mu = \int_B h_2 \, d\mu.$$

Συνεπώς, για κάθε $B \in \mathcal{B}$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_B (af + bg) \, d\mu = a \int_B f \, d\mu + b \int_B g \, d\mu = a \int_B h_1 \, d\mu + b \int_B h_2 \, d\mu = \int_B (ah_1 + bh_2) \, d\mu.$$

Η $ah_1 + bh_2$ είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη, άρα είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή της $af + bg$. Από τη μοναδικότητα της δεσμευμένης τιμής συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}(af + bg|\mathcal{B}) = a\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) + b\mathbb{E}(g|\mathcal{B})$.

(ii) Υποθέτουμε αρχικά ότι $g = \chi_C$ για κάποιο $C \in \mathcal{B}$. Παρατηρήστε ότι η gf είναι ολοκληρώσιμη, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη. Για κάθε $B \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$\int_B gf \, d\mu = \int_{B \cap C} f \, d\mu = \int_{B \cap C} \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \, d\mu = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \, d\mu.$$

Άρα, $\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Από το (i) (τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής) έπεται ότι αν s είναι απλή $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση τότε

$$\mathbb{E}(sf|\mathcal{B}) = s\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f \geq 0$ και έστω g μη αρνητική $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $\int_X |gf| d\mu < \infty$. Θεωρούμε αύξουσα ακολουθία (s_n) απλών $\mathcal{B}$ -μετρήσιμων συναρτήσεων με $0 \leq s_n \nearrow g$. Τότε $0 \leq s_n f \nearrow gf$ και $0 \leq s_n \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) \nearrow g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, για κάθε $B \in \mathcal{B}$ παίρνουμε

$$\int_B gf d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B s_n f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B s_n \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) d\mu = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}) d\mu.$$

Έπεται ότι $\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε $f \in L^1_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη συνάρτηση g τέτοια ώστε $\int_X |gf| d\mu < \infty$. Παρατηρούμε ότι οι $g^+ f^+, g^- f^+, g^+ f^-, g^- f^-$ είναι ολοκληρώσιμες και εφαρμόζοντας το προηγούμενο βήμα βλέπουμε ότι $\mathbb{E}(g^+ f^+|\mathcal{B}) = g^+ \mathbb{E}(f^+|\mathcal{B})$ και $\mathbb{E}(g^+ f^-|\mathcal{B}) = g^+ \mathbb{E}(f^-|\mathcal{B})$. Από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}(g^+ f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^+ f^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^+ f^-|\mathcal{B}) = g^+ \mathbb{E}(f^+|\mathcal{B}) - g^+ \mathbb{E}(f^-|\mathcal{B}) = g^+ \mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Όμοια, από τις $\mathbb{E}(g^- f^+|\mathcal{B}) = g^- \mathbb{E}(f^+|\mathcal{B})$ και $\mathbb{E}(g^- f^-|\mathcal{B}) = g^- \mathbb{E}(f^-|\mathcal{B})$ και τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής έχουμε

$$\mathbb{E}(g^- f|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^- f^+|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^- f^-|\mathcal{B}) = g^- \mathbb{E}(f^+|\mathcal{B}) - g^- \mathbb{E}(f^-|\mathcal{B}) = g^- \mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

Πάλι από τη γραμμικότητα της δεσμευμένης τιμής,

$$\mathbb{E}(gf|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(g^+ f|\mathcal{B}) - \mathbb{E}(g^- f|\mathcal{B}) = g^+ \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) - g^- \mathbb{E}(f|\mathcal{B}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{B}).$$

(iii) Θέτουμε $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ και $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{B})$. Αφού $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, η g είναι $\mathcal{B}$ -μετρήσιμη. Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε $\mathbb{E}(g|\mathcal{B}) = g$. Δηλαδή,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{C})|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{C}).$$

Έστω $C \in \mathcal{C}$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής $\mathbb{E}(f|\mathcal{C})$ έχουμε

$$\int_C g d\mu = \int_C f d\mu.$$

Αφού $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ έχουμε $C \in \mathcal{B}$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης τιμής $\mathbb{E}(f|\mathcal{B})$ έχουμε

$$\int_C h d\mu = \int_C f d\mu.$$

Αφού

$$\int_C g d\mu = \int_C h d\mu$$

για κάθε $C \in \mathcal{C}$ συμπεραίνουμε ότι $g = \mathbb{E}(h|\mathcal{C})$. Δηλαδή,

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{C}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|\mathcal{C}).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|C)|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(f|C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{B})|C).$$

10.13. Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.

(α) Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση και $\int_{(-\infty, t)} f d\mu = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f = 0$ μ -σχεδόν παντού.

(β) Αν το μ είναι σ -πεπερασμένο, $\mu \neq 0$, και B είναι σύνολο Borel στον $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $\lambda(B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(B + y) = 0$ για λ -σχεδόν κάθε $y \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη. Για το (β) παρατηρήστε ότι έχει νόημα το $(\mu \times \lambda)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$ και υπολογίστε το.]

Υπόδειξη. (α) Για κάθε διάστημα της μορφής $[t, s)$, όπου $t, s \in \mathbb{R}$ και $t < s$, έχουμε

$$\int_{[t, s)} f d\mu = \int_{(-\infty, s)} f d\mu - \int_{(-\infty, t)} f d\mu = 0 - 0 = 0.$$

Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \int_A f d\mu = 0 \right\}$$

Αποδεικνύουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin. Αρχικά, θέτοντας $f_n = f \cdot \chi_{[-n, n]}$ παρατηρούμε ότι $f_n \rightarrow f$ και $|f_n| \leq |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-n, n)} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Έστω τώρα $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Τότε, $B \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και

$$0 = \int_B f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{B \setminus A} f d\mu = 0 + \int_{B \setminus A} f d\mu = \int_{B \setminus A} f d\mu,$$

άρα $B \setminus A \in \mathcal{A}$. Τέλος, έστω $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Τότε, $g_n := f \cdot \chi_{A_n} \rightarrow f \cdot \chi_A$ και $|g_n| \leq |f|$, συνεπώς το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$\int_A f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_A d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

δηλαδή $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την οικογένεια $\Delta = \{[t, s) : t, s \in \mathbb{R}, t < s\} \cup \{\emptyset\}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} \supseteq \delta(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Συνεπώς, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, δηλαδή

$$\int_A f d\mu = 0 \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θέτουμε $P = \{f > 0\}$ και $N = \{f < 0\}$. Τα P, N είναι Borel και άρα

$$\int_P f d\mu = 0, \quad \int_N f d\mu = 0.$$

Επειδή $f \geq 0$ στο P , η πρώτη ισότητα δίνει $f = 0$ μ -σ.π. στο P . Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα στη μη αρνητική $-f$ πάνω στο N , η δεύτερη ισότητα δίνει επίσης $f = 0$ μ -σ.π. στο N . Επομένως $f = 0$ μ -σ.π. στο $\mathbb{R}$.

(β) Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι αν $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε

$$B_* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

Έστω $\mathcal{A} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : B_* \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$. Αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό τότε ελέγχουμε εύκολα ότι το G_* είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $x - y \in G$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(x - y - \varepsilon, x - y + \varepsilon) \subseteq G$. Τότε, αν $(u, v) \in B((x, y), \varepsilon/2)$ έχουμε $|(u - v) - (x - y)| \leq |u - x| + |y - v| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, άρα $(u, v) \in (x - y - \varepsilon, x - y + \varepsilon) \subseteq G$. Δηλαδή, κάθε $(x, y) \in G_*$ είναι εσωτερικό σημείο του G_* . Αυτό δείχνει ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ -άλγεβρα, παρατηρώντας ότι:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right)_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n)_* \quad \text{και} \quad (\mathbb{R} \setminus B)_* = \mathbb{R}^2 \setminus B_*$$

για κάθε $B \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε ακολουθία (B_n) υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Από τα παραπάνω έπεται ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$, και έτσι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Το $\mu \times \lambda$ ορίζεται στην σ -άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, άρα ορίζεται καλά η ποσότητα

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = (\mu \times \lambda)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Υπολογίζουμε το $(\mu \times \lambda)(B_*)$ με δύο τρόπους, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli για τη μη αρνητική δείκτρια συνάρτηση χ_{B_*} . Έχουμε

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = \int_{\mathbb{R}} \lambda((B_*)_x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{y : x - y \in B\}) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(x - B) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(B) d\mu(x)$$

και

$$(\mu \times \lambda)(B_*) = \int_{\mathbb{R}} \mu((B_*)^y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x : x - y \in B\}) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B) d\lambda(y),$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(B) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B) d\lambda(y).$$

Αν $\lambda(B) = 0$ παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \mu(y + B) d\lambda(y) = 0,$$

άρα $\mu(y + B) = 0$ λ -σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Αντίστροφα, αν $\mu(y + B) = 0$ λ -σχεδόν παντού, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(B) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu(y + B) d\lambda(y) = 0.$$

Επειδή μ είναι σ -πεπερασμένο και $\mu \neq 0$, υπάρχει $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $0 < \mu(E) < \infty$. Αν ήταν $\lambda(B) > 0$ (πεπερασμένο ή άπειρο), θα είχαμε

$$\int_E \lambda(B) d\mu = \lambda(B)\mu(E) > 0,$$

ενώ το αριστερό μέλος δεν μπορεί να υπερβαίνει το $\int_{\mathbb{R}} \lambda(B) d\mu = 0$. Άρα $\lambda(B) = 0$.

Κεφάλαιο 11

Χώροι L^p

Απλές ασκήσεις

11.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq a\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{a}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \geq \int_{\{|f| \geq \alpha\}} \alpha^p d\mu = \alpha^p \mu(\{|f| \geq \alpha\}).$$

11.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p . Αν $f_n \rightarrow f$ στον $L^p(\mu)$ και $g_n \rightarrow g$ στον $L^q(\mu)$, δείξτε ότι $f_n g_n \rightarrow fg$ στον $L^1(\mu)$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leq \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leq \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \rightarrow 0,$$

έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leq M$ για κάθε n . Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ και $\|g_n - g\|_q \rightarrow 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leq M \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0.$$

11.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $p, q, r \geq 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^q(\mu)$, τότε $fg \in L^r(\mu)$ και

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε αρχικά ότι $1/r > 1/p$ άρα $r/p < 1$ και όμοια $r/q < 1$. Επίσης,

$$\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = r \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 1$$

από την υπόθεση, δηλαδή οι $p/r, q/r$ είναι συζυγείς εκθέτες. Γράφουμε $|fg|^r = |f|^r |g|^r = (|f|^p)^{r/p} (|g|^q)^{r/q}$ και εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder γι' αυτούς τους εκθέτες:

$$\begin{aligned} \int_X |fg|^r d\mu &= \int_X (|f|^p)^{r/p} (|g|^q)^{r/q} d\mu \leq \left(\int_X [(|f|^p)^{r/p}]^{p/r} d\mu \right)^{r/p} \left(\int_X [(|g|^q)^{r/q}]^{q/r} d\mu \right)^{r/q} \\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{r/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{r/q} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r < +\infty. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $fg \in L^r(\mu)$. Τέλος,

$$\|fg\|_r = \left(\int_X |fg|^r d\mu \right)^{1/r} \leq (\|f\|_p^r \|g\|_q^r)^{1/r} = \|f\|_p \|g\|_q.$$

11.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$ ώστε $f_n \rightarrow f$ στον $L^p(\mu)$. Αν (g_n) μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο X με $g_n \rightarrow g$ μ -σχεδόν παντού, να δείξετε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leq M$ (υπάρχει $Z \subset X$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in X \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε n και $g_n(x) \rightarrow g(x)$, άρα για κάθε $x \in X \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leq M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L^p(\mu)$ και $v \in L^\infty(\mu)$ τότε $uv \in L^p(\mu)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_X |u|^p |v|^p d\mu \leq \int_X |u|^p \|v\|_\infty^p d\mu = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leq \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f_n g_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leq \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\ &\leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leq M \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p. \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, άρα $M \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p |g_n - g|^p \leq |f|^p (|g_n| + |g|)^p \leq (2M)^p |f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p |f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L^p(\mu)$ (ως $\|\cdot\|_p$ -όριο των $f_n \in L^p(\mu)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_X |f(g_n - g)|^p d\mu \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \rightarrow 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leq M \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \rightarrow 0.$$

11.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $1 \leq p < q < \infty$.

(i) Αν $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μετρήσιμη, να δείξετε ότι

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(ii) Να δείξετε ότι $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Αν $\mu(X) = 0$, τότε κάθε μετρήσιμη $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μηδενική μ -σχεδόν παντού, οπότε $\|f\|_p = \|f\|_q = 0$ και τα δύο συμπεράσματα είναι άμεσα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \mu(X) < \infty$. Για το (α), αν $\|f\|_q = +\infty$, η ζητούμενη ανισότητα είναι τετριμμένη. Αρκεί συνεπώς να εξετάσουμε την περίπτωση $f \in L^q(\mu)$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p \cdot 1 \, d\mu &\leq \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{p/q} \left(\int_X 1 \, d\mu \right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\mu(X))^{1-p/q}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και 1 με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^p (\mu(X))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ' όπου έπεται ότι $f \in L^p(\mu)$ και $\|f\|_p \leq \|f\|_q [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

Ασκήσεις μεσαίας δυσκολίας

11.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p < q < r < \infty$. Να δείξετε ότι κάθε $f \in L^q(\mu)$ γράφεται στη μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L^p(\mu)$ και $h \in L^r(\mu)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_X |g|^p \, d\mu &= \int_X |f|^p \chi_B \, d\mu = \int_B |f|^p \, d\mu \leq \int_B |f|^q \, d\mu \\ &\leq \int_X |f|^q \, d\mu = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(\mu)$. Άρα, $g \in L^p(\mu)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{X \setminus B}$, και $|h(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in X \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leq |h(x)|^q$ για κάθε $x \in X \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_X |h|^r \, d\mu &= \int_X |f|^r \chi_{X \setminus B} \, d\mu = \int_{X \setminus B} |f|^r \, d\mu \leq \int_{X \setminus B} |f|^q \, d\mu \\ &\leq \int_X |f|^q \, d\mu = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L^q(\mu)$. Άρα, $h \in L^r(\mu)$.

11.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $1 \leq p < r < \infty$. Να δείξετε ότι αν $f \in L^p(\mu) \cap L^r(\mu)$, τότε είναι και $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $p \leq q \leq r$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψάχνει $t \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f|^q d\mu &= \int_X |f|^{(1-t)p} |f|^{tr} d\mu \leq \left(\int_X (|f|^{(1-t)p})^{\frac{1}{1-t}} d\mu \right)^{1-t} \left(\int_X (|f|^{tr})^{\frac{1}{t}} d\mu \right)^t \\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1-t} \left(\int_X |f|^r d\mu \right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p} \|f\|_r^{tr} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^q(\mu)$.

2η λύση. Χωρίζουμε τον χώρο στα σύνολα

$$A = \{x \in X : |f(x)| \leq 1\} \quad \text{και} \quad B = \{x \in X : |f(x)| > 1\}.$$

Επειδή $p \leq q \leq r$, στο A έχουμε $|f|^q \leq |f|^p$, ενώ στο B έχουμε $|f|^q \leq |f|^r$. Επομένως,

$$\int_X |f|^q d\mu = \int_A |f|^q d\mu + \int_B |f|^q d\mu \leq \int_A |f|^p d\mu + \int_B |f|^r d\mu \leq \|f\|_p^p + \|f\|_r^r < \infty.$$

Άρα $f \in L^q(\mu)$. Η απόδειξη αυτή δεν δίνει την ακριβέστερη ανισότητα παρεμβολής της πρώτης λύσης, αλλά δείχνει άμεσα τη βασική ιδέα: για μικρές τιμές του $|f|$ ελέγχουμε με τον μικρότερο εκθέτη και για μεγάλες τιμές με τον μεγαλύτερο.

11.8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $p \geq 1$ και μια ακολουθία $\{f_n\}$ στον $L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leq 1$ για κάθε n . Αν $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο μ -σ.π., να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ και $\|f\|_p \leq 1$.

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \rightarrow |f|^p$ σχεδόν παντού στο X , από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n|^p d\mu \leq 1,$$

διότι

$$\int_X |f_n|^p d\mu = \|f_n\|_p^p \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

11.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Να δείξετε ότι $f \in L^p(\mu)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(\{x \in X : n-1 \leq |f(x)| < n\}) < \infty,$$

όπου $1 \leq p < \infty$.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in X : n-1 \leq |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \mu(E_n) \leq \int_{E_n} |f|^p d\mu \leq n^p \mu(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p d\mu = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p d\mu \leq \int_X |f|^p d\mu$$

για κάθε $k \geq 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L^p(\mu)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leq 2$ για κάθε $n \geq 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^p \mu(E_n) &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \mu(E_n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \mu(E_n) \\ &\leq 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p d\mu \leq 2^p \int_X |f|^p d\mu < \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(\{n-1 \leq |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \mu(\{n-1 \leq |f| < n\}) < \infty, \end{aligned}$$

άρα $f \in L^p(\mu)$.

11.10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f \in L^p(\mu)$, όπου $1 \leq p < \infty$, με $f_n \rightarrow f$ μ -σ.π. Να δείξετε ότι

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \rightarrow 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 6.49 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχμένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n - f|^p &\leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2 \max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L^1(\mu)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L^1(\mu)$) και

$$\int_X |g_n| d\mu = 2^p \left(\int_X |f_n|^p d\mu + \int_X |f|^p d\mu \right) \rightarrow 2^{p+1} \int_X |f|^p d\mu = \int_X g d\mu,$$

διότι $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 6.49 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X |f_n - f|^p d\mu \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

11.11. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\|f\|_\infty < \infty$. Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Έστω λοιπόν $0 \neq f \in L^\infty(\mu)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty,$$

άρα $f \in L^p(\mu)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} \rightarrow \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \rightarrow \infty$, άρα $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geq \int_{B_\varepsilon} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p \rightarrow \infty} [\mu(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty,$$

και έπεται ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Μένει η περίπτωση $\|f\|_\infty = +\infty$. Για κάθε $M > 0$ το σύνολο

$$E_M = \{x \in X : |f(x)| > M\}$$

έχει θετικό μέτρο. Επομένως, για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p \geq M[\mu(E_M)]^{1/p},$$

με την ανισότητα να είναι προφανής και όταν $\|f\|_p = +\infty$. Επειδή $0 < \mu(E_M) < \infty$ (ο χώρος έχει πεπερασμένο μέτρο), έχουμε

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq M.$$

Το $M > 0$ είναι αυθαίρετο, άρα $\|f\|_p \rightarrow +\infty = \|f\|_\infty$.

11.12. Έστω $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L^p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L^p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leq p \leq p_1$

(γ) $f \in L^p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

Υπόδειξη. (α) Αν $p_1 < \infty$, θεωρούμε

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}} \chi_{(0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x).$$

Αν $p_0 < p < p_1$, τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{dx}{x^{p/p_1}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{p/p_0}} < \infty.$$

Αν $p \leq p_0$, το δεύτερο ολοκλήρωμα αποκλίνει, ενώ αν $p \geq p_1$, το πρώτο αποκλίνει.

Αν $p_1 = \infty$, η προηγούμενη επιλογή δεν είναι κατάλληλη: θα έδινε φραγμένη συνάρτηση κοντά στο 0 και επομένως θα ανήκε και στον L^∞ . Παίρνουμε αντί γ' αυτήν

$$f(x) = |\log x| \chi_{(0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x).$$

Για κάθε πεπερασμένο $p > p_0$ έχουμε

$$\int_0^1 |\log x|^p dx = \int_0^\infty u^p e^{-u} du < \infty$$

και το ολοκλήρωμα στο $[1, \infty)$ επίσης συγκλίνει. Αν $p \leq p_0$, το δεύτερο ολοκλήρωμα αποκλίνει, ενώ $f \notin L^\infty(0, \infty)$ επειδή $|\log x| \rightarrow \infty$ καθώς $x \downarrow 0$. Άρα και στην περίπτωση $p_1 = \infty$ ισχύει ακριβώς $f \in L^p$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) Αν $p_1 < \infty$, για να συμπεριλάβουμε και τα δύο άκρα χρειαζόμαστε λογαριθμική διόρθωση τόσο κοντά στο 0 όσο και στο ∞ . Θεωρούμε

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1} [\ln(e/x)]^{2/p_1}} \chi_{(0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0} [\ln(x+1)]^{2/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x).$$

Για $p_0 \leq p \leq p_1$ τα δύο ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα. Στα ακραία σημεία χρησιμοποιούμε

$$\int_0^1 \frac{dx}{x [\ln(e/x)]^2} < \infty \quad \text{και} \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x [\ln(x+1)]^2} < \infty,$$

ενώ στο εσωτερικό του $[p_0, p_1]$ η σύγκλιση είναι άμεση από τις αντίστοιχες δυνάμεις του x . Αν $p < p_0$, το δεύτερο ολοκλήρωμα αποκλίνει, ενώ αν $p > p_1$, το πρώτο αποκλίνει.

Αν $p_1 = \infty$, θέλουμε επιπλέον η συνάρτηση να ανήκει στον L^∞ . Παίρνουμε

$$f(x) = \chi_{(0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0} [\ln(x+1)]^{2/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x).$$

Η f είναι φραγμένη, άρα $f \in L^\infty(0, \infty)$. Για κάθε πεπερασμένο $p \geq p_0$, το ολοκλήρωμα στο $(0, 1]$ είναι πεπερασμένο, ενώ στο $[1, \infty)$ συγκλίνει: για $p = p_0$ από τη λογαριθμική διόρθωση και για $p > p_0$ ήδη από τη δύναμη x^{-p/p_0} . Αν $p < p_0$, το ολοκλήρωμα στο $[1, \infty)$ αποκλίνει. Άρα και στην περίπτωση $p_1 = \infty$ έχουμε ακριβώς $f \in L^p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leq p \leq p_1$.

(γ) Εφαρμόζουμε την ίδια ιδέα με το ίδιο κρίσιμο εκθέτη και στα δύο άκρα:

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0} [\ln(e/x)]^{2/p_0}} \chi_{(0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0} [\ln(x+1)]^{2/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x).$$

Για $p = p_0$ και τα δύο ολοκληρώματα συγκλίνουν από τις παραπάνω λογαριθμικές εκτιμήσεις. Αν $p < p_0$, το ολοκλήρωμα στο $[1, \infty)$ αποκλίνει, ενώ αν $p > p_0$, το ολοκλήρωμα στο $(0, 1]$ αποκλίνει. Συνεπώς $f \in L^p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

11.13. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$.

- (i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_E$ είναι συνεχής συνάρτηση.
- (ii) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (E + x)) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |(\chi_E * \chi_E)(x) - (\chi_E * \chi_E)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)] \chi_E(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $h(z) = \chi_E(x-z)$, τότε

$$\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y)) = h(z+(x-y)).$$

Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Από τη συνέχεια των μεταφορών στον L^1 έπεται ότι

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{y \rightarrow x} \|h(\cdot + (x-y)) - h\|_1 = 0.$$

(β) Χρειαζόμαστε την ίδια παρατήρηση του (α), λίγο γενικότερα. Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμα και πεπερασμένου μέτρου, τότε η $\chi_A * \chi_B$ είναι συνεχής. Πράγματι, για $x, y \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |(\chi_A * \chi_B)(x) - (\chi_A * \chi_B)(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_A(x-z) - \chi_A(y-z)| \chi_B(z) d\lambda(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_A(x-z) - \chi_A(y-z)| d\lambda(z), \end{aligned}$$

και το τελευταίο μέλος τείνει στο 0 όταν $y \rightarrow x$, από τη συνέχεια των μεταφορών στον L^1 για την χ_A . Εφαρμόζοντας αυτό με $A = -E$ και $B = E$, η συνάρτηση

$$F(x) := (\chi_{-E} * \chi_E)(x)$$

είναι συνεχής. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z) \chi_E(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{x+E}(z) \chi_E(z) d\lambda(z) \\ &= \lambda((x+E) \cap E), \end{aligned}$$

ενώ

$$F(0) = \lambda(E) > 0.$$

Από τη συνέχεια της F στο 0 υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε, αν $|x| < \varepsilon$, τότε

$$\lambda((E+x) \cap E) = F(x) > 0.$$

11.14. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t) dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t) d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t) d\lambda(t) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1 d\lambda(t). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leq \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1 d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x-t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t) d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t) = \int_{[0, 1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0, 1/n]} f_n(t) d\lambda(t) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

11.15. Σταθεροποιούμε μια $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και ορίζουμε

$$A_g(f) = g * f.$$

- (i) Δείξτε ότι ο $A_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.
- (ii) Αν επιπλέον $g \geq 0$, υπολογίστε τη νόρμα $\|A_g\|$ του A_g .
- (iii) Δείξτε ότι η μοναδική $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ για την οποία $f * f = f$ είναι η $f = 0$.

Υπόδειξη. (i) Γνωρίζουμε ότι αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η συνέλιξη $g * f$ ορίζεται καλά (σχεδόν παντού), ανήκει στον $L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\|g * f\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$. Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι

$$\|A_g(f)\|_1 \leq \|g\|_1 \|f\|_1$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, άρα ο τελεστής $A_g : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος και $\|A_g\| \leq \|g\|_1$. Η γραμμικότητα του A_g προκύπτει από την αντίστοιχη ιδιότητα της συνέλιξης: αν $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ τότε

$$A_g(a_1 f_1 + a_2 f_2) = g * (a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1(g * f_1) + a_2(g * f_2) = a_1 A_g(f_1) + a_2 A_g(f_2).$$

(ii) Αν επιπλέον $g \geq 0$ τότε για κάθε ολοκληρώσιμη $f \geq 0$ έχουμε, από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (g * f)(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \|g\|_1 d\lambda(y) = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\lambda(y) = \|g\|_1 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Παίρνοντας, για παράδειγμα $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$, έχουμε $\chi_E \geq 0$ και $\|\chi_E\|_1 = \lambda(E) = 1$, συνεπώς

$$\|A_g\| = \sup\{\|A_g(f)\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\} \geq \|A_g(\chi_E)\|_1 = \|g * \chi_E\|_1 = \|g\|_1 \|\chi_E\|_1 = \|g\|_1.$$

Η αντίστροφη ανισότητα $\|A_g\| \leq \|g\|_1$ αποδείχθηκε (γενικότερα) στο (i), άρα $\|A_g\| = \|g\|_1$.

(iii) Χρησιμοποιεί ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $f * f = f$. Τότε,

$$(\widehat{f})^2 = \widehat{f * f} = \widehat{f}.$$

Για κάθε ξ έχουμε $\widehat{f}(\xi) \in \{0, 1\}$. Επειδή η $\widehat{f}$ είναι συνεχής και ο $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός, η εικόνα της είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\{0, 1\}$. Άρα $\widehat{f} \equiv 0$ ή $\widehat{f} \equiv 1$. Το δεύτερο ενδεχόμενο αποκλείεται διότι $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Άρα, $\widehat{f} \equiv 0$ και γνωρίζουμε ότι αυτό συνεπάγεται την $f \equiv 0$.

11.16. Δείξτε ότι αν $f_n \in L^1[0, 1]$ και $\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n}$, τότε $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| \right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |f_n| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty.$$

Έπεται ότι λ -σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ συγκλίνει, άρα λ -σχεδόν παντού στο $[0, 1]$ έχουμε $|f_n(x)| \rightarrow 0$ και έπεται το ζητούμενο.

Δύσκολες ασκήσεις

11.17. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $p \geq 1$ και μια συνάρτηση $f \in L^p(\mu)$. Να δείξετε ότι

$$\int |f|^p d\mu = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \int_X \left(\int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} d\lambda(t) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\int_0^{\infty} p t^{p-1} \chi_{[0, |f(x)|)}(t) d\lambda(t) \right) d\mu(x) \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_X \chi_{[0, |f(x)|)}(t) d\mu(x) \right) p t^{p-1} d\lambda(t) \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_X \chi_{\{x \in X : |f(x)| > t\}}(x) d\mu(x) \right) p t^{p-1} d\lambda(t) \\ &= \int_0^{\infty} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) p t^{p-1} d\lambda(t). \end{aligned}$$

11.18. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geq 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{C}{t^p},$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L^r(\mu)$ για κάθε $1 \leq r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $1 \leq r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 11.17 γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^r d\mu(x) &= \int_0^{\infty} r t^{r-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 r t^{r-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &\quad + \int_1^{\infty} r t^{r-1} \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &\leq \int_0^1 r t^{r-1} \mu(X) d\lambda(t) + \int_1^{\infty} r t^{r-1} \frac{C}{t^p} d\lambda(t) \\ &= \mu(X) \int_0^1 r t^{r-1} d\lambda(t) + C r \int_1^{\infty} t^{r-p-1} d\lambda(t) \\ &= \mu(X) + \frac{C r}{p-r} < \infty, \end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^{\infty} t^{r-p-1} d\lambda(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p} \right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r-p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L^r(\mu)$.

11.19. Έστω $r \geq 1$ και $f_n : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leq M$ για κάθε n . Υποθέτουμε ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού (ως προς το μέτρο Lebesgue) στο $(0,1)$. Να δείξετε ότι για κάθε $1 \leq p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r d\lambda \leq \liminf \int_0^1 |f_n|^r d\lambda \leq M^r,$$

συνεπώς $\|f\|_r \leq M$. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r d\lambda \leq \int_0^1 2^r (|f_n|^r + |f|^r) d\lambda \leq 2^r (\|f_n\|_r^r + \|f\|_r^r) \leq 2^{r+1} M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Για τυχόν $1 \leq p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n - f|^p d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p d\lambda \\ &\leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^r d\lambda \right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^r d\lambda \right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} (2^{r+1} M^r)^{\frac{p}{r}}. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} (2^{r+1} M^r)^{\frac{p}{r}} < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p d\lambda \leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} (2^{r+1} M^r)^{\frac{p}{r}} < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

11.20. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

(i) Για κάθε t είναι $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και $\int f_t d\lambda = \int f d\lambda$.

(ii) Ισχύει $\lim_{t \rightarrow 0} \int |f_t - f| d\lambda = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x+t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\int f_t d\lambda = \lambda(-t+E) = \lambda(E) = \int f d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν ϕ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει $\phi_t \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\int \phi_t d\lambda = \int \phi d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $f \geq 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Έχουμε $(\phi_n)_t \in L^1(\mathbb{R})$, $(\phi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\phi_n)_t d\lambda = \int \phi_n d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n)_t d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\lambda = \int f d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L^1(\mathbb{R})$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^- .

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \text{supp}(g)$ και $K_1 = K + [-1, 1]$. Το K_1 είναι συμπαγές και έχει πεπερασμένο, θετικό μέτρο, εκτός αν $g = 0$, οπότε το ζητούμενο είναι άμεσο. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε

$$|x - y| < \delta \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{\lambda(K_1)}.$$

Για $|t| < \delta$, η συνάρτηση $x \mapsto g(x) - g(x+t)$ μηδενίζεται έξω από $K \cup (K-t) \subseteq K_1$. Επομένως

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{K_1} |g(x) - g(x+t)| d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f - g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

11.21. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \cos(nx) d\lambda(x) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \sin(nx) d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε αρχικά την περίπτωση όπου $f = \chi_I$ για κάποιο φραγμένο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$. Τότε,

$$\int \chi_I(x) \cos(nx) d\lambda(x) = \int_a^b \cos(nx) dx = \frac{1}{n}(\sin(nb) - \sin(na)) \longrightarrow 0$$

αφού $|\sin(nb) - \sin(na)| \leq 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $I_1, \dots, I_N$ είναι ξένα ανά δύο φραγμένα κλειστά

διαστήματα και $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ τότε για την $f = \chi_F$ έχουμε

$$\int \chi_F(x) \cos(nx) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^N \int \chi_{I_j}(x) \cos(nx) d\lambda(x) \longrightarrow 0$$

από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος και το προηγούμενο βήμα.

Έστω τώρα E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue και την προσέγγιση ανοικτών συνόλων πεπερασμένου μέτρου από πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων, μπορούμε να βρούμε $F = I_1 \cup \dots \cup I_N$ όπως παραπάνω, τέτοιο ώστε $\lambda(E \Delta F) \leq \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int \chi_E(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| &\leq \left| \int (\chi_E(x) - \chi_F(x)) \cos(nx) d\lambda(x) \right| + \left| \int \chi_F(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \\ &\leq \int |\chi_E(x) - \chi_F(x)| d\lambda(x) + \left| \int \chi_F(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \\ &= \lambda(E \Delta F) + \left| \int \chi_F(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \leq \varepsilon + \left| \int \chi_F(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right|. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int \chi_E(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\int \chi_E(x) \cos(nx) d\lambda(x) \longrightarrow 0$. Τώρα, από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$ ισχύει ότι

$$\int s(x) \cos(nx) d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Έστω τώρα $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε απλή μετρήσιμη συνάρτηση $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lambda(\{s \neq 0\}) < \infty$, τέτοια ώστε $\int |f - s| d\lambda \leq \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int f(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| &\leq \left| \int (f(x) - s(x)) \cos(nx) d\lambda(x) \right| + \left| \int s(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \\ &\leq \int |f(x) - s(x)| d\lambda(x) + \left| \int s(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \\ &\leq \varepsilon + \left| \int s(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right|. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(x) \cos(nx) d\lambda(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\int f(x) \cos(nx) d\lambda(x) \longrightarrow 0.$$

Για τη γενική περίπτωση όπου $f \in L^1(\mathbb{R})$ γράφουμε $f = u + iv$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για τις u και v .

11.22. Δίνεται μια φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h\|_2 \leq \|f\|_2$ και $\|\phi_h - f\|_2 \rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t) \right|^2 &\leq \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} 1^2 d\lambda(t) \right) \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\phi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-h, x+h]}(t) f^2(t) d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x-h, x+h]}(t) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[t-h, t+h]}(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) (2h) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^2(t) d\lambda(t) = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\phi_h(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\phi_h(g) \rightarrow g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \rightarrow 0$ και $\|\phi_h(g) - g\|_2 \rightarrow 0$ αφού $\phi_h(g) - g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\phi_h(f - g) = \phi_h(f) - \phi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\phi_h(f) - f\|_2 &\leq \|\phi_h(f) - \phi_h(g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &= \|\phi_h(f - g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &\leq \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\phi_h(f) - f\|_2 \rightarrow 0$.

11.23. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\mathbb{R}^k)$ με $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{B(0, \delta)}$, όπου $B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^k$ είναι η ευκλείδεια μπάλα ακτίνας δ και $\omega_k = \lambda(B(0, 1))$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned} (\omega_k \delta^k)^{1/q} \|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q d\lambda \right)^{1/q} \|f_n\|_p \geq \left| \int f_n g_\delta d\lambda \right| \\ &= \int_{\{x: |x| \leq \delta\}} f_n d\lambda = \int f_n d\lambda - \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2(\omega_k \delta^k)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p \geq \frac{1}{2(\omega_k \delta^k)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \rightarrow 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \rightarrow \infty$.

11.24. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και μια $f \in L^p(\mu)$ για κάποιο $p \geq 1$. Να δείξετε ότι

$$\log \|f\|_p \geq \int \log |f| d\mu.$$

Υπόδειξη. Αν $\|f\|_p = 0$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού και το δεξί μέλος είναι $-\infty$, οπότε η ανισότητα είναι άμεση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\|f\|_p > 0$ και θέτουμε

$$g = |f|^p \in L^1(\mu), \quad g \geq 0.$$

Αρκεί να αποδείξουμε

$$\int_X \log g \, d\mu \leq \log \left(\int_X g \, d\mu \right),$$

με την προφανή ερμηνεία αν το αριστερό μέλος είναι $-\infty$.

Για $\varepsilon > 0$ η συνάρτηση $g + \varepsilon$ είναι θετική και

$$\log(g + \varepsilon) \leq g + \varepsilon,$$

οπότε το θετικό μέρος της $\log(g + \varepsilon)$ είναι ολοκληρώσιμο. Από την ανισότητα Jensen για την κοίλη συνάρτηση $\log$ στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{A}, \mu)$ παίρνουμε

$$\int_X \log(g + \varepsilon) \, d\mu \leq \log \left(\int_X (g + \varepsilon) \, d\mu \right) = \log \left(\int_X g \, d\mu + \varepsilon \right).$$

Καθώς $\varepsilon \downarrow 0$, έχουμε $\log(g + \varepsilon) \downarrow \log g$ (όπου $\log 0 = -\infty$). Εφαρμόζοντας μονότονη σύγκλιση στη μη αρνητική ακολουθία

$$\log(g + 1) - \log(g + \varepsilon) \uparrow \log(g + 1) - \log g,$$

παίρνουμε

$$\int_X \log(g + \varepsilon) \, d\mu \longrightarrow \int_X \log g \, d\mu$$

στο $[-\infty, \infty)$. Άρα, αφήνοντας $\varepsilon \downarrow 0$,

$$\int_X \log g \, d\mu \leq \log \left(\int_X g \, d\mu \right).$$

Επειδή $\log g = p \log |f|$ και $\int_X g \, d\mu = \|f\|_p^p$, καταλήγουμε

$$p \int_X \log |f| \, d\mu \leq p \log \|f\|_p,$$

και επομένως

$$\int_X \log |f| \, d\mu \leq \log \|f\|_p.$$

11.25. Έστω E, F Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$, με $\lambda(E) < \infty$.

(i) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(ii) Δείξτε ότι $n \cdot (\chi_E * \chi_{[0,1/n]}) \rightarrow \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. (i) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)] \chi_F(z) \, d\lambda(z) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| \, d\lambda(z). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε

$$\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y)) = f(z+(x-y)).$$

Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L^1(\mathbb{R})$. Από γνωστή πρόταση έπεται ότι

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x \rightarrow y} \int_{\mathbb{R}} |f - f_{x-y}| d\lambda = 0.$$

(ii) Με χρήση του θεωρήματος παραγωγίσις του Lebesgue: Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \chi_{[0,1/n]}(z) d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγωγίσις του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned} |n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)] \chi_{[0,1/n]}(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n, x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

για κάθε σημείο Lebesgue x της χ_E , δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

11.26. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος σ -πεπερασμένου μέτρου και $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L^1(\mu)$ ισχύει και $f \cdot g \in L^1(\mu)$. Να δείξετε ότι $g \in L^\infty(\mu)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty(\mu)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$E_n = \{x : |g(x)| \geq n\}$$

έχει θετικό μέτρο. Επειδή το μ είναι σ -πεπερασμένο, για κάθε n μπορούμε να επιλέξουμε μετρήσιμο $A_n \subseteq E_n$ με $0 < \mu(A_n) < \infty$. Θέτουμε

$$u(x) = \begin{cases} \overline{g(x)}/|g(x)|, & g(x) \neq 0, \\ 0, & g(x) = 0, \end{cases}$$

ώστε $|u| \leq 1$ και $u(x)g(x) = |g(x)|$, και ορίζουμε

$$f(x) = u(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \chi_{A_n}(x).$$

Από το θεώρημα Beppo Levi,

$$\int_X |f| d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

άρα $f \in L^1(\mu)$. Από την άλλη, πάλι με Beppo Levi,

$$\begin{aligned} \int_X |fg| d\mu &= \int_X |g| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \int_{A_n} |g| d\mu \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \mu(A_n)} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \end{aligned}$$

σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $fg \in L^1(\mu)$. Συνεπώς $g \in L^\infty(\mu)$.

11.27. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f \in L^p[0, 1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Λύση. Για $h \in L^p[0, 1]$ συμβολίζουμε με $T_n h$ τη συνάρτηση που σε κάθε $J_{n,k}$ είναι ίση με τον μέσο όρο $2^n \int_{J_{n,k}} h d\lambda$. Από την ανισότητα Jensen, για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$|T_n h|^p \leq T_n(|h|^p)$$

σε κάθε δυαδικό διάστημα. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\|T_n h\|_p \leq \|h\|_p.$$

Άρα οι τελεστές $T_n : L^p[0, 1] \rightarrow L^p[0, 1]$ είναι συστολές, ομοιόμορφα ως προς n .

Αν g είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η ομοιόμορφη συνέχειά της δίνει

$$\|T_n g - g\|_\infty \rightarrow 0,$$

άρα και $\|T_n g - g\|_p \rightarrow 0$. Τώρα, για $f \in L^p[0, 1]$ και $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε συνεχή g με $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Τότε

$$\begin{aligned} \|T_n f - f\|_p &\leq \|T_n(f - g)\|_p + \|T_n g - g\|_p + \|g - f\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \|T_n g - g\|_p. \end{aligned}$$

Αφήνοντας πρώτα $n \rightarrow \infty$ και κατόπιν $\varepsilon \rightarrow 0$ παίρνουμε $\|T_n f - f\|_p \rightarrow 0$. Επειδή $T_n f = f_n$, έχουμε το ζητούμενο. Η απόδειξη αυτή καλύπτει ταυτόχρονα και την οριακή περίπτωση $p = 1$.

11.28. Έστω $1 < p < \infty$ και μια συνάρτηση $f \in L^p[0, \infty)$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| &\leq \int_0^x |f(t)| d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)| \chi_{[0,x]}(t) d\lambda(t) \\ &\leq \|f\|_p \|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned} \|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q d\lambda \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]} d\lambda \right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p d\lambda \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α , διότι $|f|^p \chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \rightarrow \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_\alpha^\infty |f|^p d\lambda = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty |f|^p d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p d\lambda \right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*) \quad \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^\alpha |f(t)| d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}} \int_\alpha^x |f(t)| d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{1/q}} \int_\alpha^x |f(t)| d\lambda(t) &\leq \frac{1}{x^{1/q}} \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p \|\chi_{[\alpha,x]}\|_q \\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}} \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p \\ &\leq \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η (*) δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^\alpha |f(t)| d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^\alpha |f(t)| d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

11.29. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $c_1, c_2, \dots, c_m > 0$ με $c_1 + c_2 + \dots + c_m = 1$. Να δείξετε ότι αν $f_1, f_2, \dots, f_m : X \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\mu \leq \prod_{i=1}^m \left(\int |f_i| d\mu \right)^{c_i},$$

όπου, αν κάποιο $\int |f_i| d\mu$ είναι μηδέν, το δεξί μέλος ερμηνεύεται ως 0 (ακόμη και αν κάποιος άλλος παράγοντας είναι $+\infty$).

Υπόδειξη. Αν $\int_X |f_i| d\mu = 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού. Επομένως το αριστερό μέλος είναι 0 και, με τη σύμβαση της εκφώνησης για το δεξί μέλος, η ανισότητα ισχύει.

Αν $\int_X |f_i| d\mu = +\infty$ για κάποιο i , το δεξί μέλος είναι $+\infty$ και η ανισότητα είναι άμεση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$0 < \int_X |f_i| d\mu < +\infty, \quad i = 1, \dots, m.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_X |f_i| d\mu} f_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Τότε, $\int_X |g_i| d\mu = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \ln(|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \dots |g_m(x)|^{c_m}) &= c_1 \ln(|g_1(x)|) + c_2 \ln(|g_2(x)|) + \dots + c_m \ln(|g_m(x)|) \\ &\leq \ln(c_1 |g_1(x)| + c_2 |g_2(x)| + \dots + c_m |g_m(x)|), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \dots |g_m(x)|^{c_m} \leq c_1 |g_1(x)| + c_2 |g_2(x)| + \dots + c_m |g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i . Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_X \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} \right) d\mu \leq c_1 \int_X |g_1| d\mu + \dots + c_m \int_X |g_m| d\mu = c_1 + \dots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_X |f_i| d\mu \right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_X \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\mu \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_X |f_i| d\mu \right)^{c_i}.$$

11.30. Υποθέτουμε ότι $f \in L^p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leq p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1 \leq p < 2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p \rightarrow 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \leq M^p$$

για κάθε $p \in [1, 2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} d\lambda \leq M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \rightarrow |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p \rightarrow 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$, παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leq p < 2$,

$$|f|^p \leq |f| \chi_{\{|f| < 1\}} + |f|^2 \chi_{\{|f| \geq 1\}} \leq |f| + |f|^2.$$

Η συνάρτηση $|f| + |f|^2$ είναι ολοκληρώσιμη, αφού $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, ενώ $|f|^p \rightarrow |f|^2$ σημειακά καθώς $p \rightarrow 2^-$. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda.$$

Επειδή συγχρόνως $1/p \rightarrow 1/2$, καταλήγουμε ότι

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

11.31. Έστω $f \in L^1[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f| d\lambda \leq C \sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0, 1]$. Δείξτε ότι $f \in L^p[0, 1]$ για κάθε $1 \leq p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L^2[0, 1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geq t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leq \int_{A_t} |f| d\lambda \leq C \sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή

$$\lambda(A_t) \leq \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leq p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) dt \\ &= \int_0^1 p t^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) dt + \int_1^\infty p t^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) dt \\ &\leq \int_0^1 p t^{p-1} d\lambda(t) + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty \end{aligned}$$

διότι $p-3 < -1$. Άρα, $f \in L^p([0, 1])$.

Για το δεύτερο ερώτημα η απάντηση είναι αρνητική. Πράγματι, θέτουμε

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1.$$

Τότε $f \in L^1[0, 1]$ αλλά $f \notin L^2[0, 1]$. Επιπλέον, αν $A \subseteq [0, 1]$ είναι μετρήσιμο και $a = \lambda(A)$, επειδή η $x \mapsto x^{-1/2}$ είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\int_A \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) \leq \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = 2\sqrt{a}.$$

Άρα η υπόθεση της άσκησης ισχύει με $C = 2$, χωρίς όμως να ισχύει $f \in L^2[0, 1]$.

11.32. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμη, $E = \text{supp}(f)$, για την οποία ισχύει

$$(*) \quad \int_E \exp(f(x)) d\lambda(x) = 1$$

Αποδείξτε ότι $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $\|f\|_p \leq Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μιας μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την (*) αλλά $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,

$$t^p \leq \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\lambda = \int_E f^p d\lambda \leq \frac{p^p}{e^p} \int_E e^{f(x)} d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα

$$\|f\|_p \leq \frac{1}{e} p.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θέτουμε $Q = (0, 1/4) \times (0, 1)^{n-1}$ και ορίζουμε

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{x_1} \quad \text{στο } Q,$$

ενώ $f = 0$ έξω από το Q . Τότε $f \geq 0$, δεν είναι ουσιωδώς φραγμένη και, επειδή ο κύβος $(0, 1)^{n-1}$ έχει μέτρο 1,

$$\int_E e^{f(x)} d\lambda(x) = \int_Q e^{f(x)} d\lambda(x) = \int_0^{1/4} \frac{dx_1}{\sqrt{x_1}} = 1.$$

(Η διαφορά του $E = \text{supp}(f)$ από το Q βρίσκεται στο σύνορο και έχει μέτρο μηδέν.)

11.33. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου με $\mu(X) > 0$ και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Ορίζουμε το ουσιώδες πεδίο τιμών της f να είναι το σύνολο R_f όλων των $a \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - a| < \varepsilon\}) > 0.$$

(i) Να δείξετε ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(ii) Αν $f \in L^\infty$ να δείξετε ότι το R_f είναι συμπαγές και $\|f\|_\infty = \max\{|a| : a \in R_f\}$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a_n \in R_f$ με $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$. Για κάθε n και $\delta > 0$ θέτουμε $G_n(\delta) = \{x \in X : |f(x) - a_n| < \delta\}$. Από την υπόθεση, $\mu(G_n(\delta)) > 0$ για κάθε n και $\delta > 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $G(\varepsilon) = \{x \in X : |f(x) - a| < \varepsilon\}$. Αφού $a_n \rightarrow a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a - a_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in G_{n_0}(\varepsilon/2)$ τότε

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

δηλαδή $x \in G(\varepsilon)$. Άρα, $G(\varepsilon) \supseteq G_{n_0}(\varepsilon/2)$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\mu(G(\varepsilon)) \geq \mu(G_{n_0}(\varepsilon/2)) > 0.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $a \in R_f$, και αυτό δείχνει ότι το R_f είναι κλειστό σύνολο.

(β) Θέτουμε $M = \|f\|_\infty$. Αν $|a| > M$, επιλέγουμε $0 < \varepsilon < |a| - M$. Τότε

$$\{|f - a| < \varepsilon\} \subseteq \{|f| > M\},$$

οπότε το πρώτο σύνολο έχει μέτρο μηδέν. Άρα $a \notin R_f$ και συνεπώς

$$R_f \subseteq \{a \in \mathbb{C} : |a| \leq M\}.$$

Από το (α), το R_f είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές.

Μένει να δείξουμε ότι το R_f είναι μη κενό και ότι $\max\{|a| : a \in R_f\} = M$. Επειδή $|f| \leq M$ σχεδόν παντού, το ουσιώδες πεδίο τιμών της f βρίσκεται στον συμπαγή δίσκο $D = \{z : |z| \leq M\}$. Αν $R_f = \emptyset$, τότε για κάθε $z \in D$ υπάρχει $\varepsilon_z > 0$ ώστε

$$\mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon_z))) = 0.$$

Μια πεπερασμένη υποκάλυψη του D θα έδινε $\mu(X) = 0$, επειδή $f(x) \in D$ σχεδόν παντού, σε αντίθεση

με την υπόθεση $\mu(X) > 0$. Άρα $R_f \neq \emptyset$. Εφόσον είναι συμπαγές, υπάρχει

$$c = \max\{|a| : a \in R_f\} \leq M.$$

Αν $M = 0$, αναγκαστικά $c = 0 = M$. Αν $M > 0$ και ήταν $c < M$, επιλέγουμε r με $c < r < M$. Το συμπαγές σύνολο

$$K = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq M\}$$

δεν τέμνει το R_f . Για κάθε $z \in K$ υπάρχει λοιπόν $\varepsilon_z > 0$ ώστε

$$\mu(f^{-1}(B(z, \varepsilon_z))) = 0.$$

Μια πεπερασμένη υποκάλυψη του K δίνει

$$\mu(\{|f| \geq r\}) = 0,$$

αφού $|f| \leq M$ σχεδόν παντού. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό του $M = \|f\|_\infty$, επειδή $r < M$. Άρα $c = M$.

11.34. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ είναι μετρήσιμες, να δείξετε ότι ισχύουν οι εξής:

$$\begin{aligned} \int fg \, d\mu &\geq \left(\int f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int g^q \, d\mu \right)^{1/q} \\ \left(\int (f+g)^p \, d\mu \right)^{1/p} &\geq \left(\int f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int f^p \, d\mu &= \int (fg)^p g^{-p} \, d\mu \\ &\leq \left(\int fg \, d\mu \right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}} \, d\mu \right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg \, d\mu \right)^p \left(\int g^q \, d\mu \right)^{-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1-p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg \, d\mu \right)^p \geq \left(\int f^p \, d\mu \right) \left(\int g^q \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο. Η παραπάνω γραφή γίνεται αρχικά στην περίπτωση $g > 0$ σχεδόν παντού και $0 < \int g^q \, d\mu < \infty$, ώστε όλες οι δυνάμεις και τα γινόμενα να είναι καλά ορισμένα. Οι οριακές περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με κατάλληλη αποκοπή και πέρασμα στο όριο, με τη σύμβαση $0^q = +\infty$ για $q < 0$.

Για τη δεύτερη ανισότητα, θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $f+g > 0$ σχεδόν παντού η γενική περίπτωση προκύπτει με αποκοπή στα σύνολα $\{f+g > 1/m\}$ και πέρασμα στο όριο. Χρησιμοποιώντας

την προηγούμενη ανισότητα, γράφουμε

$$\left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\mu \right)^{1/q} \leq \int f(f+g)^{-(1-p)} d\mu$$

και

$$\left(\int g^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\mu \right)^{1/q} \leq \int g(f+g)^{-(1-p)} d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \left[\left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\mu \right)^{1/q} \\ & \leq \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} d\mu = \int (f+g)^p d\mu. \end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \left(\int f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\mu \right)^{1/p} & \leq \left(\int (f+g)^p d\mu \right)^{1-1/q} \\ & = \left(\int (f+g)^p d\mu \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

11.35. Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$, τότε ο $L^q[0, 1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L^p[0, 1]$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L^q[0, 1]$ έχουμε $f \in L^p[0, 1]$. Δηλαδή, $L^q[0, 1] \subseteq L^p[0, 1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L^p[0, 1] : \|f\|_q \leq n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L^q[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L^p[0, 1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$ -κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n , δηλαδή $\|f_k\|_q \leq n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leq n$: αφού $f_k \xrightarrow{L^p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-p} \|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Αν $q < \infty$, τότε $|f_{k_s}|^q \rightarrow |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q d\lambda \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} \int |f_{k_s}|^q d\lambda \leq n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leq n$. Αν $q = \infty$, για κάθε s έχουμε $|f_{k_s}| \leq n$ σχεδόν παντού. Επειδή πρόκειται για αριθμήσιμη οικογένεια, υπάρχει κοινό μηδενικό σύνολο έξω από το οποίο οι ανισότητες αυτές ισχύουν για όλα τα

s. Περνώντας στο σημειακό όριο, παίρνουμε $|f| \leq n$ σχεδόν παντού. Και στις δύο περιπτώσεις $f \in F_n$.
 (β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in L^p[0, 1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \not\subseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1 - \alpha p)^{1/p}}{2t^\alpha},$$

η οποία ανήκει στον $L^p[0, 1] \setminus L^q[0, 1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L^p[0, 1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f, \varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$. Μένει να αιτιολογήσουμε ότι $f + h \notin L^q[0, 1]$. Αν συνέβαινε $f + h \in L^q[0, 1]$, τότε, επειδή ήδη $f \in F_n \subseteq L^q[0, 1]$ και ο L^q είναι γραμμικός χώρος (και για $q = \infty$), θα είχαμε

$$h = (f + h) - f \in L^q[0, 1],$$

σε αντίθεση με την επιλογή του h . Επομένως $f + h \notin L^q[0, 1]$, άρα ιδίως $f + h \notin F_n$.

11.36. Έστω $1 < p < \infty$ και $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ μη αρνητικές συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lambda(\{g > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{g > \alpha\}} f \, d\lambda$$

για κάθε $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι

$$\|g\|_p \leq q \|f\|_p,$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p .

Υπόδειξη. Αν $\|g\|_p = 0$, τότε το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\|g\|_p > 0$. Με τον τύπο κατανομής και το θεώρημα Tonelli γράφουμε

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} g^p \, d\lambda = \int_0^\infty p\alpha^{p-1} \lambda(\{x : g(x) > \alpha\}) \, d\alpha \leq \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \int_{\{g > \alpha\}} f \, d\lambda \, d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^\infty p\alpha^{p-2} \chi_{(0, g(x))}(\alpha) \, d\alpha \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_0^{g(x)} p\alpha^{p-2} \, d\alpha \, d\lambda(x) \\ &= \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x)^{p-1} \, d\lambda(x) \leq \frac{p}{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}} f^p \, d\lambda \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}} g^{q(p-1)} \, d\lambda \right)^{1/q} \\ &= q \|f\|_p \left(\int_{\mathbb{R}} g^p \, d\lambda \right)^{1/q} = q \|f\|_p \|g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Επειδή $\|g\|_p > 0$ και $p - p/q = 1$, διαιρούμε με $\|g\|_p^{p/q}$ και παίρνουμε

$$\|g\|_p \leq q \|f\|_p.$$

11.37. Έστω $g \in L^2([0, 1])$ και $\alpha > 0$ ώστε

$$1 \leq \|g\|_2 \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\lambda(\{x \in [0, 1] : |g(x)| \geq \alpha/2\}) \geq \frac{\alpha^2}{4}.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \{x \in [0, 1] : |g(x)| \geq \alpha/2\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{[0,1] \setminus A} |g| d\lambda \leq \frac{\alpha}{2} \lambda([0, 1] \setminus A) \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{1}{2} \|g\|_1$$

διότι $\alpha \leq \|g\|_1$ από την υπόθεση. Συνεπώς,

$$\int_A |g| d\lambda \geq \frac{1}{2} \|g\|_1.$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε

$$\int_A |g| d\lambda \leq \left(\int_A |g|^2 d\lambda \right)^{1/2} \sqrt{\lambda(A)} \leq \|g\|_2 \sqrt{\lambda(A)} \leq \frac{1}{\alpha} \|g\|_1 \sqrt{\lambda(A)}.$$

Από την άλλη, όπως είδαμε,

$$\int_A |g| d\lambda \geq \frac{1}{2} \|g\|_1.$$

Επειδή $\|g\|_1 > 0$, συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες και απλοποιώντας τον παράγοντα $\|g\|_1$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\lambda(A)},$$

και επομένως

$$\lambda(A) \geq \frac{\alpha^2}{4},$$

όπως θέλαμε.

11.38. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t(x) = tf(tx)$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}} |f - f_t| d\lambda = 0.$$

Υπόδειξη. Για $t > 0$ θέτουμε $T_t f(x) = tf(tx)$. Με αλλαγή μεταβλητής έχουμε

$$\|T_t f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} t|f(tx)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(u)| d\lambda(u) = \|f\|_1,$$

άρα κάθε T_t είναι ισομετρία του $L^1(\mathbb{R})$.

Αρχικά έστω $g \in C_c(\mathbb{R})$. Αν $t \rightarrow 1$, τότε $tg(tx) \rightarrow g(x)$ για κάθε x . Επιπλέον, για t αρκετά κοντά στο 1, όλα τα $tg(tx)$ και $g(x)$ μηδενίζονται έξω από ένα κοινό συμπαγές διάστημα και είναι ομοιόμορφα φραγμένα. Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\|T_t g - g\|_1 \rightarrow 0.$$

Για γενικό $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$, από την πυκνότητα του $C_c(\mathbb{R})$ στο $L^1(\mathbb{R})$ επιλέγουμε $g \in C_c(\mathbb{R})$ ώστε

$\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Τότε

$$\begin{aligned}\|T_t f - f\|_1 &\leq \|T_t(f - g)\|_1 + \|T_t g - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\ &= 2\|f - g\|_1 + \|T_t g - g\|_1.\end{aligned}$$

Για t αρκετά κοντά στο 1 ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος από ε , οπότε

$$\|T_t f - f\|_1 < 3\varepsilon.$$

Άρα

$$\lim_{t \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - tf(tx)| d\lambda(x) = 0.$$

11.39. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Αποδείξτε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g : X \rightarrow (a, b)$, $g \in L^1(\mu)$ τότε

$$F\left(\int_X g d\mu\right) \leq \int_X F \circ g d\mu.$$

[Υπόδειξη: Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geq F'(t_0)(g(x) - t_0)$ όπου $t_0 = \int_X g d\mu$ και ολοκληρώστε.]

Υπόδειξη: Παρατηρούμε αρχικά ότι $t_0 = \int_X g d\mu \in (a, b)$. Πράγματι, επειδή $g(x) > a$ για κάθε $x \in X$, τα σύνολα

$$A_n = \{x \in X : g(x) \geq a + 1/n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

καλύπτουν το X . Αφού $\mu(X) = 1$, κάποιο A_n έχει θετικό μέτρο, και συνεπώς

$$t_0 - a = \int_X (g - a) d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(A_n) > 0.$$

Με τον ίδιο τρόπο, εφαρμόζοντας το επιχείρημα στη θετική συνάρτηση $b - g$, παίρνουμε $b - t_0 > 0$. Άρα $a < t_0 < b$. Από την κυρτότητα της F , για κάθε $y \in (a, b)$ έχουμε

$$F(y) \geq F(t_0) + F'(t_0)(y - t_0).$$

Επειδή η F είναι παραγωγίσιμη, είναι συνεχής στο (a, b) , άρα η $F \circ g$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, η παραπάνω ανισότητα δίνει

$$F(g(x)) \geq F(t_0) + F'(t_0)(g(x) - t_0).$$

Το δεξί μέλος είναι ολοκληρώσιμο, αφού $g \in L^1(\mu)$. Συνεπώς το αρνητικό μέρος $(F \circ g)^-$ είναι ολοκληρώσιμο (πράγματι, αν $H = F(t_0) + F'(t_0)(g - t_0)$, τότε $F \circ g \geq H$ και άρα $(F \circ g)^- \leq H^-$), οπότε το $\int_X F \circ g d\mu$ είναι καλά ορισμένο ως στοιχείο του $(-\infty, +\infty]$. Αν είναι $+\infty$, η ζητούμενη ανισότητα είναι άμεση. Διαφορετικά μπορούμε να ολοκληρώσουμε την παραπάνω ανισότητα και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_X F(g(x)) d\mu(x) &\geq F(t_0) + F'(t_0) \int_X (g(x) - t_0) d\mu(x) \\ &= F(t_0),\end{aligned}$$

επειδή $\mu(X) = 1$ και $t_0 = \int_X g \, d\mu$. Άρα

$$F\left(\int_X g \, d\mu\right) = F(t_0) \leq \int_X F \circ g \, d\mu.$$

11.40. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $f \in L^p(\mu)$ για κάποιον $p > 0$. Αποδείξτε ότι (με τη σύμβαση $\ln 0 = -\infty$):

- (i) $f \in L^q(\mu)$ για κάθε $0 < q < p$.
- (ii) $\ln \|f\|_q \geq \int_X \ln |f| \, d\mu$ για κάθε $0 < q < p$.
- (iii) $(\int_X |f|^q \, d\mu - 1)/q \geq \ln \|f\|_q$ και $(\int_X |f|^q \, d\mu - 1)/q \rightarrow \int_X \ln |f| \, d\mu$ όταν $q \rightarrow 0^+$.
- (iv) $\lim_{q \rightarrow 0^+} \|f\|_q = \exp(\int_X \ln |f| \, d\mu)$.

Υπόδειξη: (i) Παρατηρούμε ότι

$$\int_X |f|^q \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_X 1 \, d\mu\right)^{1-\frac{q}{p}} = \|f\|_p^q < +\infty$$

από την ανισότητα Hölder και το γεγονός ότι $\int_X 1 \, d\mu = \mu(X) = 1$. Άρα, $f \in L^q(\mu)$ και μάλιστα $\|f\|_q \leq \|f\|_p$.

(ii) Υποθέτουμε αρχικά ότι η $g = \ln |f|^q$ είναι ολοκληρώσιμη. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη άσκηση για την $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(t) = e^t$ και την $g = \ln |f|^q$ έχουμε

$$\exp\left(q \int_X \ln |f| \, d\mu\right) = \exp\left(\int_X \ln(|f|^q) \, d\mu\right) \leq \int_X \exp(\ln(|f|^q)) \, d\mu = \int_X |f|^q \, d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_X \ln |f| \, d\mu \leq \frac{1}{q} \ln\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right) = \ln\left(\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right) = \ln \|f\|_q.$$

Έστω τώρα ότι η $g = \ln |f|^q$ δεν είναι ολοκληρώσιμη. Από την $\ln y \leq y - 1$ έχουμε ότι $0 \leq g^+ = \max\{0, g\} \leq |f|^q$ και αφού η $|f|^q$ είναι ολοκληρώσιμη συμπεραίνουμε ότι $\int_X g^+ \, d\mu < \infty$. Αναγκαστικά, έχουμε $\int_X g^- \, d\mu = +\infty$, δηλαδή $\int_X g \, d\mu = -\infty$. Έπεται ότι $\int_X \ln |f| \, d\mu = -\infty$, άρα η ζητούμενη ανισότητα ισχύει και πάλι.

(iii) Από την $\ln y \leq y - 1$ παίρνουμε

$$\ln\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right) \leq \int_X |f|^q \, d\mu - 1.$$

Όμως,

$$\ln\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right) = \ln \|f\|_q^q = q \ln \|f\|_q.$$

Συνεπώς,

$$\ln \|f\|_q = \frac{1}{q} \ln\left(\int_X |f|^q \, d\mu\right) \leq \frac{1}{q} \left(\int_X |f|^q \, d\mu - 1\right).$$

Για το όριο θέτουμε $A = \{|f| \leq 1\}$ και $B = \{|f| > 1\}$. Για σταθερό $a > 0$ η συνάρτηση

$$h_a(q) = \frac{a^q - 1}{q}, \quad q > 0,$$

είναι αύξουσα ως προς q και $h_a(q) \rightarrow \ln a$ όταν $q \rightarrow 0^+$. Στο A οι συναρτήσεις

$$v_q = \frac{1 - |f|^q}{q}$$

είναι μη αρνητικές και, καθώς $q \downarrow 0$, αυξάνουν σημειακά προς $-\ln |f|$ (με τιμή $+\infty$ όπου $f = 0$). Άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_A \frac{|f|^q - 1}{q} d\mu \rightarrow \int_A \ln |f| d\mu.$$

Στο B , διαλέγουμε $q_0 \in (0, p)$. Για $0 < q \leq q_0$ έχουμε

$$0 \leq \frac{|f|^q - 1}{q} \leq \frac{|f|^{q_0} - 1}{q_0} \leq \frac{|f|^{q_0}}{q_0},$$

και η τελευταία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη από το (i). Επομένως, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_B \frac{|f|^q - 1}{q} d\mu \rightarrow \int_B \ln |f| d\mu.$$

Συνδυάζοντας τα δύο μέρη (με την ισότητα να νοείται και στην περίπτωση που το δεξί μέλος είναι $-\infty$), παίρνουμε

$$\lim_{q \rightarrow 0^+} \frac{\int_X |f|^q d\mu - 1}{q} = \int_X \ln |f| d\mu.$$

(iv) Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\|f\|_q = 0$ για κάθε $q > 0$ και, με τη σύμβαση $e^{-\infty} = 0$, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι f δεν είναι μηδέν σχεδόν παντού, οπότε $\|f\|_q > 0$ για κάθε $q > 0$. Συνδυάζοντας τα (ii) και (iii) γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_X \ln |f| d\mu &\leq \liminf_{q \rightarrow 0^+} \ln \|f\|_q \leq \limsup_{q \rightarrow 0^+} \ln \|f\|_q \\ &\leq \liminf_{q \rightarrow 0^+} (\int_X |f|^q d\mu - 1)/q = \int_X \ln |f| d\mu. \end{aligned}$$

Οι ανισότητες νοούνται και όταν το κοινό άκρο είναι $-\infty$. Άρα $\ln \|f\|_q \rightarrow \int_X \ln |f| d\mu$ όταν $q \rightarrow 0^+$. Έπεται ότι

$$\|f\|_q \rightarrow \exp\left(\int_X \ln |f| d\mu\right) \quad \text{όταν } q \rightarrow 0^+,$$

με τη σύμβαση $e^{-\infty} = 0$.

11.41. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$ -μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty p t^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\}) d\lambda(t).$$

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in X$,

$$|f(x)|^p = \int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt = \int_0^\infty pt^{p-1} \chi_H(x, t) dt,$$

όπου $H = \{(x, t) \in X \times (0, \infty) : 0 < t < |f(x)|\}$. Το H είναι μετρήσιμο, αφού η $(x, t) \mapsto |f(x)| - t$ είναι μετρήσιμη. Επομένως, από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_X |f(x)|^p d\mu(x) &= \int_X \int_0^\infty pt^{p-1} \chi_H(x, t) dt d\mu(x) \\ &= \int_0^\infty pt^{p-1} \left(\int_X \chi_H(x, t) d\mu(x) \right) dt \\ &= \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(\{x : |f(x)| > t\}) dt. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει και όταν τα δύο μέλη είναι $+\infty$. Παρατηρούμε μάλιστα ότι δεν απαιτείται καμία υπόθεση περατότητας ή σ -περατότητας για το μ .

11.42. Έστω $f_n \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ πραγματικές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_{\mathbb{R}} f_n f_m d\lambda = 0$ για κάθε $m \neq n$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = 1$ για κάθε n .

(α) Αποδείξτε ότι για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και κάθε $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: (α) Υψώνοντας στο τετράγωνο την $\sum_{n=1}^N c_n f_n$, ολοκληρώνοντας και χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις, παίρνουμε

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n f_n \right\|_2^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N c_n c_k \int_{\mathbb{R}} f_n f_k d\lambda = \sum_{n=1}^N c_n^2 \int_{\mathbb{R}} f_n^2 d\lambda = \sum_{n=1}^N c_n^2.$$

(β) Όπως στο (α) βλέπουμε ότι για κάθε $n > m$ ισχύει ότι

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} f_k \right\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=m+1}^\infty \frac{1}{k^2} \rightarrow 0$$

όταν τα $n, m \rightarrow \infty$ (διότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει). Αυτό δείχνει ότι η ακολουθία $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} f_k$ των μερικών

αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} f_k$ είναι βασική στον $L^2(\mathbb{R})$, άρα συγκλίνει (σε κάποια f) στον $L^2(\mathbb{R})$.

Συνεπώς, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} f_n$ συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$.

11.43. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου, $\alpha > 0$, $0 < r < p$ και $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in L^p(\mu)$ με $\|f_n\|_p \leq \alpha$ για κάθε n και $f_n(x) \rightarrow f(x)$ σχεδόν παντού. Αποδείξτε ότι $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

Ισχύει το ίδιο αν $\mu(X) = \infty$ ή $r = p$;

Υπόδειξη. Από το λήμμα του Fatou,

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n|^p d\mu \leq \alpha^p,$$

άρα $f \in L^p(\mu)$ και $\int_X |f|^p d\mu \leq \alpha^p$. Θέτουμε $h_n = f_n - f$ και

$$C_p = \begin{cases} 1, & 0 < p \leq 1, \\ 2^{p-1}, & p \geq 1. \end{cases}$$

Από την στοιχειώδη ανισότητα $|a - b|^p \leq C_p(|a|^p + |b|^p)$ παίρνουμε

$$\int_X |h_n|^p d\mu \leq 2C_p \alpha^p.$$

Αν θέσουμε $M = (2C_p)^{1/p} \alpha$, τότε $(\int_X |h_n|^p d\mu)^{1/p} \leq M$ για κάθε n . Επειδή $0 < r < p$, η ανισότητα Hölder, με εκθέτες p/r και $p/(p-r)$, δίνει

$$\int_X |h_n|^r d\mu \leq \left(\int_X |h_n|^p d\mu \right)^{r/p} \mu(X)^{1-r/p} \leq M^r \mu(X)^{1-r/p}.$$

Για να πάρουμε όμως σύγκλιση στο μηδέν, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Egorov. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$M^r \delta^{1-r/p} < \frac{\varepsilon^r}{2}.$$

Υπάρχει μετρήσιμο $E \subseteq X$ με $\mu(X \setminus E) < \delta$ τέτοιο ώστε $h_n \rightarrow 0$ ομοιόμορφα στο E . Άρα, για αρκετά μεγάλο n ,

$$\sup_{x \in E} |h_n(x)|^r < \frac{\varepsilon^r}{2(\mu(X) + 1)},$$

και συνεπώς

$$\int_E |h_n|^r d\mu < \frac{\varepsilon^r}{2}.$$

Στο συμπλήρωμα του E , πάλι από την Hölder,

$$\int_{X \setminus E} |h_n|^r d\mu \leq \mu(X \setminus E)^{1-r/p} \|h_n\|_p^r < \delta^{1-r/p} M^r < \frac{\varepsilon^r}{2}.$$

Άρα, για αρκετά μεγάλο n ,

$$\|f_n - f\|_r^r = \int_X |h_n|^r d\mu < \varepsilon^r,$$

οπότε $\|f_n - f\|_r \rightarrow 0$.

Αν $\mu(X) = \infty$, το συμπέρασμα μπορεί να αποτύχει. Πράγματι, στο $X = [0, \infty)$ με μέτρο Lebesgue, για τα ίδια $0 < r < p$ θέτουμε

$$f_n = n^{-1/p} \chi_{[0, n]}.$$

Τότε $\|f_n\|_p = 1$ για κάθε n και $f_n \rightarrow 0$ σημειακά (μάλιστα ομοιόμορφα), ενώ

$$\|f_n\|_r^r = \int_0^n n^{-r/p} d\lambda = n^{1-r/p} \rightarrow \infty.$$

Άρα η υπόθεση $\mu(X) < \infty$ δεν μπορεί να παραλειφθεί, για κανένα ζεύγος $0 < r < p$.

Επίσης, αν $r = p$, το συμπέρασμα δεν ισχύει γενικά ούτε όταν $\mu(X) < \infty$. Στο $X = [0, 1]$, για το ίδιο $p > 0$, θέτουμε

$$f_n = n^{1/p} \chi_{(0, 1/n)}.$$

Τότε $f_n \rightarrow 0$ σχεδόν παντού και $\|f_n\|_p = 1$ για κάθε n , άρα $\|f_n - 0\|_p = 1 \not\rightarrow 0$. Έτσι η αυστηρή ανισότητα $r < p$ είναι ουσιώδης για κάθε $p > 0$.

11.44. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Αποδείξτε, με την ισότητα να νοείται και στην εκτεταμένη πραγματική ευθεία, ότι

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Αν επιπλέον $0 \neq f \in L_\infty(\mu)$ και $\gamma_n = \int_X |f|^n d\mu$, αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \|f\|_\infty$.

Υπόδειξη: (α) Αν $\|f\|_\infty = +\infty$, τότε για κάθε $M > 0$ το σύνολο $B_M = \{|f| \geq M\}$ έχει θετικό μέτρο. Επομένως

$$\|f\|_p \geq M [\mu(B_M)]^{1/p},$$

οπότε $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq M$. Επειδή το $M > 0$ είναι αυθαίρετο, $\|f\|_p \rightarrow +\infty$.

Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Έστω λοιπόν $0 \neq f \in L_\infty(\mu)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty^p d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(X)$. Επίσης, $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} \rightarrow \|f\|_\infty$ καθώς το $p \rightarrow \infty$, άρα $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geq \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p \rightarrow \infty} [\mu(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

(β) Έχουμε $|f|^{n+1} \leq |f|^n \|f\|_\infty$ σχεδόν παντού, άρα

$$\int_X |f|^{n+1} d\mu \leq \|f\|_\infty \int_X |f|^n d\mu.$$

Επομένως, για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \frac{\int_X |f|^{n+1} d\mu}{\int_X |f|^n d\mu} \leq \|f\|_\infty,$$

συνεπώς

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \leq \|f\|_{\infty}.$$

Από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\int_X |f|^n d\mu \leq \left(\int_X |f|^{n+1} d\mu \right)^{\frac{n}{n+1}} \mu(X)^{\frac{1}{n+1}},$$

άρα

$$\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \geq \frac{\left(\int_X |f|^{n+1} d\mu \right)^{\frac{1}{n+1}}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\|f\|_{n+1}}{\mu(X)^{\frac{1}{n+1}}}.$$

Επειδή $f \neq 0$, έχουμε $\mu(X) > 0$, και συνεπώς $\mu(X)^{1/(n+1)} \rightarrow 1$. Από το (α) γνωρίζουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{n+1} = \|f\|_{\infty}$, άρα

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \geq \|f\|_{\infty}.$$

Έπεται το ζητούμενο.