ΣΦΑΙΡΑ

Θεώρημα

Έστω Oxyz ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς

(α) Η σφαίρα με κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και ακτίνα a έχει εξίσωση:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=a^2$$

(β) Η εξίσωση

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$

είναι εξίσωση σφαίρας με

κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{\Gamma}{2}\right)$

και ακτίνα

$$a=\frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2} \quad \text{αν} \quad A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$$

Τομή Επιπέδου - Σφαίρας

$(\Pi) \cap (\Sigma) = ;$

Απάντηση

Έστω $d = d(K, (\Pi))$ όπου K το κέντρο της σφαίρας

Αν:

- $d > R$ τότε $\nexists$ σημεία τομής
- $d = R$ ένα σημείο επαφής (το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα)
- $d < R$ τότε η τομή είναι κύκλος ακτίνας $\sqrt{R^2 - d^2}$ με κέντρο την προβολή του K στο Π

Παράδειγμα

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (\Sigma)$$

$$x + y + z = 1/6 \quad (\Pi)$$

Ποια η τομή τους;

Λύση

$$d(K, \Pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1/6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} < 1 = R$$

Άρα η τομή είναι κύκλος $\rightarrow$

με ακτίνα

$$r^2 = 1^2 - \frac{1}{6^2 \cdot 3} = \frac{107}{6^2 \cdot 3}$$

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{107}}{6\sqrt{3}}}$$

Εύρεση του κέντρου.

Ξέρουμε ότι $(1,1,1) \perp \Pi$

και ότι ευθεία $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$ διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας ισ' $\perp$ στο επιπ

Άρα $\left\{\begin{array}{l} x+y+z = 1/6 \\ x=y=z \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 1/6 \Rightarrow x = 1/18$

Επομένως το κέντρο θα είναι

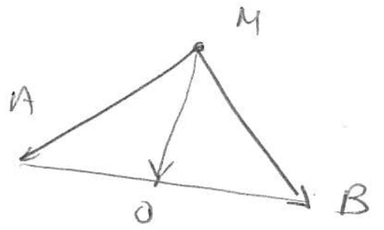
$$K' = (1/18, 1/18, 1/18)$$

Άρα $\left\{\begin{array}{l} (x-1/18)^2 + (y-1/18)^2 + (z-1/18)^2 = \frac{107}{108} \\ x+y+z = 1/6 \end{array}\right.$

Άσκηση 2

Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων του χώρου που "βλέπουν" δοθέν ευθ. τμήμα με ορθή γωνία.

Λύση



Έστω $A(x_A, y_A, z_A)$

$B(x_B, y_B, z_B)$

και $M(x, y, z)$ σημεία του τόπου

Τότε $\hat{AMB} = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{MA} \perp \vec{MB} \Leftrightarrow \langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = \vec{0}$

α' τρόπος

Αν O μέσον του $\vec{AB}$ $(\vec{AO} = \vec{OB})$

Τότε $\langle \vec{MO} + \vec{OA}, \vec{MO} + \vec{OB} \rangle = \vec{0} \Leftrightarrow$

$$\langle \vec{MO}, \vec{MO} \rangle + \langle \vec{MO}, \vec{OB} \rangle + \langle \vec{OA}, \vec{MO} \rangle + \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{MO}\|^2 - \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{OM}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 = \left\|\frac{\vec{AB}}{2}\right\|^2 \text{ σταθερό}$$

σφαίρα κέντρου O και ακτίνας $\frac{AB}{2}$

β' τρόπος

$$\langle (x-x_A,\ y-y_A,\ z-z_A),\ (x-x_B,\ y-y_B,\ z-z_B) \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{x_A+x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A+y_B}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_A+z_B}{2}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right)^2 - x_A x_B\right] + \left[\left(\frac{y_A+y_B}{2}\right)^2 - y_A y_B\right] + \left[\left(\frac{z_A+z_B}{2}\right)^2 - z_A z_B\right]$$

$$= \left(\frac{x_A-x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A-y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A-z_B}{2}\right)^2 > 0$$

Άσκηση 3

Να δ.ο η εξίσωση

$$-x^2-y^2-z^2+4x+6y-8z-25=0$$

Παριστάνει σφαίρα, της οποίας να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα της και μετά να εξετάσει αν υπάρχει επίπεδο που να διέρχεται από το $A(2,3,-6)$ και να εφάπτεται της σφαίρας.

Λύση

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z+25=0$$

$\Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=2^2$$

Άρα σφαίρα κέντρου $K:(2,3,-4)$, ακτίνας 2

Για $A(2,3,-6)$:

$$(2-2)^2+(3-3)^2+(-6+4)^2=2^2$$

Άρα $A \in$ σφαίρα

Έστω $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ η εξίσωση του ζητούμενου επιπέδου

Τότε $\vec{AK} \perp \Pi$

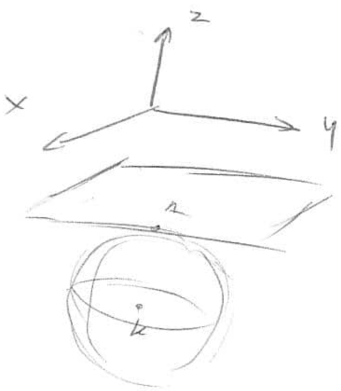
$\vec{AK}=(0,0,2)$ άρα $0x+0y+2z+\delta=0$

$A \in \Pi \rightarrow 2(-6)+\delta=0 \rightarrow \delta=12$

$\Longrightarrow 2z+12=0$

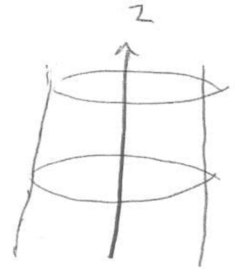
$\boxed{z=-6}$

Άρα $zz' \perp \Pi$

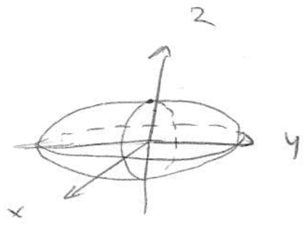


Ορθος Κύλινδρος

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$$



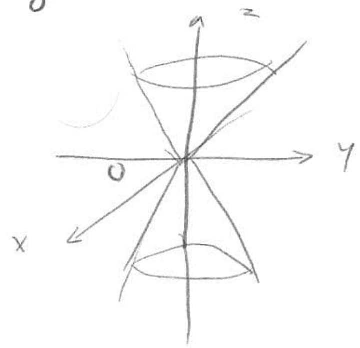
Ελλειψοειδής



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad \alpha,\beta,\gamma>0$$

- συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων τους άξονες, και επίπεδα συντεταγμένων
- καθε σημείο του βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο παρ/πεδο με έδρες $x=\pm a$, $y=\pm\beta$, $z=\pm\gamma$

Κώνος



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0 \qquad \alpha,\beta,\gamma>0$$

- Είναι συμμετρικός ως προς όλους τους άξονες
- τομή και με τους τρεις άξονες το $O(0,0,0)$.