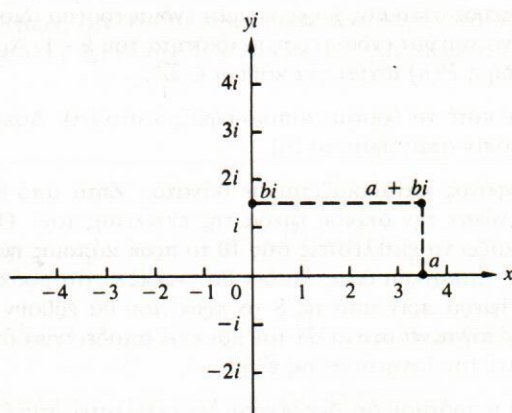




ΣΧΗΜΑ 0.1

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μπορούμε να παραστήσουμε γεωμετρικά έναν πραγματικό αριθμό ως ένα σημείο σε μια ευθεία, την οποία συχνά θεωρούμε άξονα x . Ανάλογα, θεωρούμε κάθε μιγαδικό αριθμό ως ένα σημείο στο ευκλείδειο επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχ. 0.1. Σημειώστε ότι ονομάζουμε τον κατακόρυφο άξονα άξονα yi και όχι απλώς άξονα y και ονομάζουμε i και όχι 1 το σημείο που βρίσκεται σε μοναδιαία απόσταση πάνω από την αρχή των αξόνων. Το σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες (a, b) σημειώνεται με $a + bi$ στο Σχ. 0.1. Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζεται να είναι το

$$C = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ ως ένα υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών, ταυτίζοντας κάθε πραγματικό αριθμό r με τον μιγαδικό αριθμό $r + 0i$. Για παράδειγμα, γράφουμε τον $3 + 0i$ ως 3, τον $-\pi + 0i$ ως $-\pi$, και τον $0 + 0i$ ως 0. Ομοίως, γράφουμε τον $0 + 1i$ ως i και τον $0 + si$ ως si .

Οι μιγαδικοί αριθμοί αναπτύχθηκαν μετά τους πραγματικούς αριθμούς. Ο μιγαδικός αριθμός i επινοήθηκε για να εξασφαλίσει μια λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 = -1$, απαιτούμε λοιπόν να ισχύει

$$i^2 = -1. \quad (1)$$

Δυστυχώς, ο i πήρε το όνομα **φανταστικός αριθμός** και αυτή η ορολογία οδήγησε γενιές φοιτητών στο να βλέπουν τους μιγαδικούς αριθμούς με μεγαλύτερο σκεπτικισμό απ' ό,τι τους πραγματικούς αριθμούς. Στην πραγματικότητα, *όλοι* οι αριθμοί, όπως π.χ. οι $1, 3, \pi, -\sqrt{3}$ και i , είναι επινόηση του μυαλού μας. Δεν υπάρχει φυσική οντότητα που να είναι ο αριθμός 1. Αν υπήρχε, σίγουρα

θα δρισκόταν σε μια τιμητική θέση κάποιου μεγάλου επιστημονικού μουσείου, και μπροστά του θα συγκεντρωνόταν ένα σταθερό πλήθος μαθηματικών, που θα παρατηρούσε το 1 με απορία και σεβασμό. Ο βασικός σκοπός του Κεφαλαίου 7 αυτού του διδλίου είναι να δείξουμε πώς μπορούμε να επινοήσουμε λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων, όταν οι συντελεστές των πολυωνύμων μπορεί να μην είναι καν πραγματικοί αριθμοί!

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε το z ως μιγαδική μεταβλητή, ακριβώς όπως χρησιμοποιούμε τα x και y ως πραγματικές μεταβλητές. Έτσι, όταν ασχολούμαστε με μιγαδικούς αριθμούς, θα σκεφτόμαστε τον z ως $z = x + yi$. Θα συμβολίζουμε δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς με $z_1 = a + bi$ και $z_2 = c + di$. Περιγράφουμε τώρα τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το άθροισμα $z_1 + z_2$, το γινόμενο $z_1 z_2$ και το πηλίκο z_1/z_2 αν $z_2 \neq 0$.

Για να ανήκει το άθροισμα $z_1 + z_2$ στο $\mathbb{C}$, πρέπει να είναι της μορφής $r + si$ όπου οι r και s είναι πραγματικοί αριθμοί. Θέλουμε ο $r + si$ να αντιπροσωπεύει το άθροισμα των $r = r + 0i$ και $si = 0 + si$, και θα θέλαμε να ισχύουν όλες οι τυπικές ιδιότητες της πραγματικής αριθμητικής. Αυτό οδηγεί στον ορισμό του αθροίσματος

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (2)$$

Σημειώνουμε ότι αυτό το άθροισμα ανήκει πραγματικά στο $\mathbb{C}$, αφού οι $a + c$ και $b + d$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Υπολογίστε το $(2 + 3i) + (4 - 7i)$.

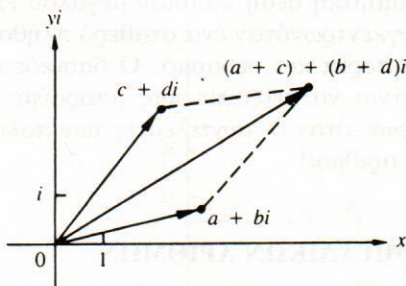
ΛΥΣΗ Φυσικά, όταν γράφουμε $4 - 7i$ εννοούμε τον $4 + (-7)i$. Έχουμε

$$(2 + 3i) + (4 - 7i) = (2 + 3i) + (4 + (-7)i) = 6 - 4i. \quad \square$$

Γεωμετρικά, σκεφτόμαστε την πρόσθεση μιγαδικών αριθμών σαν τη γνωστή πρόσθεση διανυσμάτων στο επίπεδο, όπως παρουσιάζεται στο Σχ. 0.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι οι συνήθεις ιδιότητες $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ και $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ισχύουν.

Το γινόμενο $(a + bi)(c + di)$ ορίζεται μονοσήμαντα αν θέλουμε να ικανοποιούνται οι γνωστές ιδιότητες της πραγματικής αριθμητικής και η επιπλέον απαίτηση $i^2 = -1$, σύμφωνα με την Ισ. (1). Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι θέλουμε να έχουμε

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 0.2

Επομένως, ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό μέσω της

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \quad (3)$$

που είναι της μορφής $r + si$ με $r = ac - bd$ και $s = ad + bc$. Είναι απλό να διαπιστώσει κανείς ότι οι συνήθεις ιδιότητες $z_1 z_2 = z_2 z_1$, $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ και $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ ισχύουν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Υπολογίστε το $(2 - 5i)(8 + 3i)$.

ΛΥΣΗ Δεν απομνημονεύουμε την Εξ. (3): προτιμάμε να υπολογίσουμε το γινόμενο, όπως ακριβώς κάναμε για να δικαιολογήσουμε εκείνη την ισότητα. Έχουμε

$$(2 - 5i)(8 + 3i) = 16 + 6i - 40i + 15 = 31 - 34i. \quad \square$$

Για να εξηγήσουμε τη γεωμετρική σημασία του μιγαδικού πολλαπλασιασμού, ορίζουμε πρώτα το **μέτρο** $|a + bi|$ του $a + bi$, που λέγεται και **απόλυτη τιμή** του $a + bi$, μέσω της

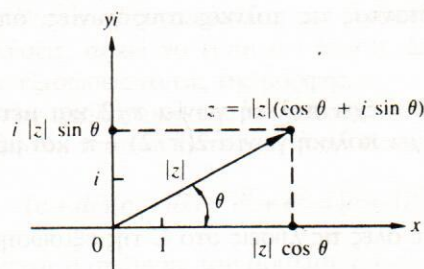
$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4)$$

Το μέτρο αυτό είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός και ισούται με την απόσταση του $a + bi$ από την αρχή των αξόνων στο Σχ. 0.1. Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε ένα μιγαδικό αριθμό z με χρήση των πολικών συντεταγμένων ως εξής:

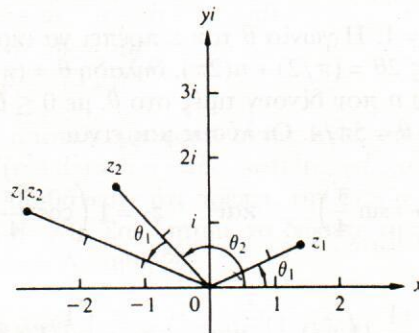
$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (5)$$

όπου θ είναι η γωνία, μετροйμένη με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, από τον άξονα x μέχρι το διάνυσμα από το 0 προς το z , όπως φαίνεται στο Σχ. 0.3. Ας θέσουμε

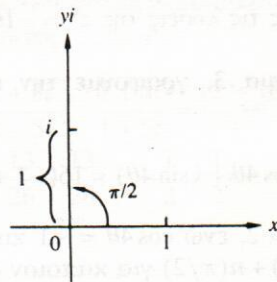
$$z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{και} \quad z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$



ΣΧΗΜΑ 0.3



ΣΧΗΜΑ 0.4



ΣΧΗΜΑ 0.5

και ας υπολογίσουμε το γινόμενο τους σ' αυτήν τη μορφή. Βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)i] \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Σημειώνουμε ότι η Εξ. (6) είναι μία πολική μορφή του τύπου (5) όπου $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ και η γωνία θ του $z_1 z_2$ είναι το άθροισμα $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Επομένως,

γεωμετρικά, πολλαπλασιάζουμε μιγαδικούς αριθμούς πολλαπλασιάζοντας τα μέτρα τους και προσθέτοντας τις πολικές τους γωνίες, όπως φαίνεται στο Σχ. 0.4.

Παρατηρούμε ότι ο i έχει πολική γωνία $\pi/2$ και μέτρο 1, όπως φαίνεται στο Σχ. 0.5. Άρα ο i^2 έχει πολική γωνία $2(\pi/2) = \pi$ και μέτρο $1 \cdot 1 = 1$, δηλαδή $i^2 = -1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Βρείτε όλες τις λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^2 = i$.

ΛΥΣΗ Γράφοντας την εξίσωση $z^2 = i$ σε πολική μορφή και χρησιμοποιώντας τον Τύπο (6), παίρνουμε

$$|z|^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1(0 + i).$$

Άρα $|z|^2 = 1$, οπότε $|z| = 1$. Η γωνία θ του z πρέπει να ικανοποιεί τις $\cos 2\theta = 0$ και $\sin 2\theta = 1$. Επομένως $2\theta = (\pi/2) + n(2\pi)$, δηλαδή $\theta = (\pi/4) + n\pi$ για κάποιον ακέραιο n . Οι τιμές του n που δίνουν τιμές στο θ , με $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι οι 0 και 1, και δίνουν $\theta = \pi/4$ ή $\theta = 5\pi/4$. Οι λύσεις μας είναι

$$z_1 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{και} \quad z_2 = 1 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

ή

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + i). \quad \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Βρείτε όλες τις λύσεις της $z^4 = -16$.

ΛΥΣΗ Όπως στο Παράδειγμα 3, γράφουμε την εξίσωση σε πολική μορφή, καταλήγοντας στην

$$|z|^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16(-1 + 0i).$$

Επομένως $|z|^4 = 16$ άρα $|z| = 2$, ενώ $\cos 4\theta = -1$ και $\sin 4\theta = 0$. Βρίσκουμε ότι $4\theta = \pi + n(2\pi)$, άρα $\theta = (\pi/4) + n(\pi/2)$ για κάποιον ακέραιο n . Οι διαφορετικές τιμές του θ που παίρνουμε, με $0 \leq \theta < 2\pi$, είναι οι $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$, και $7\pi/4$. Άρα μια λύση της $z^4 = -16$ είναι η

$$2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2}(1 + i).$$

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε τρεις ακόμα λύσεις, τις

$$\sqrt{2}(-1 + i), \quad \sqrt{2}(-1 - i), \quad \text{και} \quad \sqrt{2}(1 - i). \quad \square$$

Τα τελευταία δύο παραδείγματα υποδεικνύουν ότι μπορούμε να βρούμε λύσεις μιας εξίσωσης $z^n = a + bi$, γράφοντας την εξίσωση σε πολική μορφή. Θα υπάρχουν πάντα n λύσεις, αρκεί να είναι $a + bi \neq 0$. Στις Ασκήσεις 27 έως 32 σας ζητάμε να λύσετε εξισώσεις αυτής της μορφής.

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του z_1/z_2 όπου $z_2 \neq 0$, δηλαδή, στην εύρεση ενός μιγαδικού αριθμού z_3 τέτοιου ώστε $z_3 z_2 = z_1$. Παρατηρούμε ότι

$$(c + di)(c - di) = c^2 + d^2 = |c + di|^2.$$

Ο αριθμός $c - di$ λέγεται ο συζυγής του αριθμού $c + di$. Συνήθως υπολογίζουμε τον $z_1/z_2 = (a + bi)/(c + di)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned} \quad (7)$$

Παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα είναι όντως ένας αριθμός της μορφής $r + si$, όπου οι $r = (ac + bd)/(c^2 + d^2)$ και $s = (bc - ad)/(c^2 + d^2)$ ανήκουν στο $\mathbb{R}$. Μπορείτε να επαληθεύσετε, αν αισθάνεστε ότι πρέπει, την $z_3 z_2 = z_1$. Σημειώνουμε, ότι αν $z_2 \neq 0$ τότε $|z_2| = c^2 + d^2 \neq 0$. Σας ζητάμε να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία της μιγαδικής διαίρεσης στην Άσκηση 26.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 Υπολογίστε τον $(2 + 3i)/(1 - 5i)$.

ΛΥΣΗ Αντί να απομνημονεύσουμε τον τελικό τύπο της Εξ. (7), κρατάμε απλώς στην μνήμη μας την τεχνική του πολλαπλασιασμού αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{1 - 5i} &= \frac{2 + 3i}{1 - 5i} \cdot \frac{1 + 5i}{1 + 5i} = \frac{(2 - 15) + (3 + 10)i}{1 + 25} \\ &= -\frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{aligned} \quad \square$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ίσως έχετε παρακολουθήσει κάποιο μάθημα γραμμικής άλγεβρας. Εδώ κάνουμε μια σύντομη ανασκόπηση της αριθμητικής των πινάκων. Οι πίνακες θα μας εφοδιάσουν με κάποια παραδείγματα αλγεβρικών δομών σε επόμενα κεφάλαια.

Πίνακας είναι μια ορθογώνια διάταξη αριθμών. Για παράδειγμα, η διάταξη

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

είναι ένας πίνακας που έχει δύο γραμμές και τρεις στήλες. Ένας πίνακας που έχει m γραμμές και n στήλες είναι ένας πίνακας $m \times n$, άρα ο Πίνακας (8) είναι ένας πίνακας 2×3 . Αν $m = n$, ο πίνακας λέγεται **τετραγωνικός**. Οι αριθμοί στις συντεταγμένες ενός πίνακα μπορούν να είναι οποιοδήποτε τύπου – ακέραιοι, ρητοί, πραγματικοί, ή μιγαδικοί. Θέτουμε $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των πινάκων $m \times n$ με πραγματικούς αριθμούς. Αν $m = n$, γράφουμε για συντομία $M_n(\mathbb{R})$. Ομοίως, μπορούμε να θεωρήσουμε το $M_n(\mathbb{Z})$, το $M_n(\mathbb{C})$, κ.λπ.

Δύο πίνακες του ίδιου σχήματος προστίθενται με τον προφανή τρόπο: προσθέτουμε τα στοιχεία στις αντίστοιχες θέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6 Στον $M_{2 \times 3}(\mathbb{Z})$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα για τον συμβολισμό πινάκων. Αν A, B και C είναι πίνακες του ίδιου σχήματος, είναι εύκολο να δούμε ότι $A + B = B + A$ και ότι $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Περνάμε τώρα στον πολλαπλασιασμό πινάκων, και αρχίζουμε ορίζοντας το γινόμενο AB όπου A είναι ένας πίνακας $1 \times n$ και B ένας πίνακας $n \times 1$. Ορίζουμε τον AB ως εξής:

$$AB = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (9)$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι ένας αριθμός. (Δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα σε έναν αριθμό και στον πίνακα 1×1 που αποτελείται μόνο από αυτόν τον αριθμό.) Θα αναγνωρίσατε ότι αυτό το γινόμενο είναι το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 Βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = (3)(1) + (-7)(4) + (2)(5) = -15. \quad \square$$

Έστω ότι ο A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και ο B είναι ένας πίνακας $n \times s$. Σημειώνουμε ότι το πλήθος n των συντεταγμένων σε κάθε γραμμή του A είναι ίσο με το πλήθος n των συντεταγμένων σε κάθε στήλη του B . Το γινόμενο $C = AB$ είναι ένας πίνακας $m \times s$. Η συντεταγμένη στην i -στή γραμμή και j -στή

στήλη του AB είναι το γινόμενο της i -στής γραμμής του A επί την j -στή στήλη του B , όπως αυτό ορίστηκε μέσω της Εξ. (9) και περιγράφηκε στο Παράδειγμα 7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 Υπολογίστε τον

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

ΛΥΣΗ Παρατηρούμε ότι ο A είναι 2×3 και ο B είναι 3×4 . Άρα ο AB θα είναι 2×4 . Η συντεταγμένη στη δεύτερη γραμμή και τρίτη στήλη είναι η

$$(2\text{η γραμμή } A) (3\text{η στήλη } B) = [1 \ 4 \ 6] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 + 4 + 12 = 18.$$

Υπολογίζοντας και τις οκτώ συντεταγμένες του AB μ' αυτόν τον τρόπο, παίρνουμε

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 & 6 \\ 1 & 17 & 18 & 3 \end{bmatrix}. \quad \square$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 Η παράσταση

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

δεν είναι ορισμένη, διότι το πλήθος των συντεταγμένων οποιασδήποτε γραμμής του πρώτου πίνακα δεν είναι ίσο με το πλήθος των συντεταγμένων οποιασδήποτε στήλης του δεύτερου πίνακα. $\square$

Για τετραγωνικούς πίνακες του ίδιου μεγέθους, η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι πάντα καλά ορισμένες πράξεις. Στην Άσκηση 42 σας ζητάμε να δικαιολογήσετε τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός.

Δηλαδή, ο AB μπορεί να μην είναι ίσος με τον BA ακόμα και όταν τα δύο γινόμενα είναι καλά ορισμένα, όπως π.χ. αν $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$. Μπορούμε να δείξουμε ότι $A(BC) = (AB)C$ και $A(B + C) = AB + AC$ αν βεβαίως αυτές οι παραστάσεις μπορούν να ορισθούν καλά.

Συμβολίζουμε με I_n τον πίνακα $n \times n$ με συντεταγμένες 1 στη διαγώνιο από την άνω αριστερή μέχρι την κάτω δεξιά γωνία, και συντεταγμένες 0 σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις. Για παράδειγμα,

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν A είναι οποιοσδήποτε πίνακας $n \times s$ και B οποιοσδήποτε πίνακας $r \times n$, τότε $I_n A = A$ και $B I_n = B$. Δηλαδή, ο πίνακας I_n δρα ακριβώς όπως ο αριθμός 1 στον πολλαπλασιασμό, όταν ο πολλαπλασιασμός επί I_n ορίζεται.

Έστω A ένας πίνακας $n \times n$ και ας θεωρήσουμε μια εξίσωση πινάκων της μορφής $AX = B$, όπου οι A και B είναι γνωστοί, αλλά ο X είναι άγνωστος. Αν μπορούσαμε να βρούμε έναν $n \times n$ πίνακα A^{-1} τέτοιον, ώστε $A^{-1}A = I_n$, τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε ότι

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)X = A^{-1}B, \quad I_n X = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B,$$

και θα είχαμε βρει τον ζητούμενο πίνακα X . Ένας τέτοιος πίνακας A^{-1} δρα όπως ο αντίστροφος ενός αριθμού, δηλαδή: $A^{-1}A = I_n$ και $(1/r)r = 1$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό A^{-1} .

Αν ο A^{-1} υπάρχει, ο τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **αντιατρέψιμος** και ο A^{-1} λέγεται ο **αντίστροφος** του A . Αν ο A^{-1} δεν υπάρχει, τότε ο A λέγεται **ιδιόμορφος**. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο A^{-1} υπάρχει, οπότε $A^{-1}A = I_n$, τότε και $AA^{-1} = I_n$, και επιπλέον, υπάρχει μόνο ένας πίνακας A^{-1} που έχει αυτή την ιδιότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10 Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι

$$\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

□

Αφήνουμε τα προβλήματα του προσδιορισμού της ύπαρξης του A^{-1} και του υπολογισμού του, για ένα μάθημα γραμμικής άλγεβρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 0.4

Στις Ασκήσεις 1 έως 19 υπολογίστε τη δοθείσα αριθμητική παράσταση και δώστε την απάντησή σας στη μορφή $a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $(2 - 3i) + (4 + 5i)$

2. $i + (5 - 3i)$

3. $(5 + 7i) - (3 - 2i)$

4. $(1 - 3i) - (-4 + 2i)$

5. i^3

6. i^4

7. i^{23}

8. $(-i)^{35}$

9. $(4 - i)(5 + 3i)$

10. $(8 + 2i)(3 - i)$

11. $(2 - 3i)(4 + i) + (6 - 5i)$

12. $(1 + i)^3$

13. $(1 - i)^5$ (Χρησιμοποιήστε το διωνυμικό θεώρημα).

14. $\frac{7 - 5i}{1 + 6i}$

15. $\frac{i}{1 + i}$

16. $\frac{1 - i}{i}$

17. $\frac{i(3 + i)}{2 - 4i}$

18. $\frac{3 + 7i}{(1 + i)(2 - 3i)}$

19. $\frac{(1 - i)(2 + i)}{(1 - 2i)(1 + i)}$

20. Βρείτε το $|3 - 4i|$.

21. Βρείτε το $|6 + 4i|$.

Στις Ασκήσεις 22 έως 25, γράψτε τον δοθέντα μιγαδικό αριθμό z στην πολική μορφή $|z|(p + qi)$ όπου $|p + qi| = 1$.

22. $3 - 4i$

23. $-1 + i$

24. $12 + 5i$

25. $-3 + 5i$

26. Έστω z_1 και z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$. Περιγράψτε τη γεωμετρική σημασία του z_1/z_2 με βάση τα μέτρα και τις πολικές γωνίες τους.

Στις Ασκήσεις 27 έως 32, βρείτε όλες τις μιγαδικές λύσεις της δοθείσας εξίσωσης.

27. $z^4 = 1$

28. $z^4 = -1$

29. $z^3 = -8$

30. $z^3 = -27i$

31. $z^6 = 1$

32. $z^6 = -64$

Στις Ασκήσεις 33 έως 40, υπολογίστε την δοθείσα παράσταση πινάκων, αν αυτή είναι καλά ορισμένη.

33. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1+i & -2 & 3-i \\ 4 & i & 2-i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & i-1 & -2+i \\ 3-i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} i & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & -2i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3-i & 4i \\ 2 & 1+i \\ 3 & -i \end{bmatrix}$

$$36. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$37. \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$38. \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$39. \begin{bmatrix} i & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3i & 1 \\ 4 & -2i \end{bmatrix}$$

$$40. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4$$

$$41. \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}^4$$

42. Δώστε ένα παράδειγμα στον $M_2(\mathbb{Z})$, στο οποίο να αποδεικνύεται ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός.

43. Κάνοντας δοκιμές, βρείτε τον $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$.

44. Κάνοντας δοκιμές, βρείτε τον $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$.

45. Αποδείξτε ότι αν οι $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ είναι αντιστρέψιμοι, τότε και οι AB, BA είναι αντιστρέψιμοι.

46. Έστω $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, δείξτε ότι

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{Z}^+.$$