

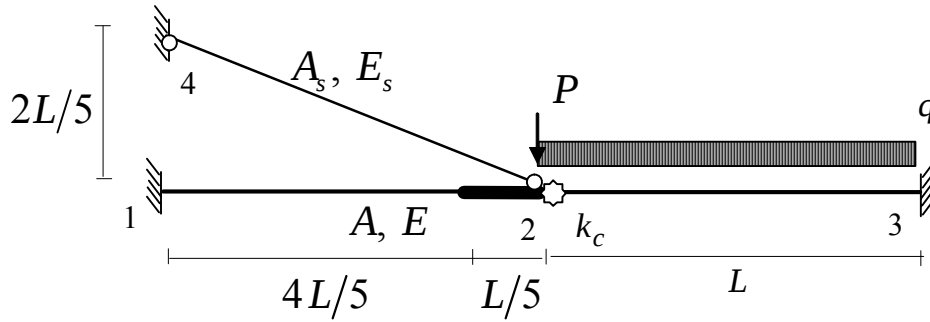


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΣΤΑΤΙΚΗ ΙΙΙ (Ανάλυση Ραβδωτών Φορέων-Σύγχρονες Μέθοδοι)

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Καθ. Μ. Παπαδρακάκης, Αναπλ. Καθ. Ε. Σαπουντζάκης, Επ. Καθ. Μ. Νεραντζάκη

ΘΕΜΑ



Ζητείται να υπολογισθεί η τιμή του P ώστε η κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2 του φορέα του σχήματος να είναι μηδενική.

Να χρησιμοποιηθεί τροποποιημένο μητρώο δυσκαμψίας για το στοιχείο (23).

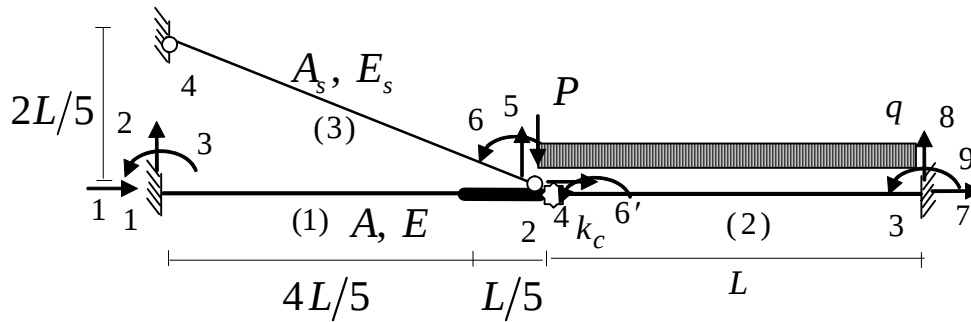
Δίδονται: $q = 60 \text{ kN/m}$, $L = 6 \text{ m}$, $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, $E_s = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$,
 $A = 0.30 \times 0.60 \text{ m}^2$, $A_s = 10 \text{ cm}^2$, $k_c = EI/L$.

Δίδεται το μητρώο ακαμψίας στοιχείου S_2

$$\begin{bmatrix}
 EA/\ell & & & & & & & & & & & \\
 0 & 12EI_3/\ell^3 & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 12EI_2/\ell^3 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & GI_d/\ell & & & & & & & & \\
 0 & 0 & -6EI_2/\ell^2 & 0 & 4EI_2/\ell & & & & & & & \\
 0 & 6EI_3/\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/\ell & & & & & & \\
 -EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA/\ell & & & & & \\
 0 & -12EI_3/\ell^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3/\ell^2 & 0 & 12EI_3/\ell^3 & & & & \\
 0 & 0 & -12EI_2/\ell^3 & 0 & 6EI_2/\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI_2/\ell^3 & & & \\
 0 & 0 & 0 & -GI_d/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_d/\ell & & \\
 0 & 0 & -6EI_2/\ell^2 & 0 & 2EI_2/\ell & 0 & 0 & 0 & 6EI_2/\ell^2 & 0 & 4EI_2/\ell & \\
 0 & 6EI_3/\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3/\ell & 0 & -6EI_3/\ell^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/\ell
 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Αρίθμηση κόμβων, μελών και βαθμών ελευθερίας του φορέα, καθώς και φορά τοπικού άξονα X1 των μελών του όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Υπολογισμός γεωμετρικών στοιχείων των μελών του φορέα.

$$\rightarrow \text{Ροπή αδράνειας : } I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,6^3}{12} = 0,0054 m^4$$

$$\rightarrow \text{Εμβαδόν: } A = b \cdot h = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18 m^2$$

$$\rightarrow \frac{A}{I} = \frac{0,18}{0,0054} = 33,3333 \Rightarrow A = 33,3333 I$$

Μόρφωση τοπικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Παρατηρούμε ότι και τα δυο μέλη (1), (2) του φορέα είναι τύπου P2, του οποίου το τοπικό μητρώο είναι της μορφής :

$$[k^i] = \begin{bmatrix} \frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 & -\frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_i I_i}{L_i^3} & \frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & 0 & -\frac{12 E_i I_i}{L_i^3} & \frac{6 E_i I_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & \frac{4 E_i I_i}{L_i} & 0 & -\frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & \frac{2 E_i I_i}{L_i} \\ \hline -\frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 & \frac{A_i E_i}{L_i} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 E_i I_i}{L_i^3} & -\frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & 0 & \frac{12 E_i I_i}{L_i^3} & -\frac{6 E_i I_i}{L_i^2} \\ 0 & \frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & \frac{2 E_i I_i}{L_i} & 0 & -\frac{6 E_i I_i}{L_i^2} & \frac{4 E_i I_i}{L_i} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Μέλος (1) : $L_1 = 4L/5$

$$[k^1] L = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 & 6 \\ 41,6666 & 0 & 0 & | & -41,6666 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6510 & 1,5625 & | & 0 & -0,6510 & 1,5625 \\ 0 & 1,5625 & 5 & | & 0 & -1,5625 & 2,5 \\ \hline -41,6666 & 0 & 0 & | & 41,6666 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6510 & -1,5625 & | & 0 & 0,6510 & -1,5625 \\ 0 & 1,5625 & 2,5 & | & 0 & -1,5625 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Το τοπικό μητρώο ακαμψίας του μέλους (1) λόγω της εκκεντρότητας υπολογίζεται από την σχέση $[k^i]' = [e^i]^T [k^i] [e^i]$, όπου :

$$[e^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα :

$$[k^1]' = [e^1]^T [k^1] [e^1] \Rightarrow$$

$$[k^1]' L = EI \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 & 6 \\ 41,6666 & 0 & 0 & | & -41,6666 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6510 & 1,5625 & | & 0 & -0,6510 & 2,3437 \\ 0 & 1,5625 & 5 & | & 0 & -1,5625 & 4,375 \\ \hline -41,6666 & 0 & 0 & | & 41,6666 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6510 & -1,5625 & | & 0 & 0,6510 & -2,3437 \\ 0 & 2,3437 & 4,375 & | & 0 & -2,3437 & 9,6874 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Μέλος (2): $L_2 = L$

$$[k^2]L = EI \left[\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 6' & 7 & 8 & 9 \\ 33,3333 & 0 & 0 & 0 & -33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3333 & 0 & 1 & 0 & -0,3333 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ \hline -33,3333 & 0 & 0 & 0 & 33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3333 & 0 & -1 & 0 & 0,3333 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6' \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Το τοπικό μητρώο ακαμψίας του μέλους (2) μετά τη συμπύκνωση της στροφής 6' υπολογίζεται από την σχέση $[k_c^i] = [k_{cc}^i] - [k_{ce}^i][k_{ee}^i]^{-1}[k_{ec}^i]$,

$$[k_c^2]L = EI \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 33,3333 & 0 & 0 & -33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1333 & 0,2 & 0 & -0,1333 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & -0,2 & 0,4 \\ \hline -33,3333 & 0 & 0 & 33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1333 & -0,2 & 0 & 0,1333 & -0,6 \\ 0 & 0,6 & 0,4 & 0 & -0,6 & 0,2 \end{array} \right] \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι και το μέλος (3) του φορέα είναι τύπου P1, του οποίου το τοπικό μητρώο είναι της μορφής :

$$[k^i] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A_i E_i}{L_i} & -\frac{A_i E_i}{L_i} \\ \hline -\frac{A_i E_i}{L_i} & \frac{A_i E_i}{L_i} \end{array} \right]$$

$$[k^3]L = 1,7195EI \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right]$$

Μόρφωση μητρώων μετασχηματισμού των μελών του φορέα. Το μητρώο μετασχηματισμού στοιχείου P1 είναι της μορφής :

$$[\hat{\Lambda}_{PPT}^i] = \left[\begin{array}{cc|cc} \cos \phi^i & \sin \phi^i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \phi^i & \sin \phi^i \end{array} \right]$$

⇒ Μέλος (3)

$$[\hat{\Lambda}_{PPT}^3] = \left[\begin{array}{cc|cc} -0,9285 & 0,3714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9285 & 0,3714 \end{array} \right]$$

Μόρφωση καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα.

Σύμφωνα με την μητρική σχέση $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PPF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PPF}^i]$

λαμβάνουμε :

$$[\bar{k}^3]_L = EI \left[\begin{array}{cc|cc} 1,4824 & -0,593 & -1,4824 & 0,593 \\ -0,593 & 0,2372 & 0,593 & -0,2372 \\ \hline -1,4824 & 0,593 & 1,4824 & -0,593 \\ 0,593 & -0,2372 & -0,593 & 0,2372 \end{array} \right]$$

Με την βοήθεια των καθολικών μητρώων ακαμψίας των μελών του φορέα που υπολογίσαμε στο προηγούμενο βήμα, μορφώνουμε το ολικό μητρώο ακαμψίας της κατασκευής ως :

$$[\bar{K}]_L = EI \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 41,6666 & 0 & 0 & -41,6666 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,651 & 1,5625 & 0 & -0,651 & 2,3437 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5625 & 5 & 0 & -1,5625 & 4,375 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -41,6666 & 0 & 0 & 76,4823 & -0,593 & 0 & -33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & -0,651 & -1,5625 & -0,593 & 1,0215 & -2,1437 & 0 & -0,1333 & 0,6 \\ 0 & 2,3437 & 4,375 & 0 & -2,1437 & 10,4874 & 0 & -0,2 & 0,4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -33,3333 & 0 & 0 & 33,3333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1333 & -0,2 & 0 & 0,1333 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,4 & 0 & -0,6 & 0,2 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Αναδιάταξη του ολικού μητρώου ακαμψίας της κατασκευής ώστε να διαχωριστούν οι γνωστές ποσότητες (δεδομένα) από τις άγνωστες (αντιδράσεις, μετατοπίσεις). Μόρφωση του μητρώου μεταθέσεως $[V]$:

$$[V] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Σύμφωνα με την μητρική σχέση $[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T$ λαμβάνουμε :

$$[\bar{K}_m]L = EI \left[\begin{array}{ccc|cccccc} & [\bar{K}_{ff}] & & & & & [\bar{K}_{fs}] & & \\ & 4 & \uparrow & 6 & 1 & 2 & 3 & \uparrow & 8 & 9 \\ 76,4823 & & & 0 & & & & & & \\ -0,593 & 1,0215 & & & & & & & & \\ 0 & -2,1437 & 10,4874 & & & & & & & \\ \hline -41,6666 & 0 & 0 & 41,6666 & & & & & & \\ 0 & -0,651 & 2,3437 & 0 & 0,651 & & & & & \\ 0 & -1,5625 & 4,375 & 0 & 1,5625 & 5 & & & & \\ -33,3333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33,3333 & & & \\ 0 & -0,1333 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1333 & & \\ 0 & \downarrow & 0,4 & 0 & 0 & 0 & \downarrow & -0,6 & 0,2 & \\ & [\bar{K}_{sf}] & & & & & [\bar{K}_{ss}] & & & \end{array} \right] \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

(Συμμετρικο)

Υπολογισμός δράσεων παγίωσης των μελών του φορέα. Εξετάζουμε τον παγιωμένο φορέα και τοποθετούμε τις αντιδράσεις των μελών:

⇒ Μέλος (1) :

$$\text{Αφόρτιστο} \Rightarrow [\bar{A}_r^1] = [\Lambda_{PPF}^1]^T [A_r^1] = [0]_{(6 \times 1)}$$

$\Rightarrow$ Μέλος (2):

$$[\bar{A}_r^2] = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 180 & 5 \\ 0 & 6 \\ 180 & 6' \\ 0 & 7 \\ 180 & 8 \\ -180 & 9 \end{bmatrix}$$

Οι δράσεις παγιώσεις του μέλους (2) μετα την συμπίκνωση της στροφής δ' είναι

$$[\bar{A}_r^2]_c = [\bar{A}_r^2]_{cc} - [k_{ce}^2]^T [k_{ee}^2]^{-1} [A_r^2]_e = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 144 & 5 \\ 36 & 6 \\ 0 & 7 \\ 216 & 8 \\ -252 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_r^{2J} \\ \bar{A}_r^{2k} \end{bmatrix}_c$$

Δράσεις παγιώσεως κόμβων :

$$\text{Κόμβος \#1: } [S^1] = [\bar{A}_r^{1J}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Κόμβος \#2: } [S^2] = [\bar{A}_r^{1k}] + [\bar{A}_r^{2j}]_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 144 \\ 36 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\text{Κόμβος \#3\Lambda: } [S^3] = [\bar{A}_r^{2k}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 216 \\ -252 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Μόρφωση αναδιατεταγμένων μητρώων εξωτερικών δράσεων
 $[\bar{P}_m] = [V][\bar{P}]$ και μετατοπίσεων κόμβων $[\bar{\Delta}_m] = [V][\bar{\Delta}]$.

$$[\bar{P}_m] = \begin{bmatrix} 0 \\ -144 - P \\ -36 \\ \hline R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_7 \\ R_8 - 216 \\ R_9 + 252 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{matrix} \bar{\bar{P}}_f \\ \bar{\bar{P}}_s \end{matrix}, [\bar{\Delta}_m] = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \begin{matrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{matrix}$$

Έτσι λαμβάνουμε :

$$[\bar{\Delta}_f] EI = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3,4327 \end{bmatrix} L, \quad P = -151,3587 kN$$