Εισαγωγή στο πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Γύρος (tour, Hamiltonian cycle) είναι ένα μονοπάτι (path), που αρχίζει σε ένα δοσμένο κόμβο, περνάει από κάθε άλλο κόμβο ακριβώς μια φορά και καταλήγει στον αρχικό κόμβο.

Το πρόβλημα του *περιοδεύοντος πωλητή (travelling salesman)* συνίσταται στην εύρεση του ελάχιστου γύρου σε γράφο G με βάρη στις ακμές του.

Το πρόβλημα του περιοδεύοντος πωλητή

Έστω γράφος $G(V, E)$ (κατευθυντικός ή μη). Σε κάθε ακμή $e \in E$ αποδίδεται μη αρνητικό κόστος (ή βάρος) c_e. Να βρεθεί ένας γύρος (Χαμιλτώνιος κύκλος) στον G, τέτοιος ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των ακμών του.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας ο γράφος G μπορεί να υποτεθεί πλήρης (στην περίπτωση που δεν είναι μπορούν να συμπληρωθούν οι ελλείπουσες ακμές με ακμές πολύ μεγάλου κόστους).

Αν ο γράφος είναι μη κατευθυντικός, το πρόβλημα λέγεται «συμμετρικό TSP».

Το πρόβλημα είναι NP-hard.

Το TSP μπορεί να θεωρηθεί πρόβλημα μεταθέσεων

Έστω $\mathcal{P}_n$ η συλλογή όλων των μεταθέσεων (permutations) του συνόλου των κόμβων $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Το TSP είναι να βρεθεί ένα διάνυσμα $\pi = (\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)) \in \mathcal{P}_n$ τέτοιο που να ελαχιστοποιεί το άθροισμα

$$c_{(\pi(n),\pi(1))} + \sum_{i=1}^{n-1} c_{(\pi(i),\pi(i+1))}$$

όπου $c_{(i,j)} = c_e$ είναι το κόστος της ακμής $e = (i, j)$.

Μετρικό TSP

Συμμετρικό TSP, στο οποίο επιπροσθέτως οι ακμές ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα:

$$c_{(i,k)} \leq c_{(i,j)} + c_{(j,k)}$$

Δημοφιλείς ειδικές περιπτώσεις του μετρικού TSP

- Γεωμετρικό TSP: Οι κορυφές («πόλεις») είναι στο επίπεδο και η απόστασή τους ισούται με το μήκος της γραμμής που τις συνδέει, δηλαδή ισχύει η Ευκλείδια μετρική:

$$c_{((x_1,y_1),(x_2,y_2))} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Ορθογωνικό TSP: Ισχύει η απόσταση Manhattan:

$$c_{((x_1,y_1),(x_2,y_2))} = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

- Ισχύει η μέγιστη μετρική:

$$c_{((x_1,y_1),(x_2,y_2))} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Πολυπλοκότητα του γεωμετρικού TSP

Το σχετικό πρόβλημα απόφασης είναι μεν NP-hard, αλλά δεν είναι γνωστό αν είναι στο χώρο NP εξ αιτίας ενός «τεχνικού» προβλήματος, ότι δηλαδή δεν είναι γνωστή η ύπαρξη πολυωνυμικού αλγόριθμου που να διαπιστώνει κατά πόσο δεδομένων ακεραίων $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ισχύει $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{k_i} \leq C$.

Προσεγγίσεις για το μετρικό TSP

- Υπάρχει APX (approximable), ήτοι αλγόριθμος που εγγυάται αποτέλεσμα μικρότερο από ρL για σταθερό ρ.

- Δεν υπάρχει PTAS* για το μετρικό TSP.†

- Είναι γνωστός ο αλγόριθμος του Χριστοφίδη (1975) που μπορεί να δώσει πολυωνυμική προσεγγιστική λύση με γύρο το πολύ 50% μεγαλύτερο απ' τον βέλτιστο.

* Polynomial-time approximation scheme, δηλ. προσεγγιστικός αλγόριθμος που παράγει λύση το πολύ $1+\epsilon$ φορές τη βέλτιστη.

†Arora, Sanjeev, Carsten Lund, Rajeev Motwani, Madhu Sudan, and Mario Szegedy, "Proof verification and the hardness of approximation problems," *Journal of the ACM*, Vol. 45, No. 3, pp. 501-555, 1998.

Προσεγγίσεις για το Ευκλείδιο TSP

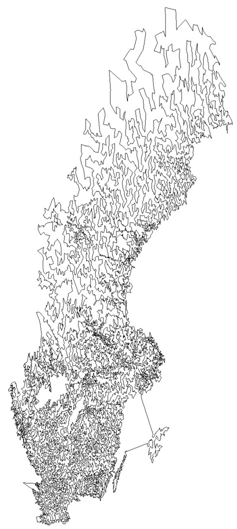
- Για το Ευκλείδιο TSP υπάρχει PTAS, δηλαδή πολυωνυμικός αλγόριθμος που για δεδομένο ϵ παράγει αποτέλεσμα μικρότερο του $(1+\epsilon)L$, όπου L το ελάχιστο μήκος γύρου.

- Για κάθε $c > 0$ και αν d είναι ο αριθμός των διαστάσεων του Ευκλείδιου χώρου, υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου (Sanjeev Arora, Joseph Mitchell) που βρίσκει ένα γύρο μήκους το πολύ $1+1/c$ φορές το μήκος του βέλτιστου σε χρόνο

$$O(n \log n)^{(O(c\sqrt{d}))^{d-1})}$$

Διαγωνισμοί στο Ευκλείδιο TSP

Δυο μεγάλοι βέλτιστοι γύροι[*] *:*
15112 γερμανικές πόλεις: 66000 km (Απρ. 2001)
24978 σουηδικές πόλεις: 72500 km (Μάιος 2004)

[*]`http://www.tsp.gatech.edu/gallery/itours/d15112.html`
`http://www.tsp.gatech.edu/sweden/index.html`

Παγκόσμιος γύρος

Είναι ανοιχτό το πρόβλημα ενός παγκόσμιου γύρου, με 1.904.711 πόλεις.

Η καλύτερη ως τώρα λύση είναι του Xavier Clarist με μήκος 7.515.770.584 (22/6/2020),* ενώ είναι γνωστό κάτω φράγμα μήκους 7.512.218.268.

Άρα η λύση αυτή απέχει το πολύ 0.04729% από τη βέλτιστη.

*http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/index.html

Ελληνικός γύρος

Βέλτιστο μονοπάτι* για 9882 ελληνικές πόλεις:

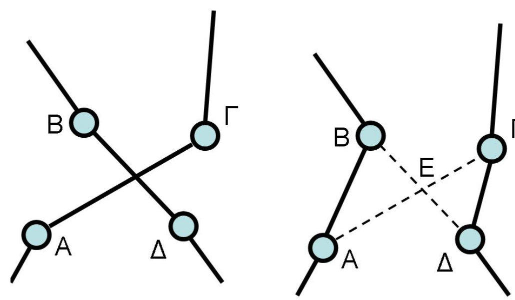
*http://www.tsp.gatech.edu/world/grtour.html

Λεπτομέρεια από τη λύση του ελληνικού TSP

Στο **Ευκλείδιο TSP** το σχήμα της βέλτιστης διαδρομής αποτελεί απλή πολυγωνική γραμμή, δηλαδή δεν έχει ακμές που διασταυρώνονται.

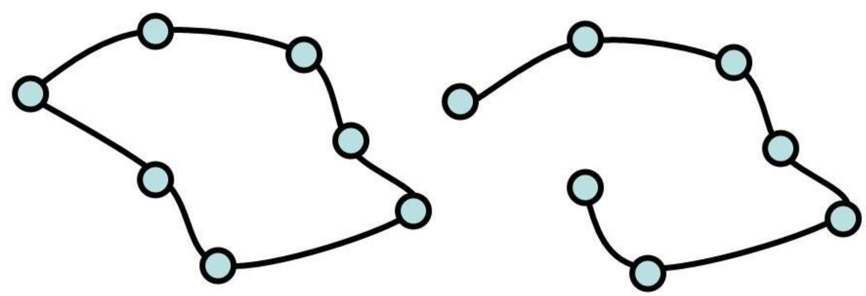
Απόδειξη: Αν δύο ακμές ΑΓ και ΒΔ διασταυρώνονται στο Ε, είναι σαφές ότι η αντικατάστασή τους με τις ΑΒ και ΓΔ δίνει καλύτερο γύρο, αφού

$$(\mathrm{AB}) + (\Gamma\Delta) \leq [(\mathrm{AE})+(\mathrm{EB})] + [(\Gamma \mathrm{E})+(\mathrm{E}\Delta)] = (\mathrm{A}\Gamma) + (\mathrm{B}\Delta).$$



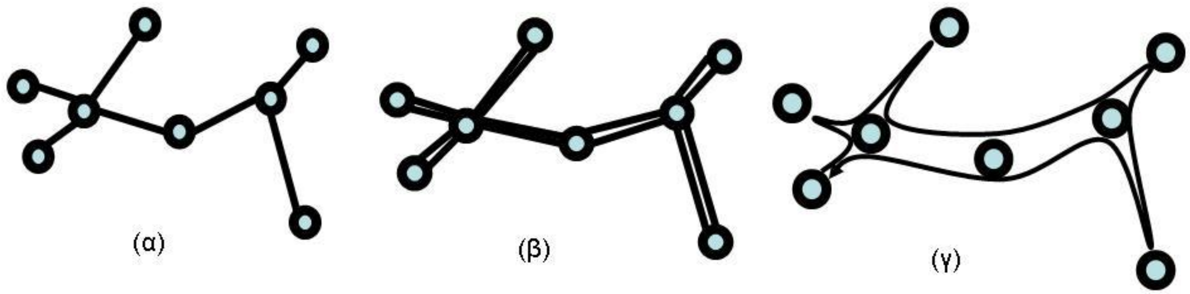
Στο **μετρικό TSP** ο ελάχιστος γύρος είναι μεγαλύτερος από το μήκος του ελάχιστου διατρέχοντος δέντρου (MST).

Απόδειξη: Αν από οποιονδήποτε γύρο (σχ. α), άρα και τον ελάχιστο, αφαιρεθεί μια ακμή, προκύπτει ένα διατρέχον δέντρο (δδ), με μικρότερο μήκος από τον αρχικό γύρο (σχ. β). Το ελάχιστου μήκους δδ (MST) είναι ακόμη μικρότερο (ή ίσο) απ΄ το τυχόν δδ, άρα είναι μικρότερο από τον ελάχιστο γύρο.



(α) (β)

Μετρικό TSP: Αλγόριθμος που βασίζεται στο MST



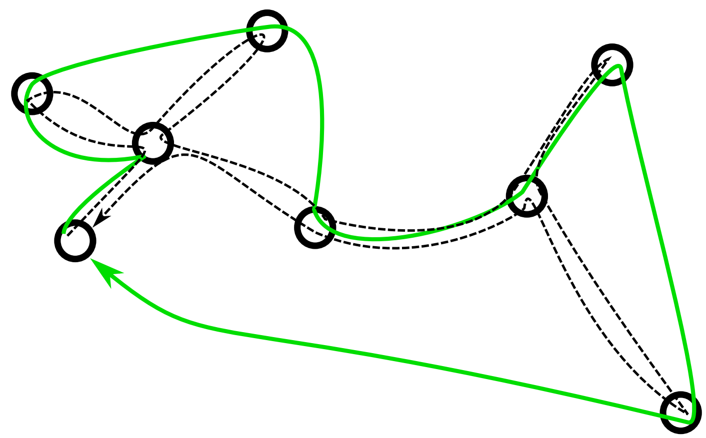
Είναι εύκολη η κατασκευή μιας διαδρομής με μήκος το πολύ διπλάσιο του βέλτιστου, ως εξής:

(i) Κατασκευάζουμε το ελάχιστο διατρέχον δέντρο MST, Mimimum Spanning Tree, σχ. (α).

(ii) Στο ελάχιστο διατρέχον δέντρο διπλασιάζουμε τις ακμές, όπως στο β.

(iii) Ο γράφος που προκύπτει έχει όλους τους κόμβους βαθμού άρτιου, οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μονοπάτι Euler, δηλ. μονοπάτι που περνάει μια φορά από κάθε ακμή, όπως φαίνεται στο σχ. γ.

Το μονοπάτι αυτό επισκέπτεται κάθε κόμβο δυο φορές, όμως επιδέχεται μια εύκολη βελτίωση.



Αρχίζοντας από την προηγούμενη διαδρομή Euler και προσπερνώντας κάθε φορά όποιο κόμβο έχουμε ξανασυναντήσει κατασκευάζουμε ένα γύρο.

Αν ισχύει η τριγωνική ιδιότητα ο τελικός γύρος είναι πιο μικρός από την προηγούμενη διαδρομή Euler, που δεν είναι παρά δυο φορές το MST, άρα δεν ξεπερνάει το διπλό του βέλτιστου γύρου (λόγω του προηγ. αποτελέσματος).

Ο αλγόριθμος του Ν. Χριστοφίδη

Ο αλγόριθμος επιλύει το μετρικό TSP και συνίσταται στα εξής βήματα:

(i) Υπολογίζεται ένα ελάχιστο διατρέχον δέντρο T.

(ii) Επιλέγονται όλοι οι κόμβοι περιττού βαθμού του T, ευρίσκεται ανάμεσά τους μια τέλεια αντιστοίχιση M και σχηματίζεται ο συνολικός γράφος που περιλαμβάνει το T και τις ακμές της αντιστοίχισης.

(iii) Υπολογίζεται ένας περίπατος Euler w πάνω στον G και κατόπιν τροποποιείται προσπερνώντας τις ήδη υπάρχουσες κορυφές προκειμένου να κατασκευαστεί γύρος t.

Ο αριθμός των κόμβων περιττού βαθμού (βήμα ii)

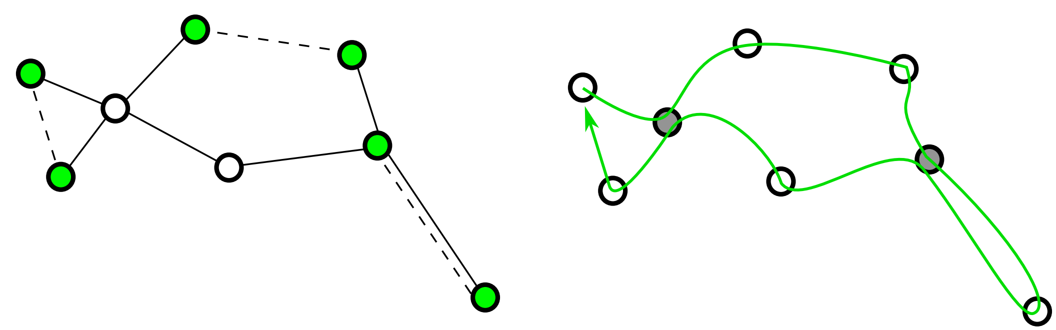
Λήμμα 1 [της χειραψίας] Το άθροισμα β των βαθμών όλων των κόμβων ενός γράφου είναι άρτιο. □

Λήμμα 2 Ο αριθμός των κόμβων περιττού βαθμού είναι άρτιος. □

Απόδ. λήμμ. 2: Το άθροισμα όλων των βαθμών είναι $\beta = \beta_1 + \beta_2$, όπου β_2 είναι το άθροισμα των βαθμών των κόμβων άρτιου βαθμού και β_1 είναι το άθροισμα των βαθμών κόμβων περιττού βαθμού. Λόγω του προηγ. λήμματος, το $\beta_1 = \beta - \beta_2$ είναι άρτιο. Ωστόσο είναι άθροισμα περιττών όρων. Αν το πλήθος τους ήταν περιττό, θα έδιναν β_1 περιττό, άρα το πλήθος είναι άρτιο.

Ένα παράδειγμα: Αντιστοίχιση και περίπατος Euler

Στο αριστερό μέρος του επόμενου σχήματος με συνεχή γραμμή απεικονίζονται οι ακμές του ελάχιστου διατρέχοντος δέντρου (MST), ενώ πράσινοι είναι οι κόμβοι περιττού βαθμού. Με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται η αντιστοίχιση.*



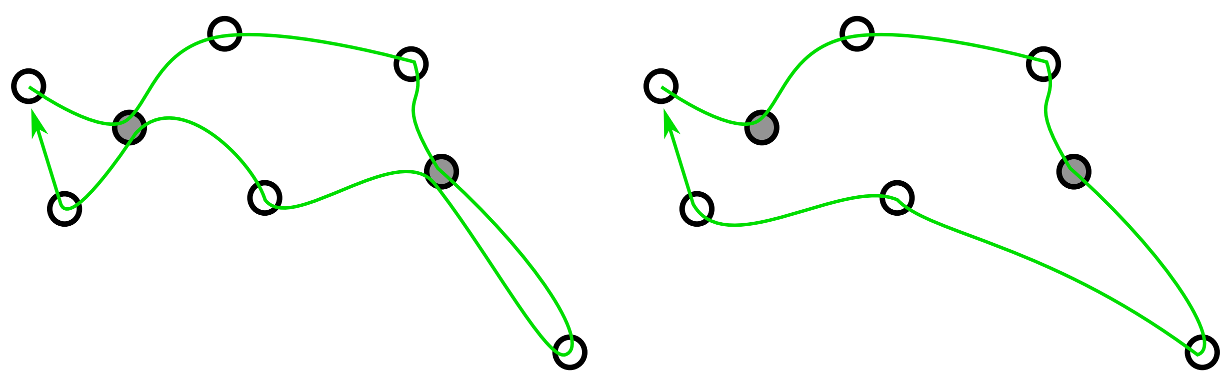
Στη συνέχεια εικονίζεται με πράσινη γραμμή περίπατος Euler όπως αναφέρεται στό βήμα (iii).

*Ο αλγόριθμος για minimum-weight non-bipartite matching μπορεί να βρεθεί στην παρ. 11.3 του βιβλίου *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity* των Papadimitriou και Steiglitz.

Παραδείγματος συνέχεια: Τροποποίηση του περίπατου Euler

Στο αριστερό σχήμα φαίνονται με γκρίζο χρώμα οι δύο κόμβοι, που στο προηγούμενο σχήμα εμφανίζονται δύο φορές στη διαδρομή Euler, οπότε σύμφωνα με το τελευταίο βήμα του αλγ. του Χριστοφίδη πρέπει να παρακαμφθούν.

Στο τελικό σχήμα αυτού του παραδείγματος φαίνεται το αποτέλεσμα της παράκαμψης των «γκρίζων» κόμβων.



Η απόδοση του αλγόριθμου του Χριστοφίδη

Έστω t ο γύρος του Χριστοφίδη και t^* ο βέλτιστος γύρος.

Ο αρχικός γράφος του τελευταίου βήματος (πριν την παράκαμψη διπλών κορυφών) αποτελείται από δύο μέρη, από το ελάχιστο διατρέχον δέντρο T και από την βέλτιστη αντιστοίχιση M. Ο γράφος αυτός έχει όλους τους κόμβους αρτίου βαθμού, άρα είναι γράφος Euler, άρα υπάρχει πάνω του ένας περίπατος Euler, δηλ. ένας κύκλος που περνάει απ΄ όλες τις ακμές, επομένως κι απ΄ όλους τους κόμβους, ακόμη κι αν αυτό συμβαίνει παραπάνω από μια φορές για τους κόμβους. Το μήκος του περίπατου Euler είναι $c(T) + c(M)$ (όπου $c(G)$ είναι το άθροισμα των μηκών των ακμών του γράφου G), επειδή περνάει πάνω απ΄ όλες τις ακμές.

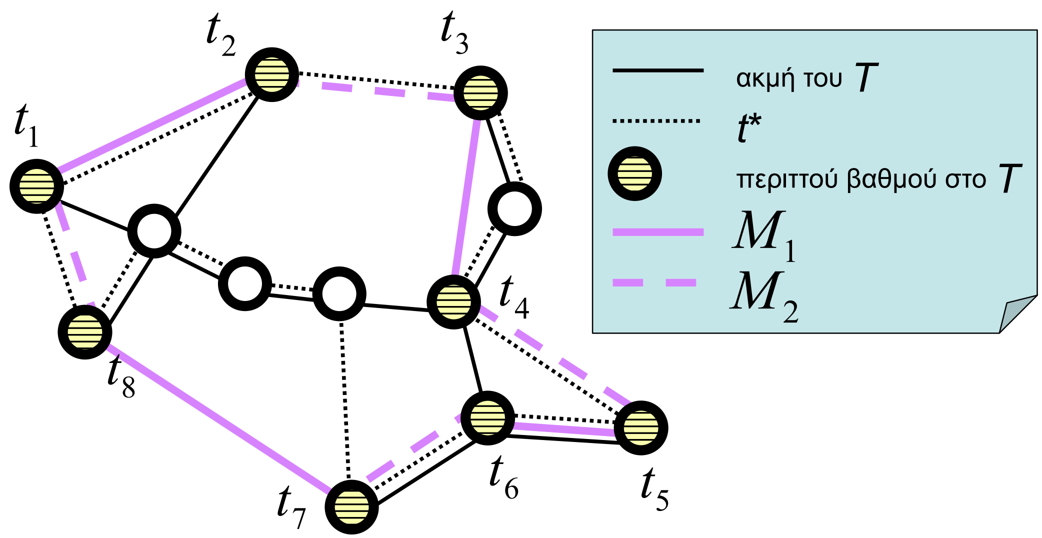
Στη συνέχεια όμως για τον σχηματισμό του γύρου t εφαρμόστηκε το βήμα της παράκαμψης διπλών κόμβων. Σε κάθε παράκαμψη αφαιρούνται δυο ακμές και προστίθεται μια νέα μικρότερη ή ίση με το άθροισμα των μηκών τους, εξ αιτίας της τριγωνικής ανισότητας. Άρα $c(t) \leq c(T) + c(M)$.

Θεωρούμε τώρα το βέλτιστο μονοπάτι t^* και πάνω του την ακολουθία κόμβων περιττού βαθμού του γράφου T με τη σειρά που αυτοί εμφανίζονται, έστω $\{t_1, t_2, \ldots, t_{2m}\}$. Σχηματίζουμε τις εξής δύο αντιστοιχίσεις πάνω σ΄ αυτούς τους κόμβους:

$$M_1 = \{(t_1, t_2), (t_3, t_4), \ldots, (t_{2m-1}, t_{2m})\}$$

$$M_2 = \{(t_2, t_3), (t_4, t_5), \ldots, (t_{2m}, t_1)\}$$

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ένα παράδειγμα:



Ο γράφος $M_1 \cup M_2$ αποτελεί γύρο πάνω στους κόμβους $t_1, t_2, \ldots, t_{2m}$ και σχηματίζεται παραλείποντας όλους τους άλλους κόμβους του t^*, άρα $c(M_1) + c(M_2) \leq c(t^*)$.

Επειδή M είναι η αντιστοίχιση με το ελάχιστο μήκος, $c(M) \leq c(M_1)$ και $c(M) \leq c(M_2)$, οπότε

$$2c(M) \leq c(M_1) + c(M_2) \leq c(t^*) \Rightarrow c(M) \leq c(t^*)/2$$

Ανακεφαλαιώνοντας, ισχύει η ανισότητα

$$c(t) \leq c(T) + c(M)$$

ισχύει η ανισότητα μεταξύ MST και βέλτιστου γύρου

$$c(T) \leq c(t^*)$$

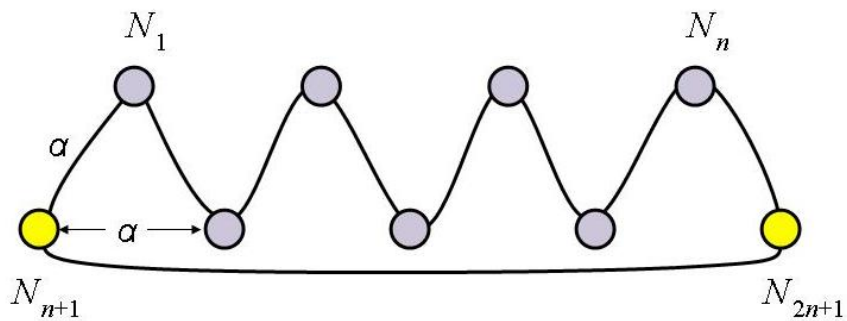
και η μόλις εξαχθείσα ανισότητα $c(M) \leq c(t^*)/2$. Όλες μαζί δίνουν το τελικό αποτέλεσμα που είναι

$$c(t) \leq c(t^*) + \frac{1}{2}c(t^*) = \frac{3}{2}c(t^*)$$

Δηλαδή ο αλγόριθμος του Χριστοφίδη δίνει αποτέλεσμα *το πολύ κατά 50% μεγαλύτερο του βέλτιστου.*

Υπάρχει πιο στενό άνω φράγμα για τον αλγόριθμο του Χριστοφίδη; Όχι, βλ. επόμενο παράδειγμα.

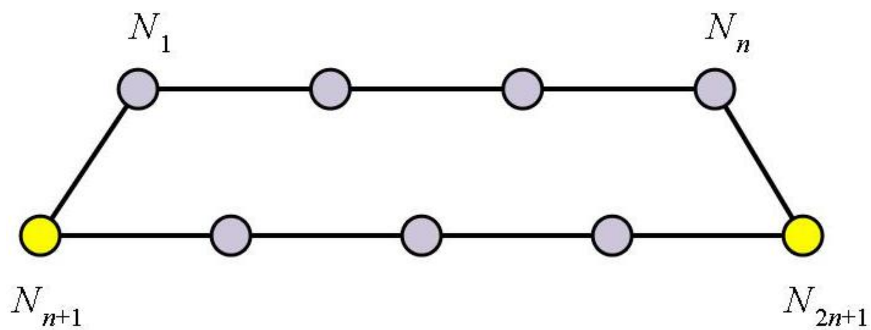
Το παράδειγμα που δίνει 3/2 Δίνεται μια σειρά κόμβων, που σχηματίζουν διαδοχικά ισόπλευρα τρίγωνα στο επίπεδο με πλευρά α, όπως στο σχήμα.



Στο ίδιο σχήμα εικονίζεται η λύση του αλγόριθμου του Χριστοφίδη. Η κάτω οριζόντια γραμμή συνδέει τους δύο (κίτρινους) κόμβους N_{n+1} και N_{2n+1} που αποτελούν τους μόνους δύο κόμβους περιττού βαθμού του MST. Όλες οι άλλες ακμές ανήκουν στο MST.

Το συνολικό μήκος της λύσης Χριστοφίδη είναι $3n\alpha$.

Ωστόσο η βέλτιστη λύση φαίνεται στο επόμενο σχήμα, με συνολικό μήκος $(2n+1)\alpha$.



Για μεγάλο n ο λόγος του μήκους της λύσης Χριστοφίδη προς τη βέλτιστη λύση τείνει στο 3/2, γεγονός που σημαίνει ότι ο λόγος 1,5 για τον αλγόριθμο Χριστοφίδη είναι στενός.

Ερώτηση 1: Πώς ξέρουμε ότι η παραπάνω λύση είναι βέλτιστη;

Ερώτηση 2: Γιατί στο παράδειγμα χρησιμοποιήθηκαν ισόπλευρα τρίγωνα;

Βιβλιογραφία

- Nicos Christofides. "Worst Case Analysis of a New Heuristic for the Traveling Salesman Problem." Report 388. Pittsburgh, PA: Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1976.

- Arora, Sanjeev, Carsten Lund, Rajeev Motwani, Madhu Sudan, and Mario Szegedy, "Proof verification and the hardness of approximation problems," *Journal of the ACM*, Vol. 45, No. 3, pp. 501-555, 1998.

- Karlin, Anna R., Nathan Klein, and Shayan Oveis Gharan. "A (slightly) improved approximation algorithm for metric tsp." arXiv preprint arXiv:2007.01409 (2020).

Τελευταία μεταβολή στις 15 Ιανουαρίου 2021, 21:47.