Ορισμός Διανυσματικού Χώρου V επί του $\mathbb{F}$

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Ένας δ.χ. επί του $\mathbb{F}$ αποτελείται από:

- ένα μη κενό σύνολο V
- μια απεικόνιση $V \times V \longrightarrow V$ "πρόσθεση" [εσωτερική πράξη]
  $(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$
- μια απεικόνιση $(\mathbb{F} \times V) \longrightarrow V$ βαθμωτός "πολ/σμός" [εξωτερική πράξη]
  $(\lambda, v) \longmapsto \lambda \cdot v$

Έτσι ώστε να ισχύουν:

i) $a + \beta = \beta + a \quad \forall a, \beta \in V$

ii) $(a + \beta) + \gamma = a + (\beta + \gamma) \quad \forall a, \beta, \gamma \in V$

iii) $\exists\ \mathbb{O} \in V$ με την ιδιότητα "μηδενικό στοιχείο"

$$a + \mathbb{O} = \mathbb{O} + a = a \quad \forall a \in V$$

iv) $\forall a \in V \quad \exists\, -a \in V$ με την ιδιότητα "αντίθετο στοιχείο"

$$a + (-a) = (-a) + a = \mathbb{O}$$

---

v) $\lambda(a + \beta) = \lambda a + \lambda \beta \quad \forall \lambda \in \mathbb{F},\ a, \beta \in V$

vi) $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a \in V$

vii) $(\lambda \mu) a = \lambda(\mu a) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{F},\ a \in V$

viii) $1 a = a \quad \forall a \in V$ "μοναδιαίο στοιχείο"

Όταν το $\mathbb{F}$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών θα λέμε ότι έχουμε έναν πραγματικό δ.χ.

Παρατηρήσεις

1) Το $0\in V$ είναι μοναδικό με $0+a=a+0=0$

Πράγματι, αν $0'\in V$ και $0'+a=a+0'=a$ $\forall a\in V$

τότε $0' \overset{(iii)}{=} 0'+0 \overset{\text{διότι}}{=} 0$

2) Το $-a\in V$ είναι μοναδικό με $a+(-a)=(-a)+a=0$

Πράγματι, αν $y\in V$ με $a+y=y+a=0$

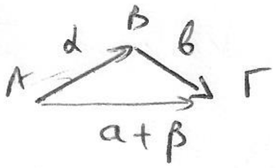
τότε $-a \overset{(iii)}{=} -a+0 \overset{\text{ίδιο}}{=} a+(a+y) \overset{(ii)}{=} (-a+a)+y \overset{(iv)}{=} 0+y \overset{(iii)}{=} y$

Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου θα το συμβολίζουμε με Δ^3.
Το σύνολο Δ^3 είναι εφοδιασμένο με τη δομή διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$ με

Πρόσθεση:

$+: \Delta^3\times\Delta^3 \to \Delta^3$

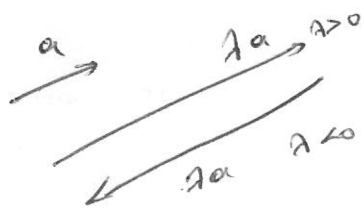
$(a,b)\mapsto a+\beta$ όπου $a+\beta=A\Gamma$ αν $a=AB$, $b=B\Gamma$



και βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$\cdot : \mathbb{R}\times\Delta^3 \to \Delta^3$

$(\lambda,a)\mapsto \lambda\cdot a$ ή λa



Το λa έχει:

α) Τη διεύθυνση του a

β) ίδια φορά με το a, αν $\lambda>0$ (αντίθετη αν $\lambda<0$)

γ) μέτρο $|\lambda a|=|\lambda||a|$

Ίσα διανύσματα

Δύο διανύσματα AB και $ΓΔ$ είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν ίδια διεύθυνση και φορά και ίσα μέτρα

Αντίθετα διανύσματα

Τα a και $-a$ τα οποία έχουν ίσα μέτρα, ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά.

Συγγραμμικά

Διανύσματα που έχουν ίδια διεύθυνση

- Αν a, β δύο συγγραμμικά διανύσματα με $\beta \neq 0$ τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω $a = \lambda \beta$ και αντίστροφα, από τον ορισμό του βαθμωτού πολ/σμού και την ισότητα $a = \lambda \beta$ $\beta \neq 0$ έπεται ότι τα διανύσματα a και β έχουν την ίδια διεύθυνση.

- Δύο διανύσματα α, β που είναι συγγραμμικά και έχουν:

  i) την ίδια φορά λέγονται ομόρροπα και γράφουμε

  $$\alpha \uparrow\uparrow \beta$$

  ii) αντίθετη φορά αντίρροπα και γράφουμε $\alpha \uparrow\downarrow \beta$

Επίσης

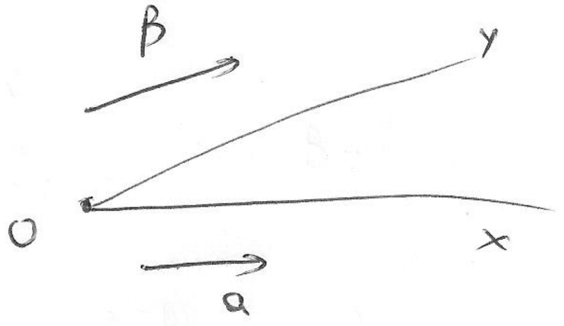
- $\lambda a = 0$ $\lambda \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$
- $\lambda a = 0$ και $a \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Γωνία διανυσμάτων

Έστω δυο μη μηδενικά διανύσματα α, β του $\mathbb{R}^3$.
Με αρχή τυχόν σημείο O του χώρου γράφουμε ημιευθείες Ox και Oy ώστε $Ox \uparrow\uparrow a$ και $Oy \uparrow\uparrow \beta$.

Ορίζουμε ως γωνία $(\widehat{a,\beta})$ των διανυσμάτων a, β την κυρτή γωνία των ημιευθειών Ox και Oy

δηλ. $(\widehat{a,\beta}) := x\hat{O}y$



Έχουμε:

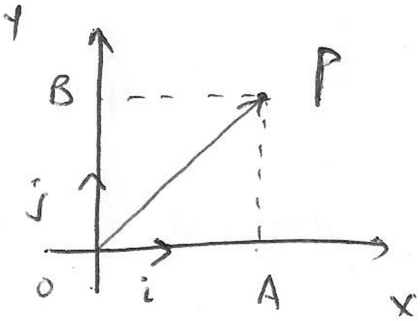
- $(\widehat{a,\beta}) = (\widehat{\beta,a})$
- $0 \leq (\widehat{\alpha,\beta}) \leq \pi$
- $(\widehat{a,\beta}) = 0 \Leftrightarrow \alpha \uparrow\uparrow \beta$
- $(\widehat{a,\beta}) = \pi \Leftrightarrow \alpha \uparrow\downarrow \beta$

Ορισμός

Ορθοκανονικό ή καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο

(Oxy) ή (O, i, j) είναι δύο άξονες xx' και $y'y$ τ.ω

- κοινή αρχή O
- κάθετοι μεταξύ τους
- τα αντίστοιχα μοναδιαία i και j ισομήκη.



$$OP = OA + OB = xi + yj$$

Προσφορική
(*) προβολή του P πάνω xx' και yy'
και όχι λέει στο βιβλίο ...

Ορίζεται Δ^2 το σύνολο των ελευθέρων διανυσμάτων του επιπέδου.

Έστω AB τυχαίο διάνυσμα με $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$

Τότε

$$AB = OB - OA = x_B i + y_B j - (x_A i + y_A j)$$
$$= (x_B - x_A) i + (y_B - y_A) j$$

$$AB = (\underbrace{x_B - x_A}_{\text{τετμημένη}}, \underbrace{y_B - y_A}_{\text{τεταγμένη}}) \qquad |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Οι πράξεις γίνονται: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

και ο Δ^2 δ.χ. (και το $\mathbb{R}^2$)

Τα αντίστοιχα για τον χώρο

Ορισμός Δεξιόστροφο σύστημα

Ορισμός Καρτεσιανό ή ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

$Oxyz$

- κοινή αρχή O
- ανά δύο κάθετοι
- τα μοναδιαία i, j, k ισομήκη
- η (i, j, k) δεξιόστροφο σύστημα

Έστω τυχαίο διάνυσμα $a \in \Delta^3$

Τότε αν $OP = a$:

$$a = OP = xi + yj + zk$$

Για το AB με $A(x_A, y_A, z_A)$
$B(x_B, y_B, z_B)$

$$AB = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

$$|AB| = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2 + (\quad)^2}$$

Και αν $\alpha = (x_1, y_1, z_1)$ $\beta = (x_2, y_2, z_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$a + \beta = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$$