

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Μιγαδικοί αριθμοί

Εισαγωγή

Οι μιγαδικοί αριθμοί προκύπτουν εντελώς φυσιολογικά στην πορεία επίλυσης πολυωνυμικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

είναι μιγαδικοί αριθμοί αν η υπόριξη παράσταση είναι αρνητική. Σε αυτό το παράρτημα θα κάνουμε μια ανασκόπηση των βασικών ιδεών σχετικά με τους μιγαδικούς αριθμούς, όπως χρησιμοποιούνται σε αυτό το βιβλίο.

Μιγαδικοί αριθμοί

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της μη ύπαρξης πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $x^2 = -1$, οι μαθηματικοί του δέκατου όγδοου αιώνα επινόησαν τον «φανταστικό» αριθμό

$$i = \sqrt{-1}$$

ο οποίος υποτίθεται ότι έχει την ιδιότητα

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

κατά τα άλλα όμως έχει τις αλγεβρικές ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Μια παράσταση της μορφής

$$a + bi \quad \text{ή} \quad a + ib$$

στην οποία ο a και ο b είναι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός**. Μερικές φορές είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε ένα γράμμα, συνήθως το z , για να δηλώσουμε έναν μιγαδικό αριθμό, οπότε γράφουμε

$$z = a + bi \quad \text{ή} \quad z = a + ib$$

Ο αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z και παριστάνεται ως $\text{Re}(z)$, ενώ ο αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z και παριστάνεται ως $\text{Im}(z)$. Επομένως,

$$\text{Re}(3 + 2i) = 3,$$

$$\text{Im}(3 + 2i) = 2$$

$$\text{Re}(1 - 5i) = 1,$$

$$\text{Im}(1 - 5i) = \text{Im}(1 + (-5)i) = -5$$

$$\text{Re}(7i) = \text{Re}(0 + 7i) = 0, \quad \text{Im}(7i) = \text{Im}(0 + 7i) = 7$$

$$\text{Re}(4) = \text{Re}(4 + 0i) = 4, \quad \text{Im}(4) = \text{Im}(4 + 0i) = 0$$

Δύο μιγαδικοί αριθμοί θεωρούνται **ίσοι** αν και μόνο αν είναι ίσα τα πραγματικά τους μέρη και τα φανταστικά τους μέρη. Δηλαδή

$$a + bi = c + di \quad \text{αν και μόνο αν} \quad a = c \quad \text{και} \quad b = d$$

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = bi$, του οποίου το πραγματικό μέρος είναι μηδέν, λέμε ότι είναι **αμιγώς φανταστικός**. Ένας μιγαδικός αριθμός $z = a$, του οποίου το φανταστικό μέρος είναι μηδέν, λέμε ότι είναι ένας **πραγματικός αριθμός**, οπότε οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Οι μιγαδικοί αριθμοί προστίθενται, αφαιρούνται και πολλαπλασιάζονται σύμφωνα με τους συνήθεις κανόνες της άλγεβρας, αλλά με $i^2 = -1$,

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (1)$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \quad (2)$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (3)$$

Ο πολλαπλασιασμός στον τύπο (3) λαμβάνεται αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $i^2 = -1$. Σημειώστε επίσης ότι αν $b = 0$, τότε ο τύπος του πολλαπλασιασμού απλουστεύεται και γίνεται

$$a(c + di) = ac + adi \quad (4)$$

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με αυτές τις πράξεις συνήθως παριστάνεται με το σύμβολο $\mathbb{C}$ και ονομάζεται **σύστημα μιγαδικών αριθμών**.

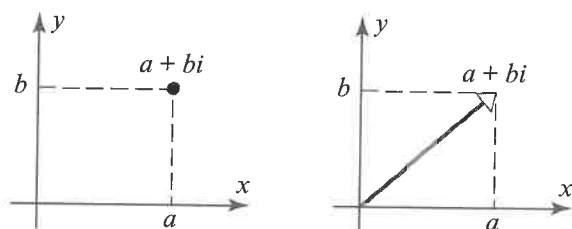
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών

Από πρακτική άποψη, είναι συνήθως βολικότερο να υπολογίζουμε γινόμενα μιγαδικών αριθμών με ανάπτυξη παρά με αντικατάσταση στην (3). Για παράδειγμα,

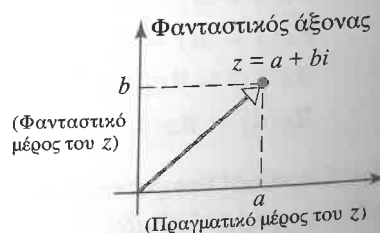
$$(3 - 2i)(4 + 5i) = 12 + 15i - 8i - 10i^2 = (12 + 10) + 7i = 22 + 7i$$

Το μιγαδικό επίπεδο

Ένας μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα διατεταγμένο ζεύγος (a, b) πραγματικών αριθμών και να παρασταθεί γεωμετρικά με ένα σημείο ή ένα διάνυσμα στο επίπεδο xy (Σχήμα Β.1). Αυτό το επίπεδο το ονομάζουμε **μιγαδικό επίπεδο**. Σημεία στον άξονα έχουν φανταστικό μέρος μηδέν και άρα αντιστοιχούν στους πραγματικούς αριθμούς, ενώ σημεία στον άξονα έχουν πραγματικό μέρος μηδέν και άρα αντιστοιχούν στους αμιγώς φανταστικούς αριθμούς. Κατά συνέπεια, ονομάζουμε τον άξονα x **πραγματικό άξονα** και τον άξονα y **φανταστικό άξονα** (Σχήμα Β.2).

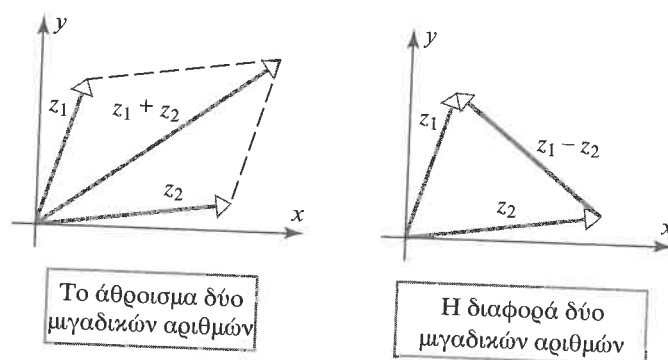


Σχήμα Β.1



Σχήμα Β.2

Οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να προστεθούν, να αφαιρεθούν ή να πολλαπλασιαστούν με πραγματικούς αριθμούς γεωμετρικά εκτελώντας αυτές τις πράξεις στα αντίστοιχα διανύσματα (Σχήμα Β.3, για παράδειγμα). Υπό αυτή την έννοια, το σύστημα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ συνδέεται στενά με τον $\mathbb{R}^2$, με την κύρια διαφορά να είναι ότι οι μιγαδικοί αριθμοί μπορούν να πολλαπλασιαστούν δίνοντας άλλους μιγαδικούς αριθμούς, ενώ δεν υπάρχει πράξη πολλαπλασιασμού στον $\mathbb{R}^2$ που να δίνει άλλα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ (το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στην Ενότητα 3.2 δίνει βαθμωτό, όχι διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$.)

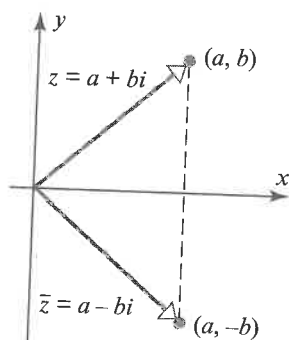


Σχήμα Β.3

Αν $z = a + bi$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε ο **μιγαδικός συζυγής** του z , ή πιο απλά ο **συζυγής** του z , παριστάνεται με $\bar{z}$ και ορίζεται ως

$$\bar{z} = a - bi \quad (5)$$

Αριθμητικά, ο $\bar{z}$ λαμβάνεται από τον z αντιστρέφοντας το πρόσημο του φανταστικού μέρους και γεωμετρικά ανακλώντας το διάνυσμα για τον z ως προς τον πραγματικό άξονα (Σχήμα Β.4).



Σχήμα Β.4

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Μιγαδικοί συζυγείς

$z = 3 + 4i$	$\bar{z} = 3 - 4i$
$z = -2 - 5i$	$\bar{z} = -2 + 5i$
$z = i$	$\bar{z} = -i$
$z = 7$	$\bar{z} = 7$

Παρατήρηση Ο τελευταίος υπολογισμός σε αυτό το παράδειγμα αναδεικνύει το γεγονός ότι ένας πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον μιγαδικό συζυγή του. Γενικότερα, $z = \bar{z}$ αν και μόνο αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Ο παρακάτω υπολογισμός δείχνει ότι το γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ και του συζυγούς του, $z = a - bi$, είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός,

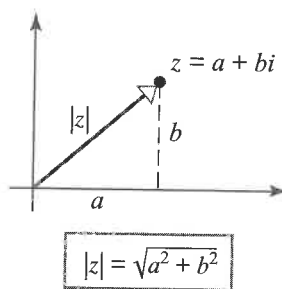
$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + bai - b^2i^2 = a^2 + b^2 \quad (6)$$

Θα αναγνωρίσετε ότι

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

είναι το μήκος του διανύσματος που αντιστοιχεί στον z (Σχήμα Β.5). Αυτό το ονομάζουμε **μέτρο** (ή **απόλυτη τιμή**) του z και το συμβολίζουμε με $|z|$. Επομένως,

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (7)$$



Σχήμα Β.5

Σημειώστε ότι αν $b = 0$, τότε $z = a$, είναι ένας πραγματικός αριθμός και $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, το οποίο μας λέει ότι το μέτρο ενός πραγματικού αριθμού είναι το ίδιο με την απόλυτη τιμή του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Υπολογισμοί μέτρων

$$\begin{aligned} z &= 3 + 4i & |z| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ z &= -4 - 5i & |z| &= \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{41} \\ z &= i & |z| &= \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

Αντίστροφοι και διαίρεση

Αν $z \neq 0$, τότε ο **αντίστροφος** (ή **πολλαπλασιαστικός αντίστροφος**) του z παριστάνεται με $1/z$ (ή z^{-1}) και ορίζεται από την ιδιότητα

$$\left(\frac{1}{z}\right)z = 1$$

Αυτή η εξίσωση έχει μοναδική λύση για $1/z$, την οποία μπορούμε να πάρουμε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\bar{z}$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $z\bar{z} = |z|^2$ [δείτε την (7)]. Αυτό δίνει

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad (8)$$

Αν $z_2 \neq 0$, τότε το **πηλίκο** z_1/z_2 ορίζεται να είναι το γινόμενο του z_1 και του $1/z_2$. Αυτό μας δίνει τον τύπο

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} z_1 = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} \quad (9)$$

Παρατηρήστε ότι η παράσταση στο δεξί μέλος της (9) προκύπτει αν ο αριθμητής και ο παρονομαστής του z_1/z_2 πολλαπλασιαστεί με $\bar{z}_2$. Από πρακτική άποψη, αυτός είναι συνήθως ο καλύτερος τρόπος εκτέλεσης διαιρέσεων με μιγαδικούς αριθμούς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Διαίρεση μιγαδικών αριθμών

Έστω ότι $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - 2i$. Να εκφράσετε τον z_1/z_2 στη μορφή $a + bi$.

Λύση Θα πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή του z_1/z_2 με $\bar{z}_2 = 1 + 2i$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} \\ &= \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i \end{aligned}$$

Τα παρακάτω θεωρήματα παραθέτουν μερικές χρήσιμες ιδιότητες του μέτρου και του μιγαδικού συζυγούς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Τα παρακάτω αποτελέσματα ισχύουν για μιγαδικούς αριθμούς z , z_1 και z_2 .

(α) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(β) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(γ) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(δ) $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$

(ε) $\bar{\bar{z}} = z$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Τα παρακάτω αποτελέσματα ισχύουν για μιγαδικούς αριθμούς z , z_1 και z_2 .

(α) $|\bar{z}| = |z|$

(β) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

(γ) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$

(δ) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Αν ο $z = a + bi$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός διάφορος του μηδενός και αν ϕ είναι η γωνία από τον πραγματικό άξονα μέχρι το διάνυσμα z , τότε, όπως υπονοεί το Σχήμα Β.6, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του z μπορούν να εκφραστούν ως

$$a = |z| \cos \phi \quad \text{και} \quad b = |z| \sin \phi \quad (10)$$

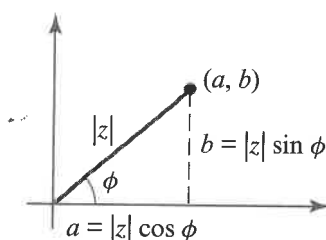
Επομένως ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (11)$$

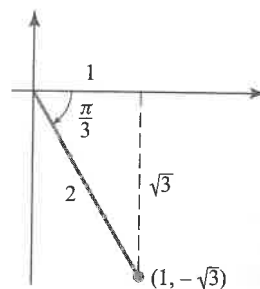
η οποία ονομάζεται **πολική μορφή** του z . Η γωνία ϕ σε αυτόν τον τύπο ονομάζεται **όρισμα** του z . Το όρισμα του z δεν είναι μοναδικό επειδή μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του 2π ώστε να πάρουμε διαφορετικό όρισμα του z . Ωστόσο, υπάρχει ένα μόνο όρισμα του οποίου το μέτρο σε ακτίνια να ικανοποιεί την

$$-\pi < \phi \leq \pi \quad (12)$$

Αυτό ονομάζεται **κύριο όρισμα** του z .



Σχήμα Β.6



Σχήμα Β.7

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Πολική μορφή μιγαδικού αριθμού

Να εκφράσετε τον $z = 1 - \sqrt{3}i$ σε πολική μορφή χρησιμοποιώντας το κύριο όρισμα.

Λύση Το μέτρο του z είναι

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Επομένως, από την (10) για $a = 1$ και $b = -\sqrt{3}$ έπεται ότι

$$1 = 2 \cos \phi \quad \text{and} \quad -\sqrt{3} = 2 \sin \phi$$

και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \sin \phi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Η μοναδική γωνία ϕ που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις και της οποίας το μέτρο σε ακτίνια ικανοποιεί την (12), είναι η $\phi = -\pi/3$ (Σχήμα Β.7). Επομένως, η πολική μορφή του z είναι η

$$z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης μιγαδικών αριθμών

Θα δείξουμε τώρα πώς η πολική μορφή των μιγαδικών αριθμών παρέχει μια γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Ας υποθέσουμε ότι

$$z_1 = |z_1|(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \quad \text{και} \quad z_2 = |z_2|(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

είναι οι πολικές μορφές των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 , διαφόρων του μηδενός. Πολλαπλασιάζοντας τους αριθμούς παίρνουμε ότι

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2)]$$

Η εφαρμογή τώρα των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

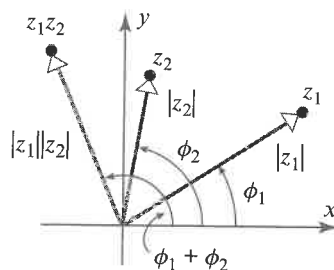
$$\cos(\phi_1 + \phi_2) = \cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2$$

$$\sin(\phi_1 + \phi_2) = \sin \phi_1 \cos \phi_2 + \cos \phi_1 \sin \phi_2$$

δίνει

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \quad (13)$$

η οποία είναι η πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού που έχει μέτρο $|z_1||z_2|$ και όρισμα $\phi_1 + \phi_2$. Επομένως, δείξαμε ότι ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών έχει ως γεωμετρικό αποτέλεσμα τον πολλαπλασιασμό των μέτρων και την πρόσθεση των ορισμάτων τους (Σχήμα Β.8).



Σχήμα Β.8

Με παρόμοιους υπολογισμούς αποδεικνύεται ότι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)] \quad (14)$$

η οποία μας λέει ότι η διαίρεση μιγαδικών αριθμών έχει ως γεωμετρικό αποτέλεσμα την διαίρεση των μέτρων τους και την αφαίρεση των ορισμάτων τους (καθένα τους στην κατάλληλη σειρά).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση σε πολική μορφή

Να χρησιμοποιήσετε την πολική μορφή των μιγαδικών αριθμών $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ και $z_2 = \sqrt{3} + i$ για να υπολογίσετε τον $z_1 z_2$ και τον z_1/z_2 .

Λύση Η πολική μορφή αυτών των μιγαδικών αριθμών είναι

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{και} \quad z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

(να το επαληθεύσετε). Επομένως, από την (13) έπεται ότι

$$z_1 z_2 = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 4 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right] = 4i$$

και από την (14) έπεται ότι

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

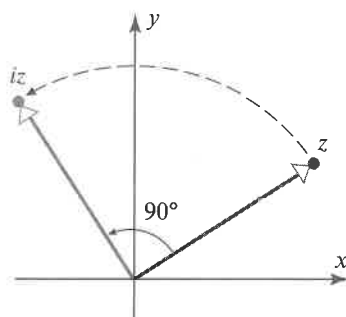
Για επαλήθευση, ας υπολογίσουμε τον $z_1 z_2$ και τον z_1/z_2 απευθείας,

$$z_1 z_2 = (1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2 = 4i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \frac{\sqrt{3} - i + 3i - \sqrt{3}i^2}{3 - i^2} = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

τα οποία συμφωνούν με τα αποτελέσματα που πήραμε χρησιμοποιώντας την πολική μορφή.

Παρατήρηση Ο μιγαδικός αριθμός i έχει μέτρο 1 και κύριο όρισμα $\pi/2$. Επομένως, αν ο z είναι κάποιος μιγαδικός αριθμός, τότε ο iz έχει το ίδιο μέτρο με τον z , το όρισμά του όμως είναι μεγαλύτερο κατά $\pi/2 (= 90^\circ)$, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός με i έχει το ίδιο γεωμετρικό αποτέλεσμα με τη στροφή του διανύσματος z αντίθετα της φοράς των δεικτών του ρολογιού κατά 90° (Σχήμα Β.9).



Σχήμα Β.9

Τύπος του DeMoivre

Αν n είναι κάποιος θετικός ακέραιος και αν z είναι ένα μιγαδικός αριθμός διάφορος του μηδενός με πολική μορφή

$$z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$$

τότε η ύψωση του z στη n -ιοστή δύναμη δίνει

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ παράγοντες}} = |z|^n [\underbrace{\cos(\phi + \phi + \dots + \phi)}_{n \text{ όροι}}] + i [\underbrace{\sin(\phi + \phi + \dots + \phi)}_{n \text{ όροι}}]$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε πιο περιεκτικά ως

$$z^n = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) \quad (15)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $|z| = 1$, αυτός ο τύπος απλουστεύεται στον

$$z^n = \cos n\phi + i \sin n\phi$$

ο οποίος, χρησιμοποιώντας την πολική μορφή του z , γίνεται

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^n = \cos n\phi + i \sin n\phi \quad (16)$$

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται **τύπος του De Moivre**, προς τιμή του Γάλλου μαθηματικού Abraham de Moivre (1667 – 1754).

Ο Τύπος του Euler

Αν θ είναι ένας πραγματικός αριθμός, ας πούμε κάποια γωνία σε μέτρο ακτινίων, τότε η **μιγαδική εκθετική συνάρτηση** $e^{i\theta}$ ορίζεται να είναι

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (17)$$

η οποία μερικές φορές αποκαλείται **τύπος του Euler**, προς τιμήν του Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler (1707 – 1783). Μια αιτιολόγηση για αυτόν τον τύπο βασίζεται στις σειρές Maclaurin του Απειροστικού Λογισμού. Οι αναγνώστες που έχουν μελετήσει τις άπειρες σειρές στον απειροστικό λογισμό μπορούν να συνάγουν την (17) αντικαθιστώντας $i\theta$ στη θέση του x στη σειρά Maclaurin της e^x και γράφοντας

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \dots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από τις σειρές Maclaurin για την $\cos \theta$ και την $\sin \theta$.

Αν $z = a + bi$ είναι ένας τυχαίος μιγαδικός αριθμός, τότε το **μιγαδικό εκθετικό** e^z ορίζεται να είναι

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) \quad (18)$$

Αποδεικνύεται ότι τα μιγαδικά εκθετικά ικανοποιούν τους συνήθεις νόμους των εκθετών. Επομένως, για παράδειγμα,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$