Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

# Προγραμματιστικές Τεχνικές

## Γράφοι: το πρόβλημα της εξερεύνησης

Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS) και κατά Βάθος (DFS)

Εφαρμογές: συντομότερες διαδρομές, τοπολογική διάταξη

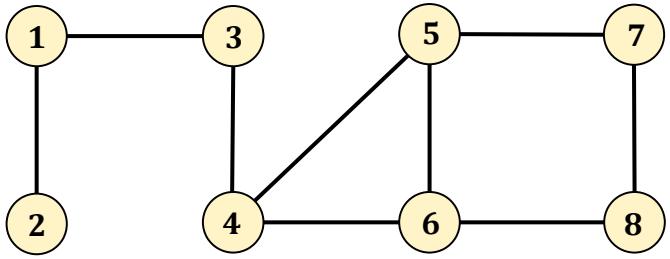
Διδάσκοντες

Βασίλης Βεσκούκης
Σωτήρης Κοκόσης
Νίκος Λεονάρδος
Άρης Παγουρτζής
Νίκος Παπασπύρου
Πέτρος Ποτίκας
Γιώργος Σιόλας

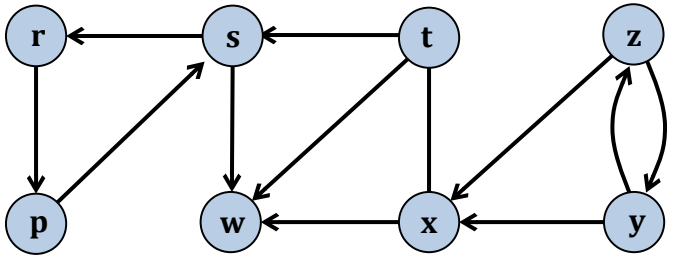
progtech@cslab.ece.ntua.gr

# Ορισμός Γράφων - Δικτύων

## Γράφος - Δίκτυο




$G_1 = (V_1, E_1)$

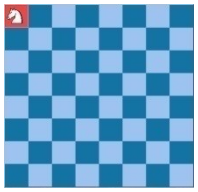


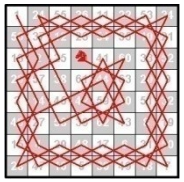

$G_2 = (V_2, E_2)$

- **Γράφος (ή γράφημα) :** ζεύγος **(V, E),** **V** ένα μη κενό σύνολο
  **E** διμελής σχέση στο **V**
- **Μη-κατευθυνόμενος γράφος :** σχέση **E** συμμετρική
- **V** : **κορυφές** (vertices) ή **κόμβοι** (nodes)
- **E** : **ακμές** (edges)

# Εφαρμογές Γράφων & Δικτύων

## Γράφος - Δίκτυο





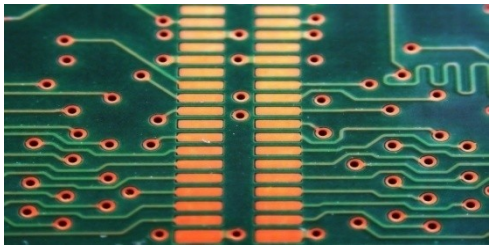
Περίπατος του Ιππότη/Αλόγου
Διαδρομή Hamilton

Χάρτες
Χρωματισμός

Συνδεσιμότητα

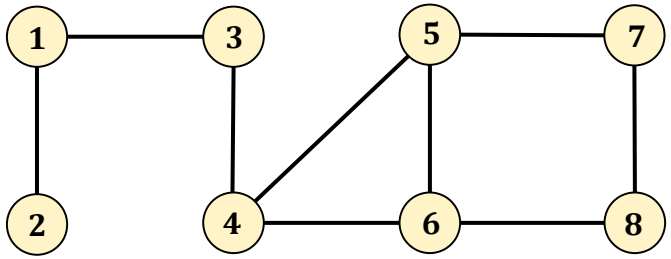

Συντομότερες διαδρομές

GPS – Navigation

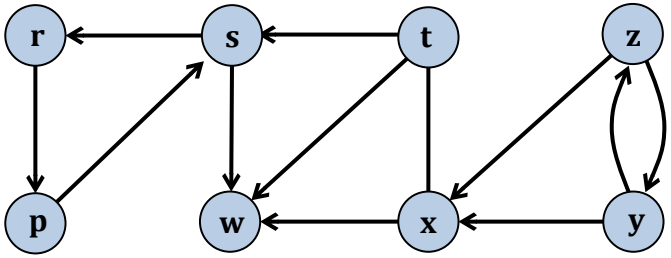



Επιπεδότητα

# Γράφοι: ορολογία



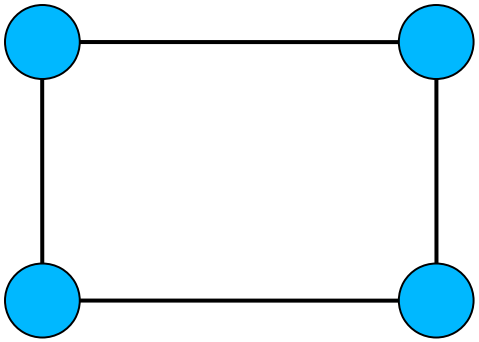

$G_1 = (V_1, E_1)$




$G_2 = (V_2, E_2)$

- **Γειτονικές** (adjacent) **κορυφές**: συνδέονται με ακμή, π.χ. 4 και 6
- **Άκρα** (endpoints) ακμής
- **Προσπίπτουσα** (incident) ακμή σε κόμβο
- **Γειτονικές ακμές**: προσπίτουν στον ίδιο κόμβο

# Γράφοι: ορολογία

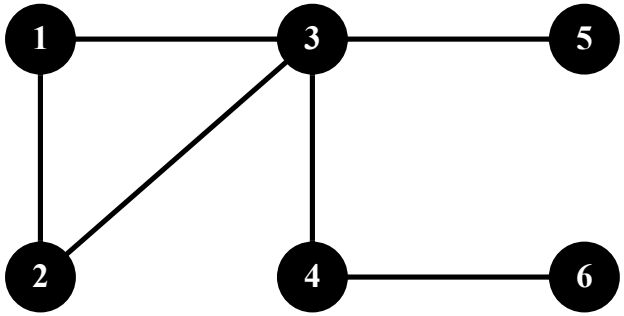


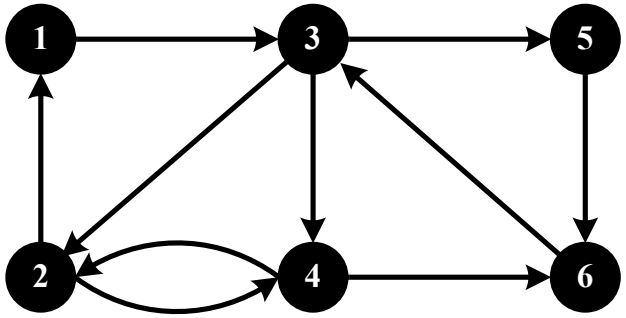
2-κανονικός γράφος

- **Βαθμός** (degree, valence) **κορυφής** v: ο αριθμός των ακμών που προσπίπτουν στην v, deg(v)
- Ένας (μη κατευθυνόμενος) γράφος όπου deg(v)=*k* για κάθε κορυφή v, λέγεται ***k*-κανονικός** (*k*-regular)
- Σημαντική ιδιότητα: $\Sigma$ deg(v) = 2|E| (σε μη κατευθ/νους γράφους)
- Σε κατευθυνόμενο γράφο: in-deg(v), out-deg(v)

$$\Sigma \text{ out-deg(v)} = \Sigma \text{ in-deg(v)} = |E|$$

# Διαδρομές σε γράφους




- **Δρόμος:** έγκυρη ακολουθία από κορυφές-ακμές
- **Μονοπάτι:** δρόμος χωρίς επαναλήψεις ακμών

  **Απλό μονοπάτι:** μονοπάτι χωρίς επαναλήψεις κορυφών
- **Κύκλος:** κλειστό μονοπάτι

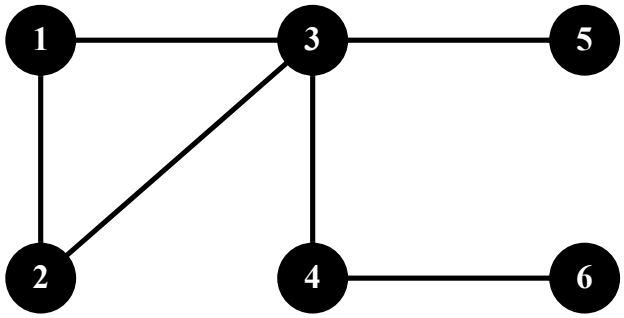
  **Απλός κύκλος:** απλό κλειστό μονοπάτι
- **Μήκος δρόμου:** το πλήθος των ακμών του

# Αναπαράσταση γράφων

- ... με **πίνακα γειτνίασης**:

$$A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

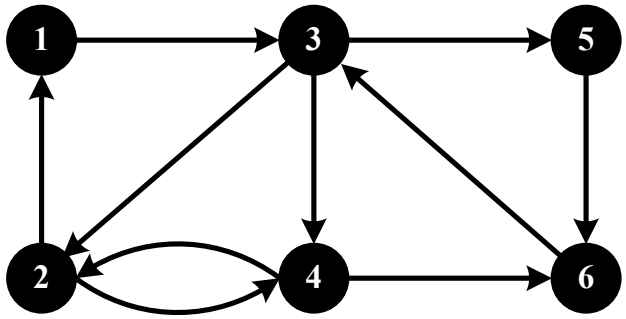
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - Μη-κατευθυνόμενος: συμμετρικός πίνακας
  - Χώρος: $\Theta(n^2)$
  - Προσπέλαση γειτόνων: $\Theta(n)$
  - Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής: $O(1)$




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

# Αναπαράσταση γράφων

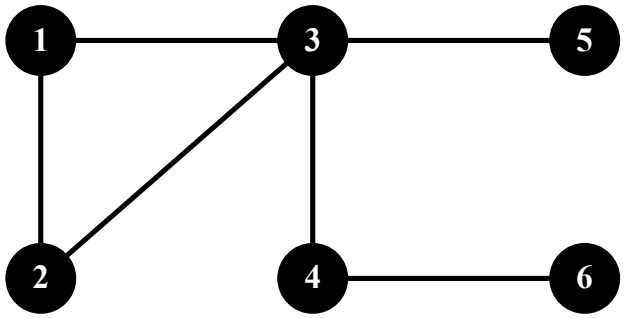
- ... με **πίνακα γειτνίασης**: $$A[i,j] = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$
  - Αν έχουμε βάρη, $A[i,j] = w(v_i, v_j)$
  - Μη-κατευθυνόμενος: μη-συμμετρικός πίνακας
  - Χώρος: $\Theta(n^2)$
  - Προσπέλαση γειτόνων: $\Theta(n)$
  - Άμεσος έλεγχος ύπαρξης ακμής: $O(1)$

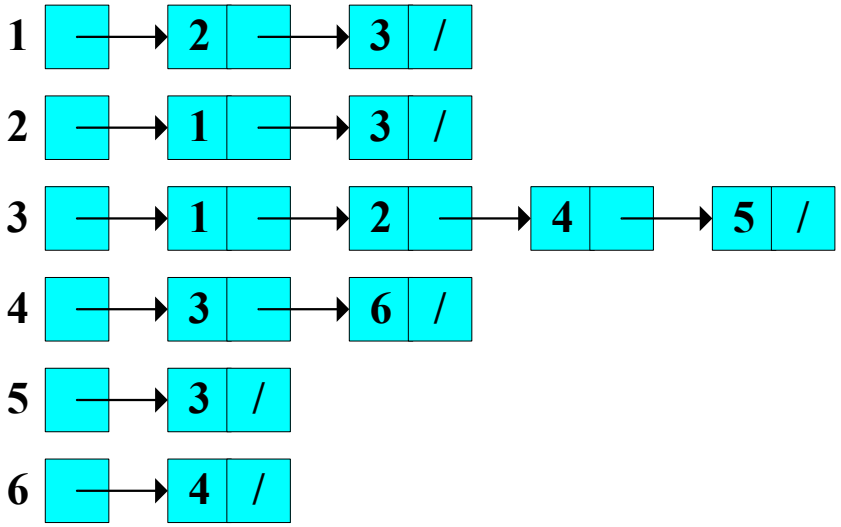



| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

# Αναπαράσταση γράφων

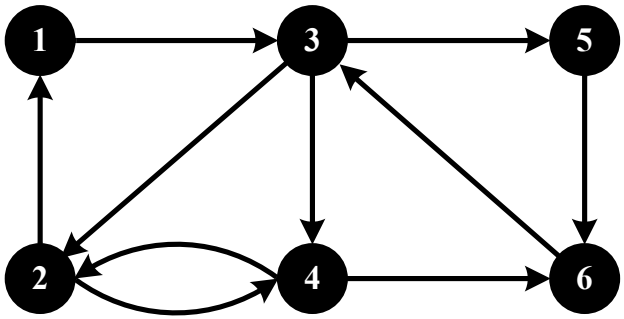
- … με **λίστες γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστες
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος: Θ(m)
  - Προσπέλαση γειτόνων: Θ(deg(u))
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής: O(deg(u))

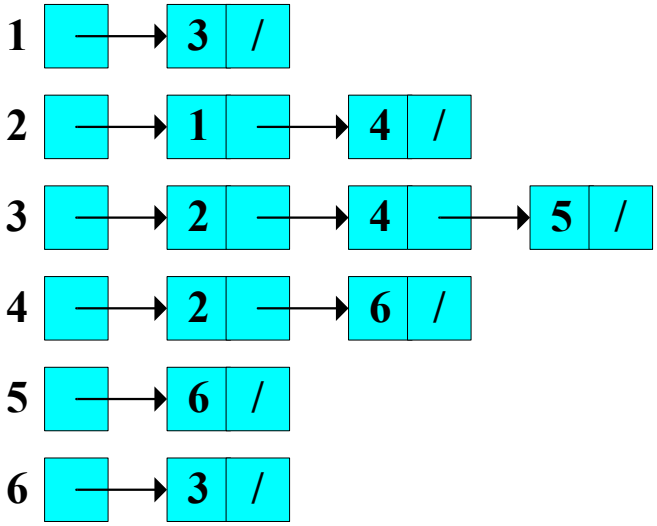


# Αναπαράσταση γράφων

- … με **λίστες γειτνίασης**: γειτονικές κορυφές σε λίστες
  - Αν έχουμε βάρη, τα αποθηκεύουμε στους κόμβους
  - Χώρος: Θ(m)
  - Προσπέλαση γειτόνων: Θ(deg(u))
  - Έλεγχος ύπαρξης ακμής: O(deg(u))



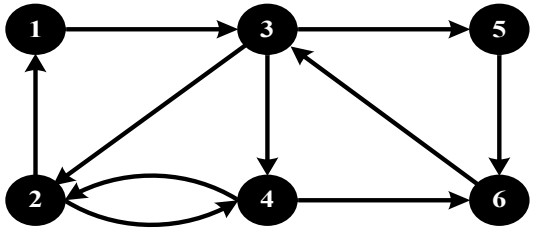



# Γράφοι: συνεκτικότητα

- Ένας *μη κατευθυνόμενος* γράφος λέγεται συνεκτικός (connected) αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του

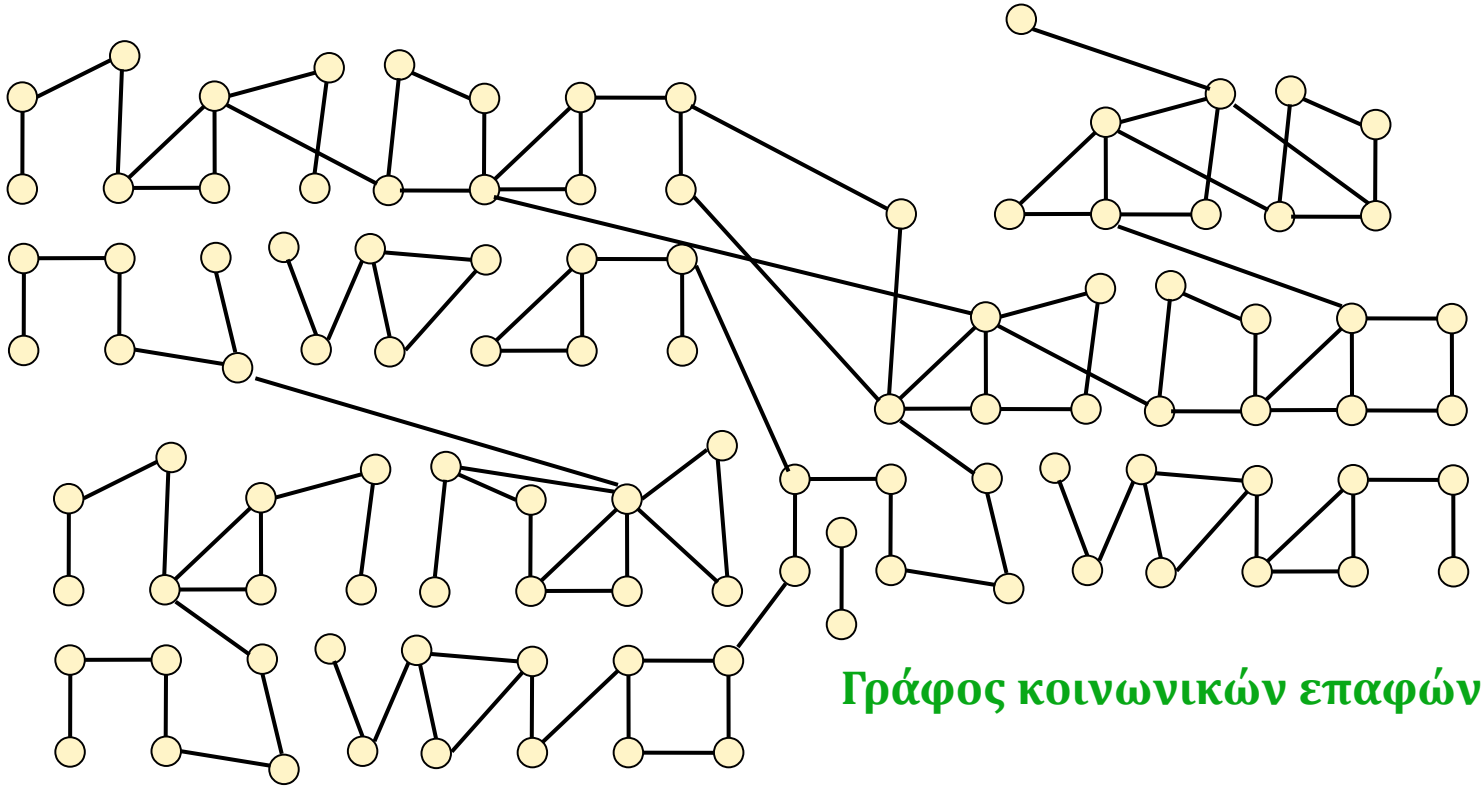
  Σε συνεκτικό γράφο ισχύει: $n - 1 \leq e \leq \frac{n(n-1)}{2}, n = |V|, e = |E|.$

- Ένας *κατευθυνόμενος* γράφος λέγεται
  - ισχυρά συνεκτικός (strongly connected) αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του ακολουθώντας τις κατευθύνσεις των ακμών



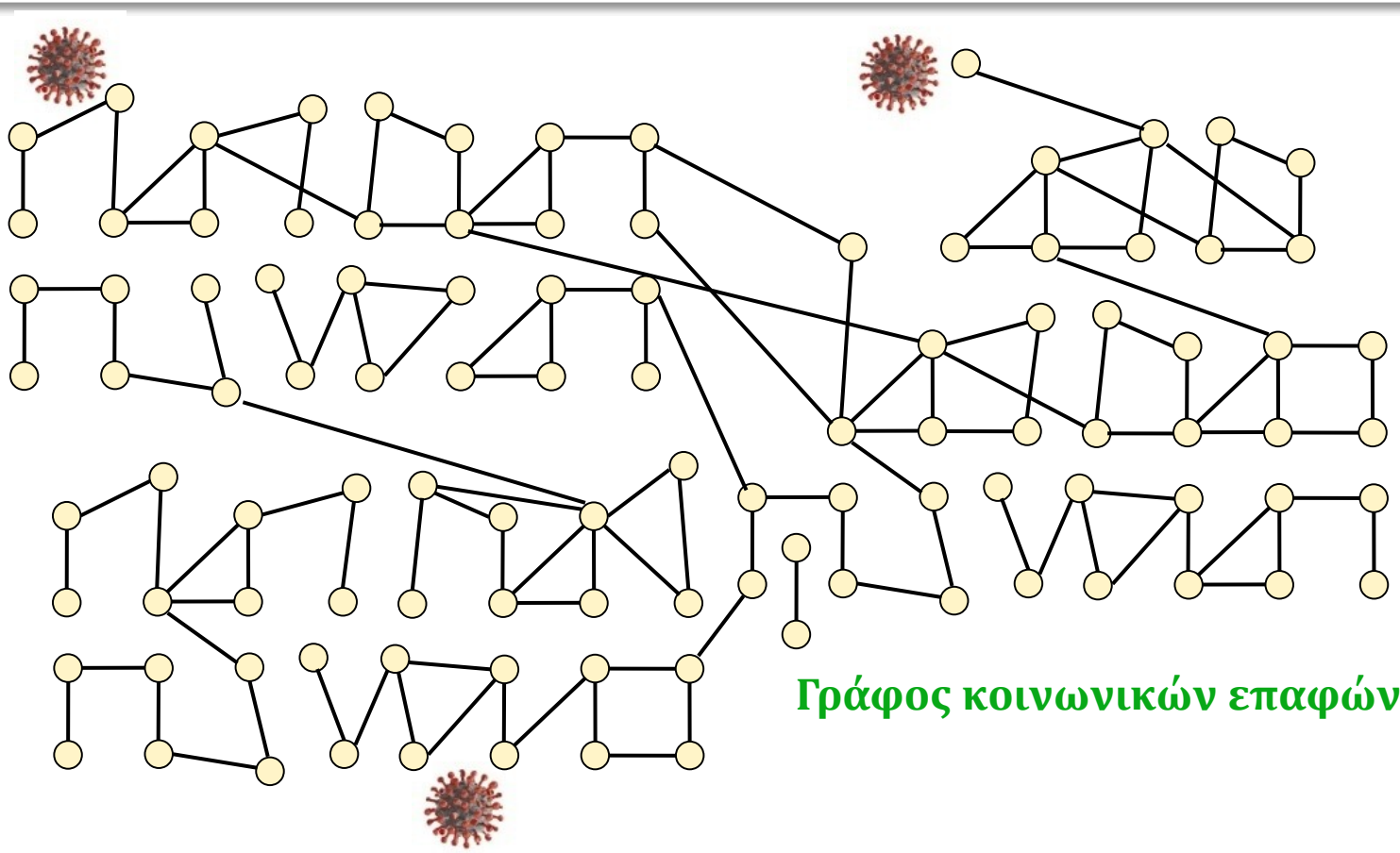

  - ασθενώς συνεκτικός (weakly connected) αν υπάρχει δρόμος μεταξύ οποιωνδήποτε δύο κορυφών του αγνοώντας τις κατευθύνσεις των ακμών

# Εξερεύνηση Γραφημάτων



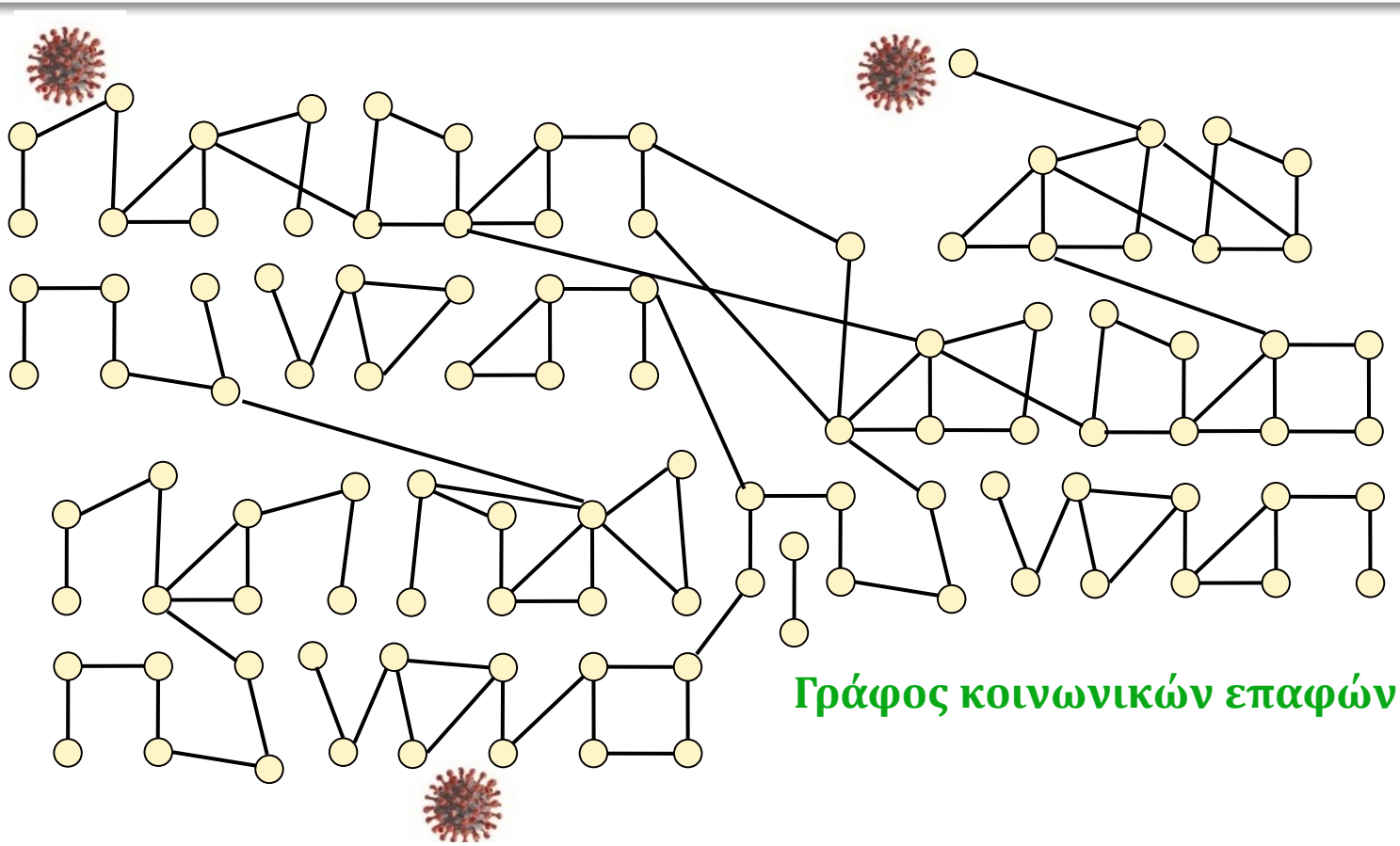
**Γράφος κοινωνικών επαφών**

# Εξερεύνηση Γραφημάτων



**Γράφος κοινωνικών επαφών**

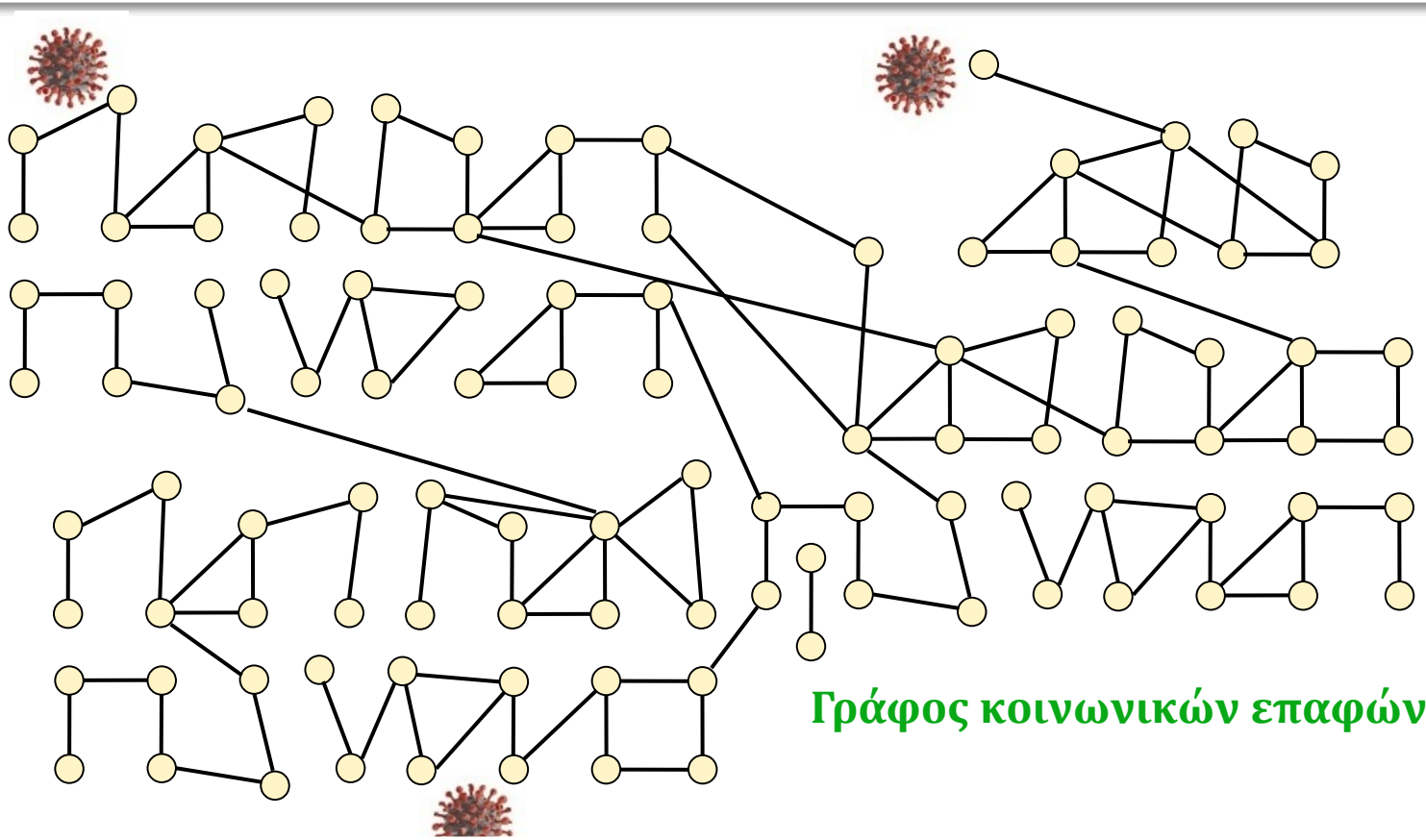
# Εξερεύνηση Γραφημάτων



**Γράφος κοινωνικών επαφών**

Ποιοί μπορεί να κολλήσουν covid-19; Πόσο γρήγορα; Ποιούς πρέπει να ειδοποιήσουμε πρώτα;

# Εξερεύνηση Γραφημάτων

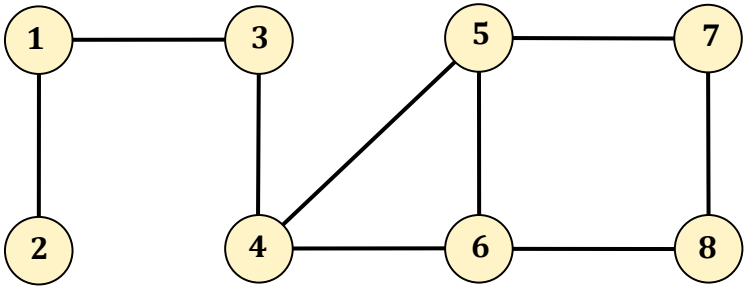


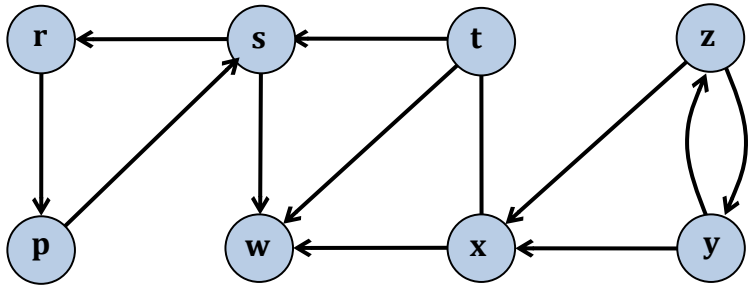
**Γράφος κοινωνικών επαφών**

Κύριο ερώτημα: *δεδομένου γράφου και κόμβου s, ποιοί κόμβοι του γράφου είναι προσβάσιμοι από τον s και πώς;*

Γνωστό και ως πρόβλημα προσβασιμότητας/διάσχισης/αναζήτησης

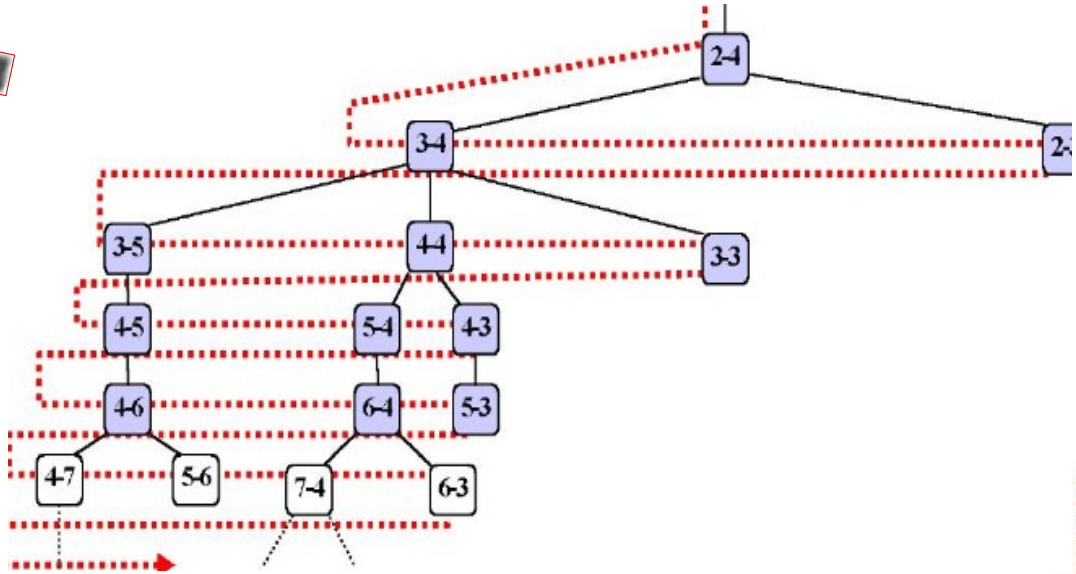
# Εξερεύνηση Γραφημάτων



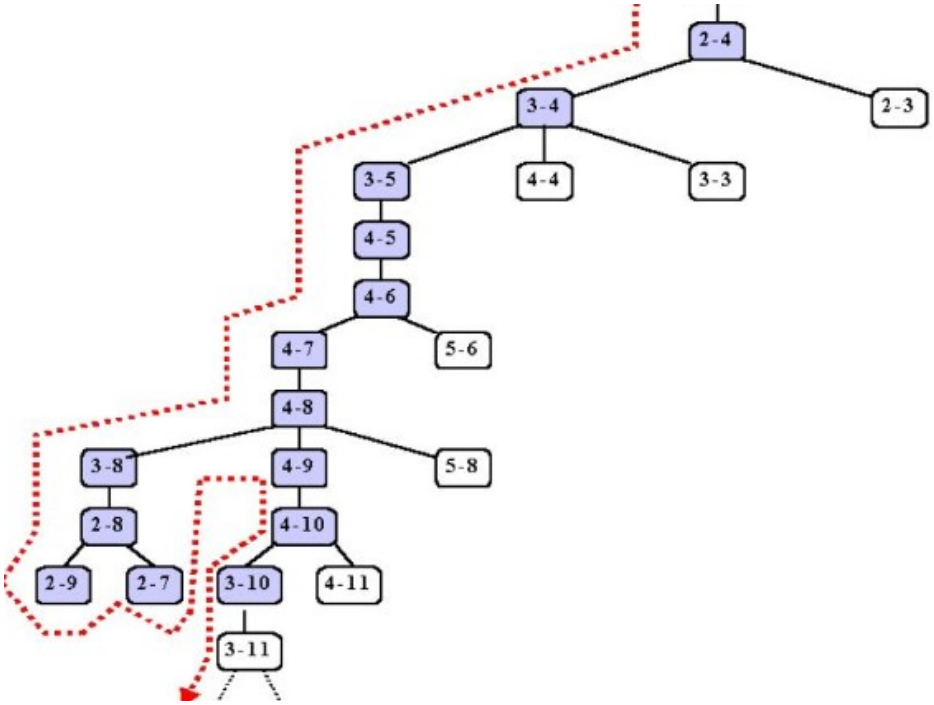

- Ορίζεται τόσο σε *μη κατευθυνόμενα* (undirected) όσο και σε *κατευθυνόμενα* (directed) γραφήματα
- Δύο βασικές μέθοδοι:
  - **Εξερεύνηση κατά Πλάτος** -- Breadth-First Search (**BFS**)
  - **Εξερεύνηση κατα Βάθος** -- Depth-First Search (**DFS**)

# Εξερεύνηση Γραφημάτων

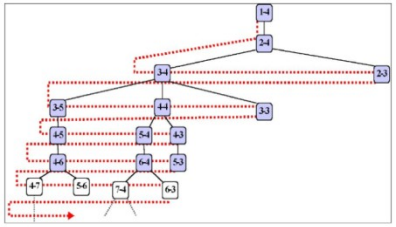



**Εξερεύνηση BFS**

**Εξερεύνηση DFS**

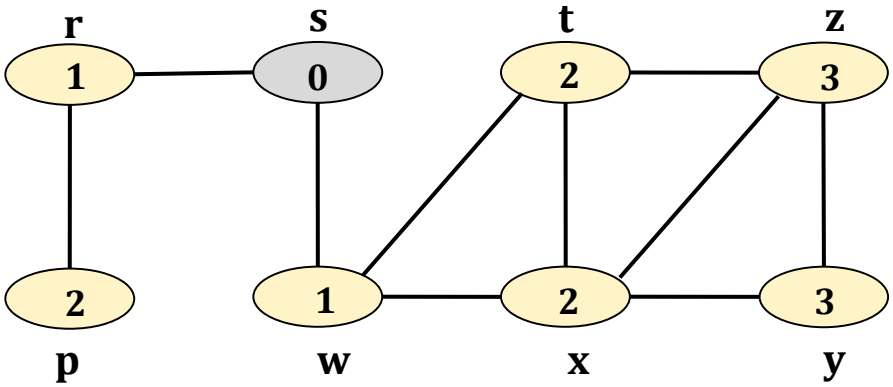


# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS



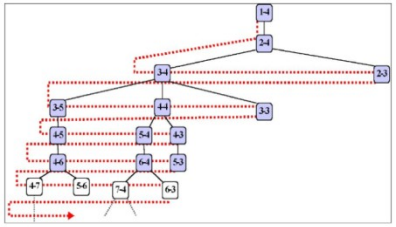
## Βασική Ιδέα BFS

- Έστω G = (V, E) ένας γράφος και **s**∈V ένας κόμβος εκκίνησης



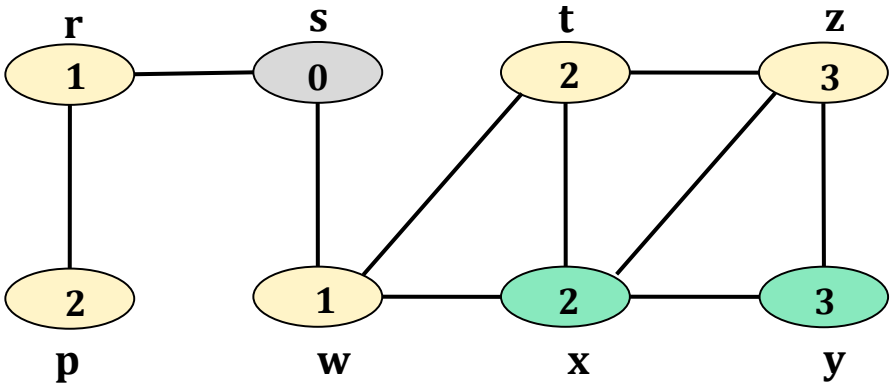

- $\mathbf{d_s(x)}$ : ελάχιστη απόσταση του κόμβου x∈V από τον s

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS



## Βασική Ιδέα BFS

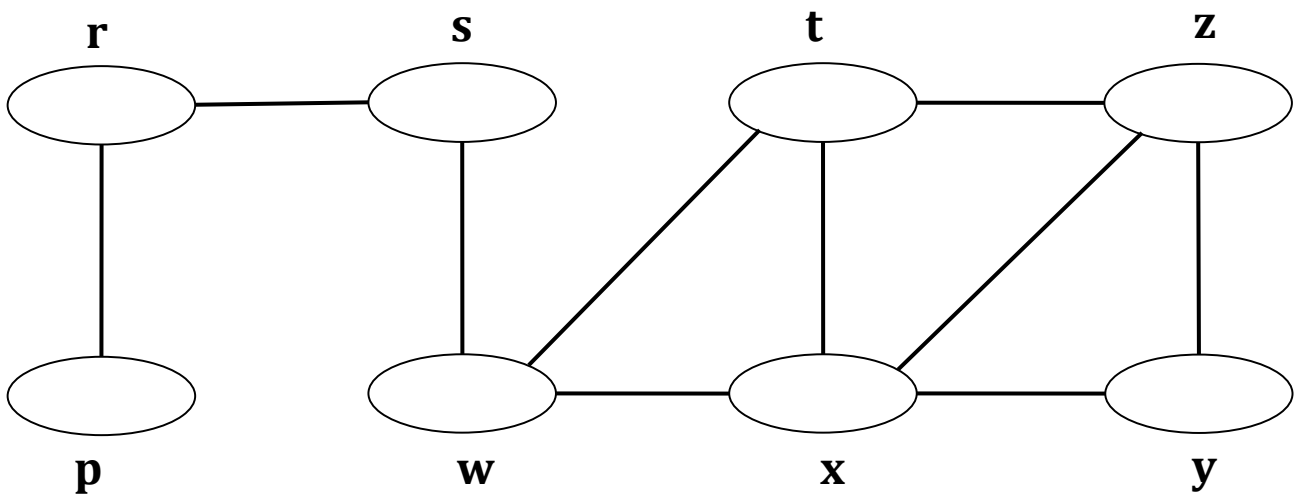
- Ο κόμβος **x** εξερευνάται **πριν** τον **y** σε μια BFS, εάν $\mathbf{d_s(x) < d_s(y)}$, δηλαδή η BFS εξερευνά πρώτα τους πλησιέστερους κόμβους




- Ο αλγόριθμος BFS εξερευνά κάθε κόμβο x του G για τον οποίο υπάρχει μονοπάτι : **s → ... → x**

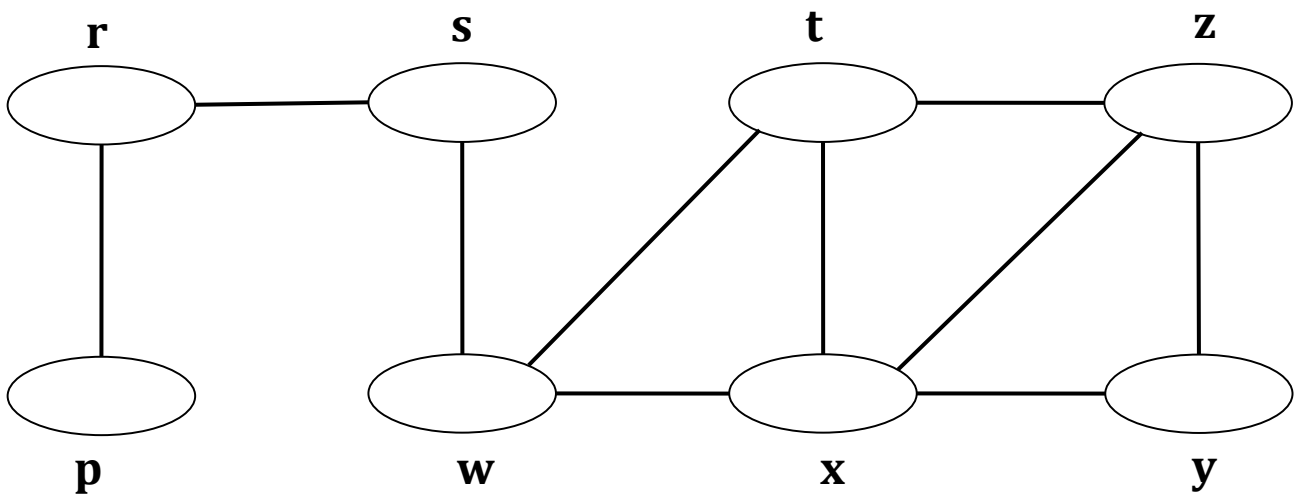
# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα



# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα

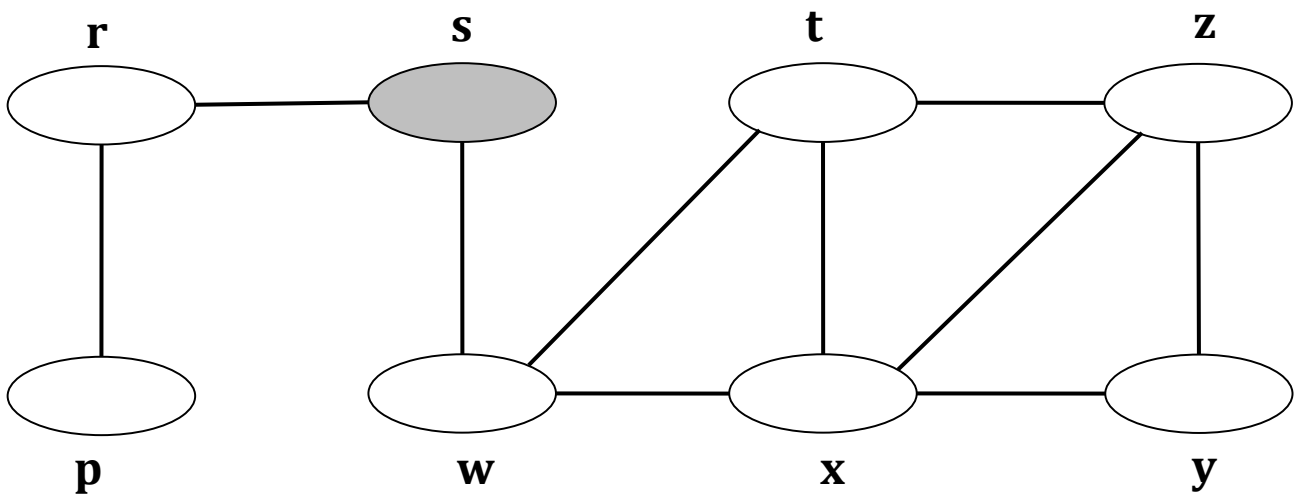



Σημαντικά συστατικά:

- χρήση **ουράς** (FIFO) για αποδοτικότητα
- χρήση **δείκτη** σε προηγούμενο κόμβο

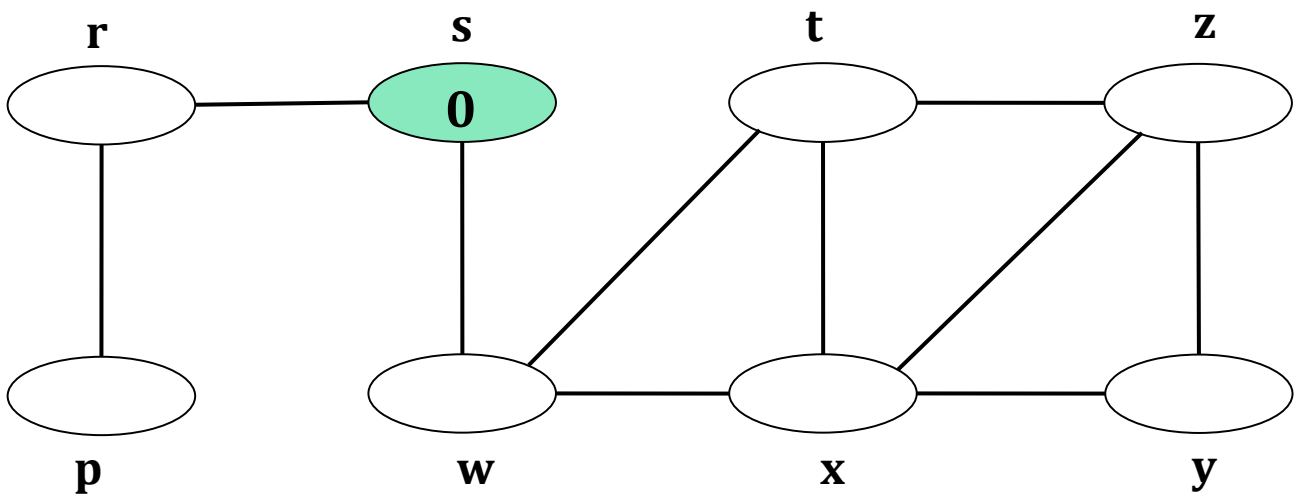
# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα



# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα

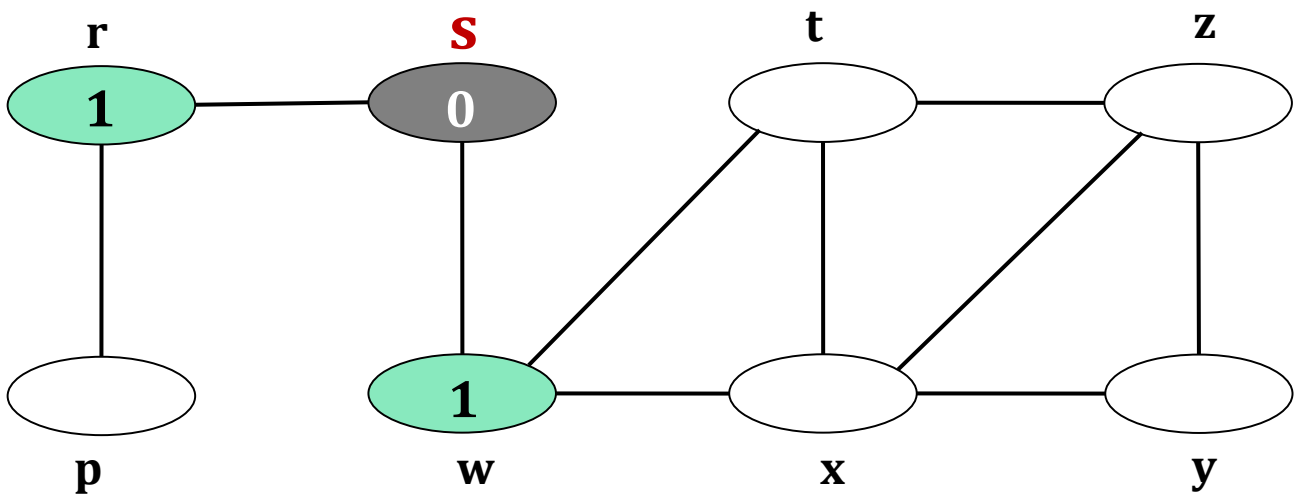



π(s)=nil

Q : **s**

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

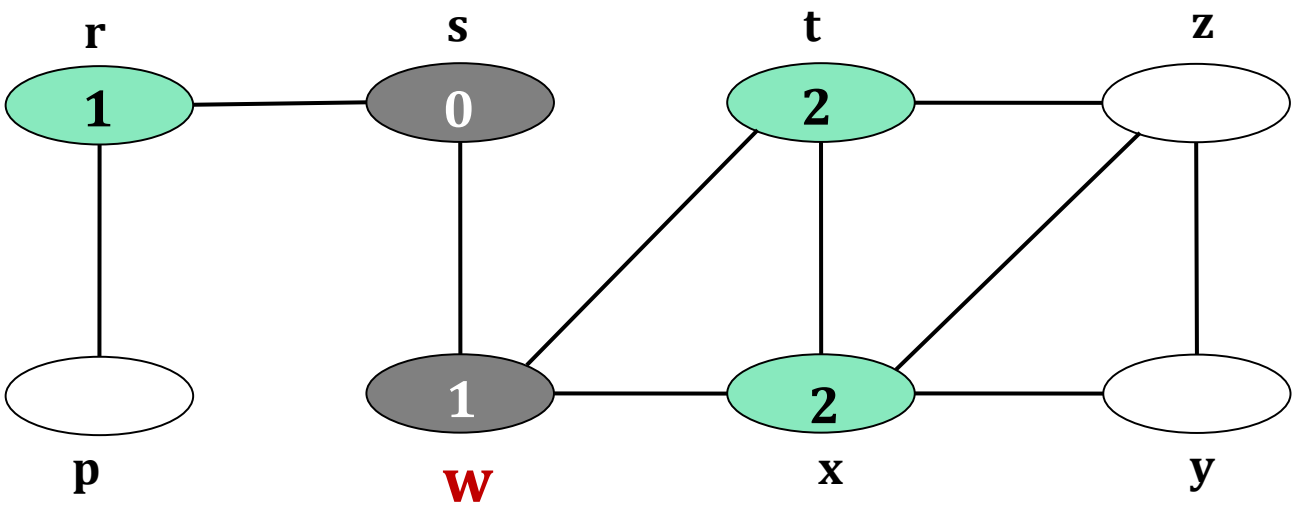
$\pi(w)=s \quad \pi(r)=s$

**u ← head(Q) = s :**

s w r

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

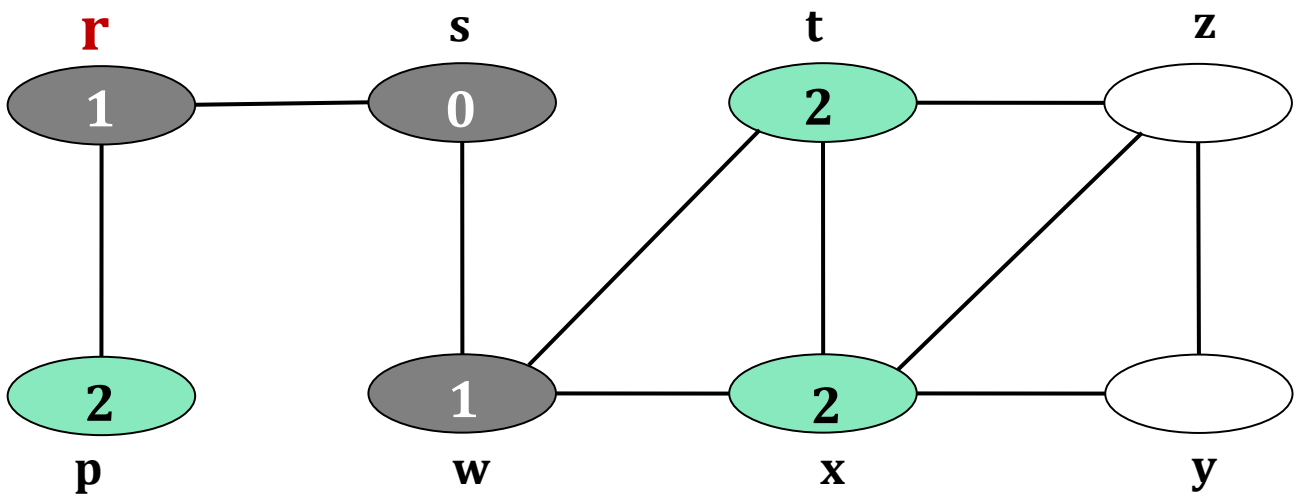
**u ← head(Q) = w :**

w r t x

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

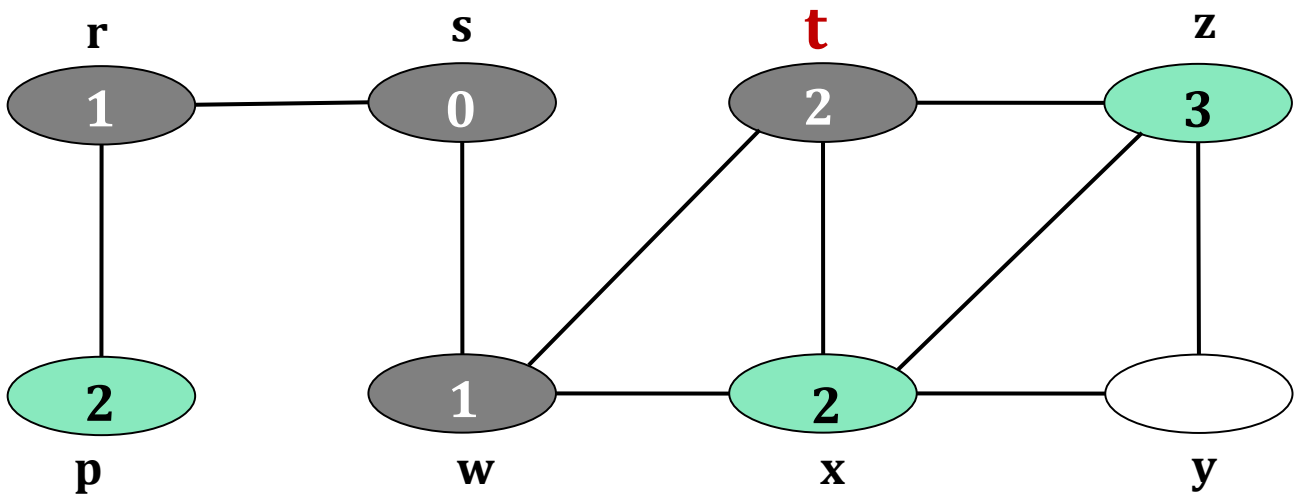
**u ← head(Q) = r :**

r t x p

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

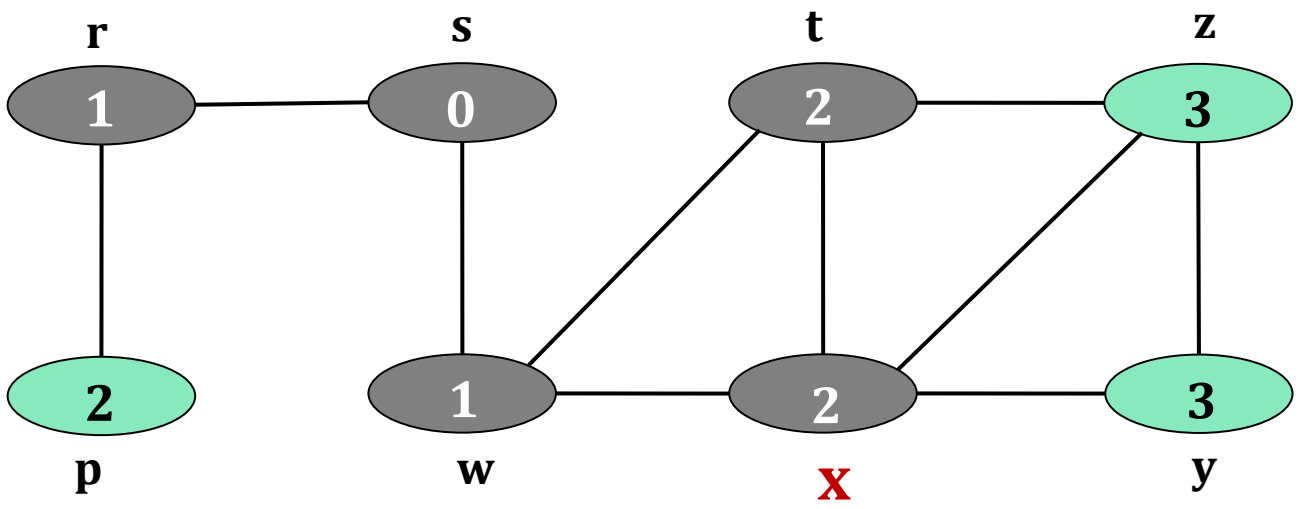
**u ← head(Q) = t :**

t x p z

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$ $\pi(z)=t$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα



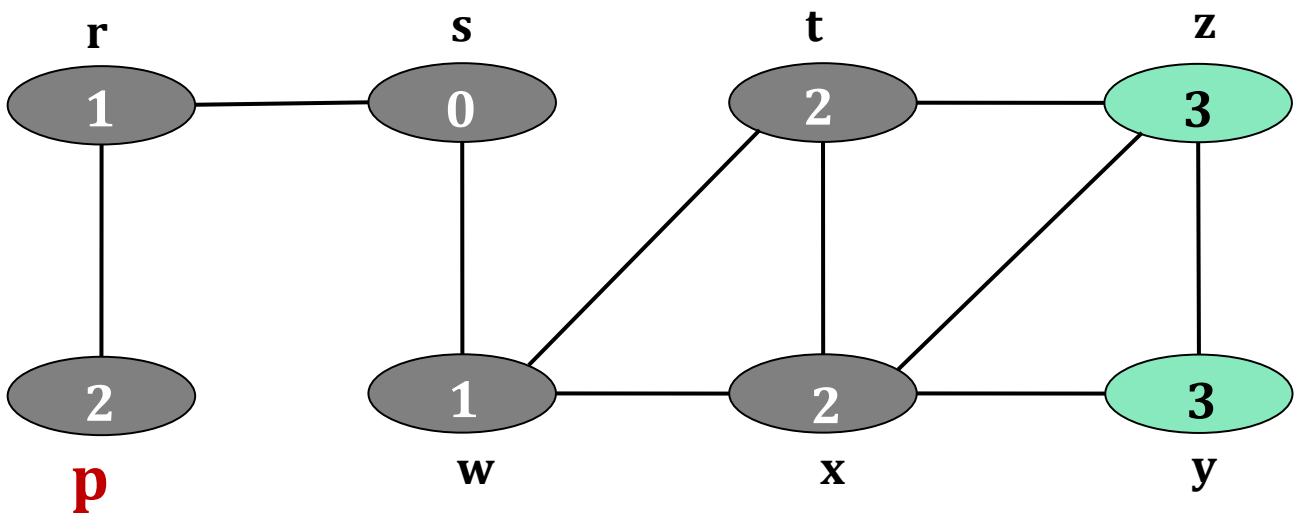

$\pi(s)=nil$

**u ← head(Q) = x :** x p z y

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$ $\pi(z)=t$ $\pi(y)=x$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

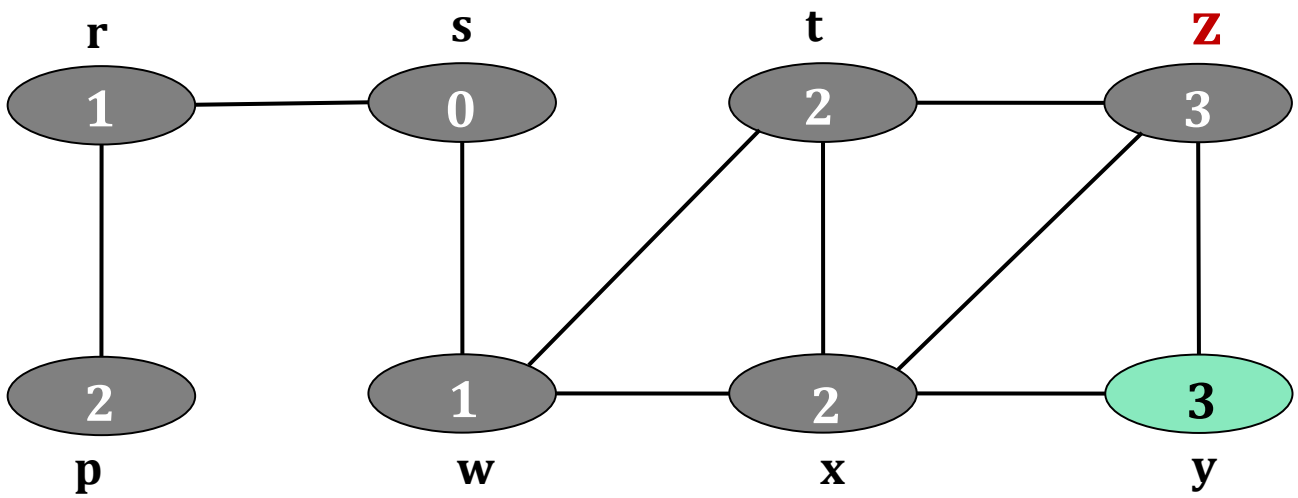
**u ← head(Q) = p :**

p z y

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$ $\pi(z)=t$ $\pi(y)=x$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

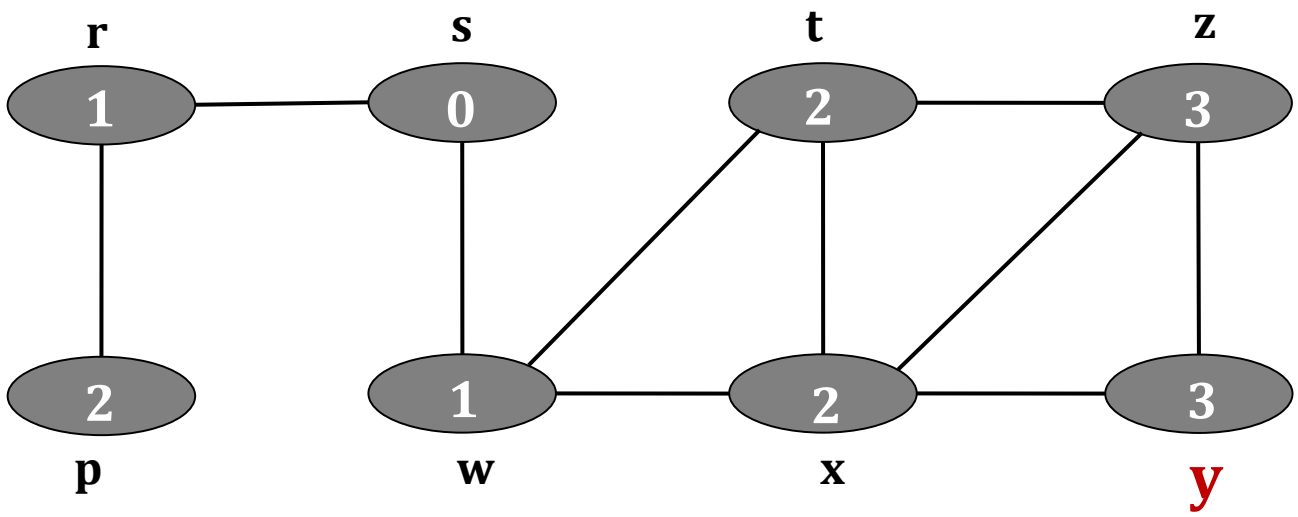
**u ← head(Q) = z :**

z **y**

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$ $\pi(z)=t$ $\pi(y)=x$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




$\pi(s)=nil$

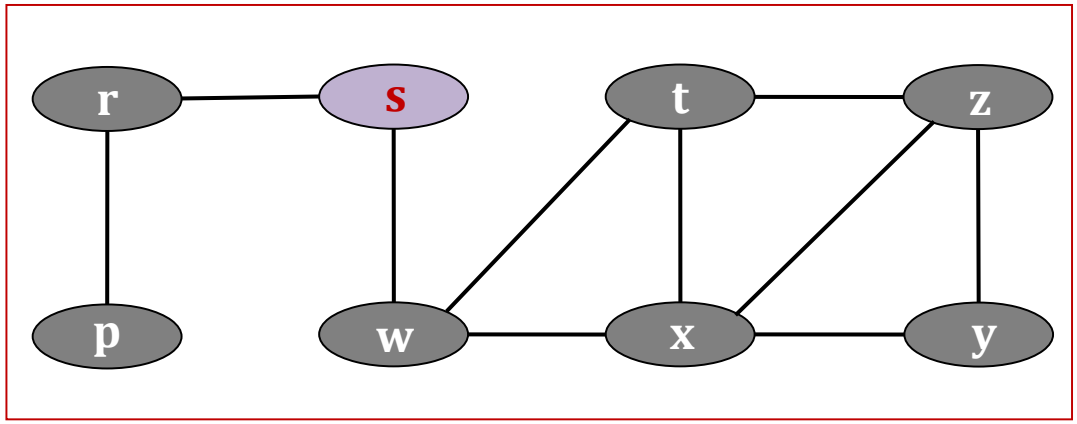
**u ← head(Q) = y :**

y

$\pi(w)=s$ $\pi(r)=s$ $\pi(t)=w$ $\pi(x)=w$ $\pi(p)=r$ $\pi(z)=t$ $\pi(y)=x$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Παράδειγμα




BFS = (s, w, r, t, x, p, z, y)

**u ← head(Q) = nil :**

π(s)=nil

π(w)=s π(r)=s π(t)=w π(x)=w π(p)=r π(z)=t π(y)=x

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS): αλγόριθμος

```
BFS(G=(V,E))
for each vertex  v∈V do
1.        status[v] ← UNVISITED ;  π(v) ← nil
2.    while ∃ s with status[s]=UNVISITED do
3.        BFS-Help(s)
```

```
BFS-Help(r)
    status[r] ← VISITED;  push(Q, r)        // Q: ουρά (FIFO)
    while  nonempty(Q)
              u ← head(Q); pop(Q);
              for each vertex  x ∈adj(u) do
                   if status[x] = UNVISITED
              status[x] ← VISITED;  π(x) ← u
                        push(Q, x)
               status[u] ← EXPLORED;          //  όχι πάντα
    απαραίτητη
```

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

## Πολυπλοκότητα BFS

- ✓ Κάθε κόμβος $v \in V$ εισέρχεται στην ουρά Q ακριβώς 1 φορά και διαγράφεται από αυτή ακριβώς 1 φορά.
- ✓ Κάθε Εισαγωγή /Διαγραφή απαιτεί χρόνο $O(1)$ .
- ✓ Συνολικός χρόνος για όλες τις λειτουργίες της Q: $O(|V|) = O(n)$
- ✓ Η λίστα γειτνίασης adj(v) κάθε κόμβου $v \in V$ εξερευνάται 1 μόνο φορά όταν ο κόμβος v εξάγεται από Q, κόστος $O(\deg(v))$.

$\sum_{u \in V} \deg(u) = O(|E|)$ $O(|E|) = O(m)$ χρόνος για εξερεύνηση όλων των λιστών.

- ✓ Άρα, πολυπλοκότητα BFS :

$$\mathbf{O(|V|+|E|) = O(n+m)}$$

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS): υλοποίηση

- **Βάση: Αναπαράσταση γράφου με λίστα γειτνίασης**

```
class Graph {
public:
  Graph(int n);
  void addEdge(int u, int v);
  bool hasEdge(int u, int v) const;
  int vertices() const;
  const list<int> & edges(int u) const;
};
```

Προσοχή: *υπάρχουν και άλλοι τρόποι υλοποίησης, επιλέξτε αυτόν που σας είναι πιο κατανοητός*

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS): υλοποίηση

```
enum state { UNVISITED, VISITED, EXPLORED };
void bfs(const Graph &g, vector<int> &p) {
  int N = g.vertices();
  vector<state> status(N);
  for (int u = 0; u < N; ++u) {
    p[u] = -1; status[u] = UNVISITED;
  }
  for (int u = 0; u < N; ++u)
    if (status[u] == UNVISITED)
      bfs_help(u, g, p, status);
}
```

Προσοχή: *υπάρχουν και άλλοι τρόποι υλοποίησης, επιλέξτε αυτόν που σας είναι πιο κατανοητός*

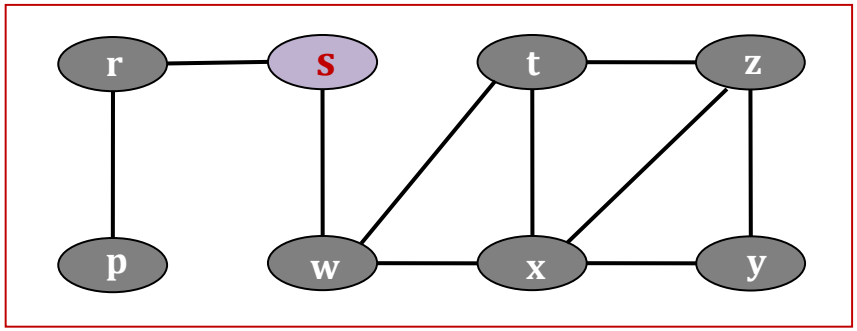
# Εξερεύνηση κατά Πλάτος (BFS): υλοποίηση

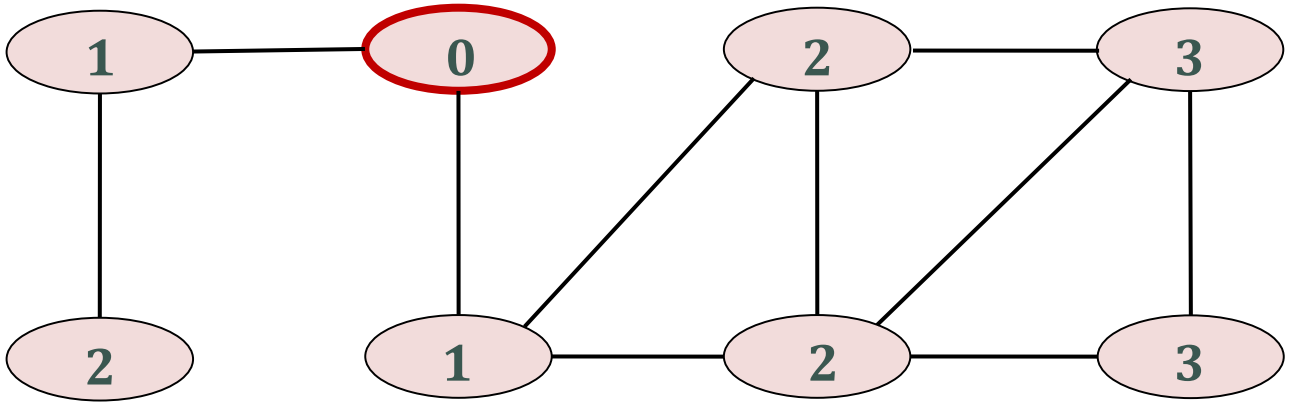
```
void bfs_help(int u, const Graph &g,
      vector<int> &p, vector<state> &status) {
  queue<int> Q;
  status[u] = VISITED; Q.push(u);
  while (!Q.empty()) {
    int u = Q.front();
    Q.pop();
    for (int v: g.edges(u))
      if (status[v] == UNVISITED) {
        status[v] = VISITED; p[v]= u; Q.push(v);
      }
    status[u] = EXPLORED;
  }
}
```

Προσοχή: *υπάρχουν και άλλοι τρόποι υλοποίησης, επιλέξτε αυτόν που σας είναι πιο κατανοητός*

# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

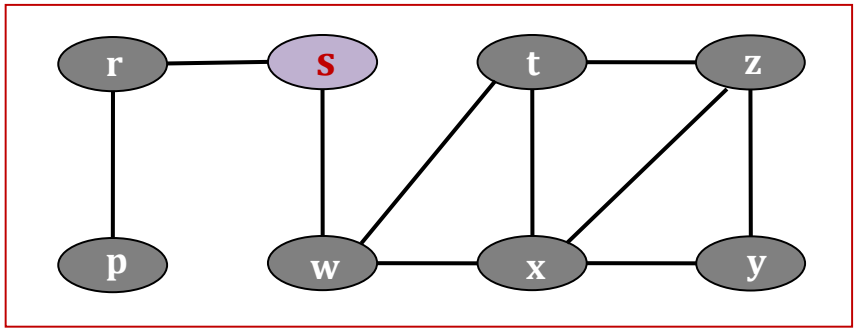
## BFS-δένδρο (δάσος)

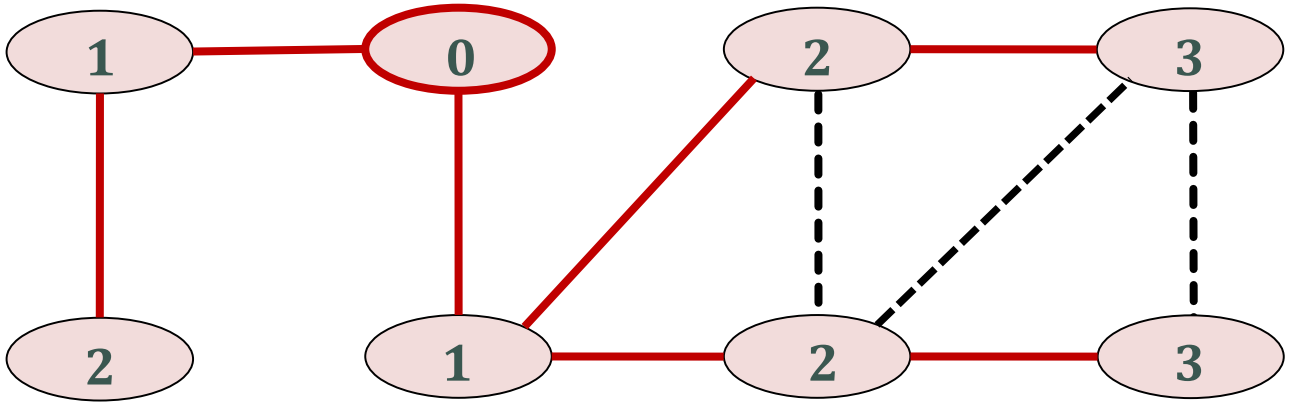


# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

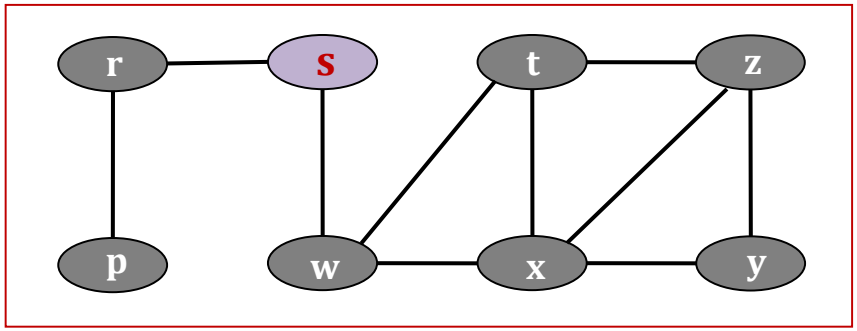
## BFS-δένδρο (δάσος)

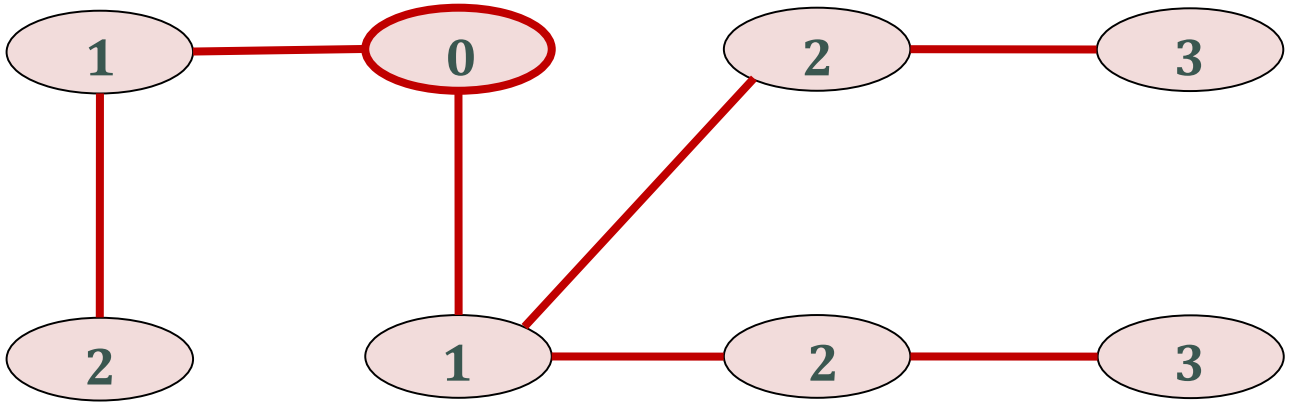


# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

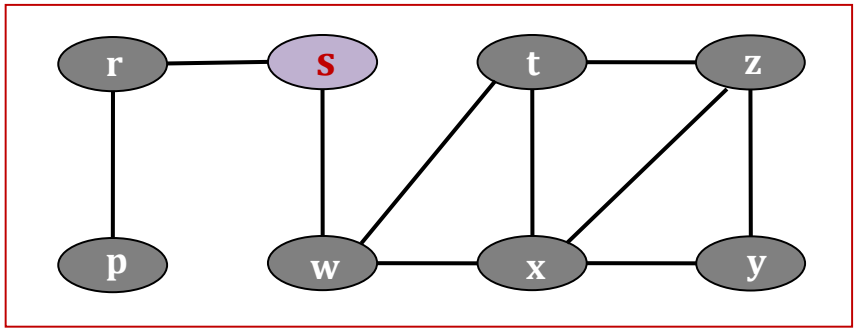
## BFS-δένδρο (δάσος)

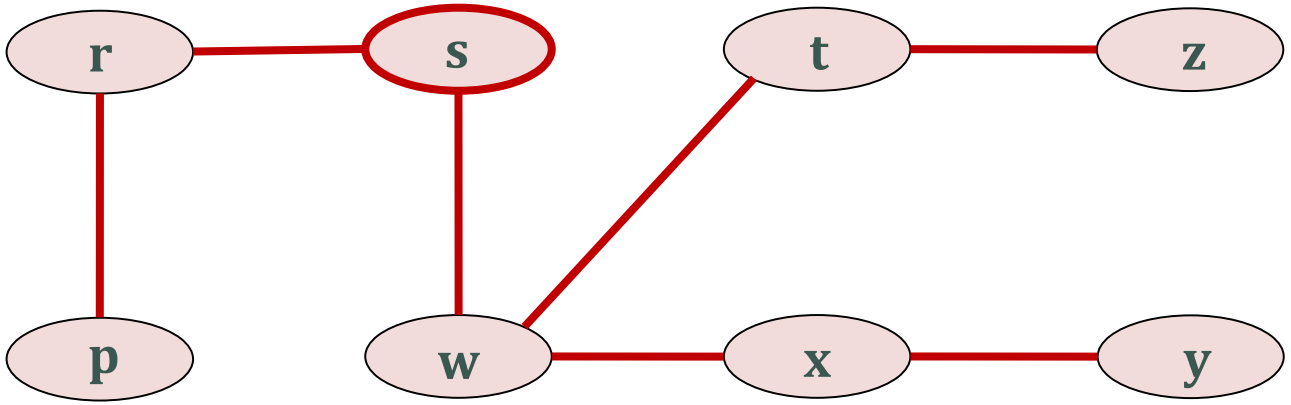


# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

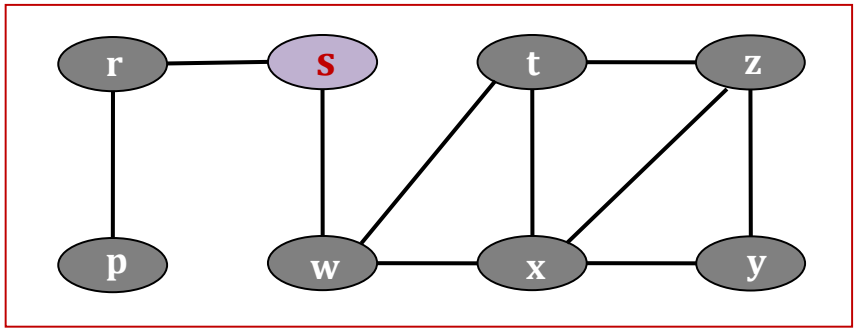
## BFS-δένδρο (δάσος)

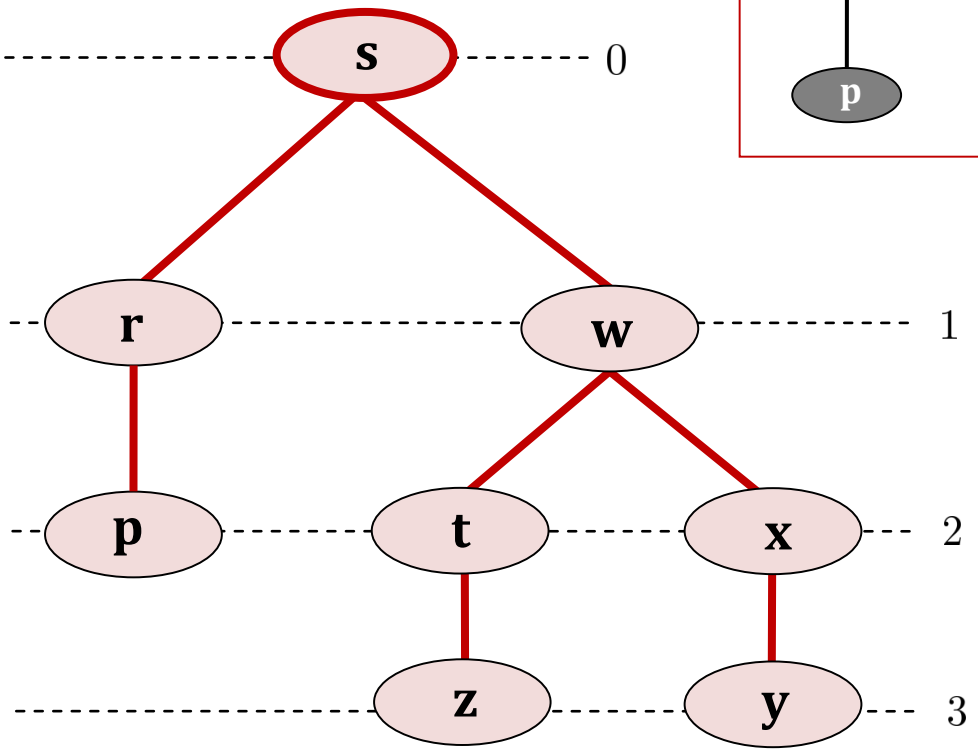


# Εξερεύνηση κατά Πλάτος - BFS

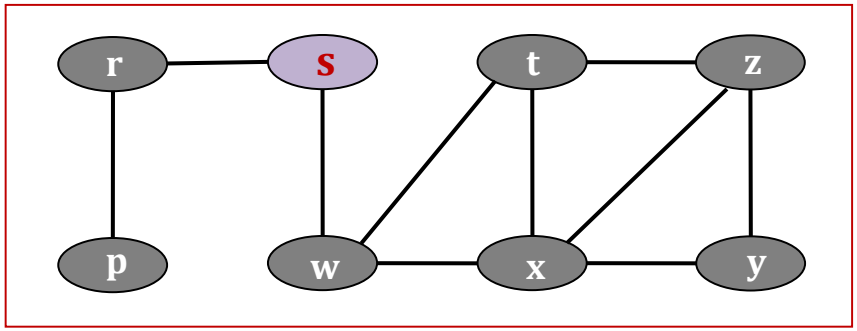
## BFS-δένδρο (δάσος)

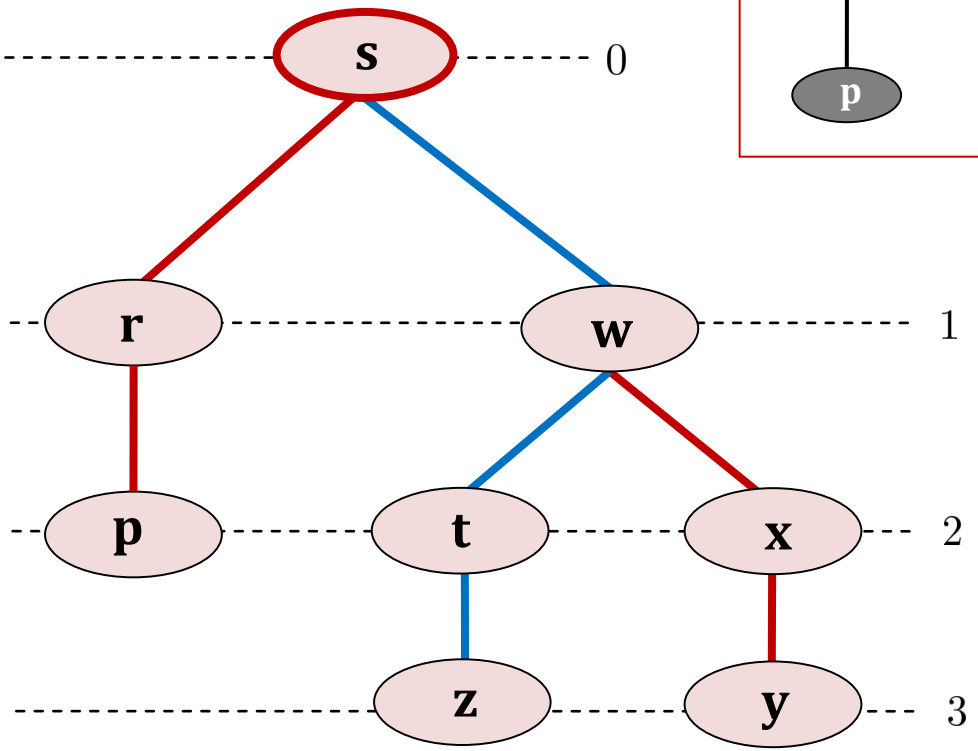


# Εφαρμογές BFS: συντομότερες διαδρομές

## BFS-δένδρο (δάσος)



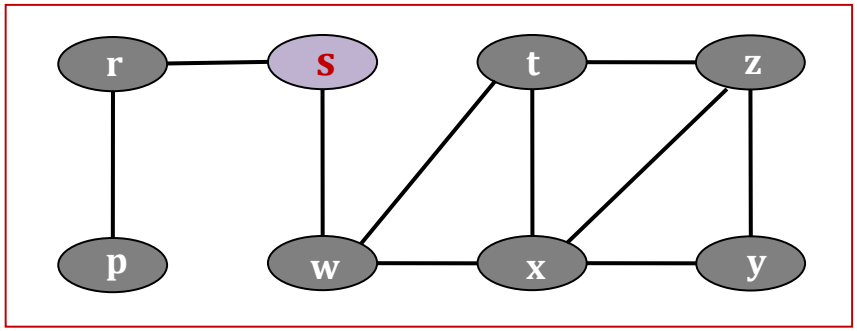

$d(s,z) = 3$

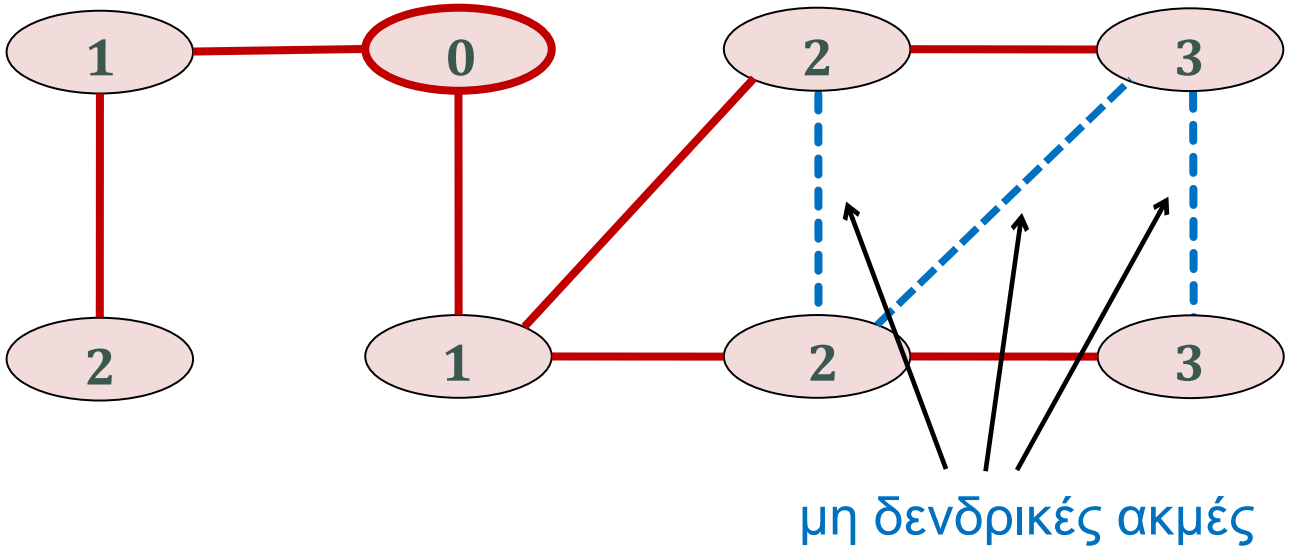
*συντομότερη διαδρομή* **s → z:**

**s w t z**

# Εφαρμογές BFS: εντοπισμός κύκλων

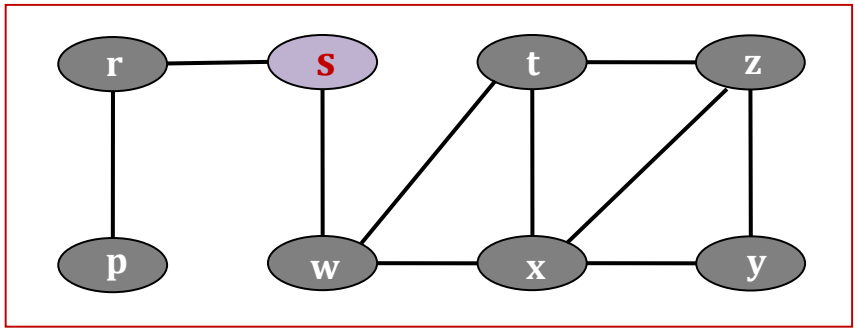
- BFS-δένδρο (δάσος)

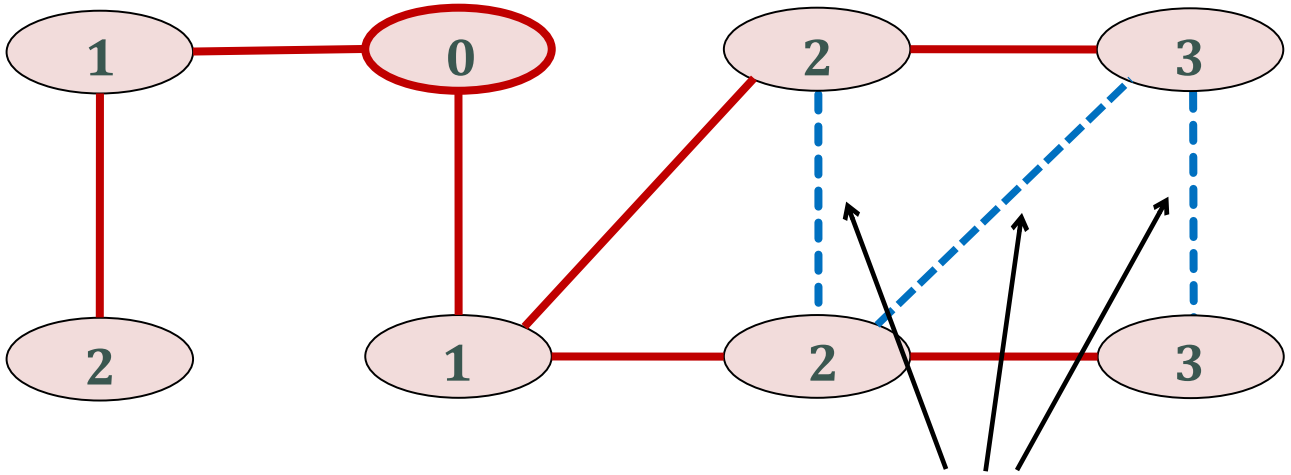


# Εφαρμογές BFS: εντοπισμός κύκλων

- BFS-δένδρο (δάσος)

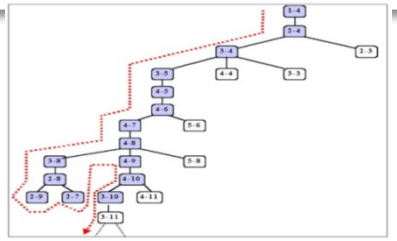



*Αποστάσεις από κόμβο s*

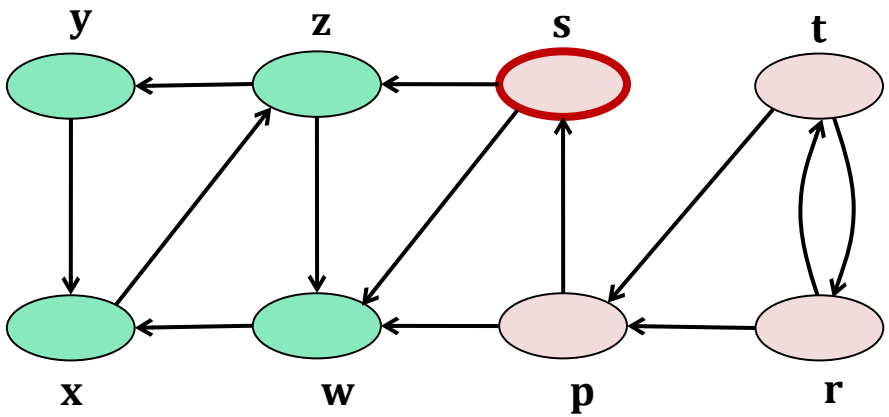
μη δενδρικές ακμές

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS



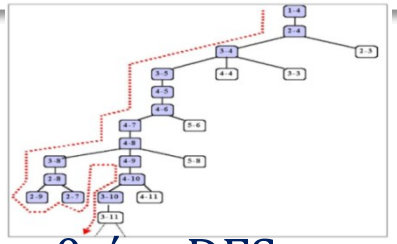
## Βασική Ιδέα DFS

- Η DFS προσπαθεί να εξερευνήσει πρώτα κόμβους σε όσο γίνεται **μεγαλύτερη απόσταση («βάθος»)** από έναν αρχικό κόμβο $s \in V$



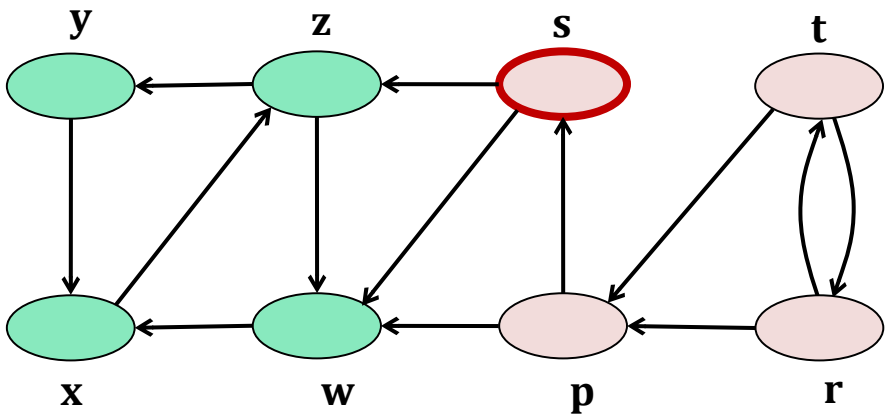

- Εάν ∃ **γείτονες** του s που δεν έχουν εξερευνηθεί, τότε επιλέγει έναν από αυτούς και συνεχίζει την εξερεύνηση από εκεί **αναδρομικά**

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS



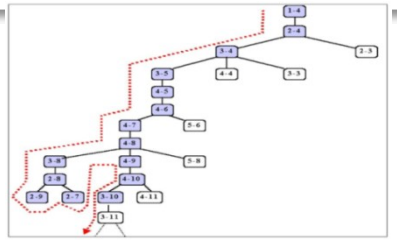
## Βασική Ιδέα DFS

- Όταν **όλοι** οι γείτονες ενός κόμβου v έχουν εξερευνηθεί, η DFS **«επιστρέφει»** στον **γονέα** u του v, και συνεχίζει σε τυχόν ανεξερεύνητους γείτονες του u



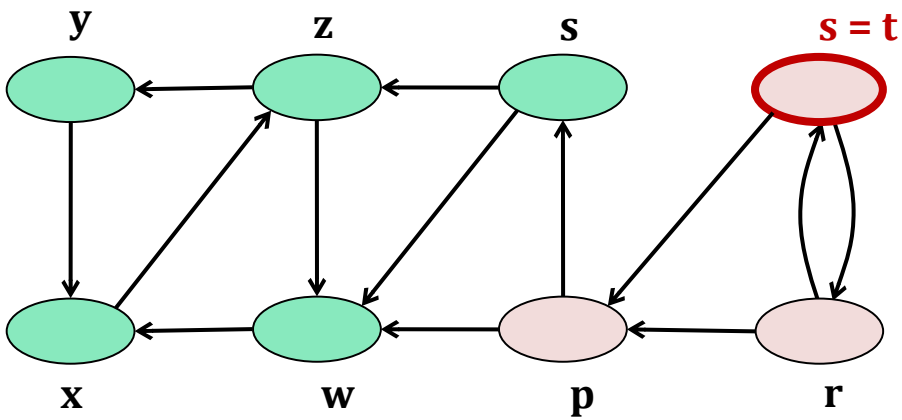

- Η αναδρομή της DFS σταματά όταν εξερευνηθούν **όλοι οι προσβάσιμοι από τον s κόμβοι x** του G : **s →... → x**

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS



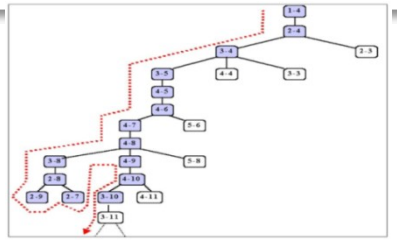
## Βασική Ιδέα DFS

- Η αναδρομή της DFS σταματά όταν εξερευνηθούν **όλοι οι προσβάσιμοι από τον s κόμβοι x** του G : **s →... → x**



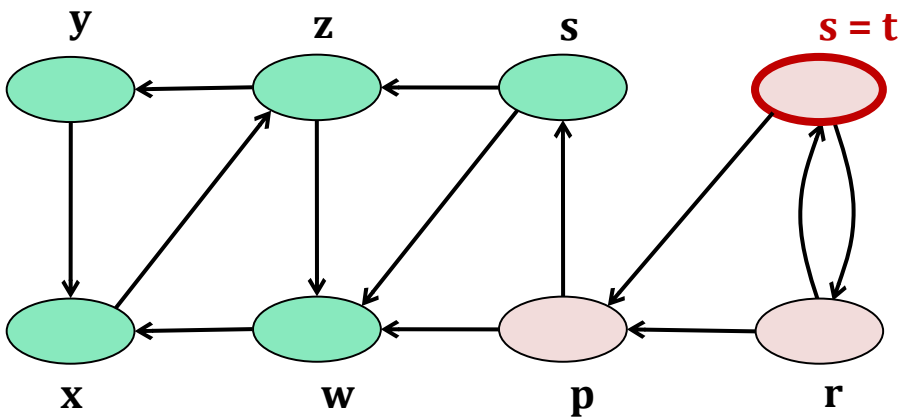

- Εάν ∃ κόμβοι που δεν έχουν εξερευνηθεί, τότε επιλέγεται νέος μη-εξερευνημένος s' ∈ V και τίθεται ως νέος **κόμβος εκκίνησης**: s ← s'

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS



## Βασική Ιδέα DFS

- Η αναδρομή της DFS σταματά όταν εξερευνηθούν **όλοι οι προσβάσιμοι από τον s κόμβοι** x του G : **s → . . . → x**



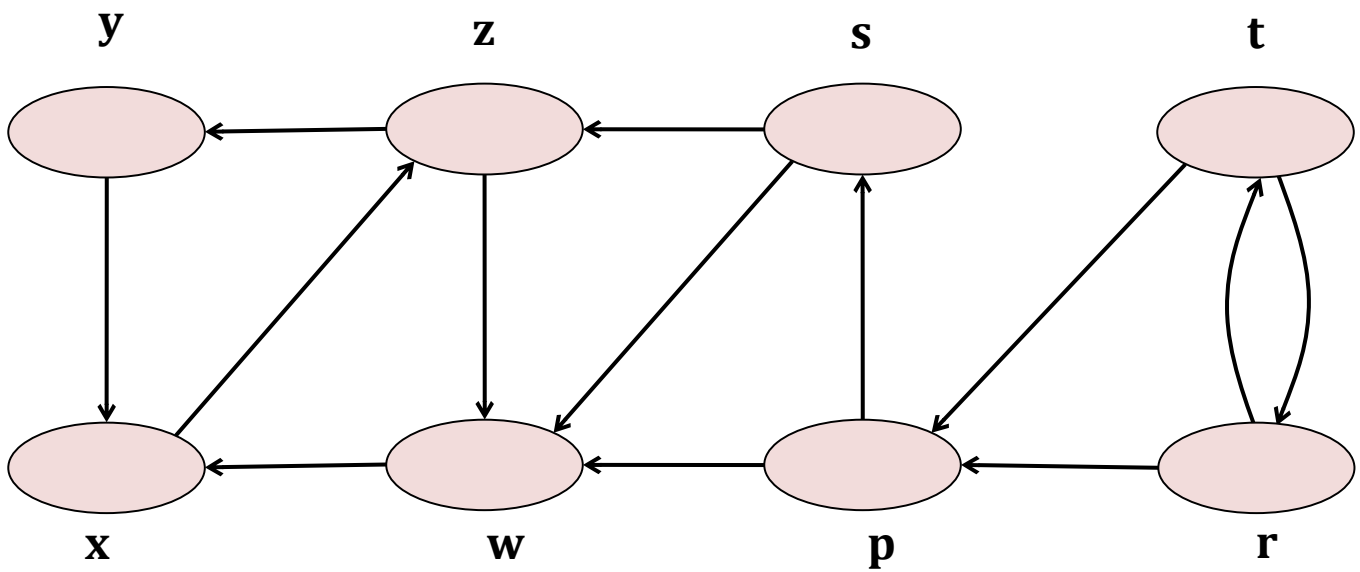

a(x)/t(x)

a(x) χρόνος πρώτης επίσκεψης, και
t(x) χρόνος τελευταίας επίσκεψης του x

- Εάν ∃ κόμβοι που δεν έχουν εξερευνηθεί, τότε επιλέγεται νέος μη-εξερευνημένος s' ∈ V και τίθεται ως νέος **κόμβος εκκίνησης**: s ← s'

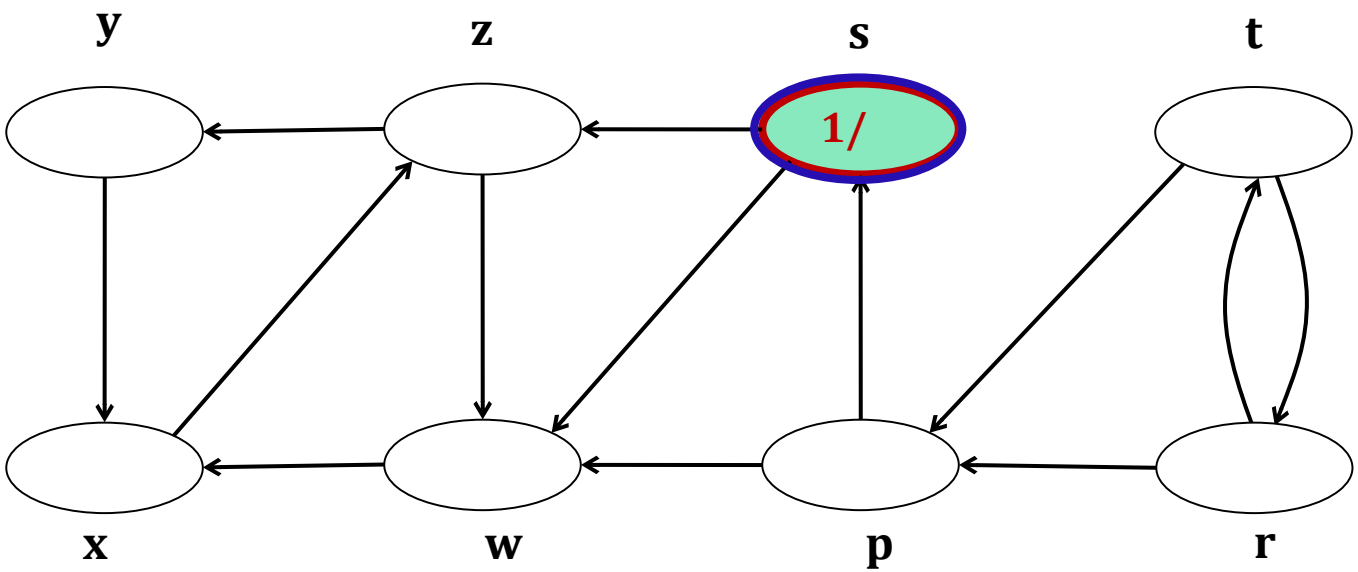
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



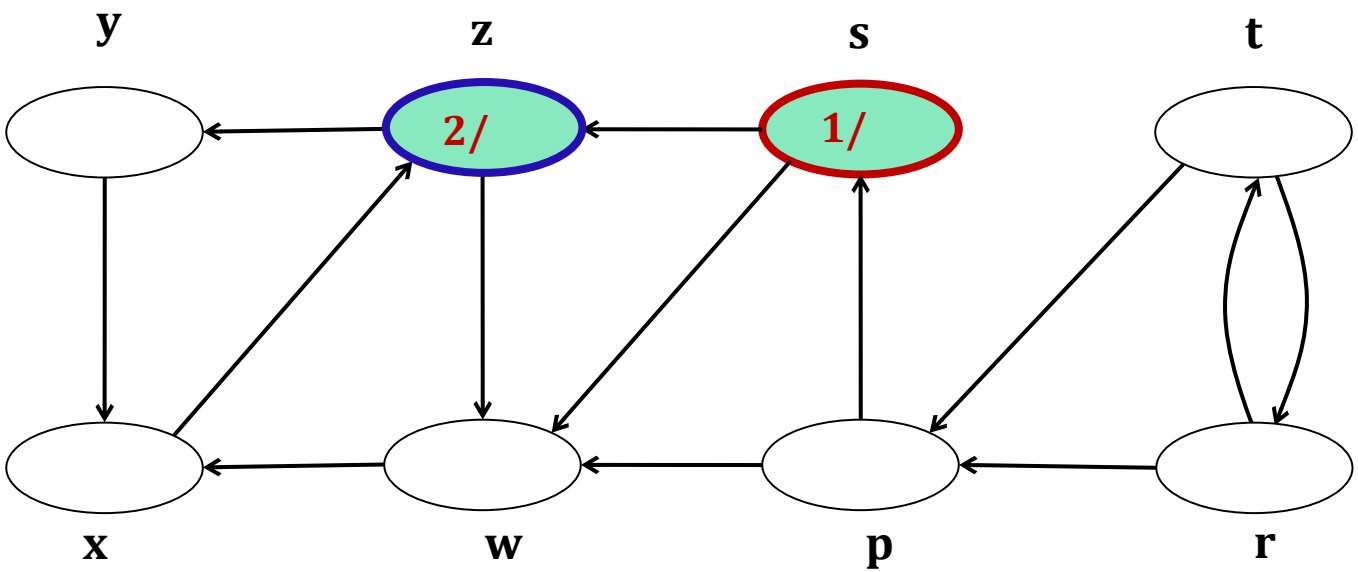
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



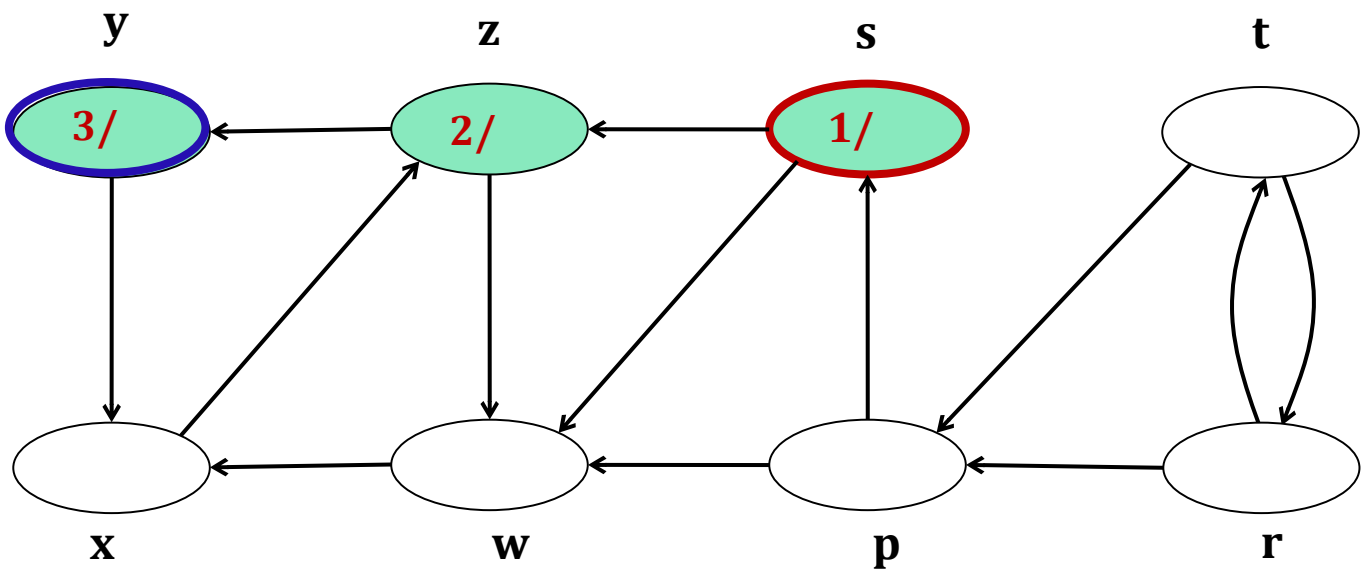
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



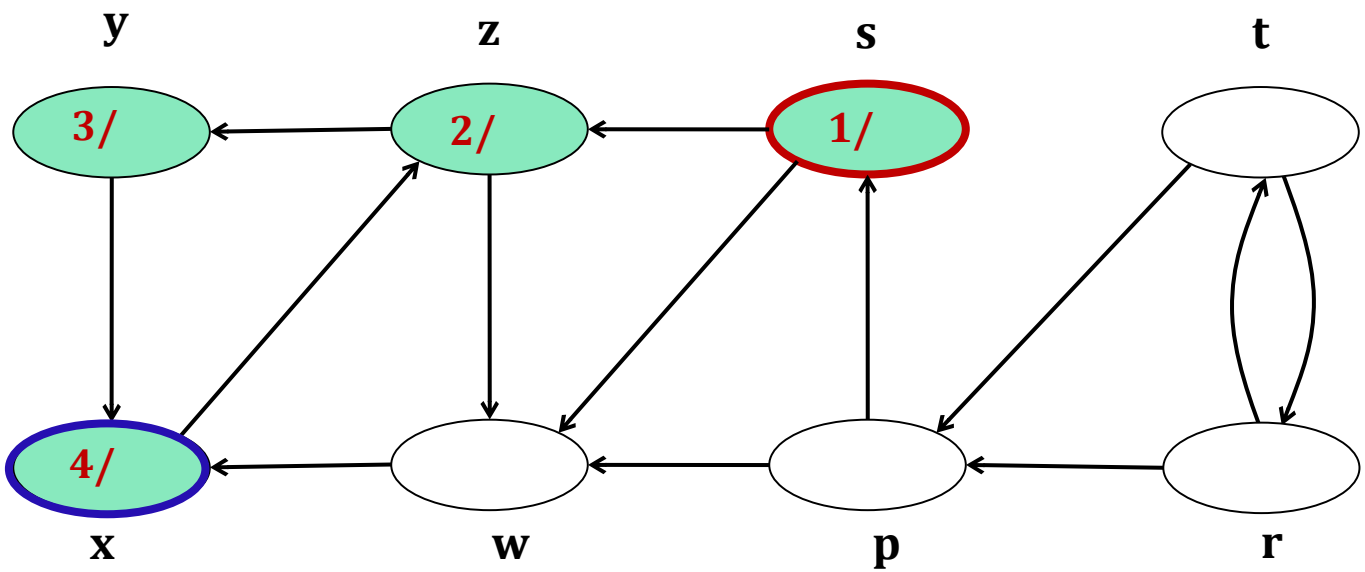
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



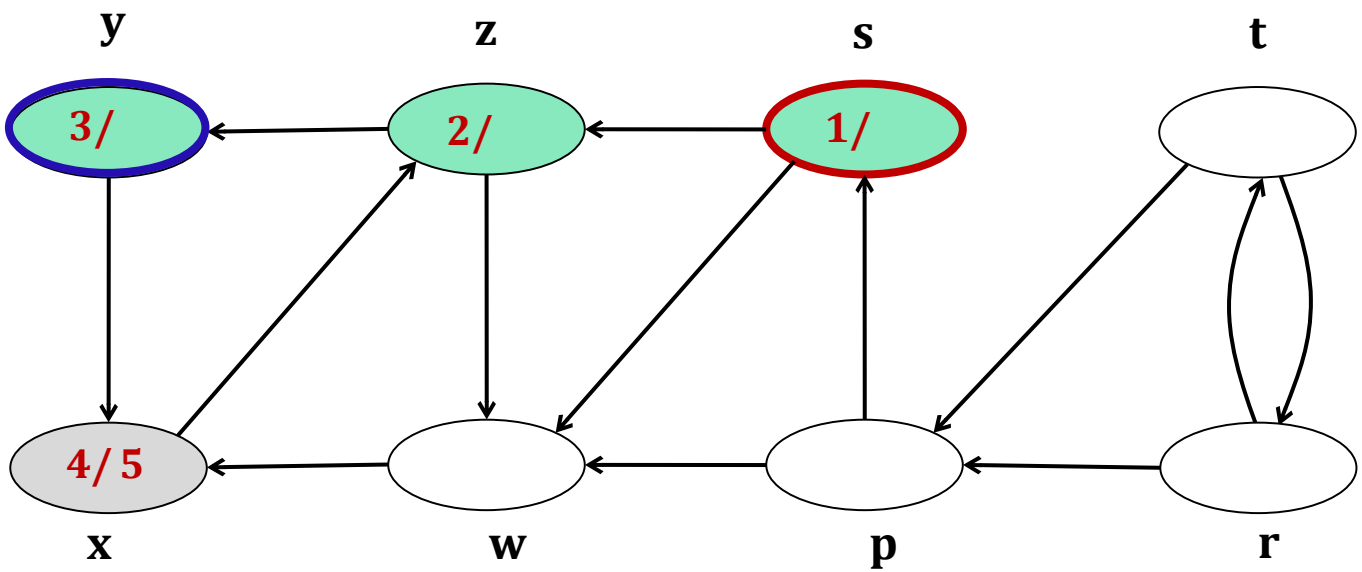
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



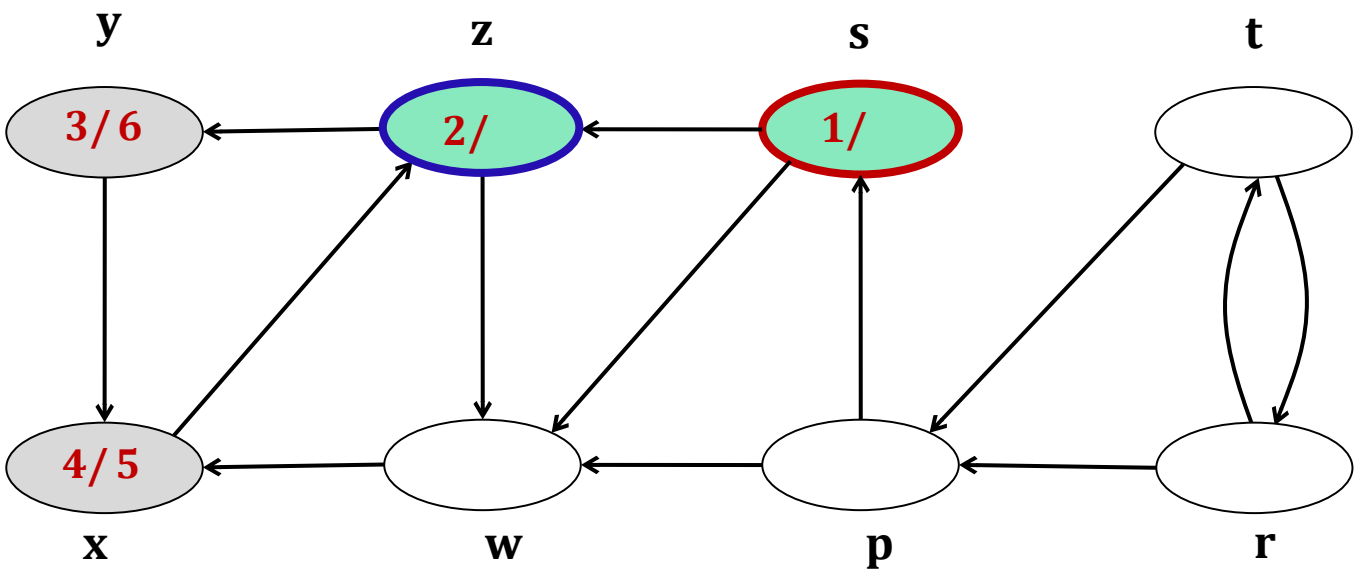
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



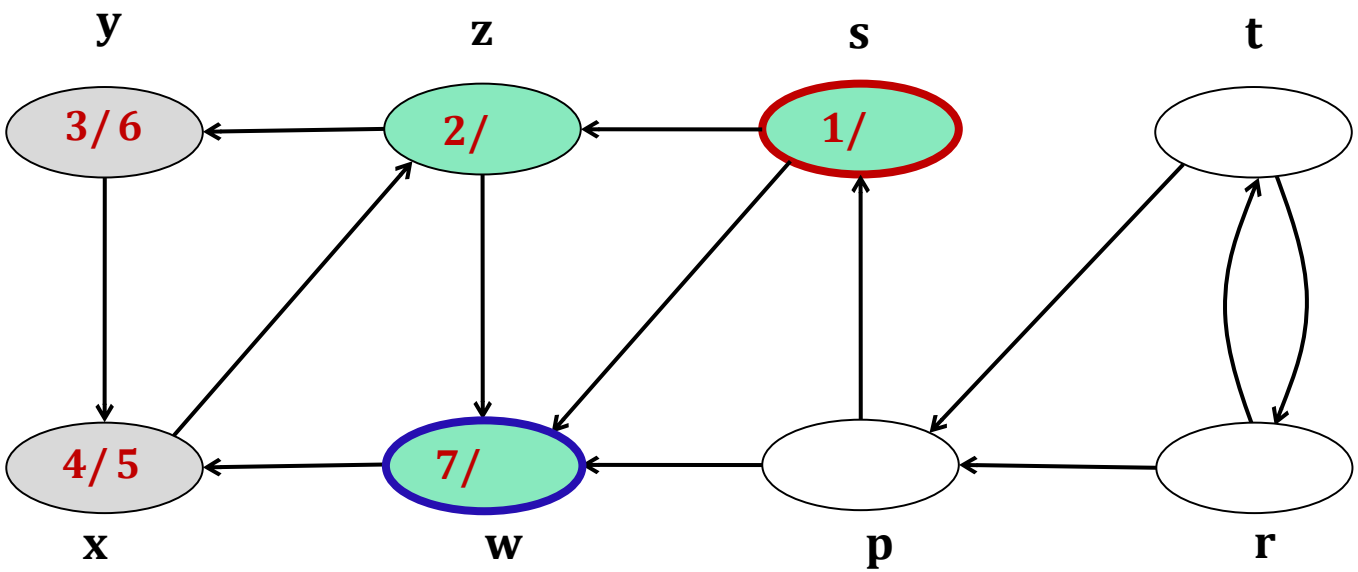
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



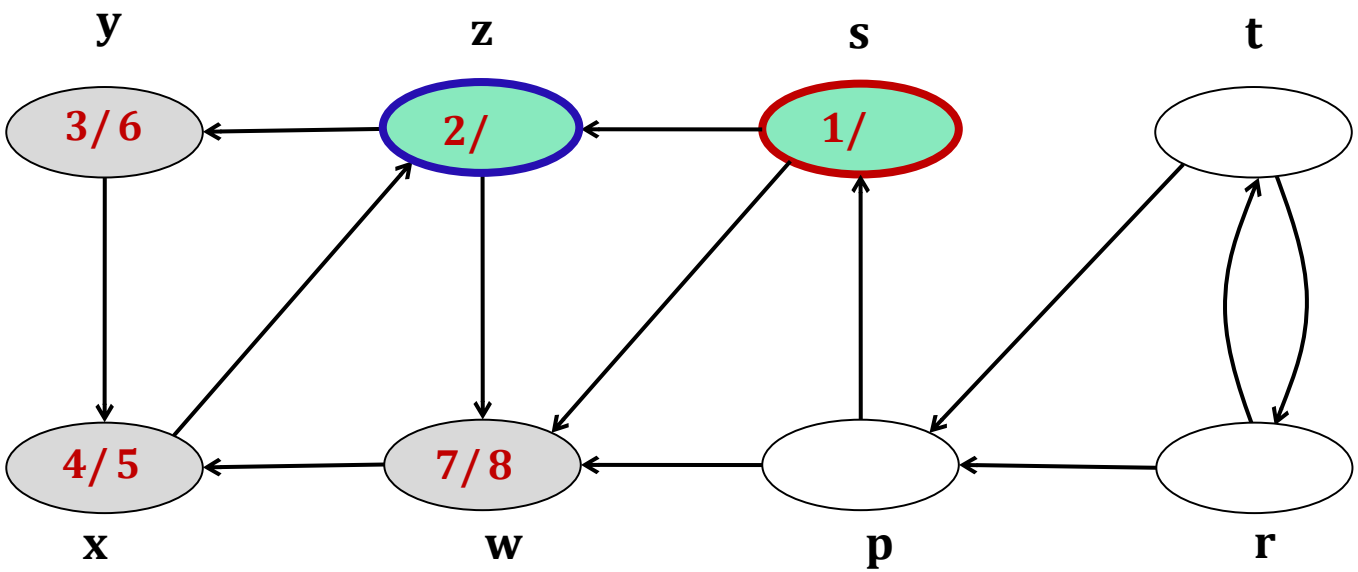
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



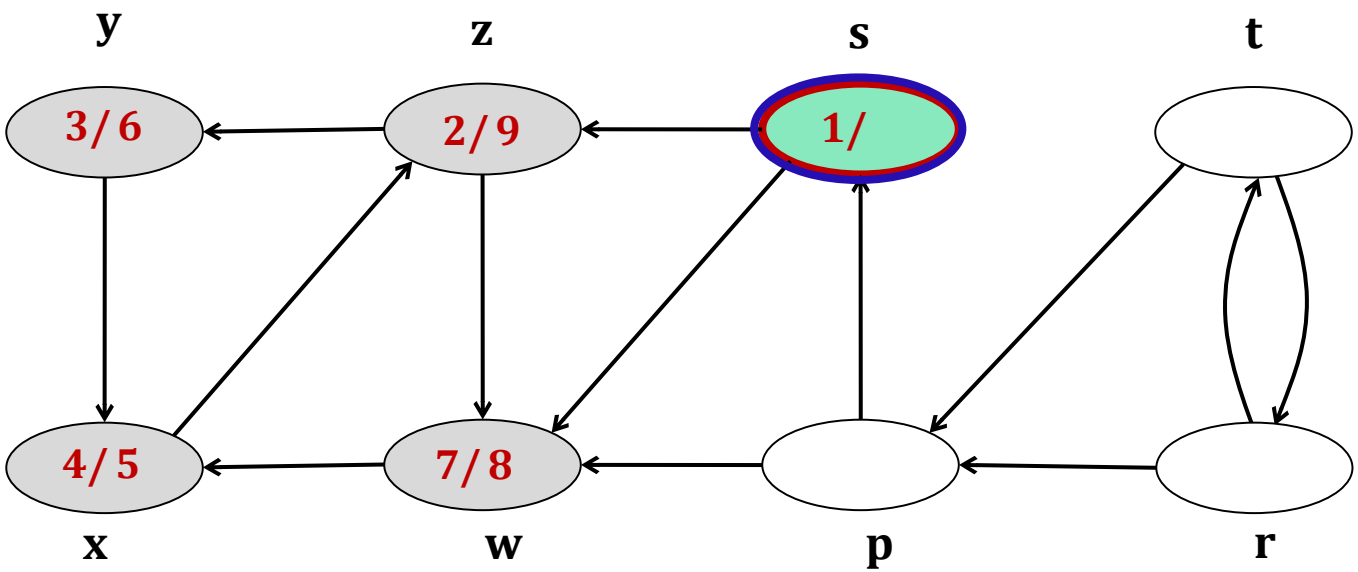
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



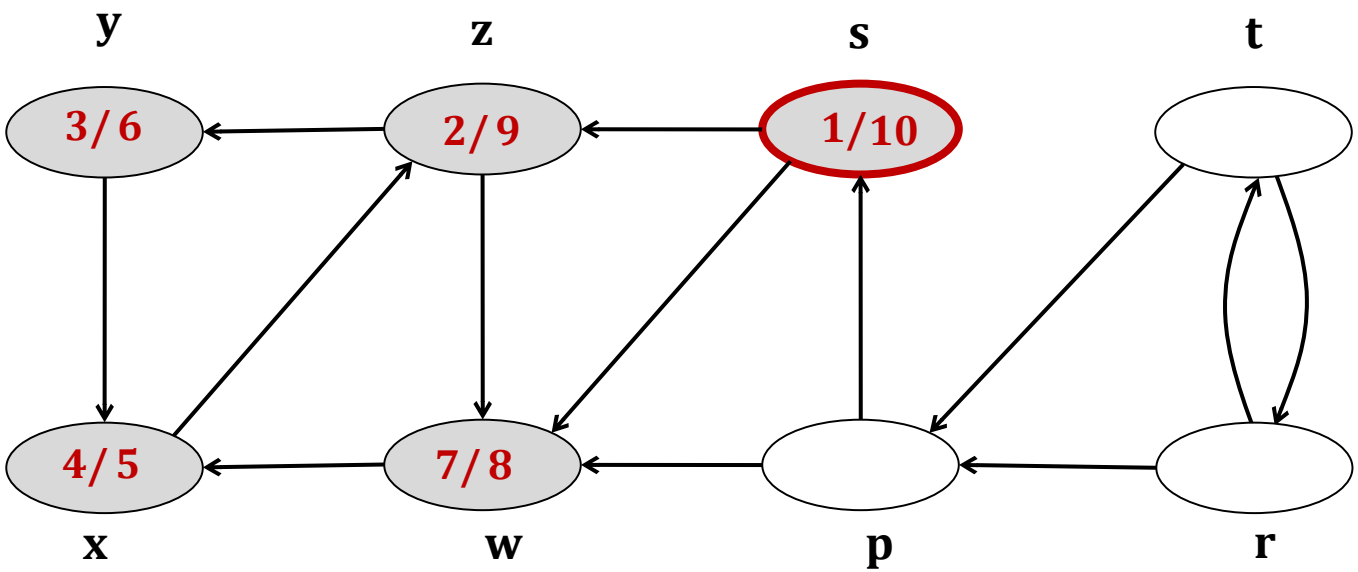
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



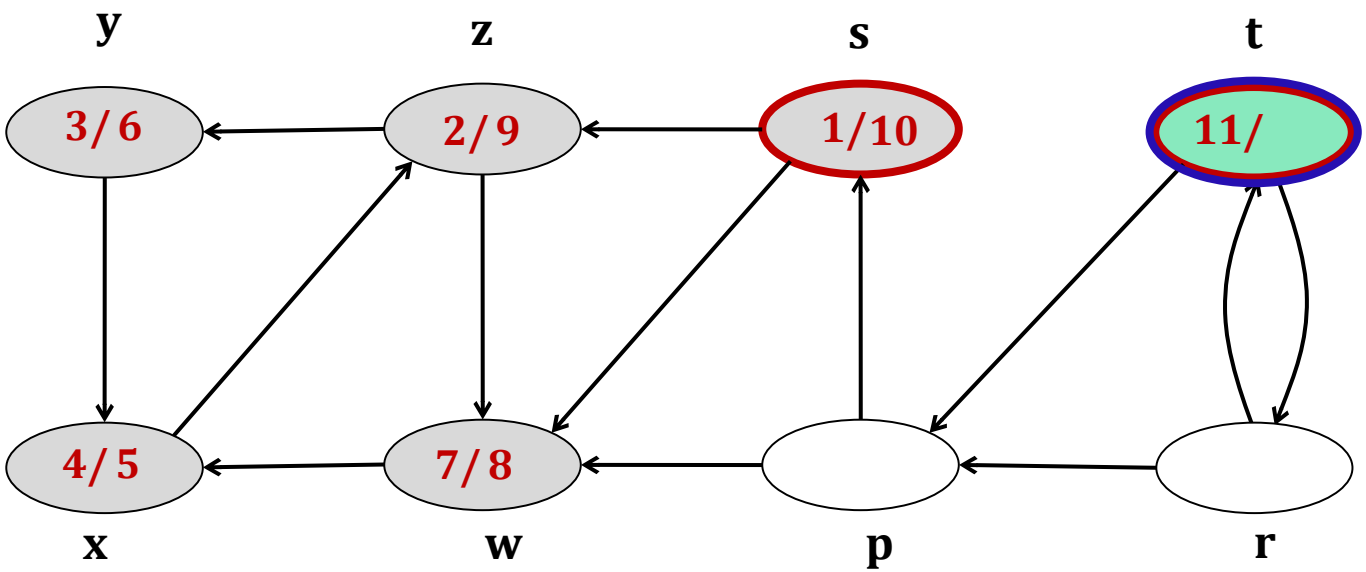
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



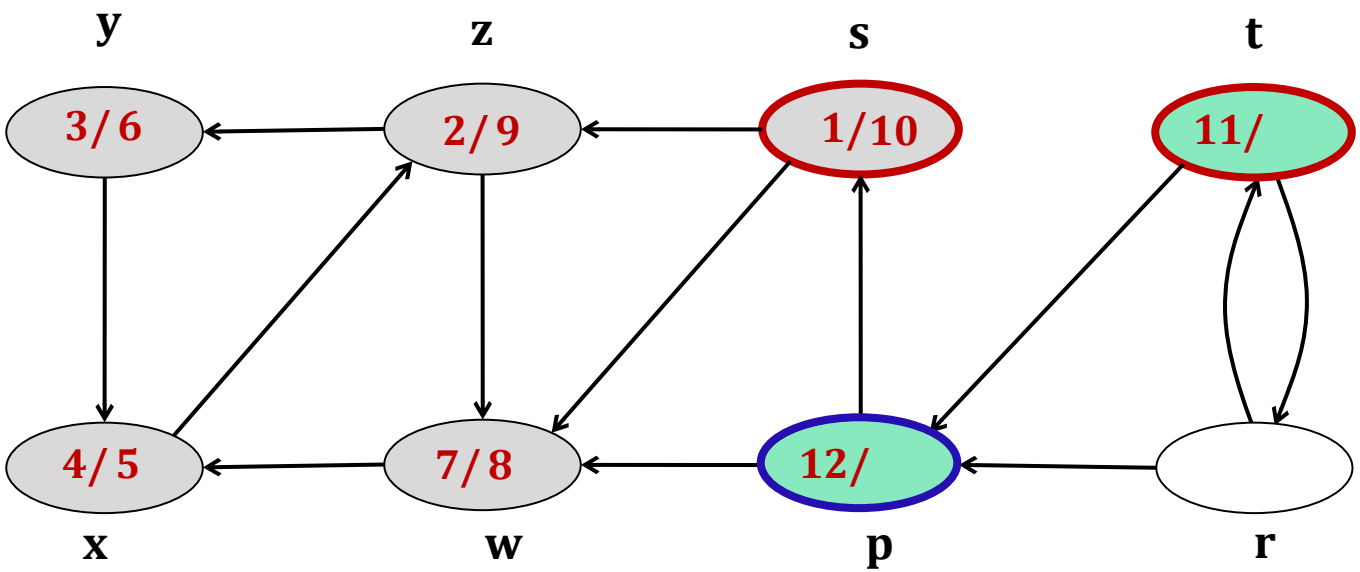
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



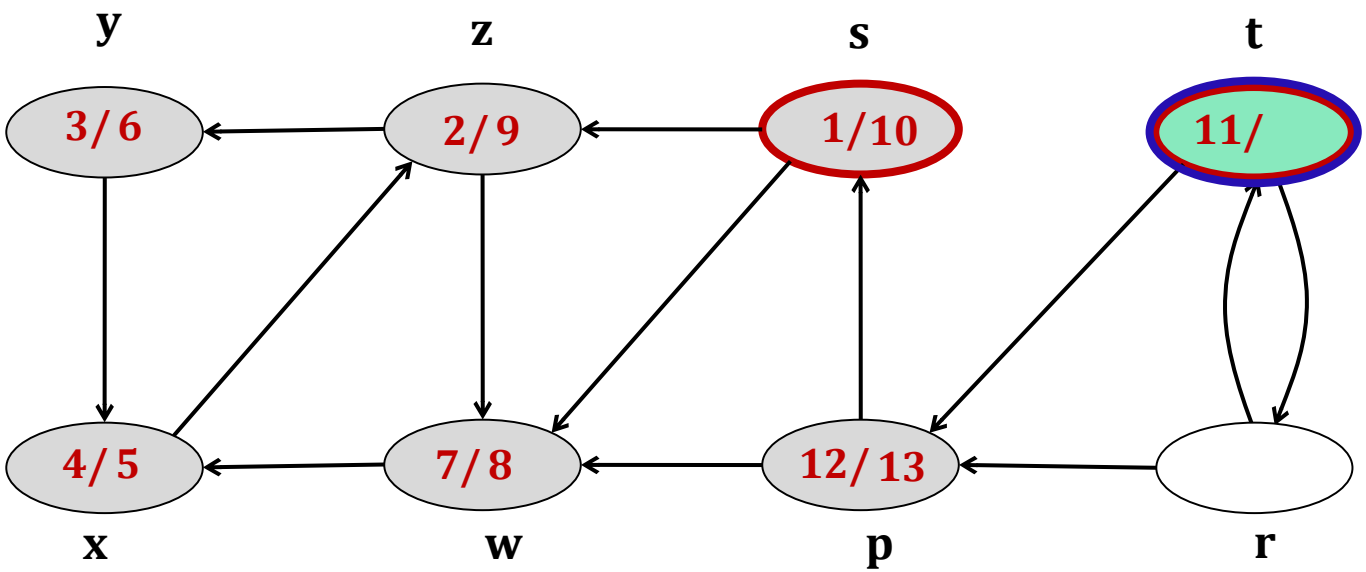
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



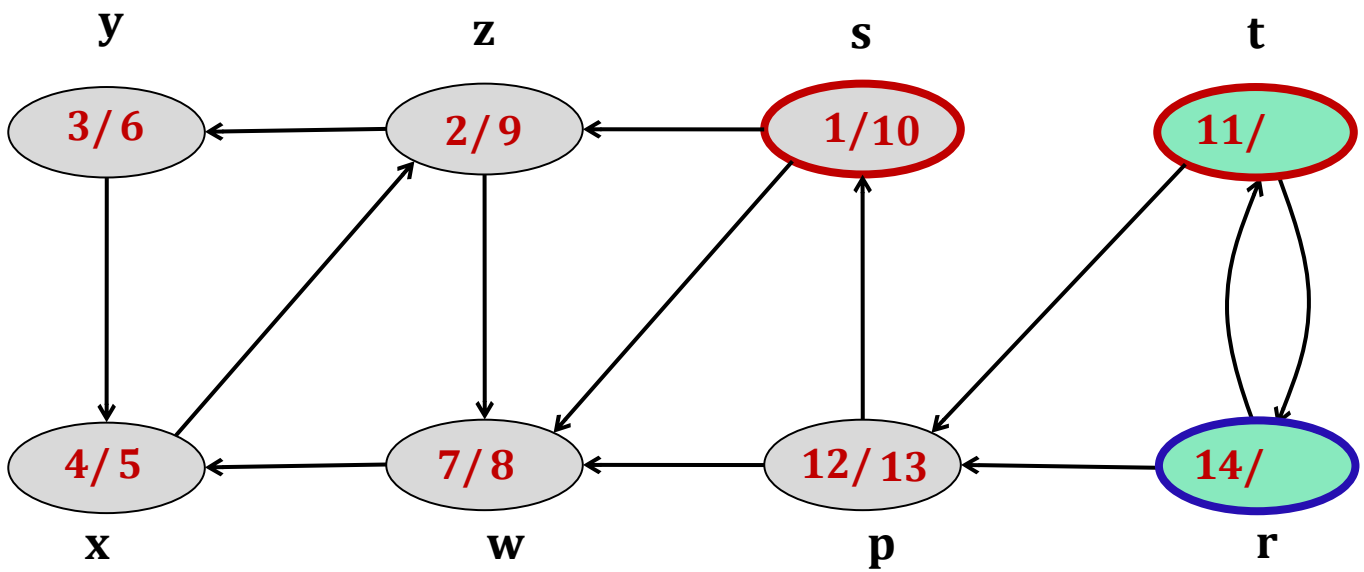
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



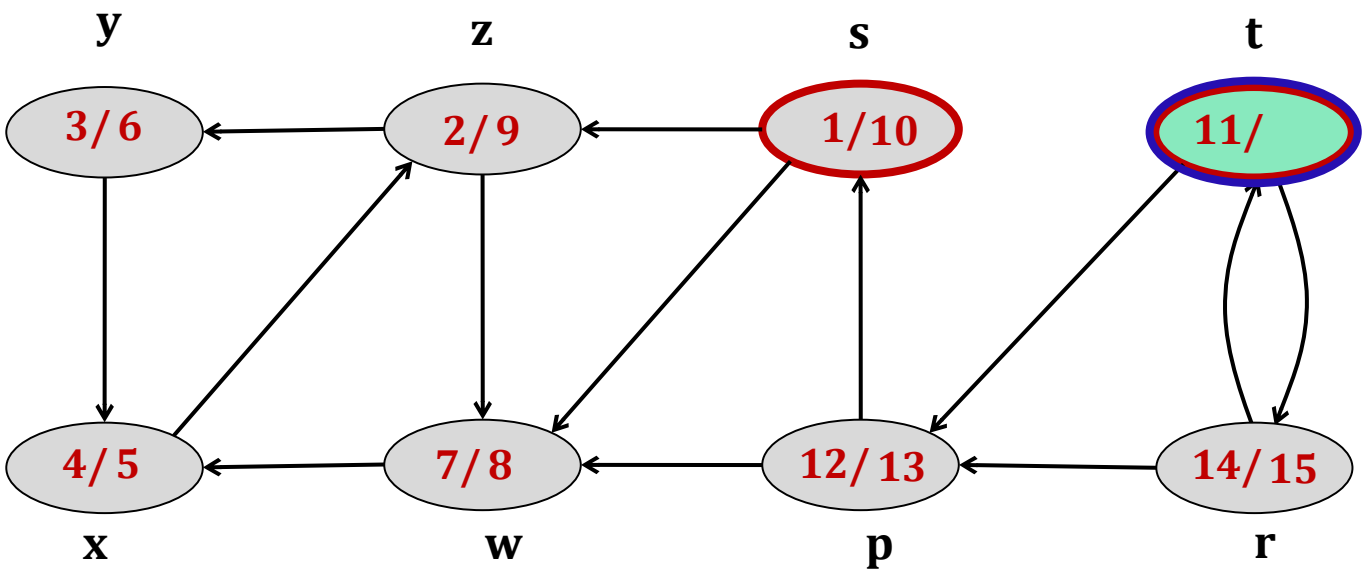
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



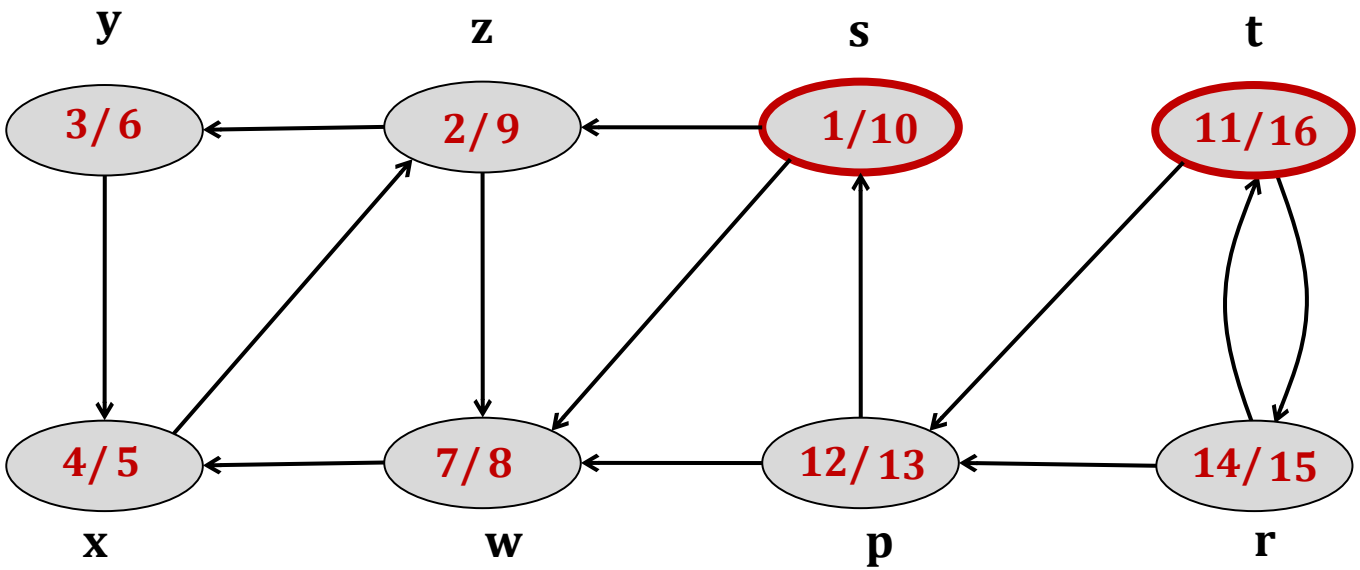
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα




έξοδος DFS = {(s, z, y, x, w), (t, p, r)}

*εμφάνιση κατά σειρά πρώτης επίσκεψης*

# Εξερεύνηση κατά Βάθος – DFS: χωρίς χρόνους επίσκεψης

```
DFS(G=(V,E))
for each vertex v∈V do
1.    status[v] ← UNVISITED ;  π(v) ← nil
2.  time ← 0
3. while ∃ s with status[s] = UNVISITED do
4.    DFS-Help(s)
```

```
DFS-Help(u)
    status[u] ← VISITED
    A[u] ← time ← time+1
    for each vertex v ∈ adj(u) do
            if status[v] = UNVISITED
                π(v) ← u ;  DFS-Help(v)
    status[u] ← EXPLORED
    T[u] ← time ← time+1
```

VISITED: *η εξερεύνηση του κόμβου ξεκίνησε*

*Η μορφή αυτή αρκεί για εύρεση όλων των προσβάσιμων κόμβων*

# Εξερεύνηση κατά Βάθος – DFS: με χρόνους επίσκεψης

```
DFS(G=(V,E))
for each vertex v∈V do
1.    status[v] ← UNVISITED ; π(v) ← nil
2. time ← 0
3. while ∃ s with status[s] = UNVISITED do
4.    DFS-Help(s)
```

```
DFS-Help(u)
    status[u] ← VISITED
    A[u] ← time ← time+1
    for each vertex v ∈ adj(u) do
            if status[v] = UNVISITED
                π(v) ← u ; DFS-Help(v)
    status[u] ← EXPLORED
    T[u] ← time ← time+1
```

VISITED: *η εξερεύνηση του κόμβου ξεκίνησε*

EXPLORED: *η εξερεύνηση του κόμβου έχει ολοκληρωθεί (συχνά δεν χρειάζεται και παραλείπεται)*

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Πολυπλοκότητα DFS

- ✓ Τα βήματα 1 και 4 εκτελούνται σε χρόνο $O(|V|)$
- ✓ Το βήμα 3 σε $O(1)$
- ✓ Η διαδικασία DFS-Help( ) καλείται 1 φορά για $\forall v \in V$
- ✓ Η DFS-Help(u) εκτελεί deg(u)=|adj(u)| ελέγχους.

$\Sigma_{u \in V} \deg(u) = 2|E| = O(|E|)$ (μη κατ.)
$\Sigma_{u \in V} \deg(u) = |E| = O(|E|)$ (κατευθ.)

- ✓ Άρα, πολυπλοκότητα DFS:

**$O(|V|+|E|)=O(n+m)$**

```
DFS(G=(V,E))
for each vertex v∈V do
1.      status[v] ← UNVISITED ; π(v) ← nil
2.  time ← 0
3.  while ∃ s with status[s] = UNVISITED do
4.      DFS-Help(s)
```

```
DFS-Help(u)
      status[u] ← VISITED
      A[u] ← time ← time+1
      for each vertex v ∈ adj(u) do
            if status[v] = UNVISITED
                  π(v) ← u ; DFS-Help(v)
      status[u] ← EXPLORED // συχνά παραλείπεται
      T[u] ← time ← time+1
```

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

- Κατηγορίες ακμών κατά την DFS

**T** : Δενδρικές ακμές (**tree-edges**)

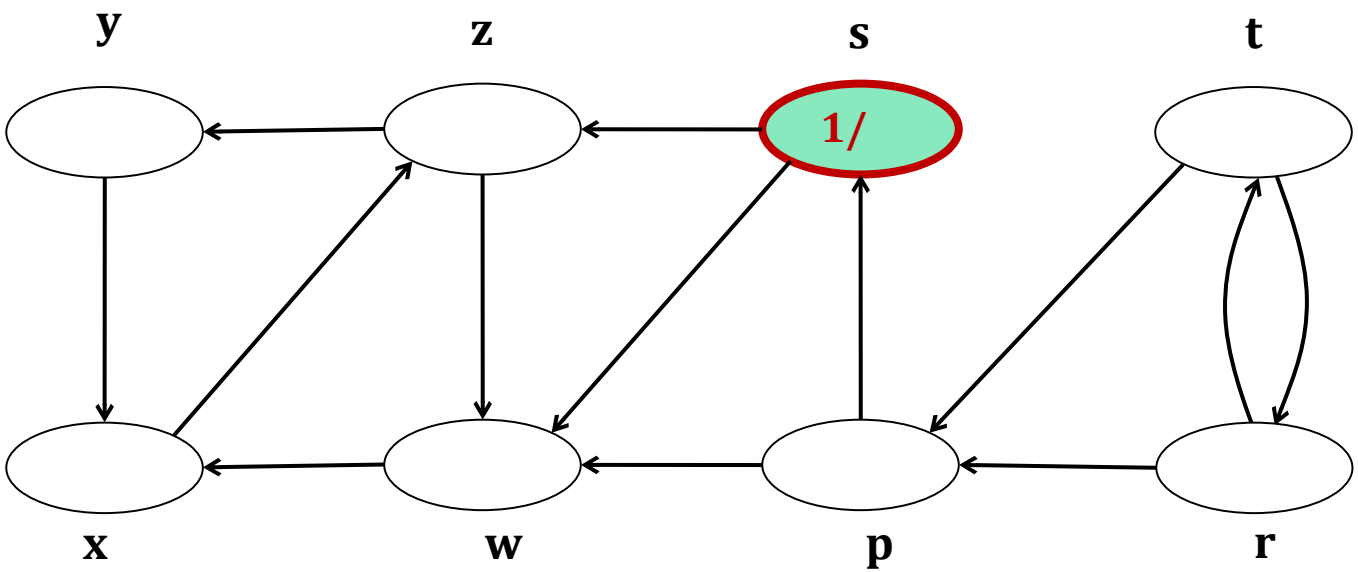
**B** : Οπισθο-ακμές ή ανιούσες (**back-edges**)

**F** : Εμπρόσθιες ακμές ή κατιούσες (**forward-edges**)

**C** : Διασχίζουσες ή εγκάρσιες ακμές (**cross-edges**)

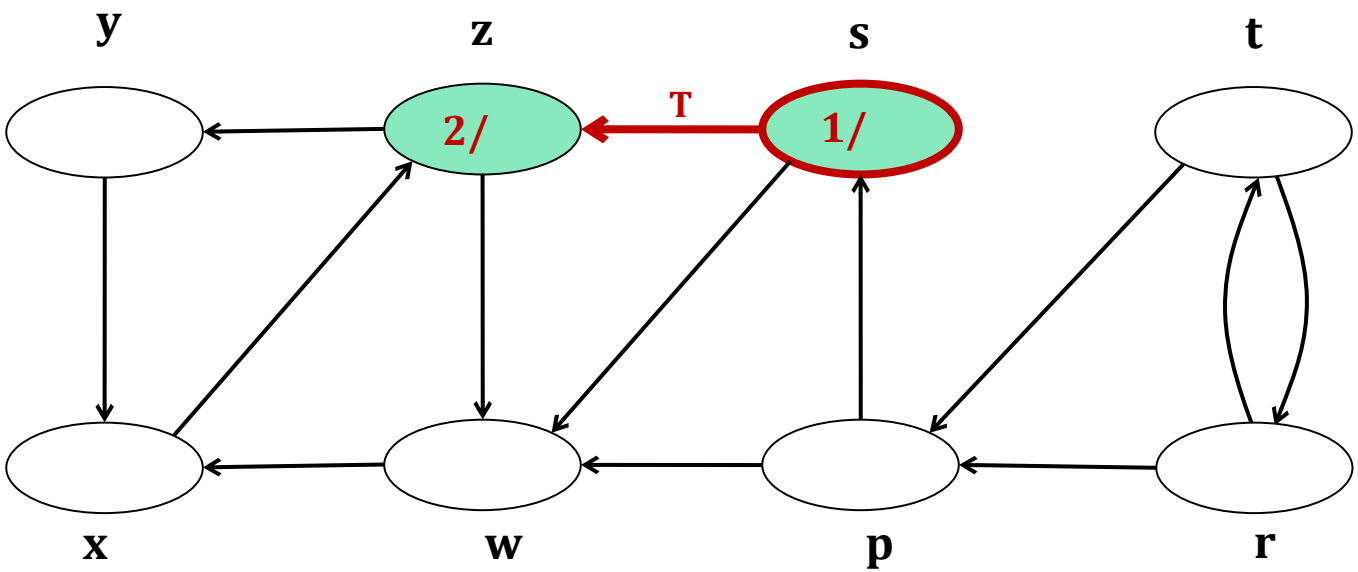
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



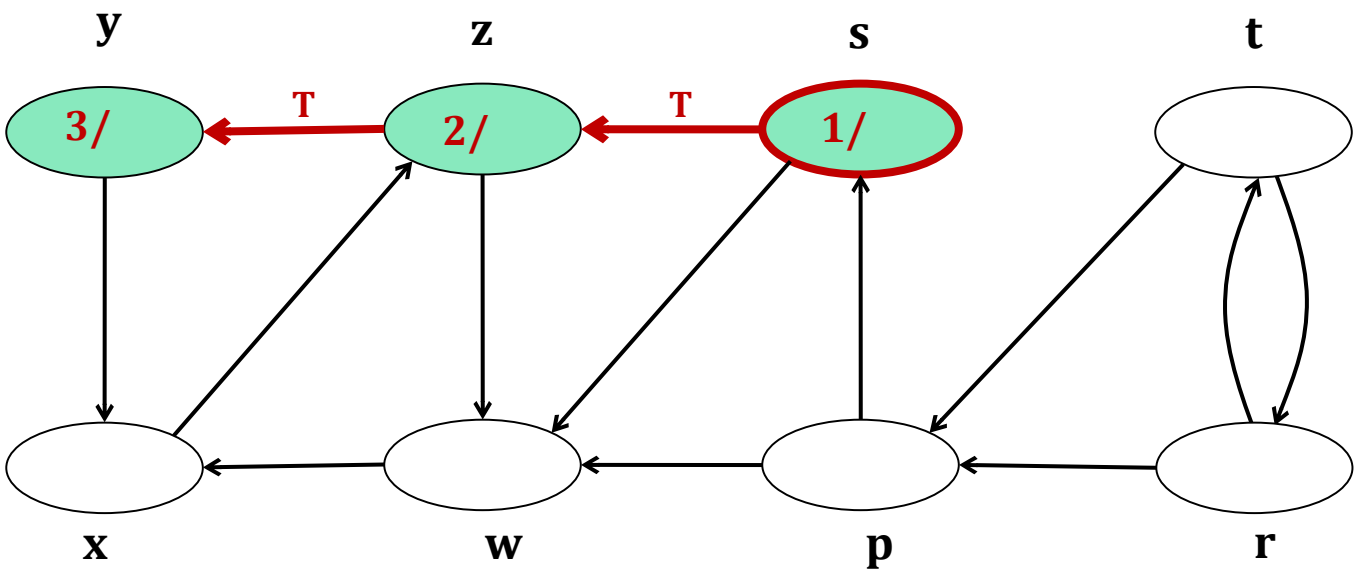
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



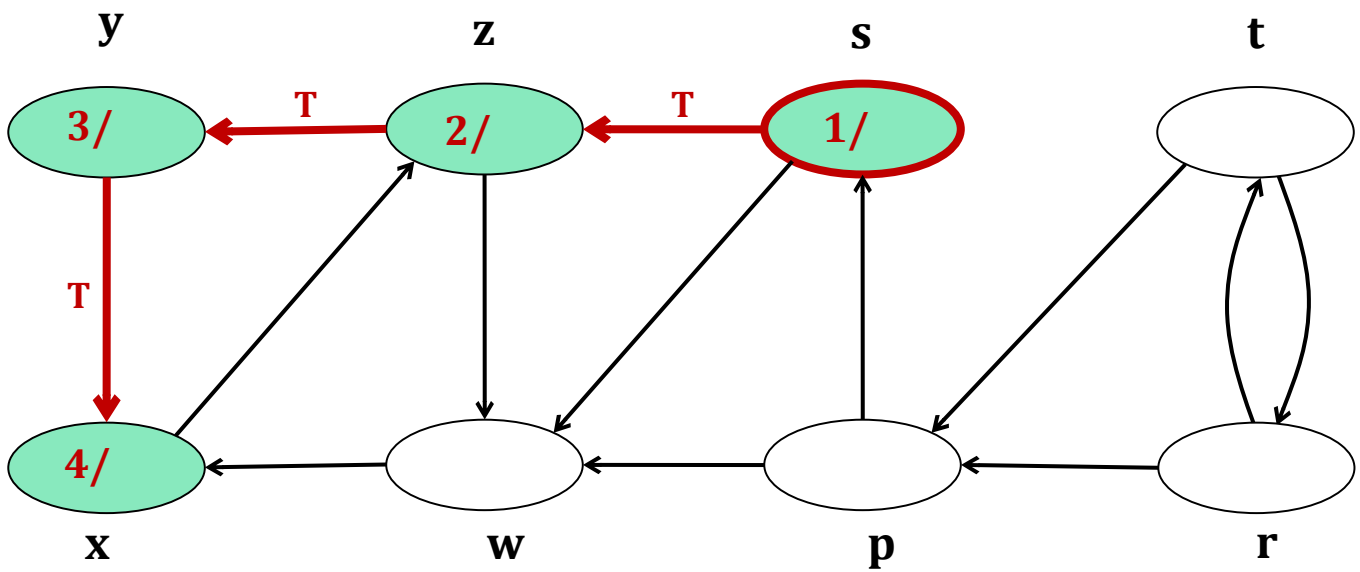
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



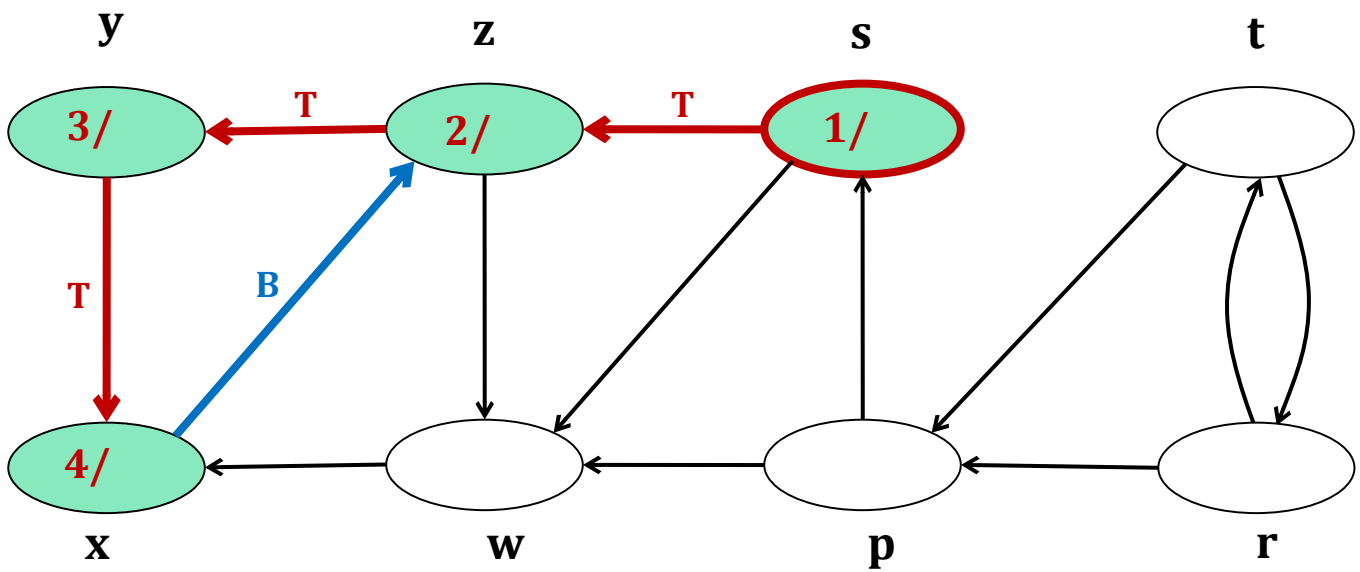
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



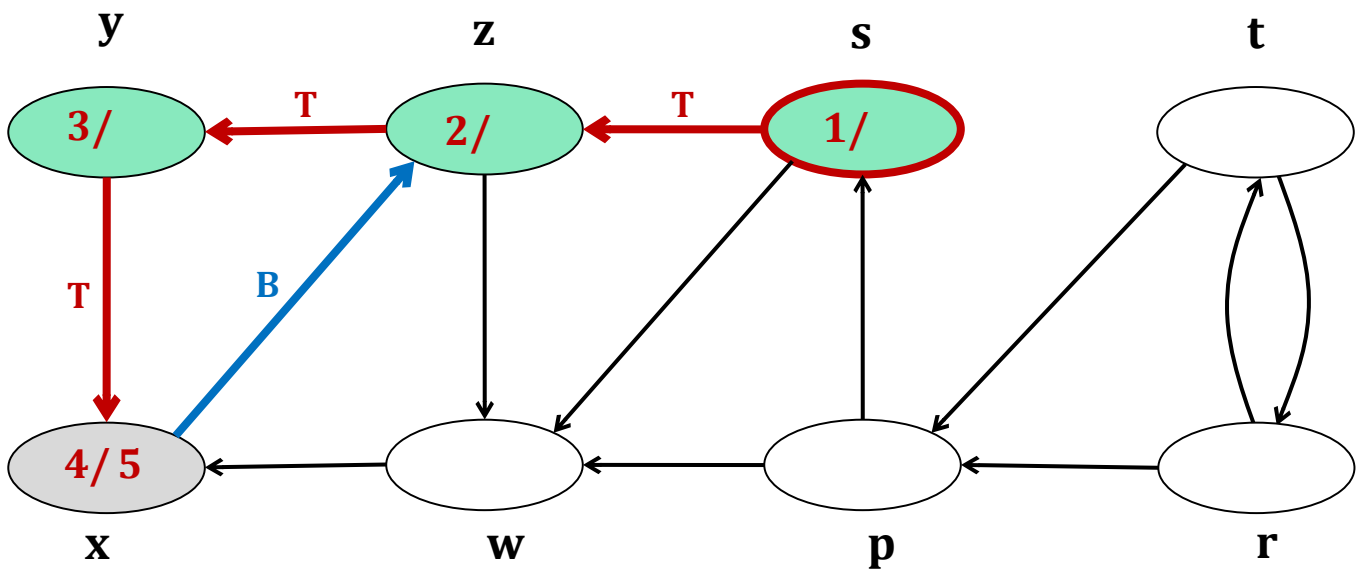
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



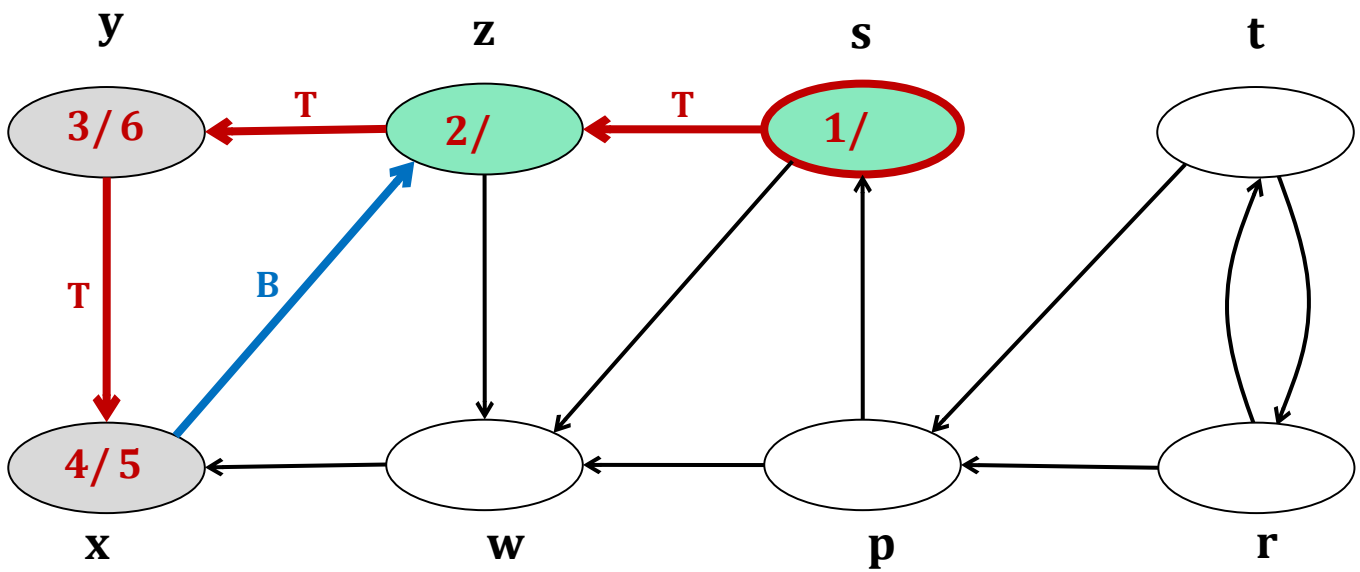
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



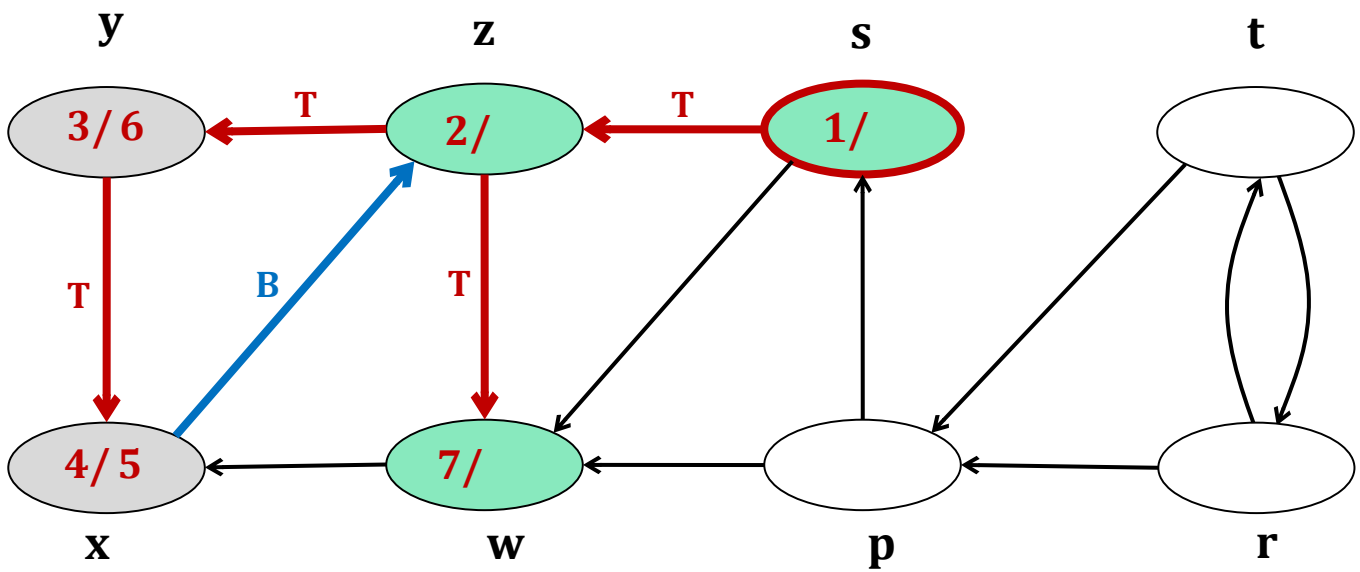
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



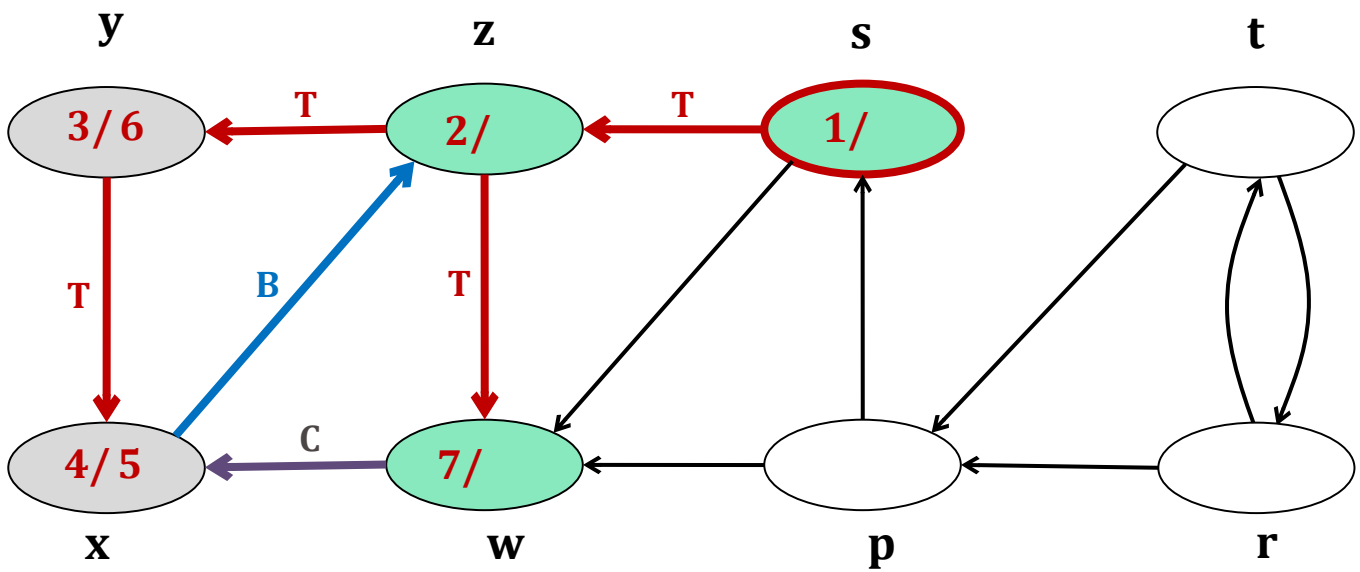
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



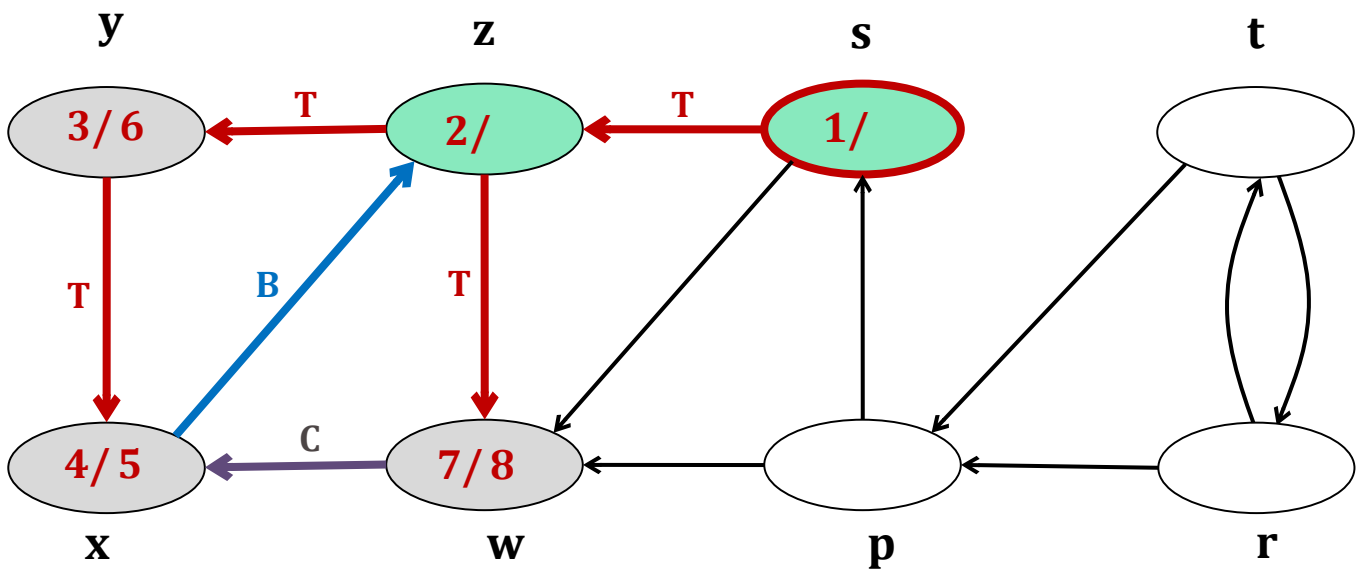
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



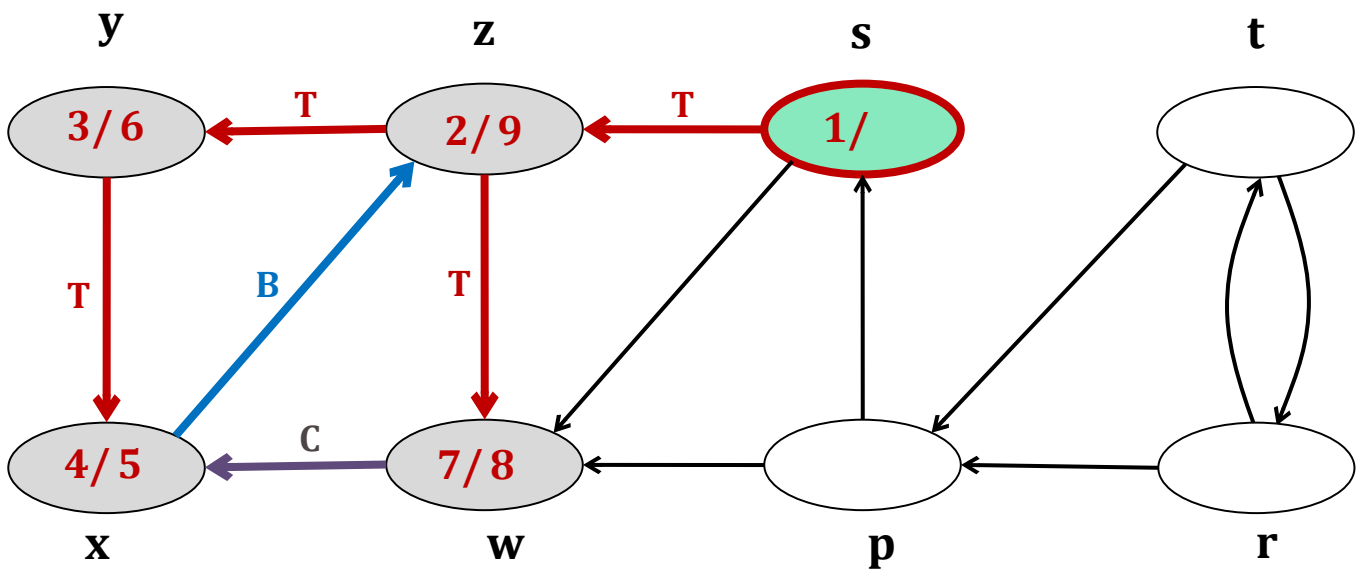
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



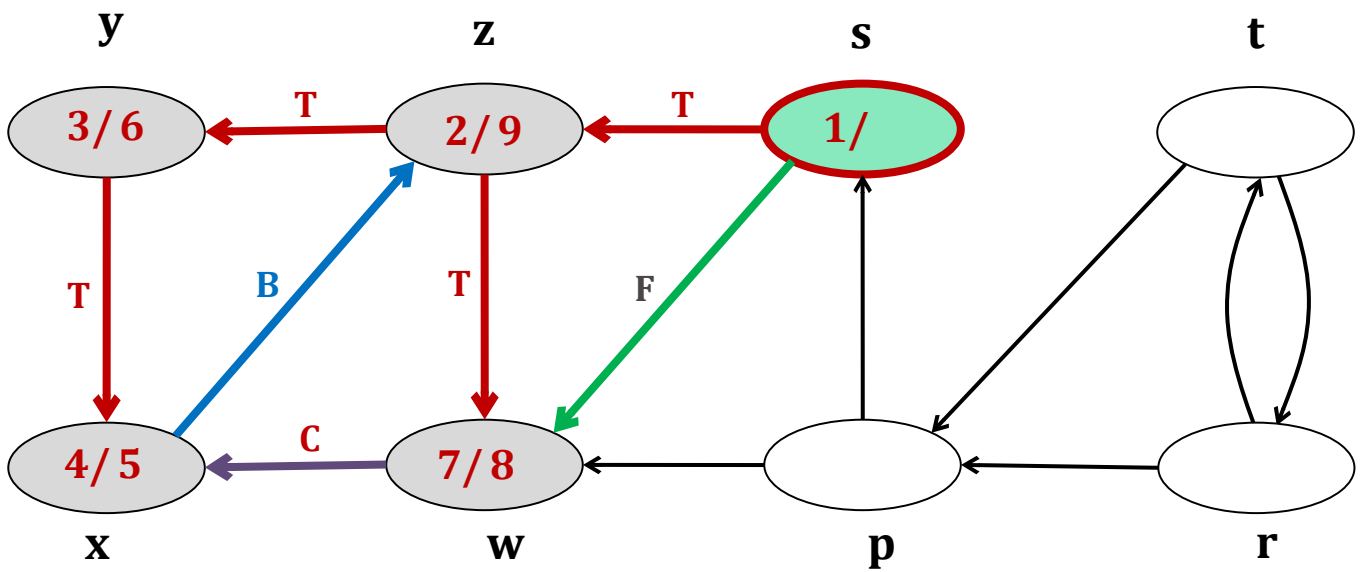
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



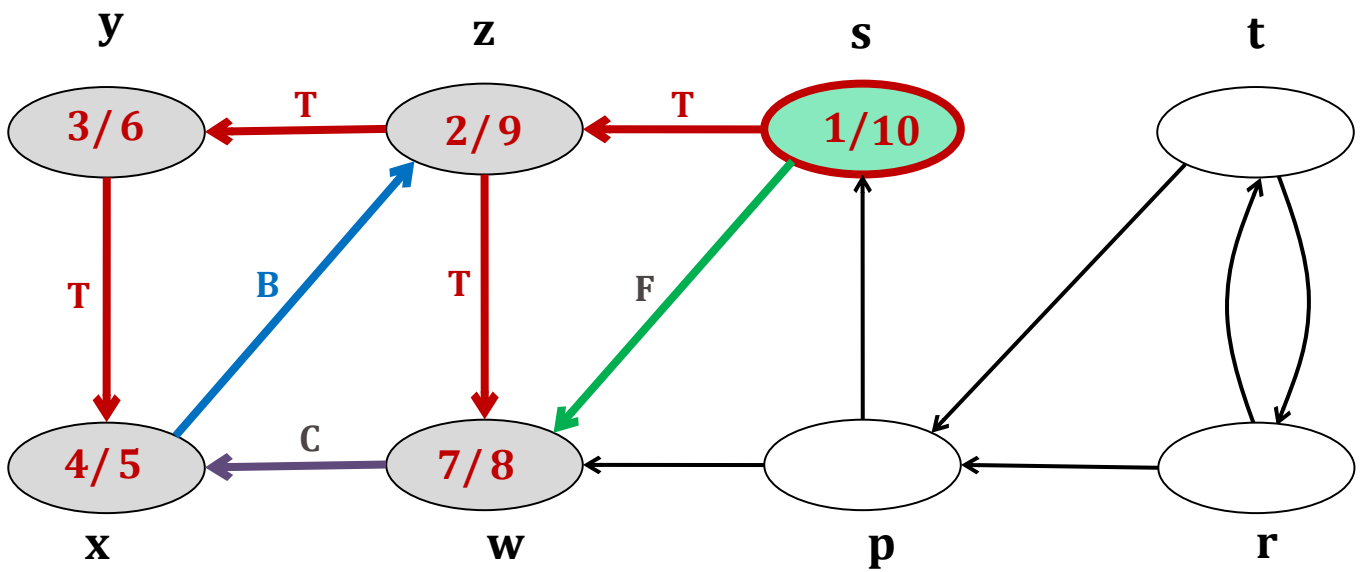
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



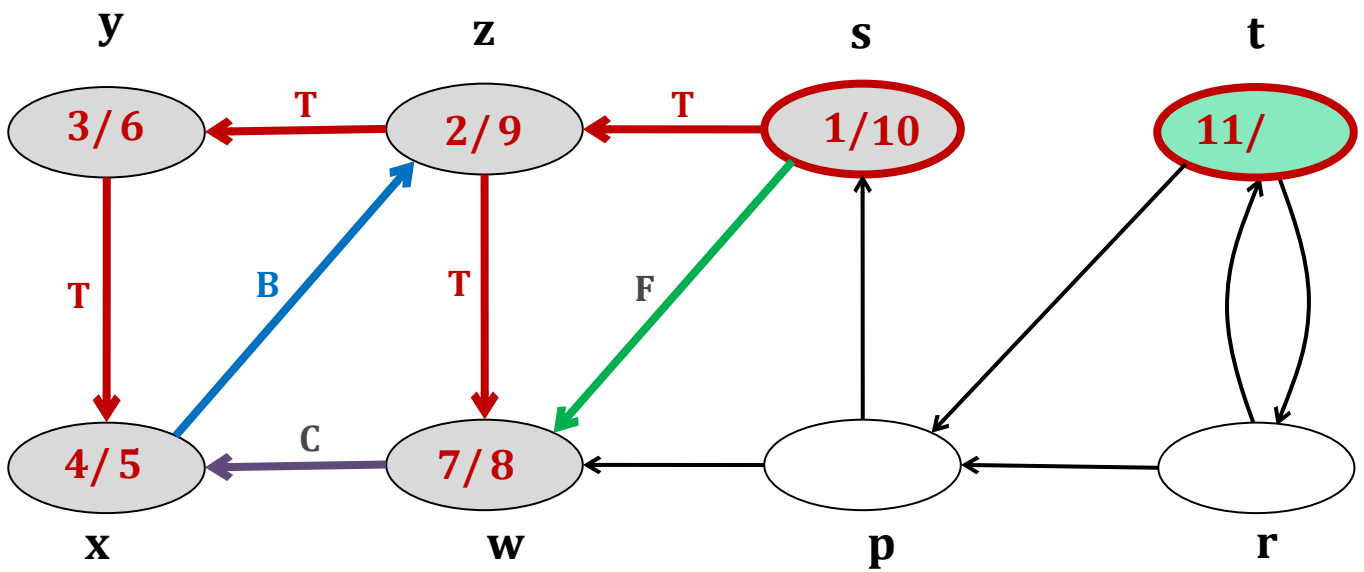
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



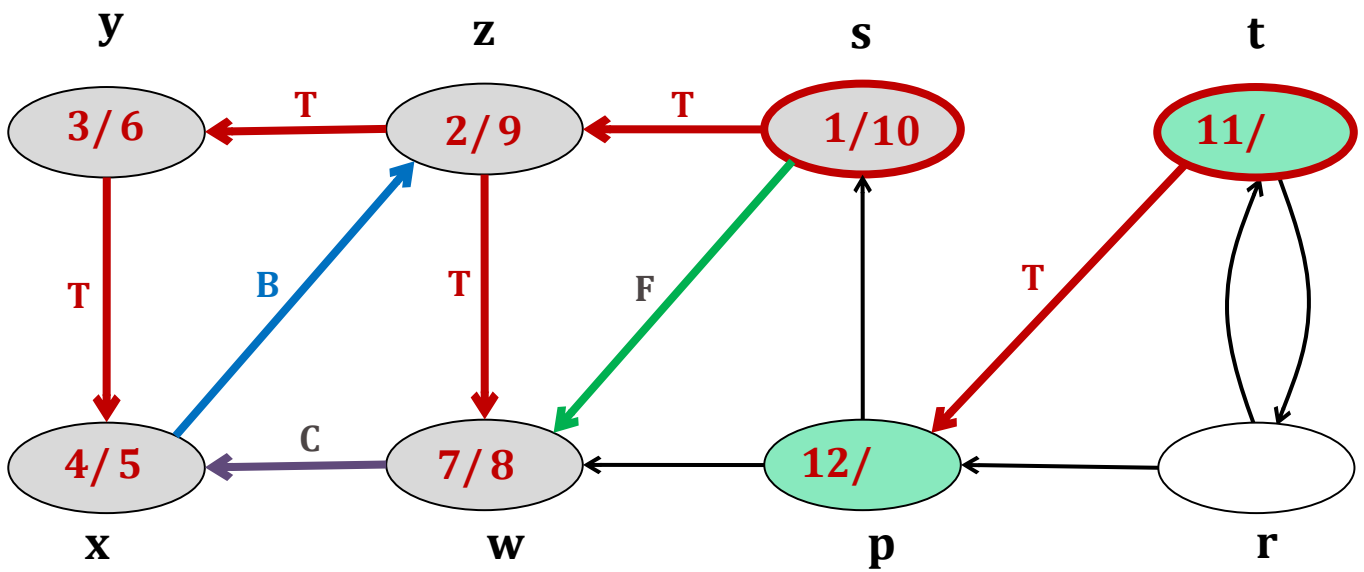
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



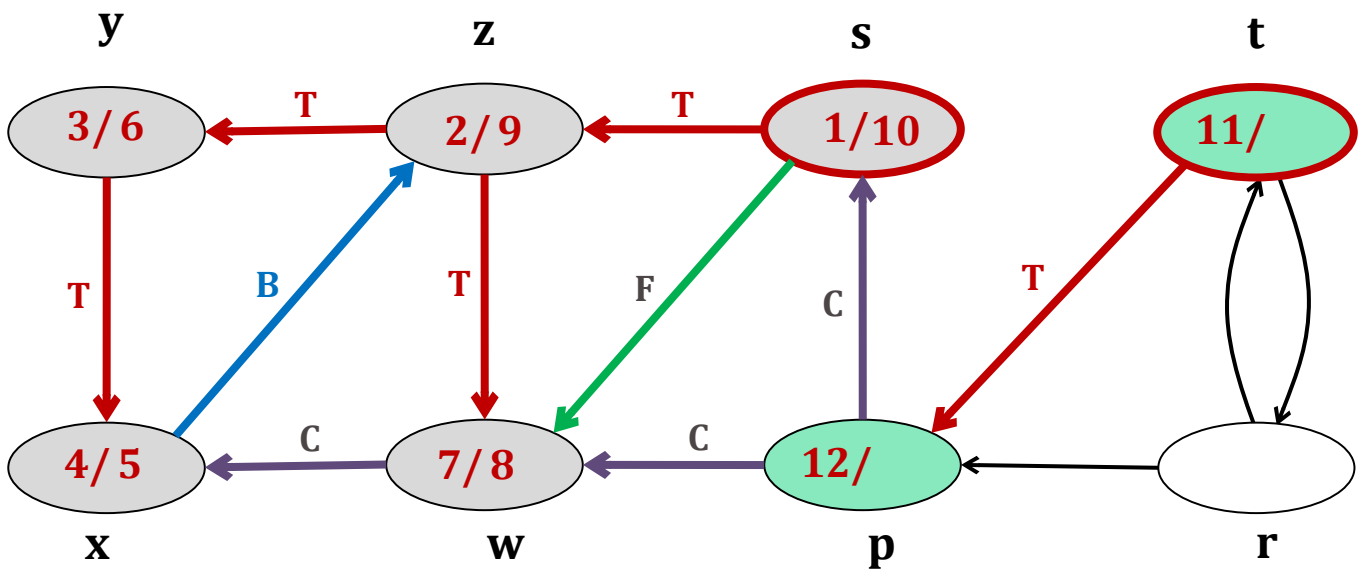
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



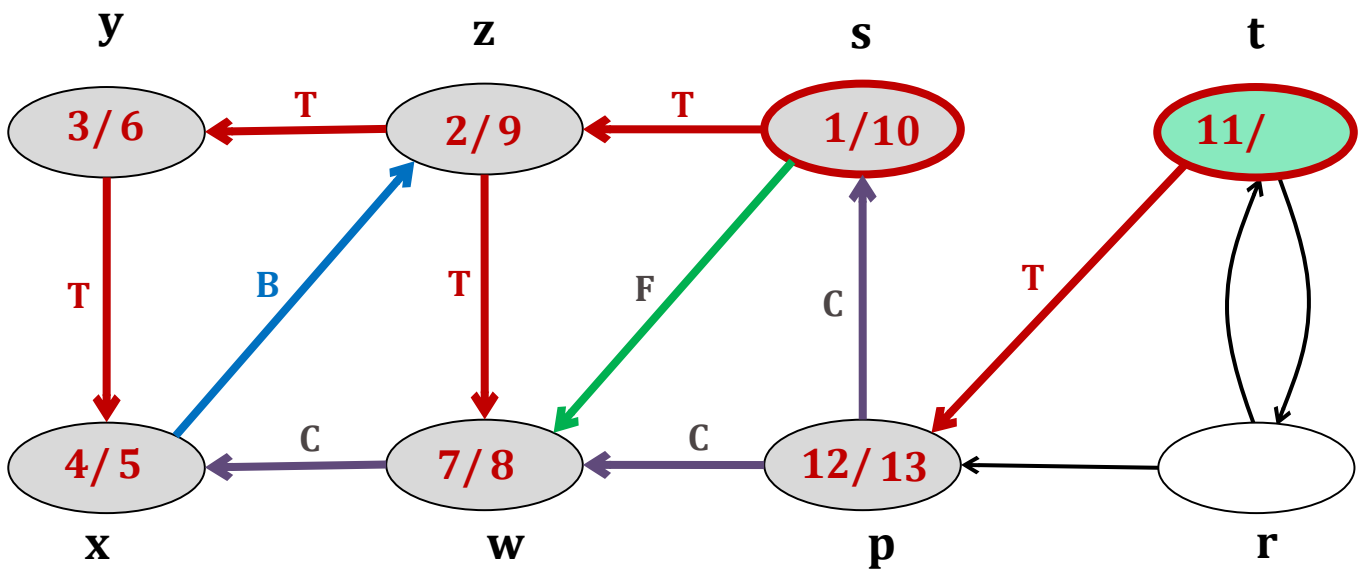
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



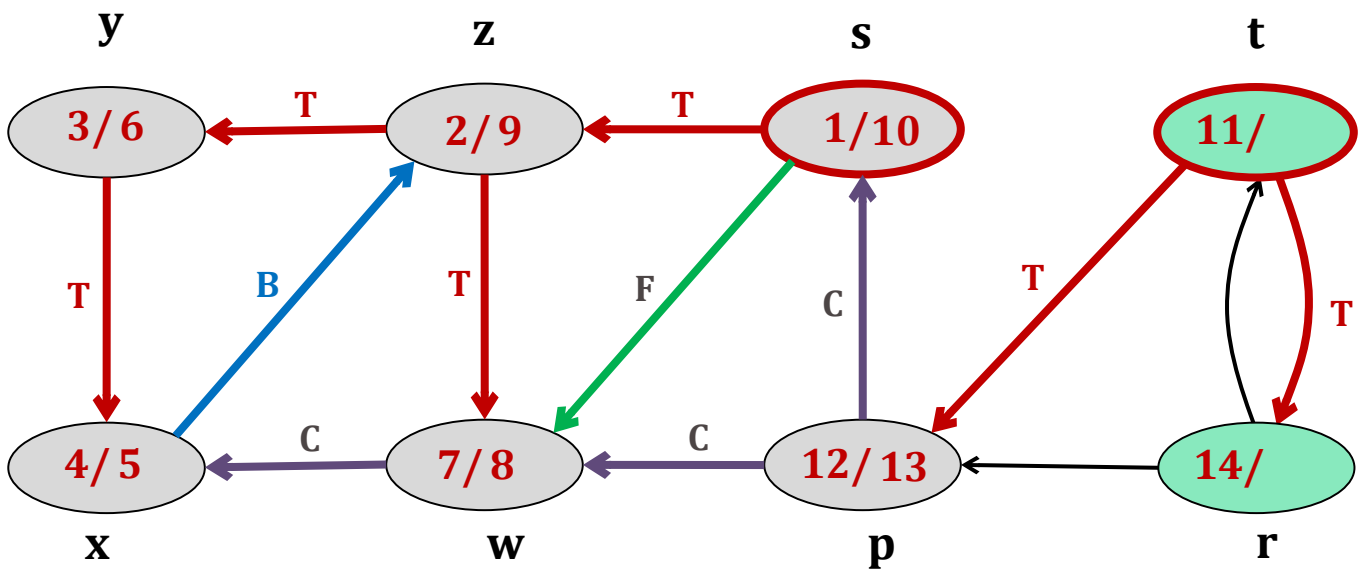
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



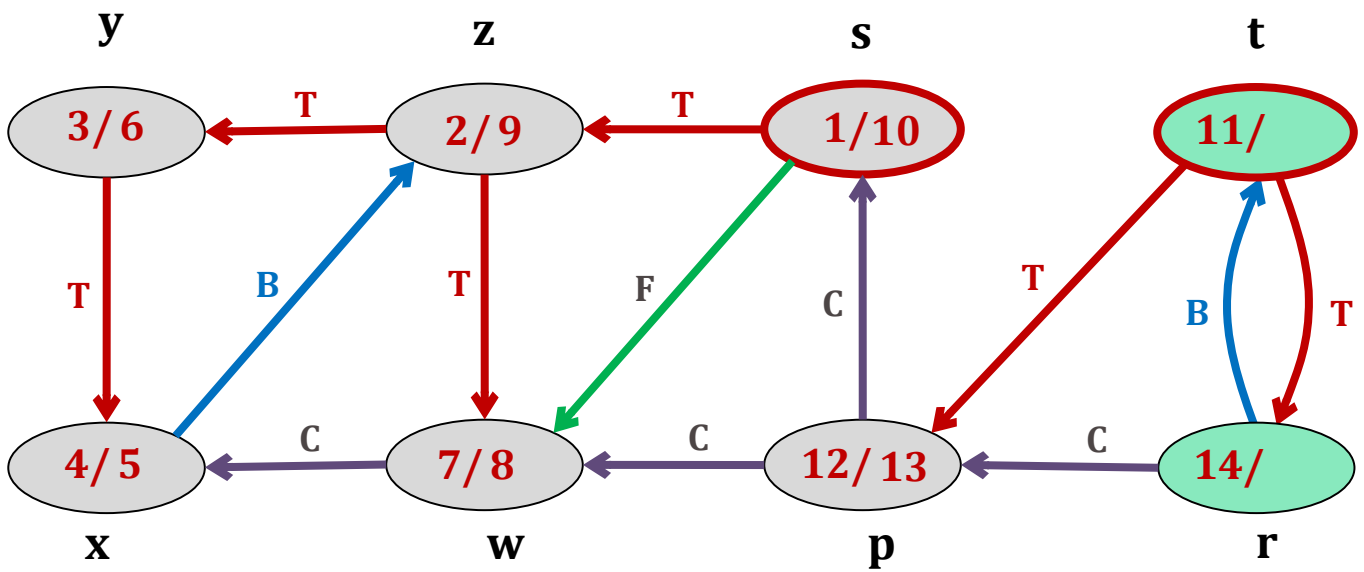
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



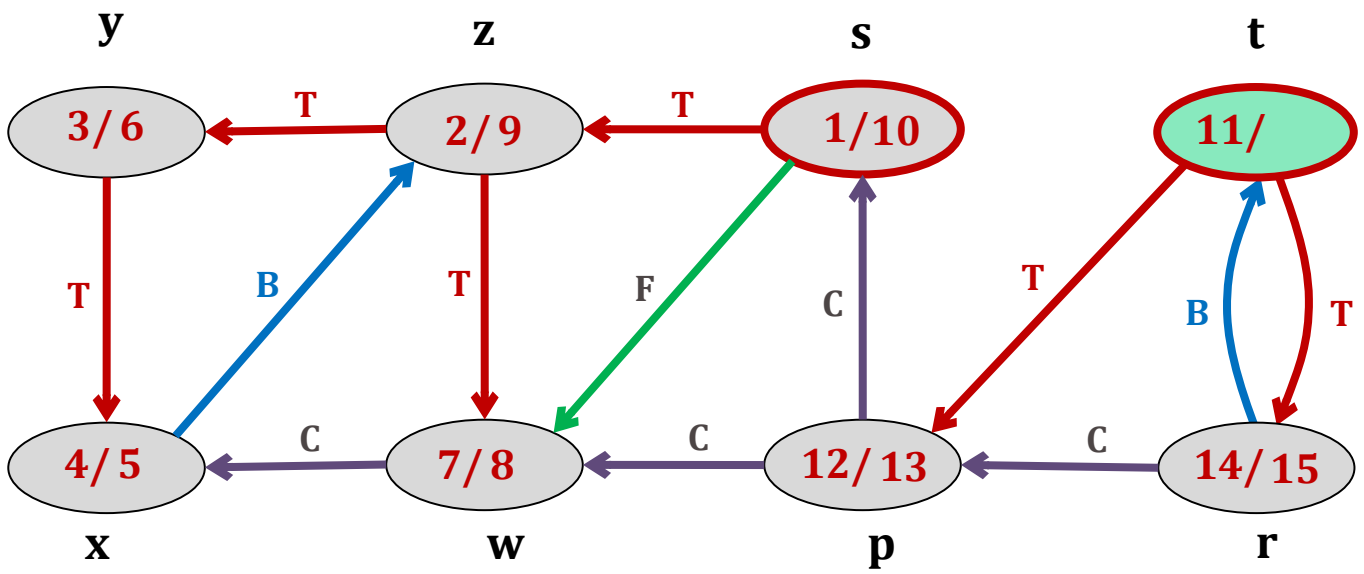
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



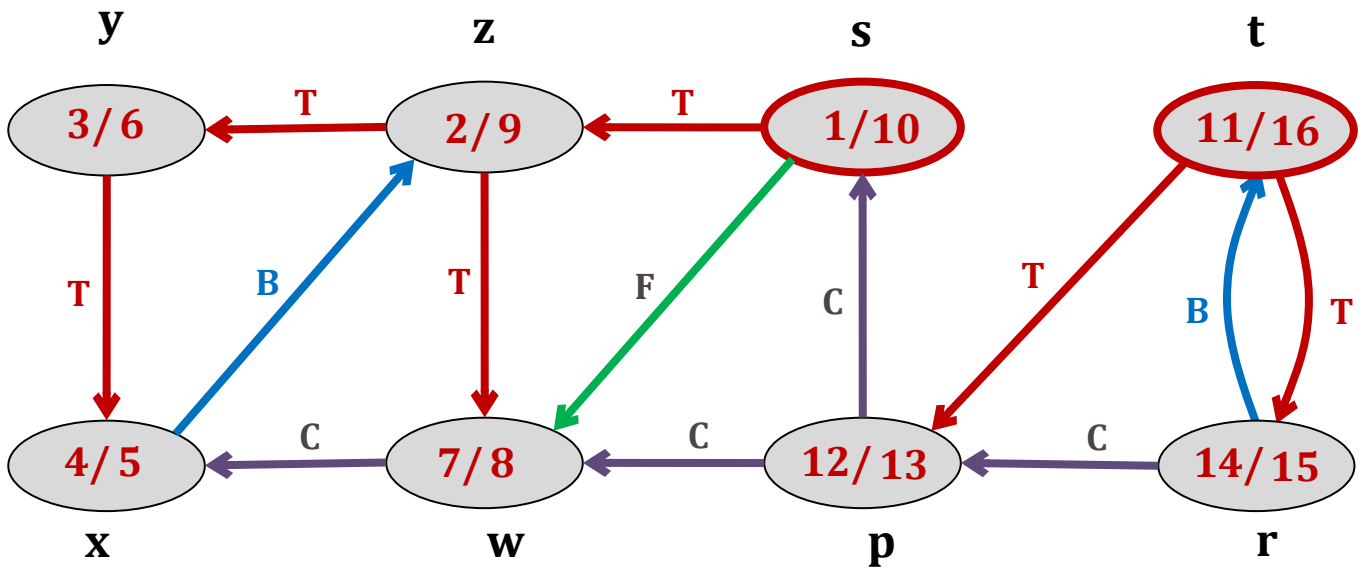
# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα



# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## Παράδειγμα




**Τύπος ακμής (u,v)**

**T** & **F**: a(u) < a(v) < t(v) < t(u)

**B**: a(v) < a(u) < t(u) < t(v)

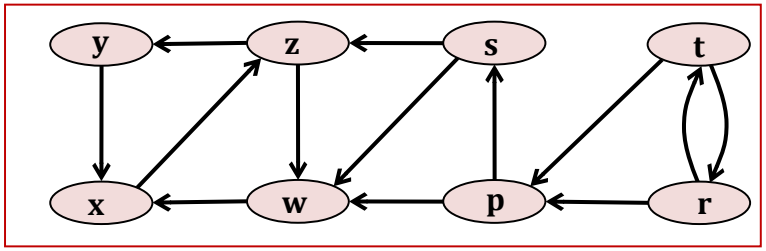
**C**: a(v) < t(v) < a(u) < t(u)

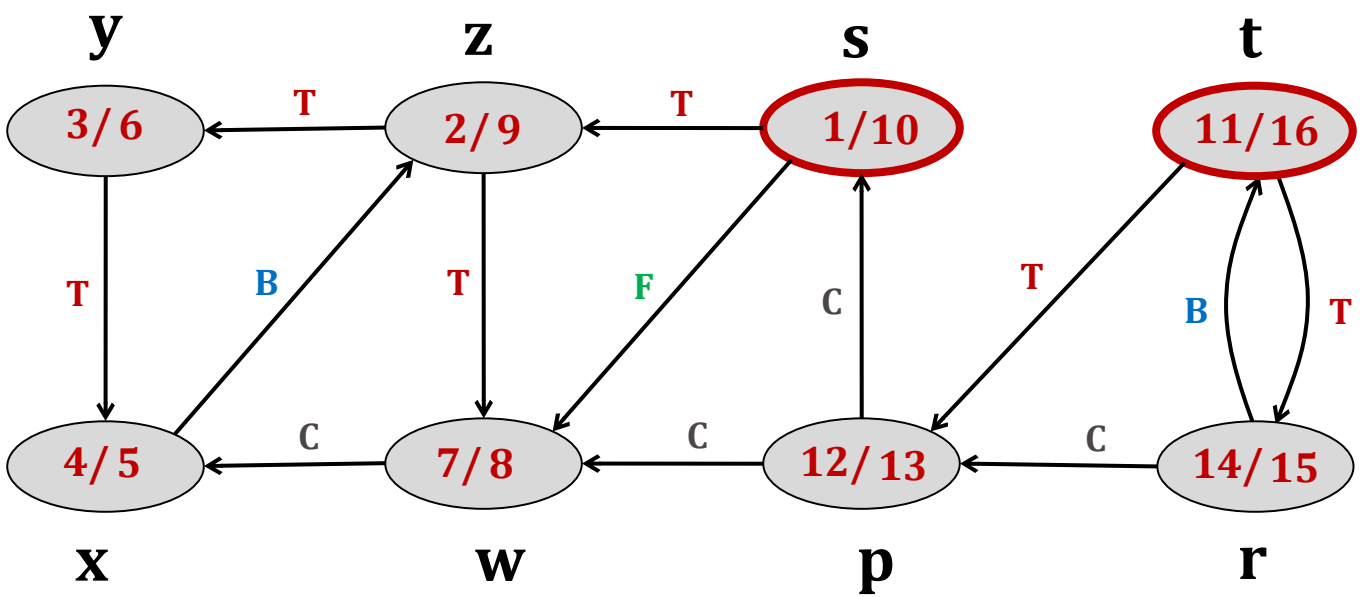
*Μη κατευθ/νοι γράφοι:*

μόνο **T** και **B**

# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

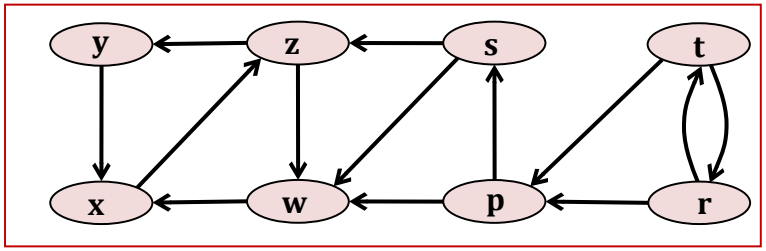
## DFS-δένδρο (δάσος)

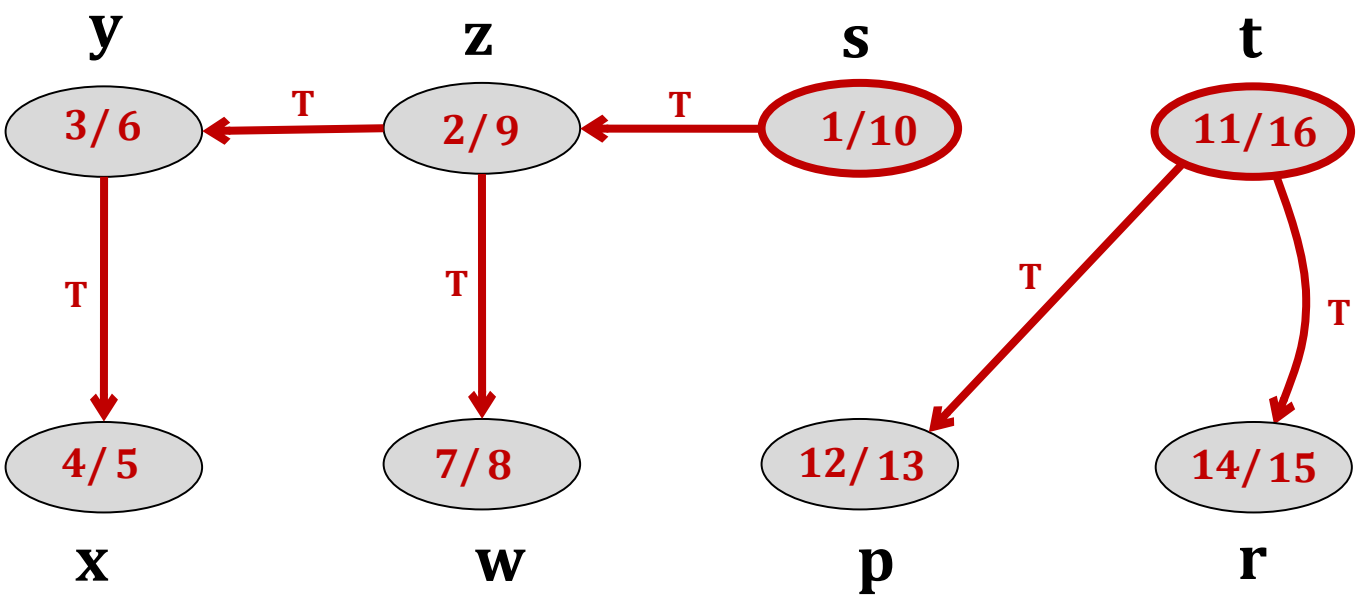


# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

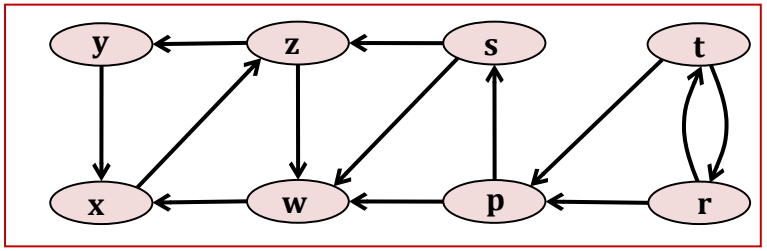
## DFS-δένδρο (δάσος)

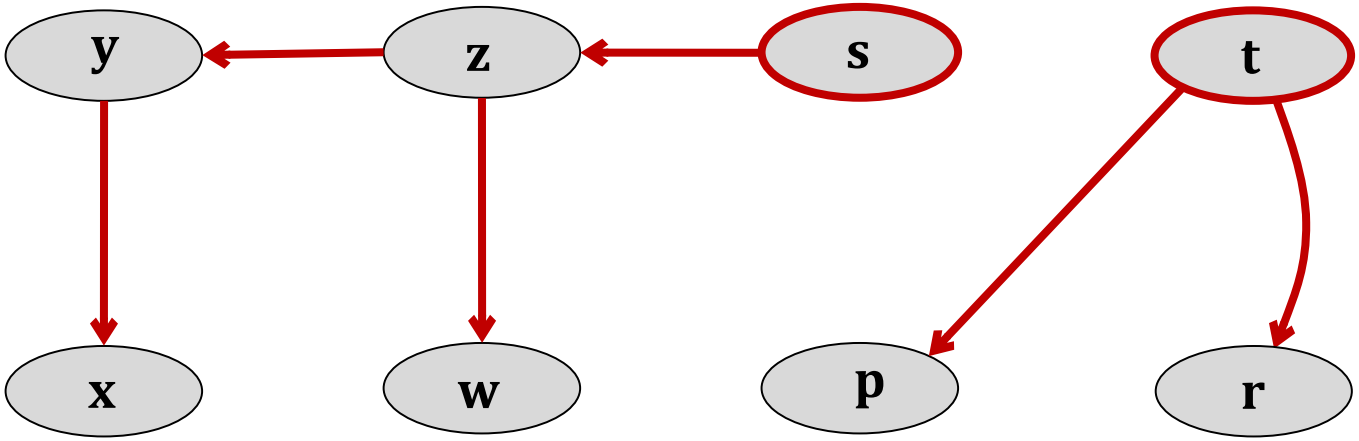


# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

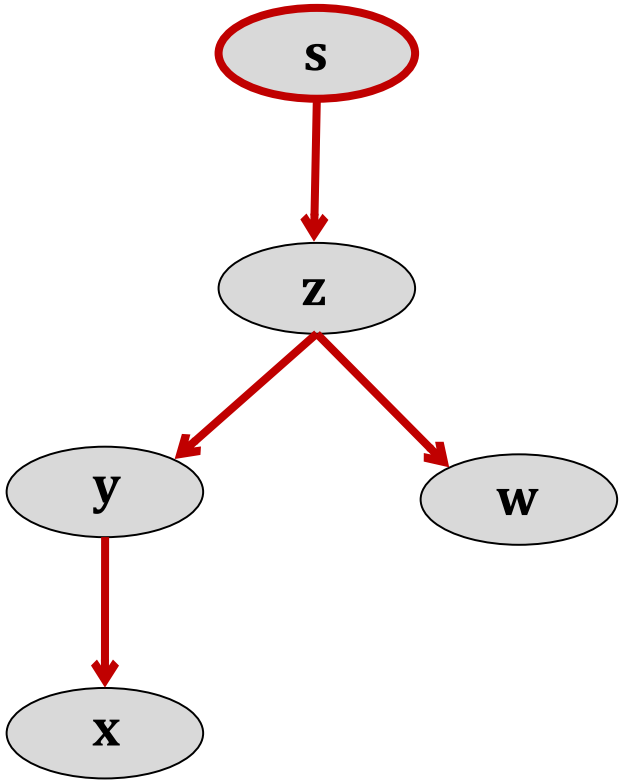
## DFS-δένδρο (δάσος)

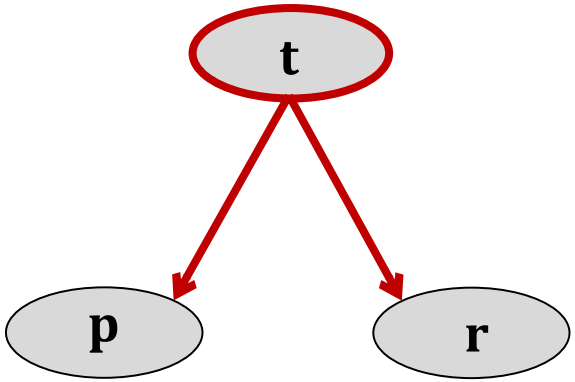


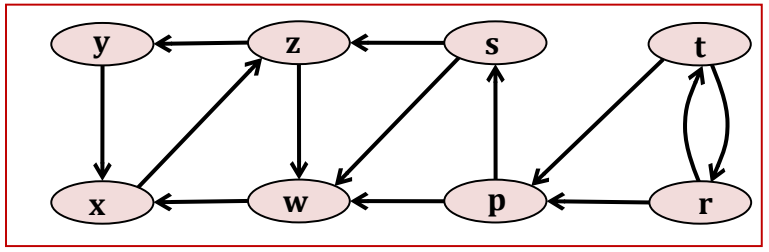



# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## DFS-δένδρο (δάσος)

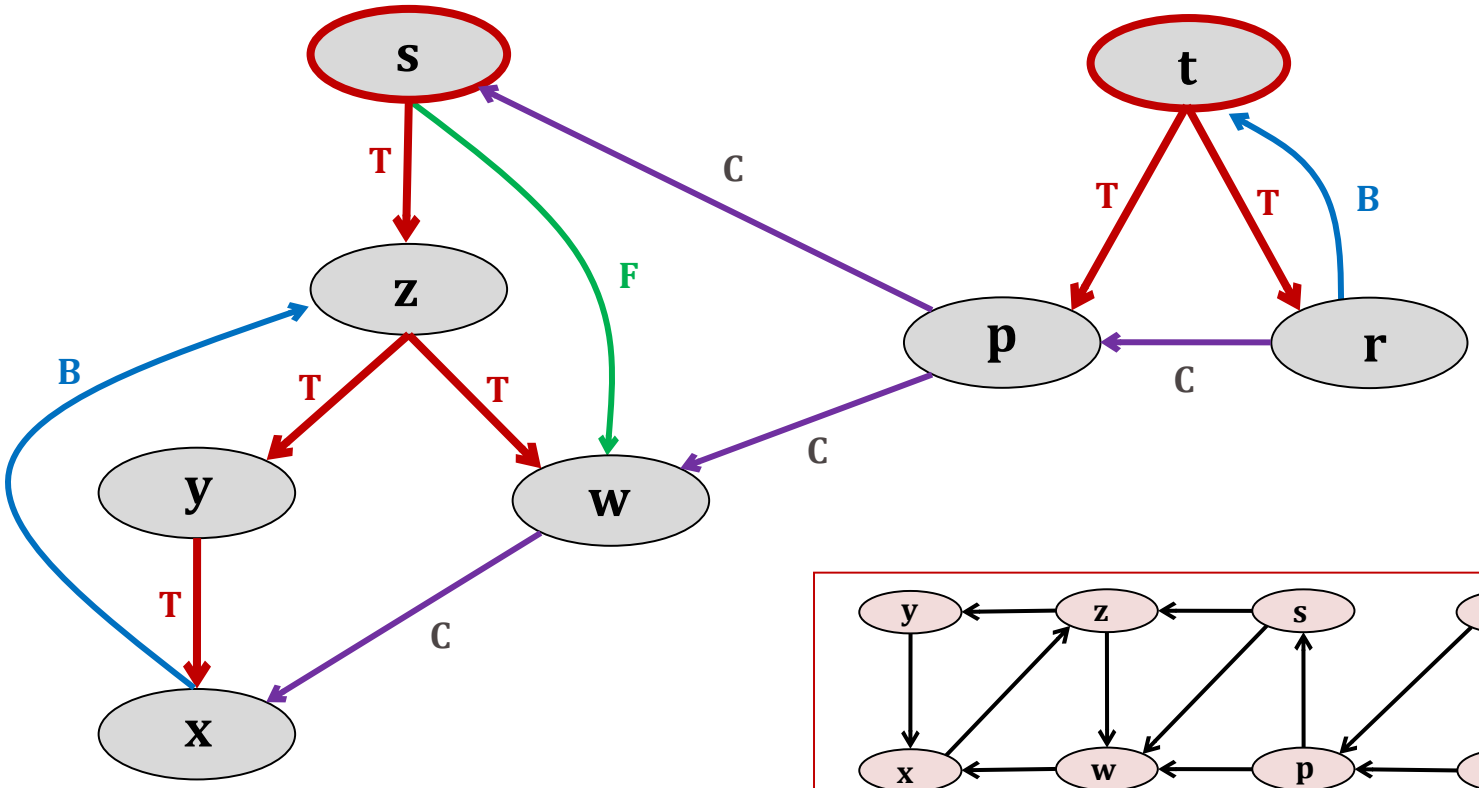


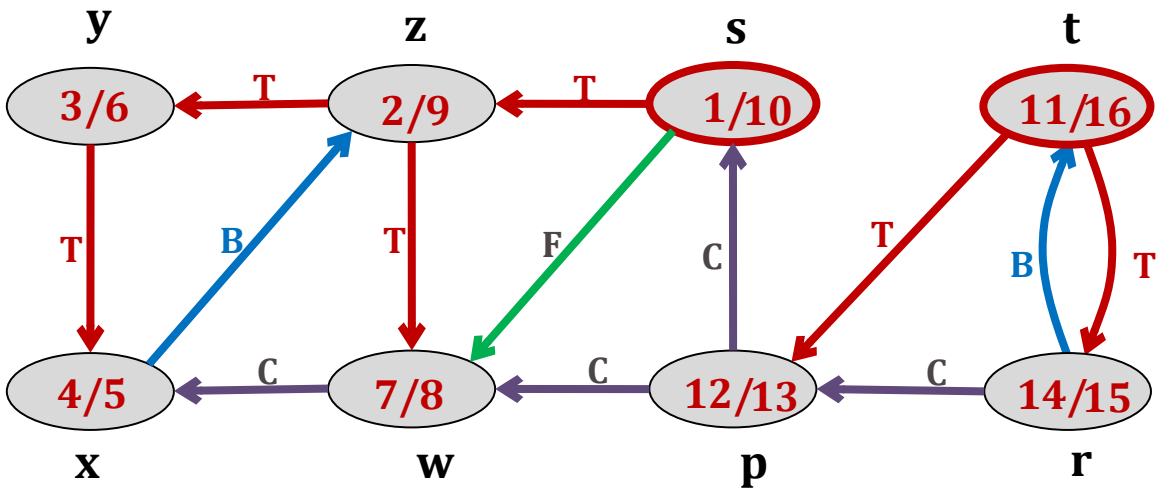



# Εξερεύνηση κατά Βάθος - DFS

## DFS-αναπαράσταση



# Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων




**Τύπος ακμής (u,v)**

**T** & **F**: a(u) < a(v) < t(v) < t(u)

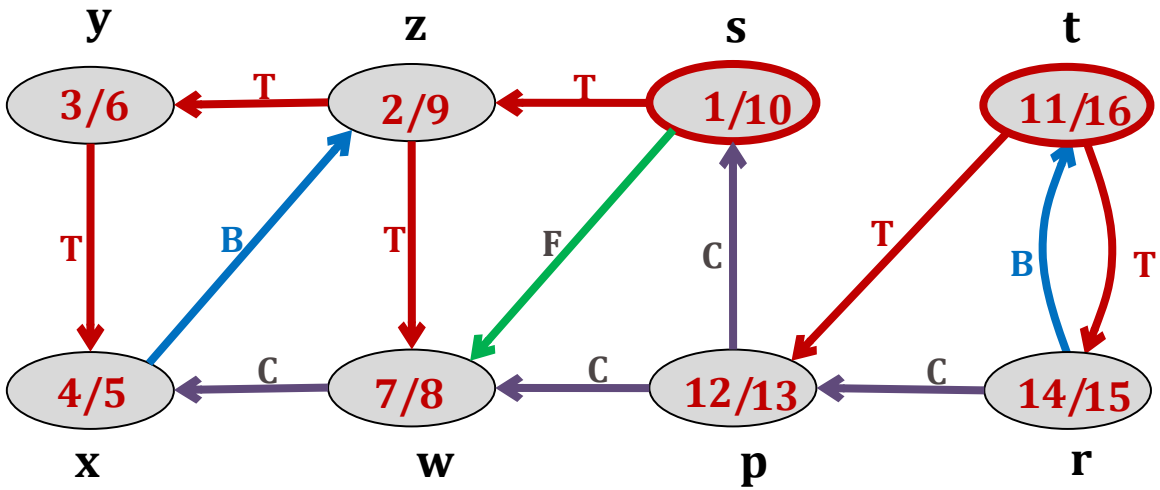
**B**: a(v) < a(u) < t(u) < t(v)

**C**: a(v) < t(v) < a(u) < t(u)

*Μη κατευθ/νοι γράφοι:* μόνο **T** και **B**

# Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο G=(V, E): η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.




**Τύπος ακμής (u,v)**

**T** & **F**: a(u) < a(v) < t(v) < t(u)

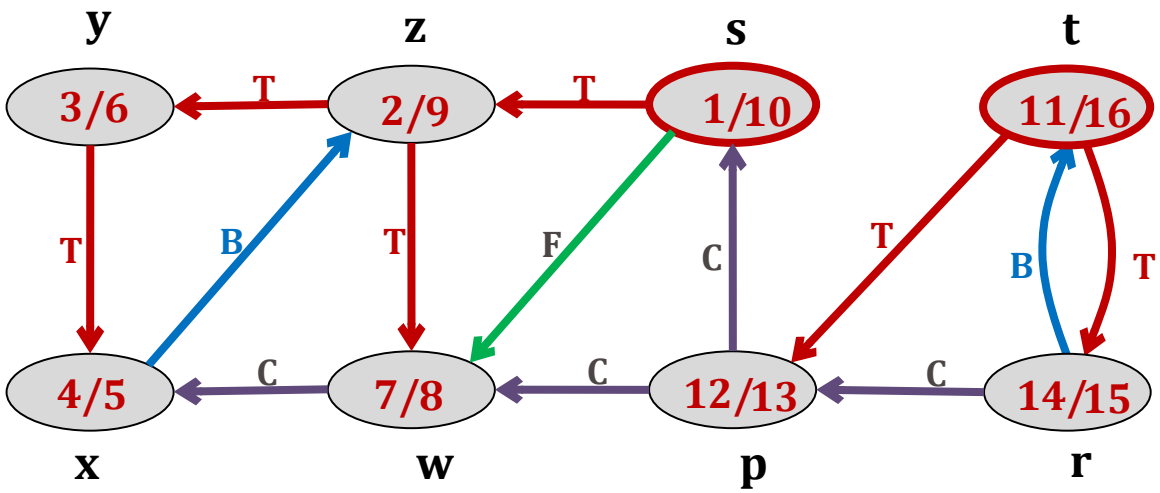
**B**: a(v) < a(u) < t(u) < t(v)

**C**: a(v) < t(v) < a(u) < t(u)

*Μη κατευθ/νοι γράφοι:* μόνο **T** και **B**

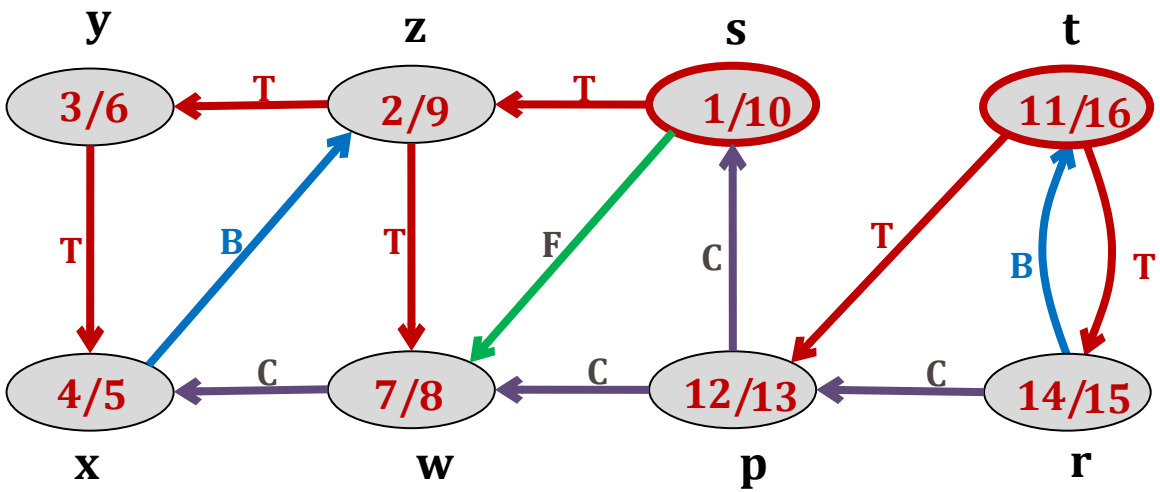
# Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο G=(V, E): η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.



# Εφαρμογές DFS: εντοπισμός κύκλων

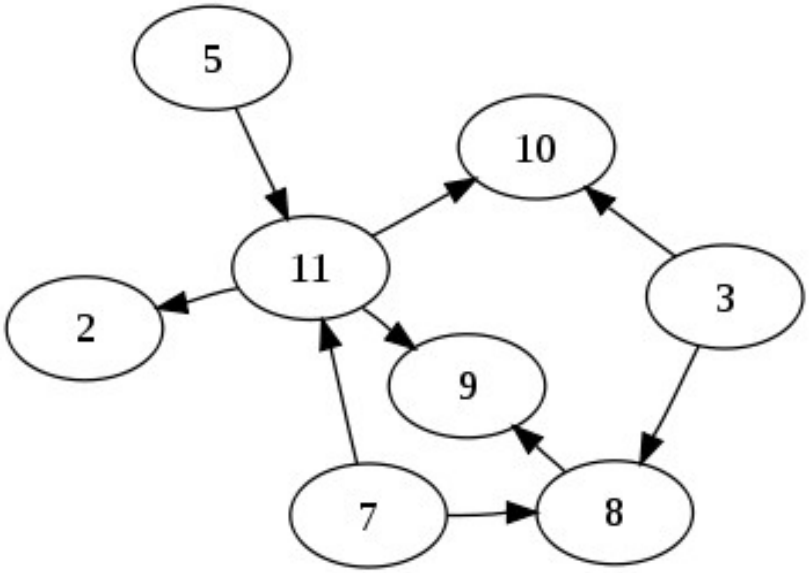
- **Αναγκαία και ικανή συνθήκη** για ύπαρξη κύκλου σε γράφο G=(V, E): η εξερεύνηση DFS βρίσκει **back edges**.




- **Ικανή :** εύκολο!
- **Αναγκαία :** έστω κύκλος C και u ο πρώτος κόμβος του C που θα επισκεφθεί η DFS. Σκεφτείτε τι θα κάνει η DFS κατά την εξερεύνηση του u.

# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

- Μη-κυκλικό Κατευθυνόμενο Γράφημα (DAG) ονομάζεται το γράφημα G=(V, E) το οποίο δεν έχει κατευθυνόμενους κύκλους.



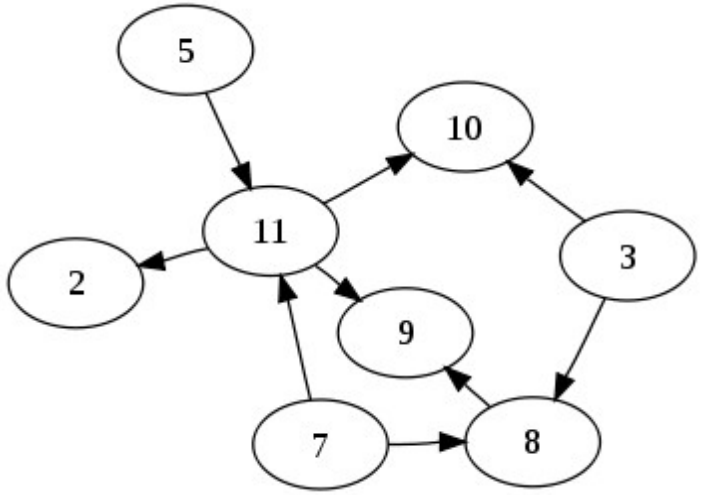
# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

Μια Τοπολογική Ταξινόμηση ενός DAG G=(V, E) είναι μια ακολουθία TS=($u_1$, $u_2$, …, $u_n$) των κόμβων του V(G) τέτοια ώστε:

$\forall u_i, u_j \in V(G)$ εάν $\langle u_i, u_j \rangle \in E(G)$ τότε
ο κόμβος $u_i$ προηγείται του $u_j$ στην ακολουθία TS

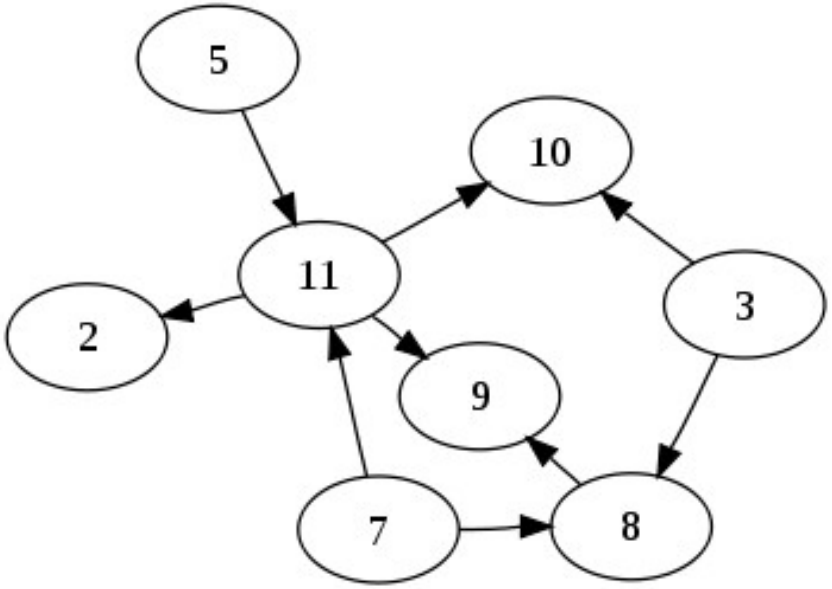
**Υπολογισμός TS**

- ✓ Μέθοδος **In-degree**
- ✓ Μέθοδος **DFS**



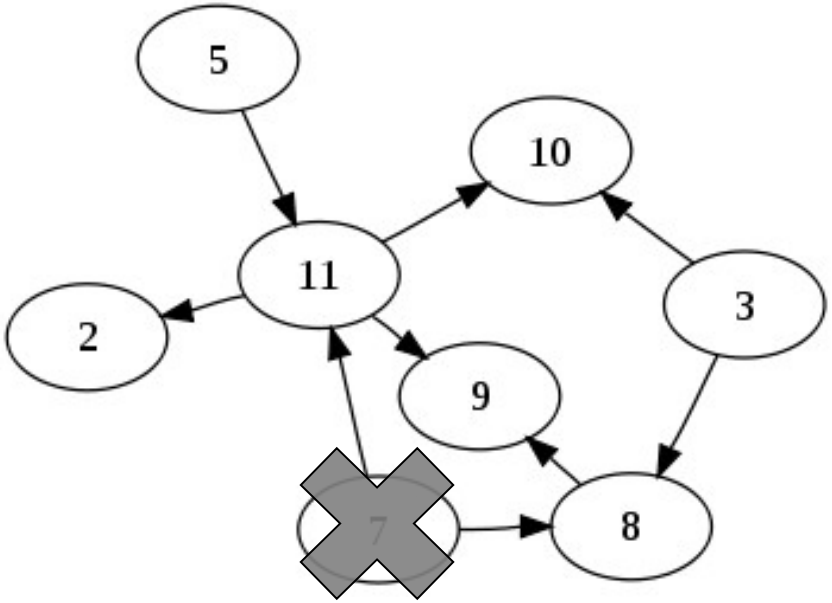
# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

- Μέθοδος **In-degree**



# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

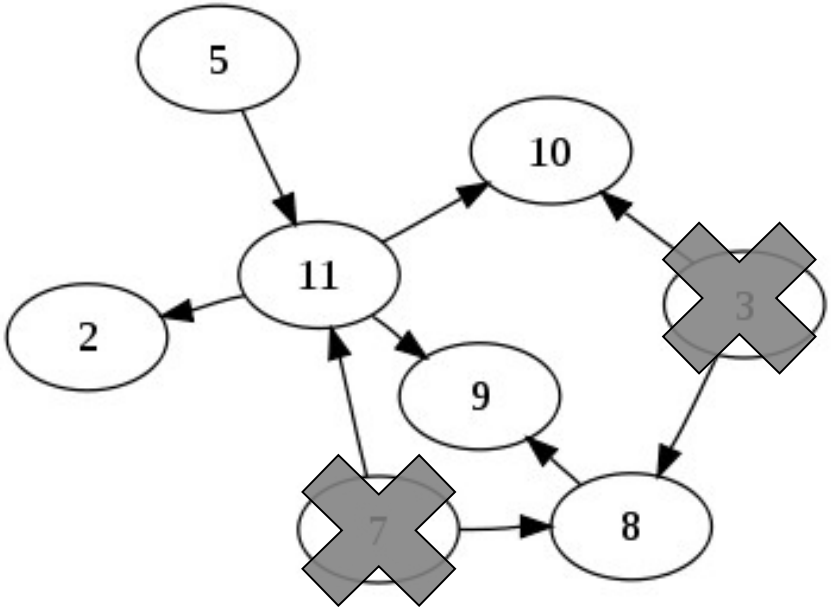
- Μέθοδος **In-degree**




**7**

# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

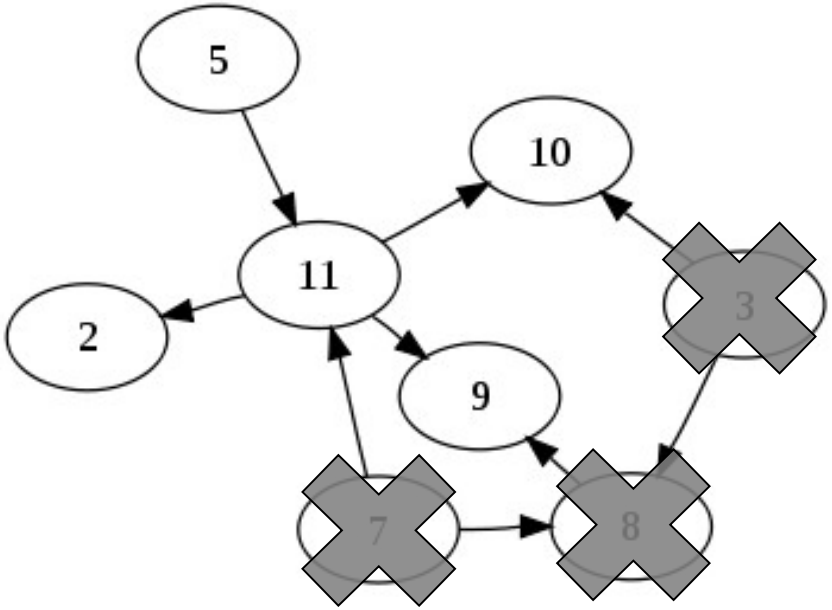
- Μέθοδος **In-degree**

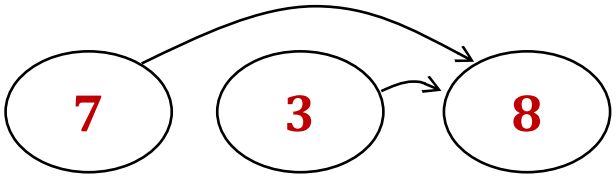



**7** **3**

# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

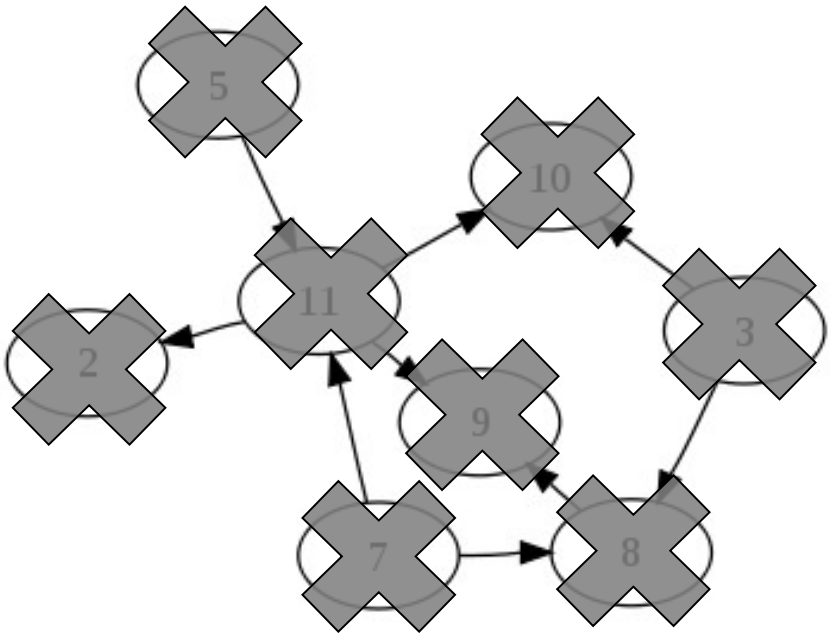
- Μέθοδος **In-degree**



# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

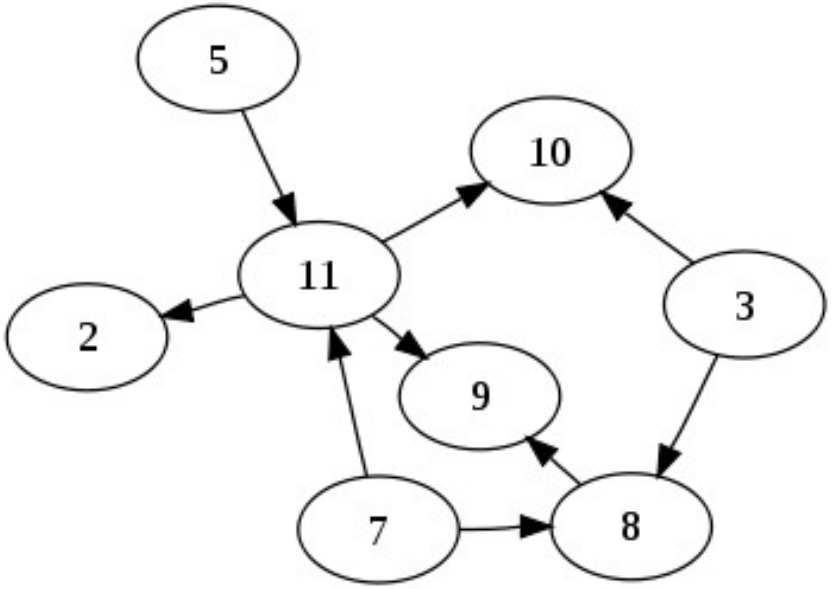
- Μέθοδος **In-degree**

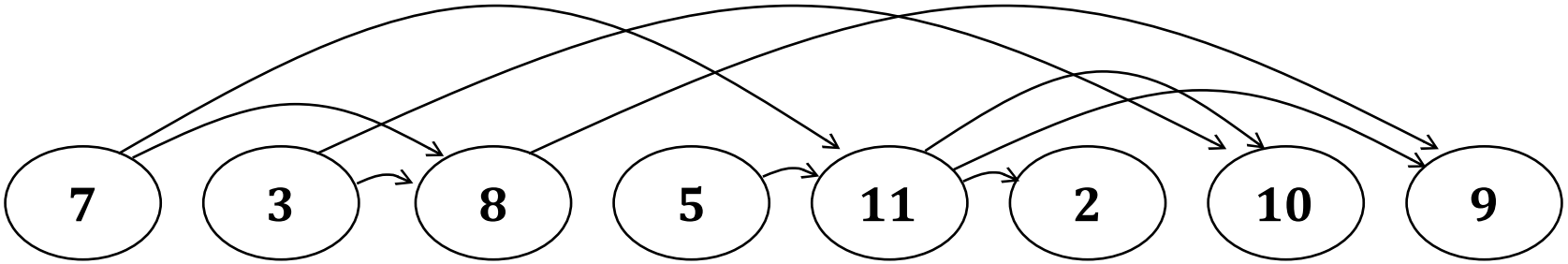



**7** **3** **8** **5** **11** **2** **10** **9**

# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

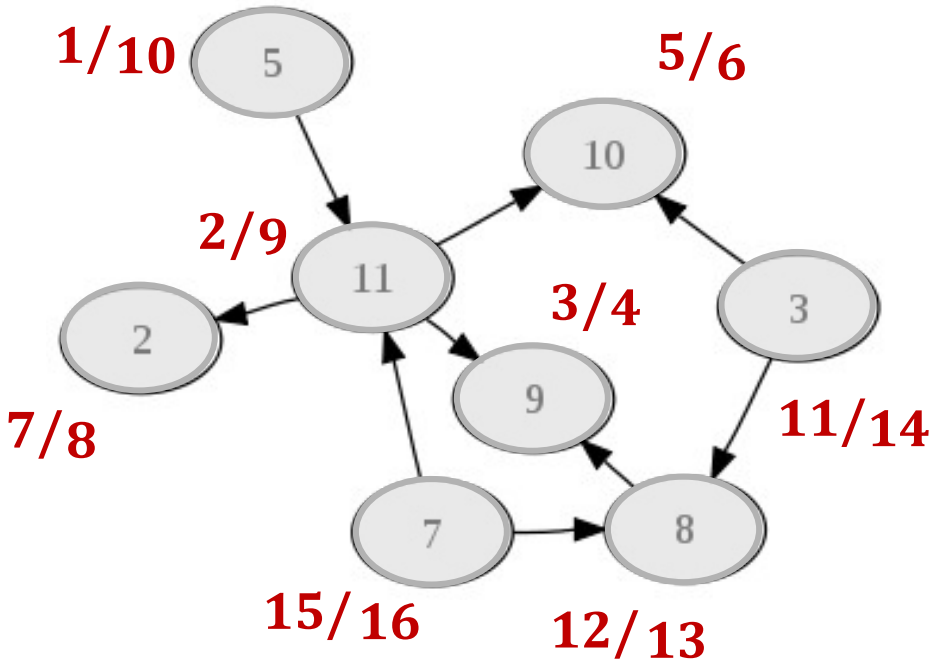
- Μέθοδος **In-degree**



# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

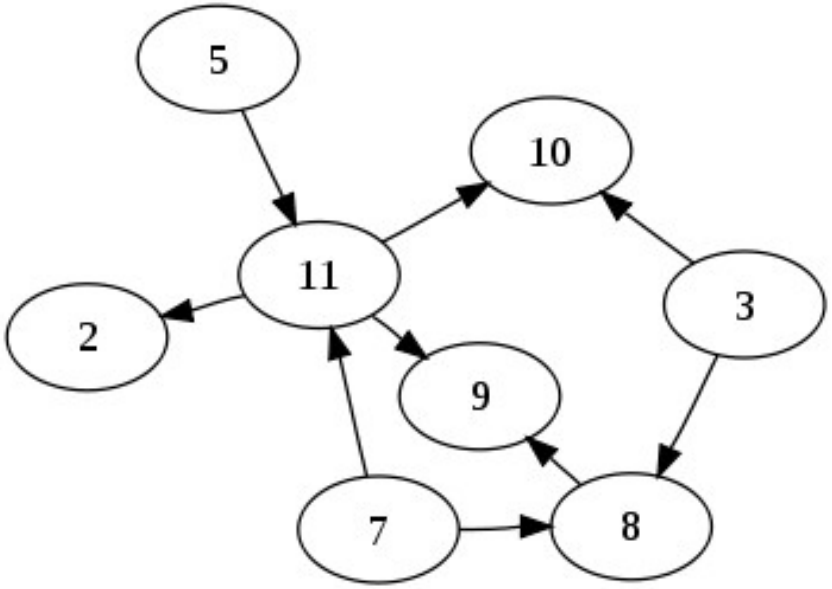
- Μέθοδος **DFS**

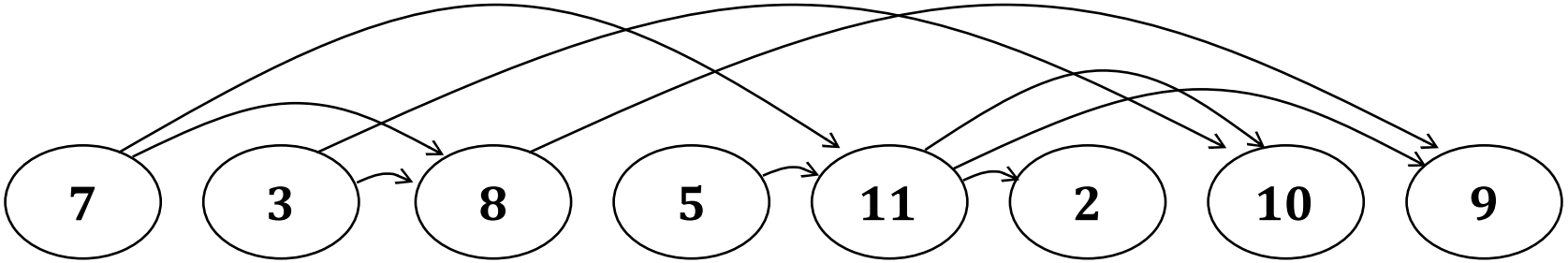



| 7 | 3 | 8 | 5 | 11 | 2 | 10 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15/16 | 11/14 | 12/13 | 1/10 | 2/9 | 7/8 | 5/6 | 3/4 |

# Εφαρμογές DFS: Τοπολογική Ταξινόμηση

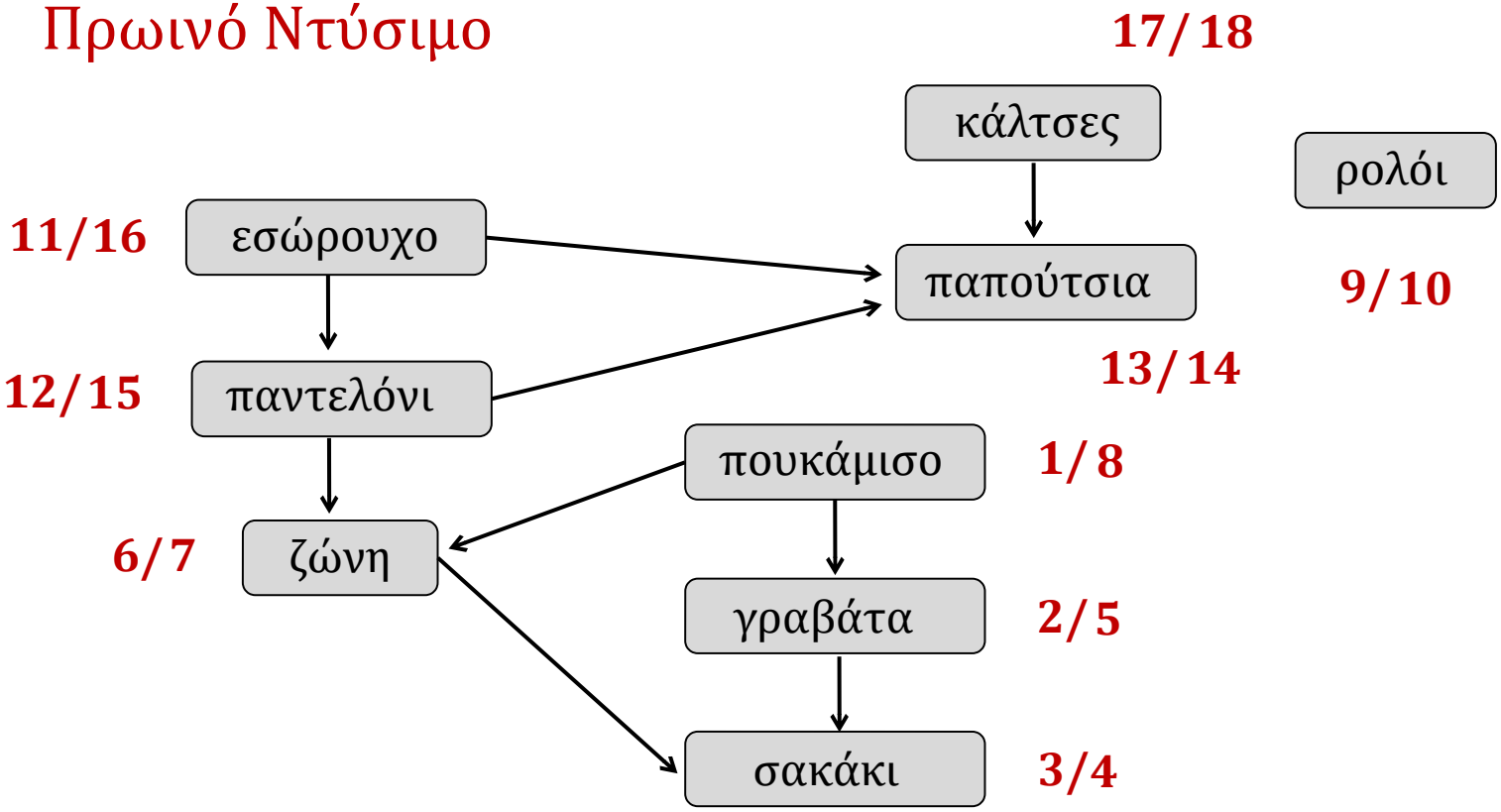
- Μέθοδος **DFS**



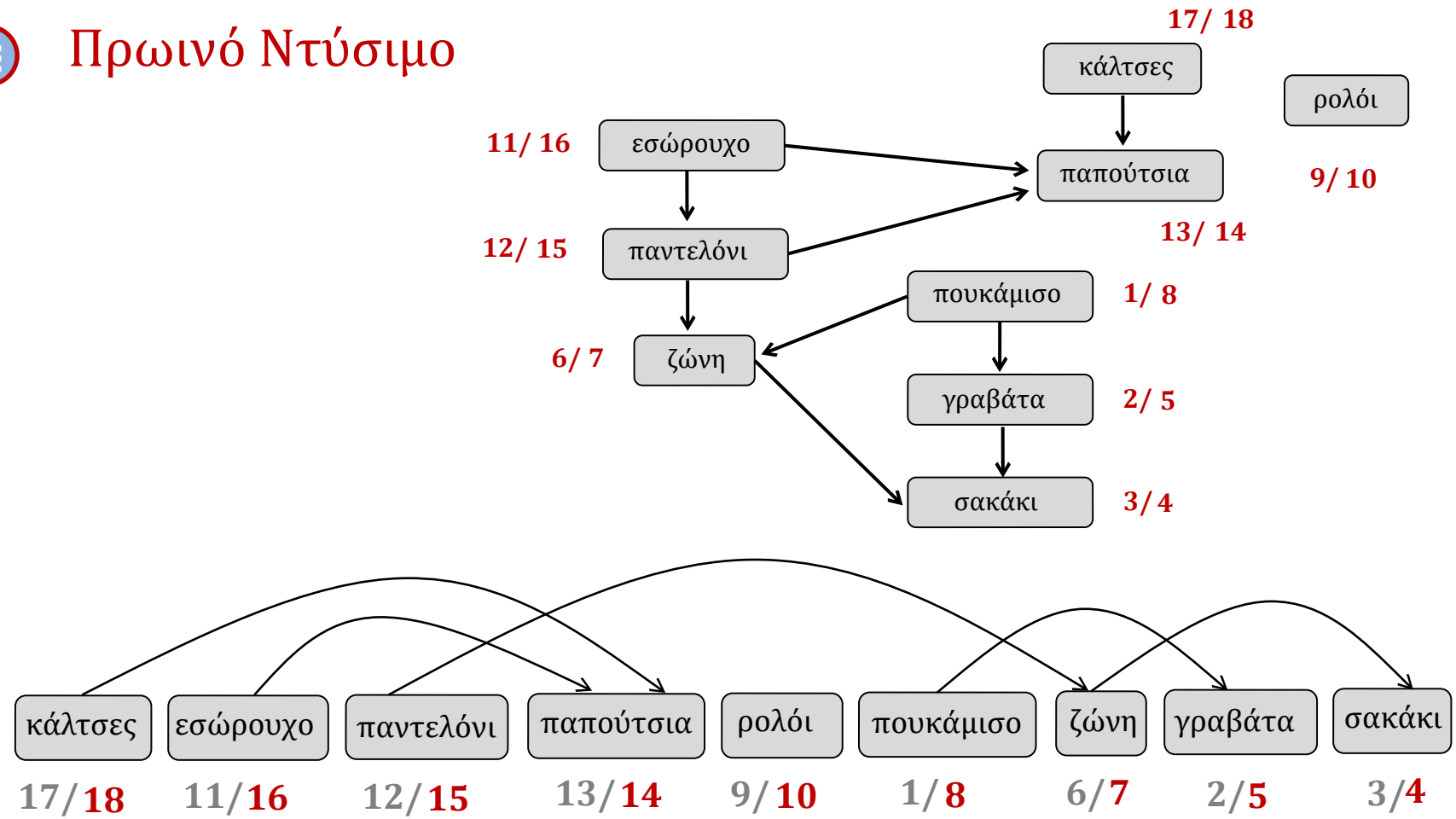
# Εφαρμογές Τοπολογικής Ταξινόμησης: scheduling

## Πρωινό Ντύσιμο



# Εφαρμογές TS

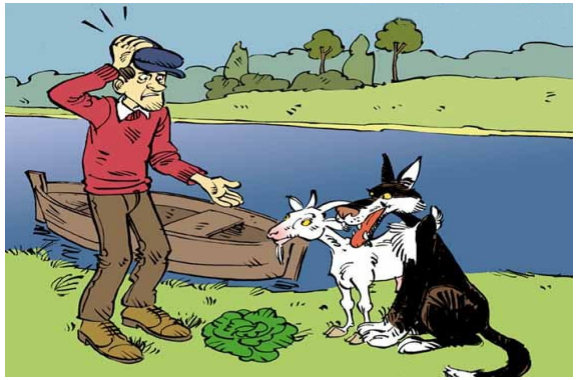
## Πρωινό Ντύσιμο



# Και λίγο παιχνίδι!

## Το Πρόβλημα του Βαρκάρη

Ένας βαρκάρης θέλει να περάσει στην απέναντι όχθη ενός ποταμού έναν **Λύκο**, ένα **Πρόβατο** και ένα **Λάχανο** ή **Χορτάρι** !



Πως είναι δυνατόν ο βοσκός να τα περάσει απέναντι, έτσι ώστε να μην φάει το πρόβατο το χορτάρι, ή ο λύκος το πρόβατο ;

# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη

- **Ο Λύκος, το Πρόβατο και το Χορτάρι**

# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη: μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Επίλυση με γράφο (διάγραμμα) καταστάσεων**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | \| |
| 2 | ΠΧ-Β | \| Λ |
| 3 | ΛΧ-Β | \| Π |
| 4 | ΛΠ-Β | \| Χ |
| 5 | Π-Β | \| ΛΧ |
| 6 | ΛΧ | \| Β-Π |
| 7 | Χ | \| Β-ΛΠ |
| 8 | Π | \| Β-ΛΧ |
| 9 | Λ | \| Β-ΠΧ |
| 10 | | \| Β-ΛΠΧ |

Χ Π Λ - Β |

Αρχική Κατάσταση

| Β – Λ Π Χ

Τελική Κατάσταση

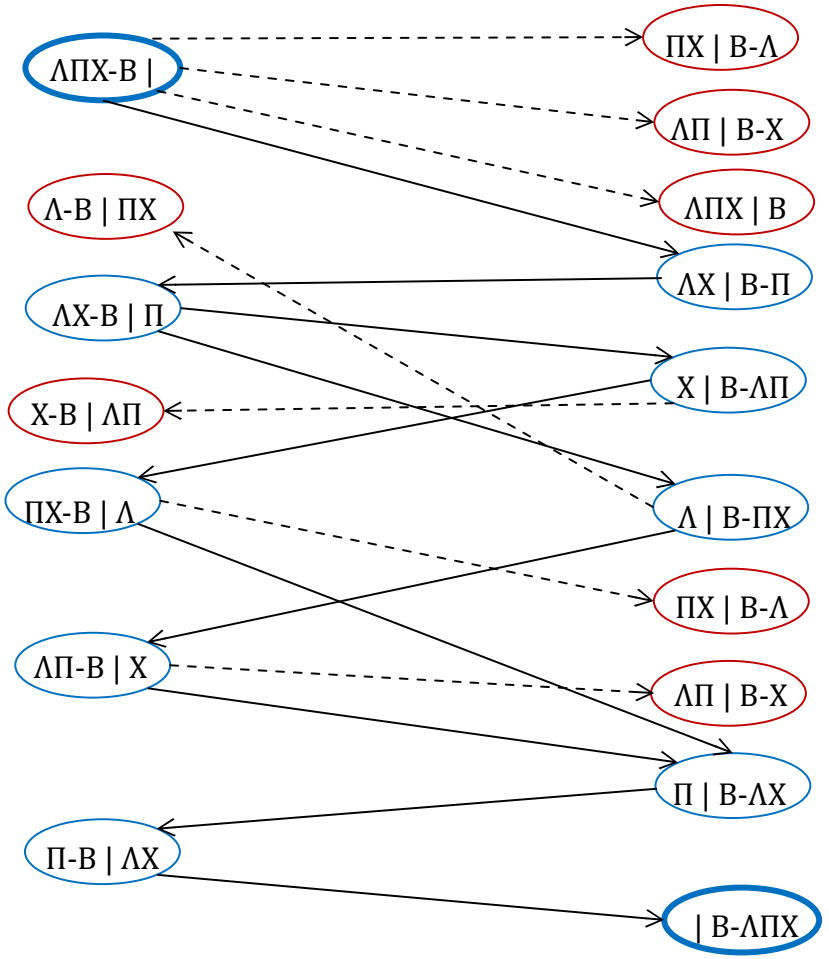
**ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ**

# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη: μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | |
| 2 | ΠΧ-Β | Λ |
| 3 | ΛΧ-Β | Π |
| 4 | ΛΠ-Β | Χ |
| 5 | Π-Β | ΛΧ |
| 6 | ΛΧ | Β-Π |
| 7 | Χ | Β-ΛΠ |
| 8 | Π | Β-ΛΧ |
| 9 | Λ | Β-ΠΧ |
| 10 | | Β-ΛΠΧ |

**Επιτρεπτες Καταστασεις**

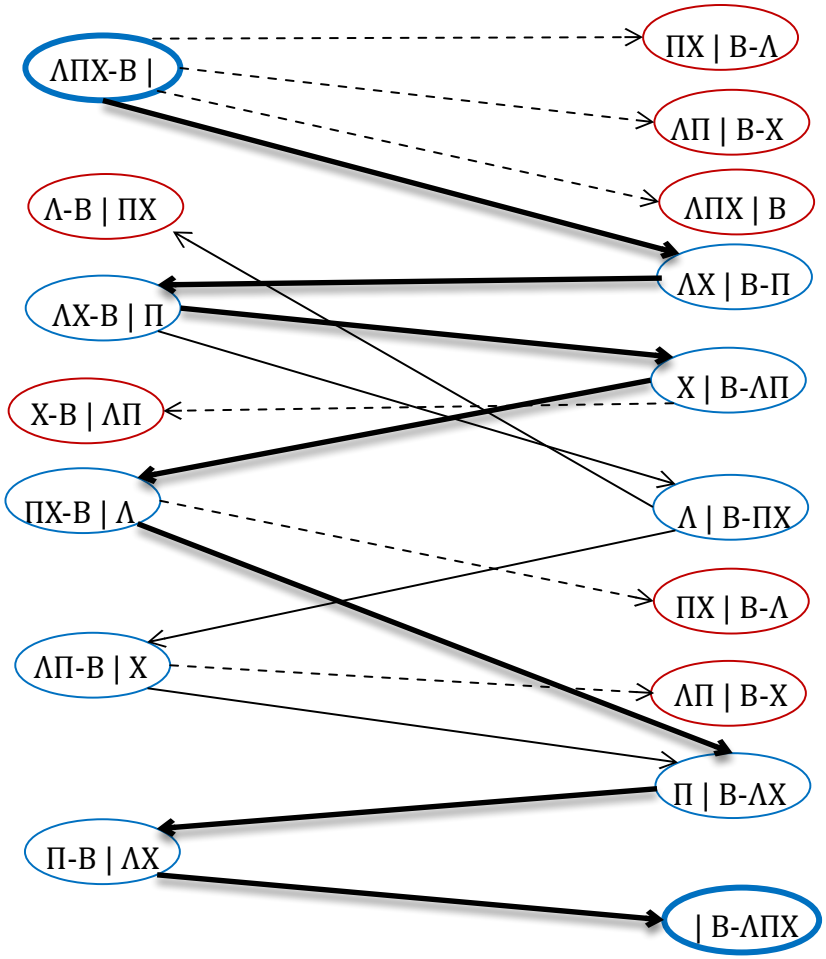


# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | | |
| 2 | ΠΧ-Β | Λ | |
| 3 | ΛΧ-Β | Π | |
| 4 | ΛΠ-Β | Χ | |
| 5 | Π-Β | ΛΧ | |
| 6 | ΛΧ | Β-Π | |
| 7 | Χ | Β-ΛΠ | |
| 8 | Π | Β-ΛΧ | |
| 9 | Λ | Β-ΠΧ | |
| 10 | | Β-ΛΠΧ | |

**Επιτρεπτες Καταστασεις**

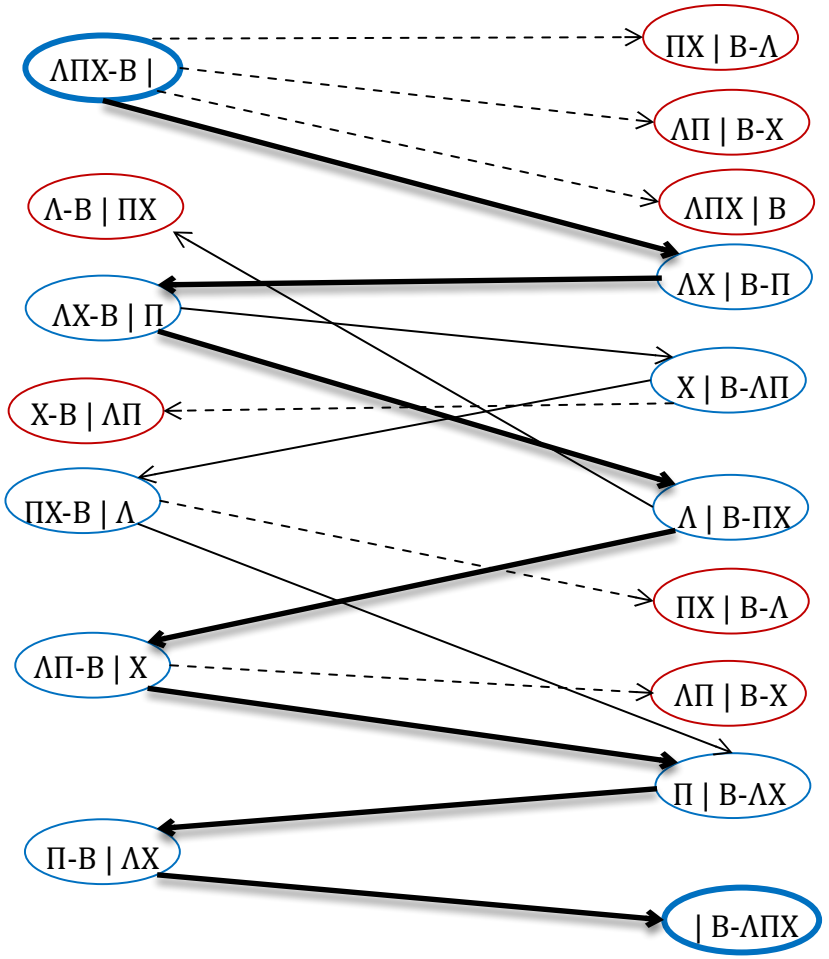


# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | | |
| 2 | ΠΧ-Β | \| | Λ |
| 3 | ΛΧ-Β | \| | Π |
| 4 | ΛΠ-Β | \| | Χ |
| 5 | Π-Β | \| | ΛΧ |
| 6 | ΛΧ | \| | Β-Π |
| 7 | Χ | \| | Β-ΛΠ |
| 8 | Π | \| | Β-ΛΧ |
| 9 | Λ | \| | Β-ΠΧ |
| 10 | | \| | Β-ΛΠΧ |

**Επιτρεπτες Καταστασεις**

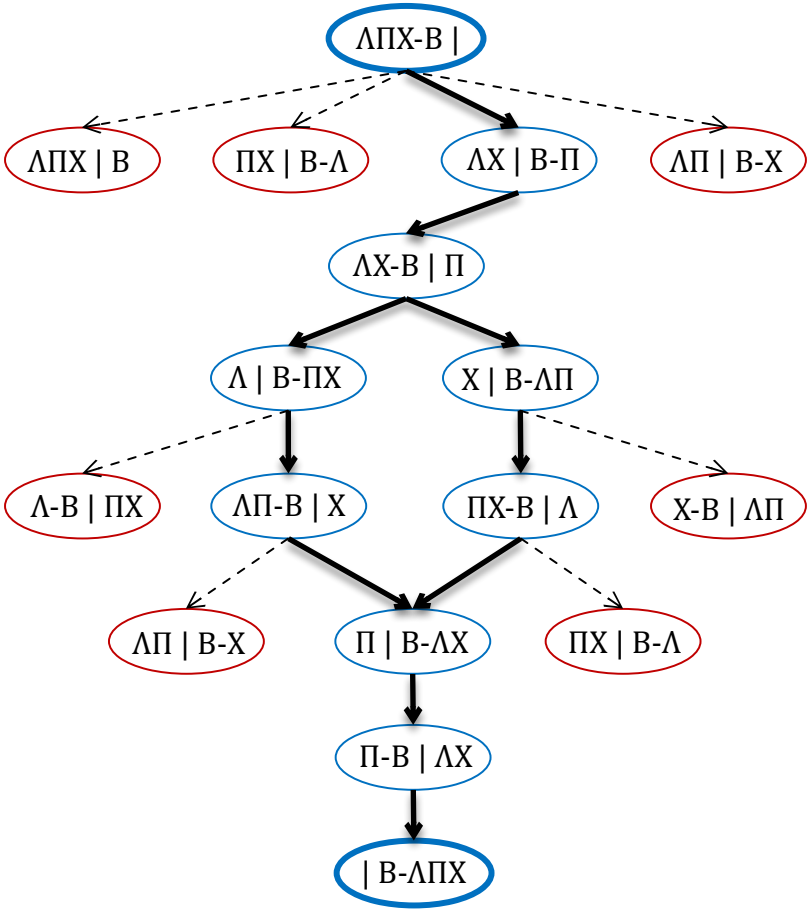


# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

- **Πρόβλημα Βαρκάρη = Εύρεση διαδρομής σε γράφο**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | |
| 2 | ΠΧ-Β | Λ |
| 3 | ΛΧ-Β | Π |
| 4 | ΛΠ-Β | Χ |
| 5 | Π-Β | ΛΧ |
| 6 | ΛΧ | Β-Π |
| 7 | Χ | Β-ΛΠ |
| 8 | Π | Β-ΛΧ |
| 9 | Λ | Β-ΠΧ |
| 10 | | Β-ΛΠΧ |

**ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ**

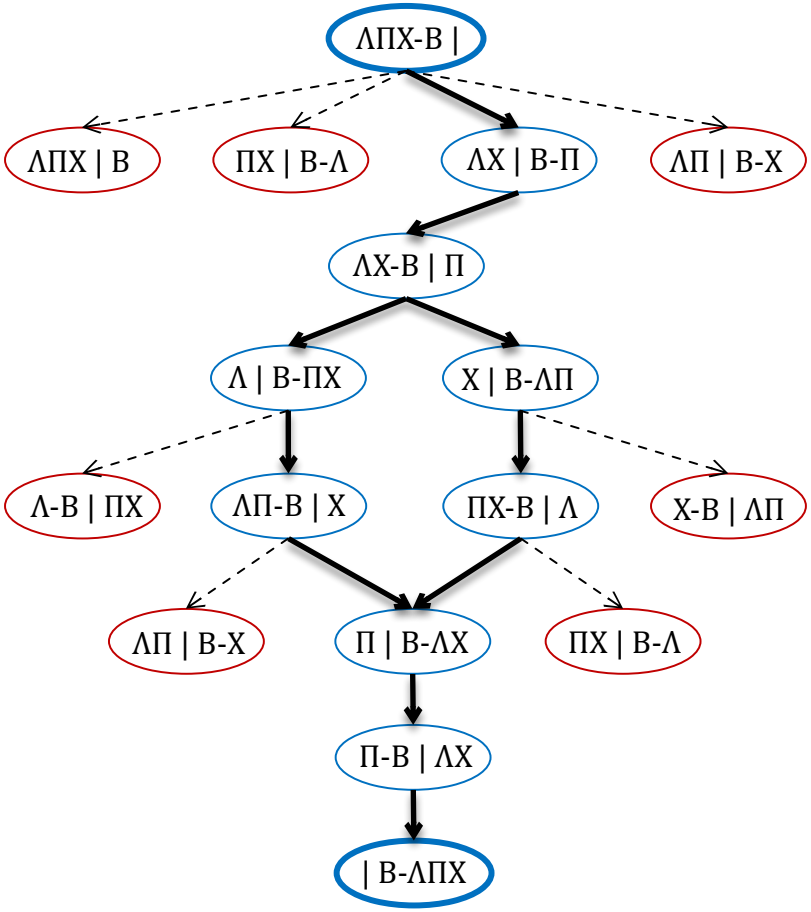


# Το Πρόβλημα του Βαρκάρη : μετατροπή σε εξερεύνηση

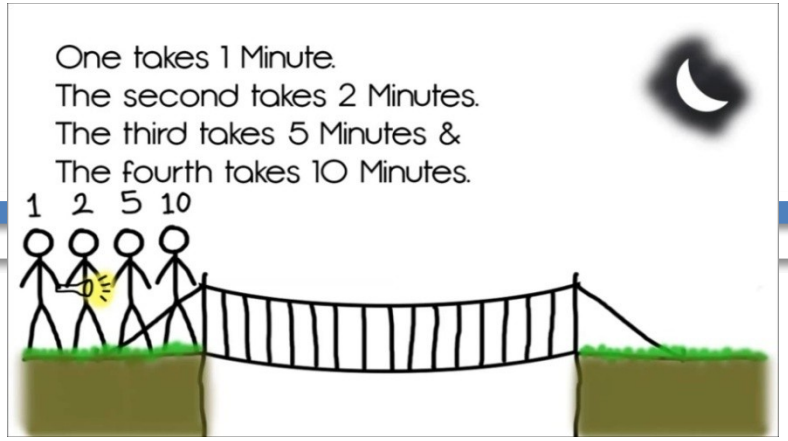
- **Μπορούμε να εφαρμόσουμε και σε άλλα προβλήματα;**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | ΛΠΧ-Β | |
| 2 | ΠΧ-Β | Λ |
| 3 | ΛΧ-Β | Π |
| 4 | ΛΠ-Β | Χ |
| 5 | Π-Β | ΛΧ |
| 6 | ΛΧ | Β-Π |
| 7 | Χ | Β-ΛΠ |
| 8 | Π | Β-ΛΧ |
| 9 | Λ | Β-ΠΧ |
| 10 | | Β-ΛΠΧ |

**ΕΠΙΤΡΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ**



# Το Πρόβλημα της Γέφυρας




4 φίλοι (οι Α, Β, Γ, και Δ)

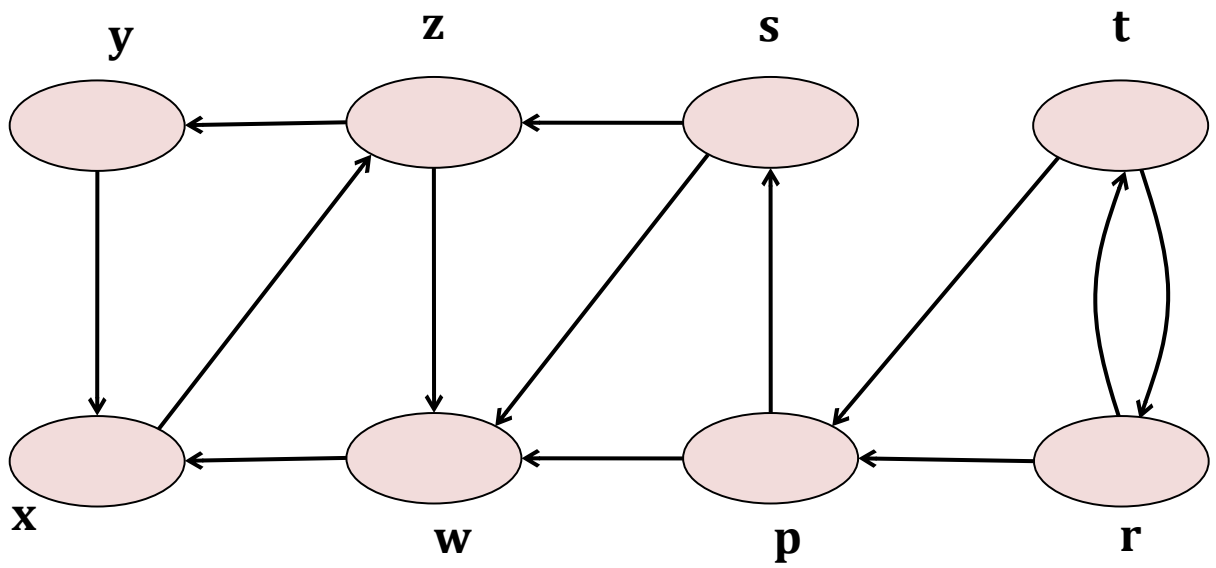
- θέλουν να διασχίσουν μια γέφυρα
- Η γέφυρα αντέχει μόνο 2 άτομα κάθε φορά
- Είναι νύχτα, και έχουν μόνο έναν φακό
- Ο καθένας χρειάζεται διαφορετικό χρόνο να περάσει τη γέφυρα: 1, 2, 5, και 10 λεπτά είναι ο χρόνος για τον Α, Β, Γ, και Δ αντίστοιχα.
- *Πόσο γρήγορα μπορούν να περάσουν τη γέφυρα;*
  - Ιδέα: φτιάξτε τον γράφο καταστάσεων!

# Επιπλέον εφαρμογές DFS - BFS

- DFS: Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)
- DFS: Σημεία άρθρωσης (articulation points) και γέφυρες (bridges)
- BFS: Χωροθέτηση υπηρεσιών
- DFS & BFS: Λαβύρινθοι

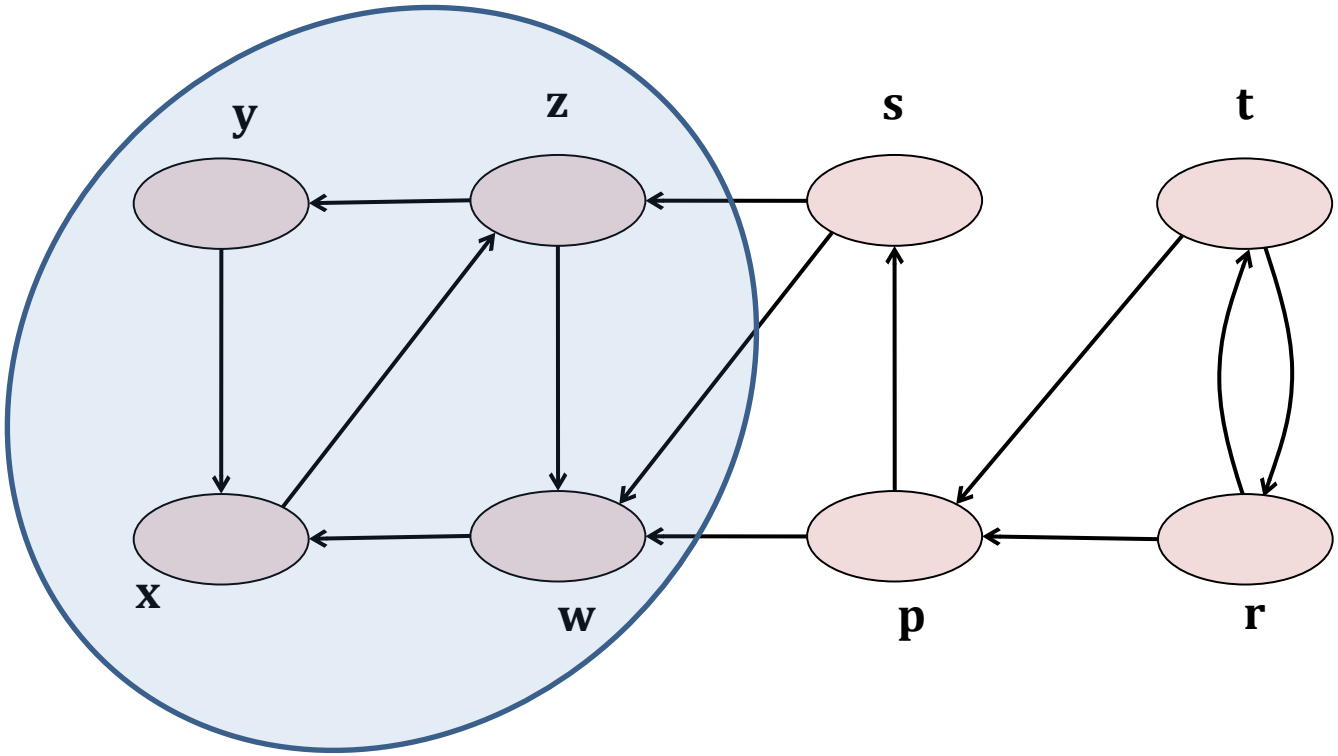
# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

Ισχυρή συνεκτικότητα: υπάρχει διαδρομή από κάθε κόμβο σε κάθε άλλο κόμβο



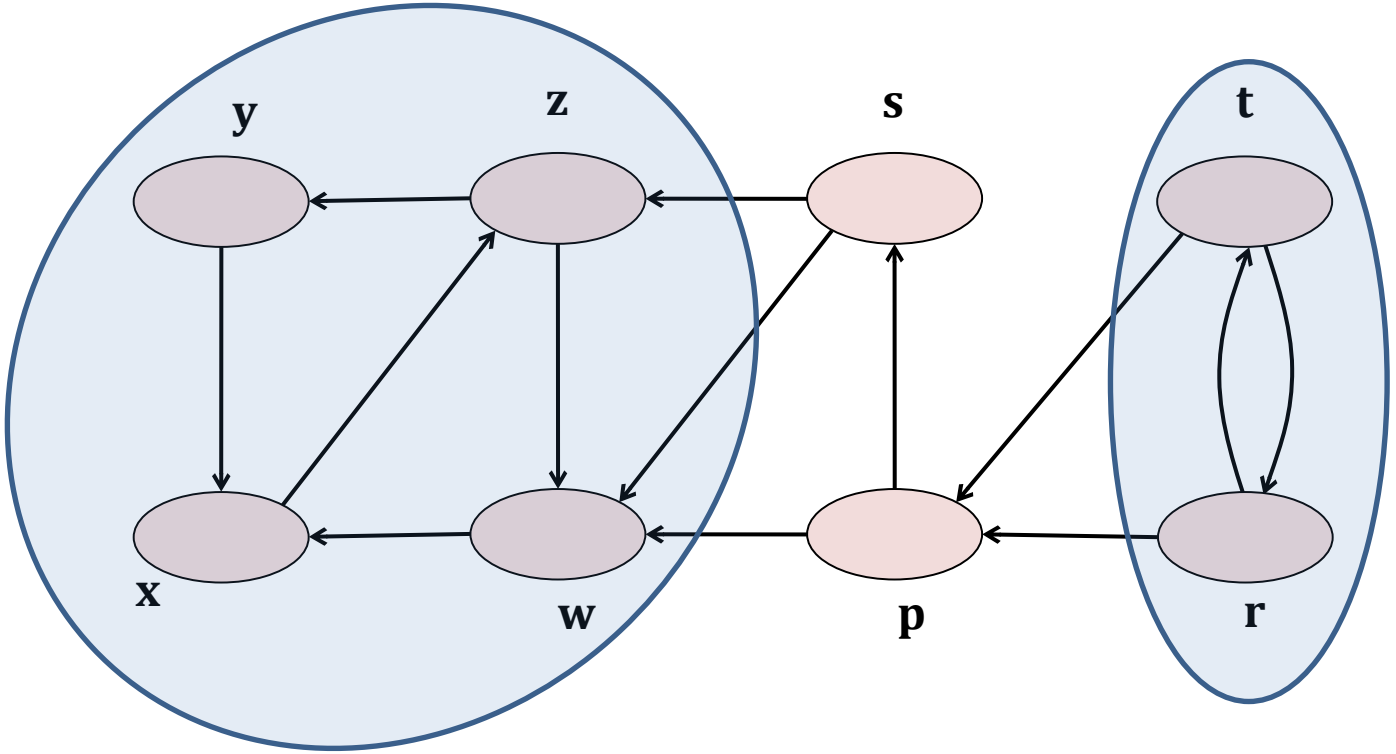

Πώς ελέγχουμε αν ο γράφος μας είναι ισχυρά συνεκτικός;

# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)




Μία συνεκτική συνιστώσα

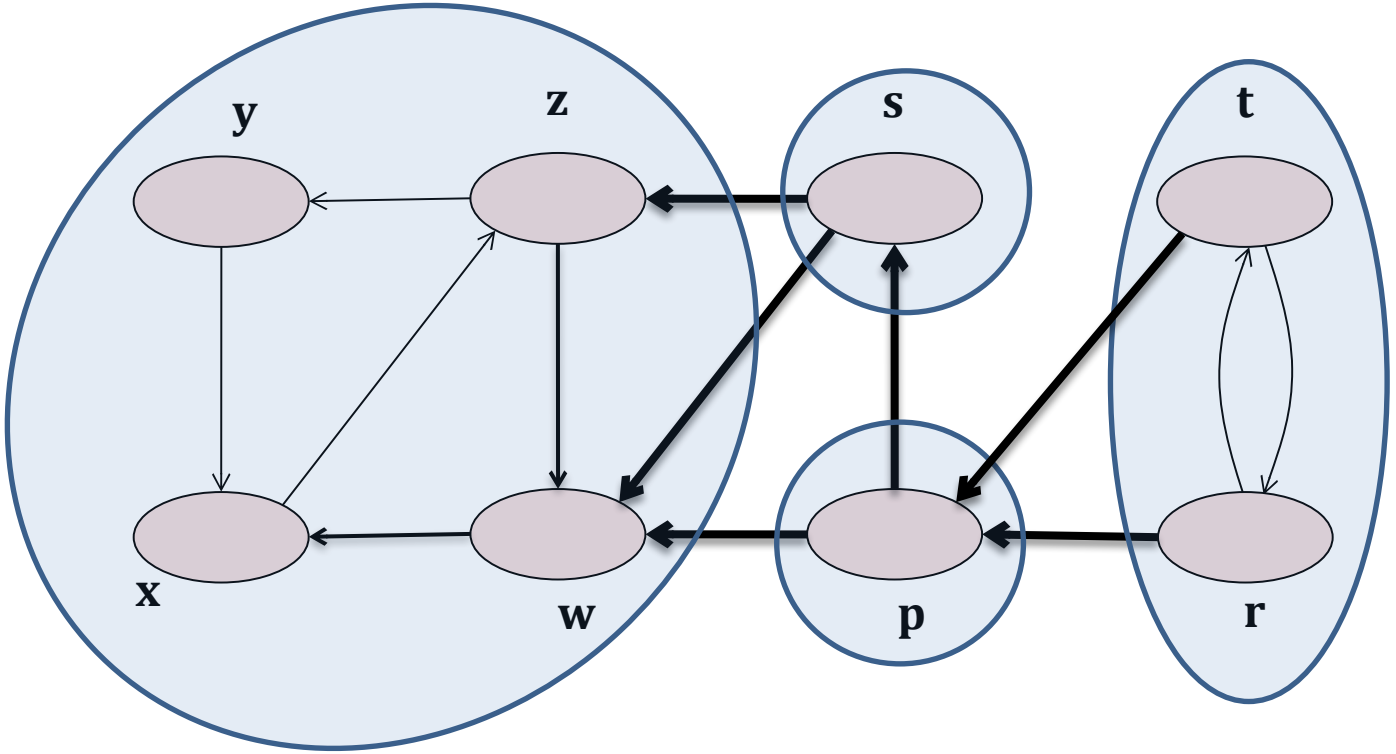
# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)




... κι άλλη μία!

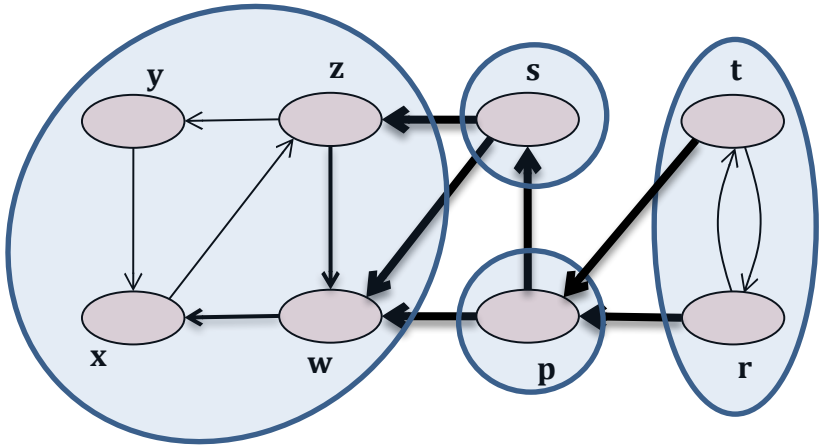
# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

DAG of connected components



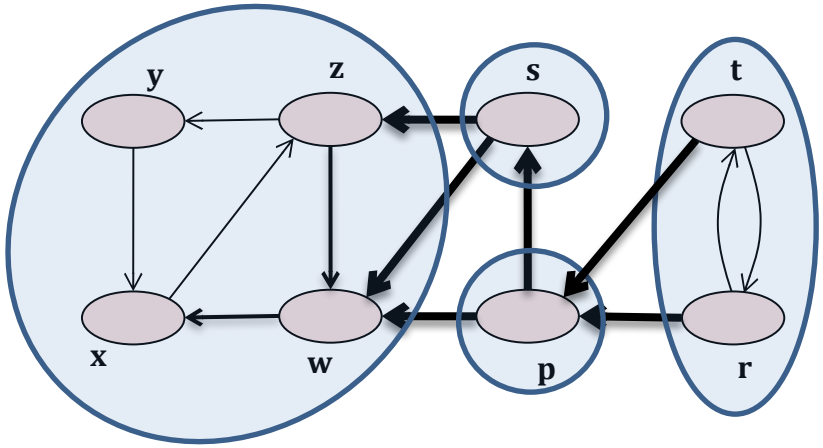

*Πώς θα τις βρούμε όλες;*

# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)




- Από πού πρέπει να ξεκινήσει η εξερεύνηση;
  - από συνιστώσα-προορισμό (sink)
- Πώς μπορούμε να βρούμε sink;
  - μπορούμε να βρούμε συνιστώσα-πηγή (source)... με DFS!
  - δουλεύουμε με αντεστραμμένο γράφο!!

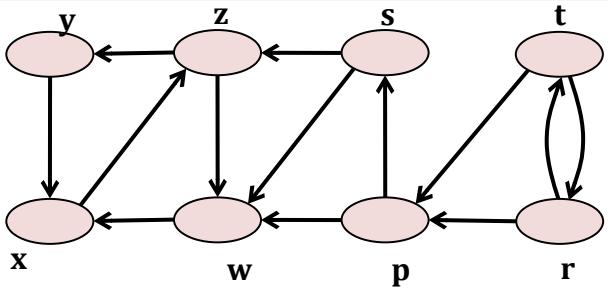
# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

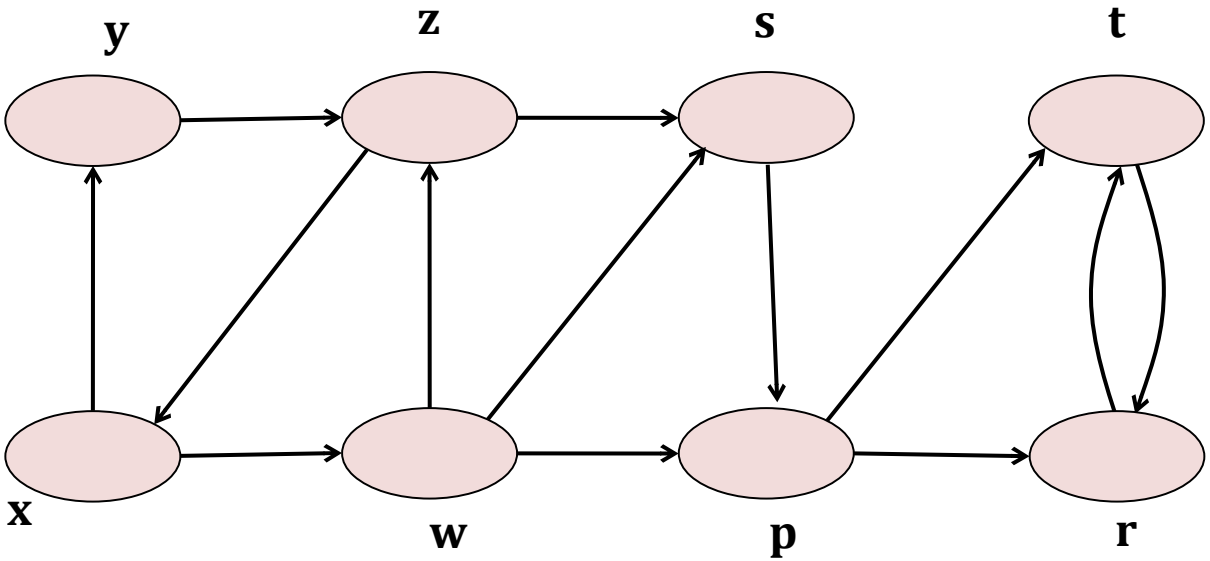



- Εκτέλεση DFS στον αντεστραμμένο γράφο $G^R$
- Ταξινόμηση κόμβων κατά φθίνουσα σειρά χρόνου αναχώρησης $t^R(v)$
- Εκτέλεση DFS στον G, επιλέγοντας κόμβους εκκίνησης με βάση την παραπάνω ταξινόμηση

# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

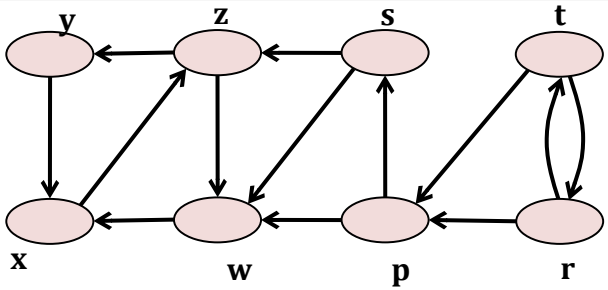
## Παράδειγμα εκτέλεσης

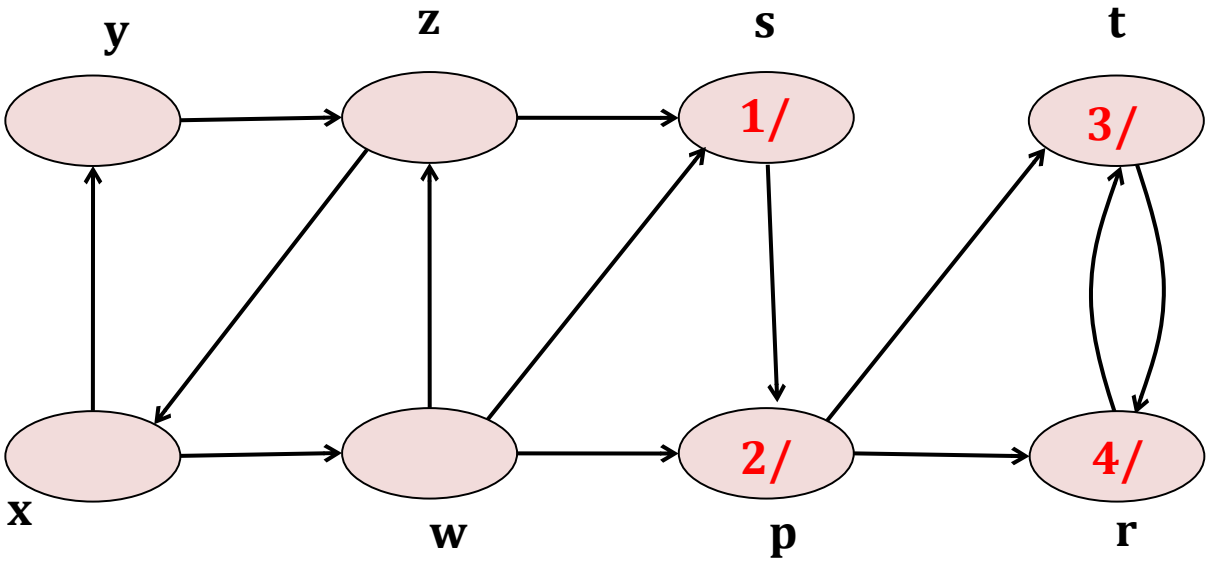


# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

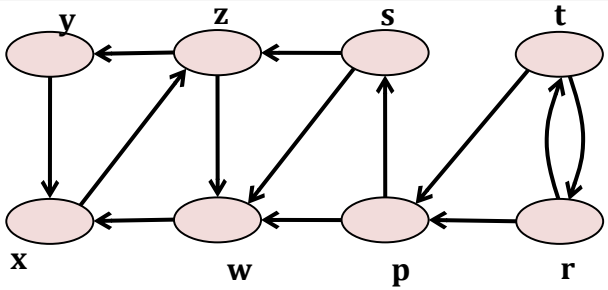
## Παράδειγμα εκτέλεσης

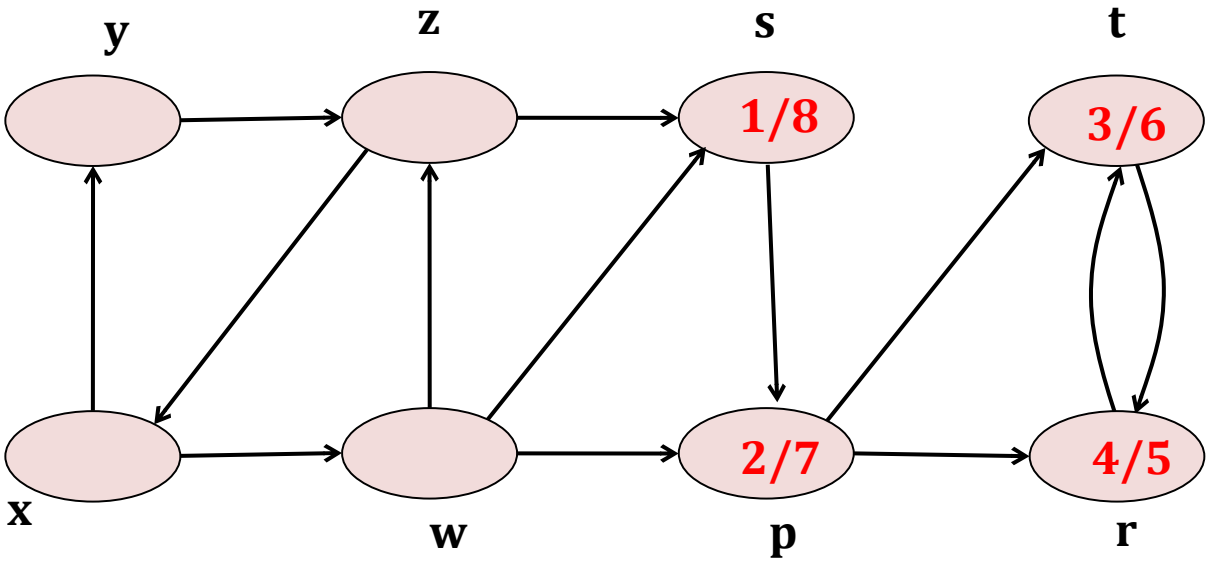


# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

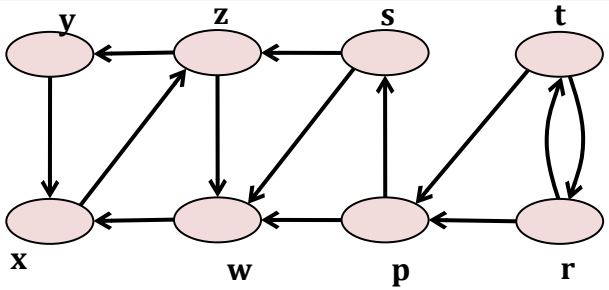
## Παράδειγμα εκτέλεσης

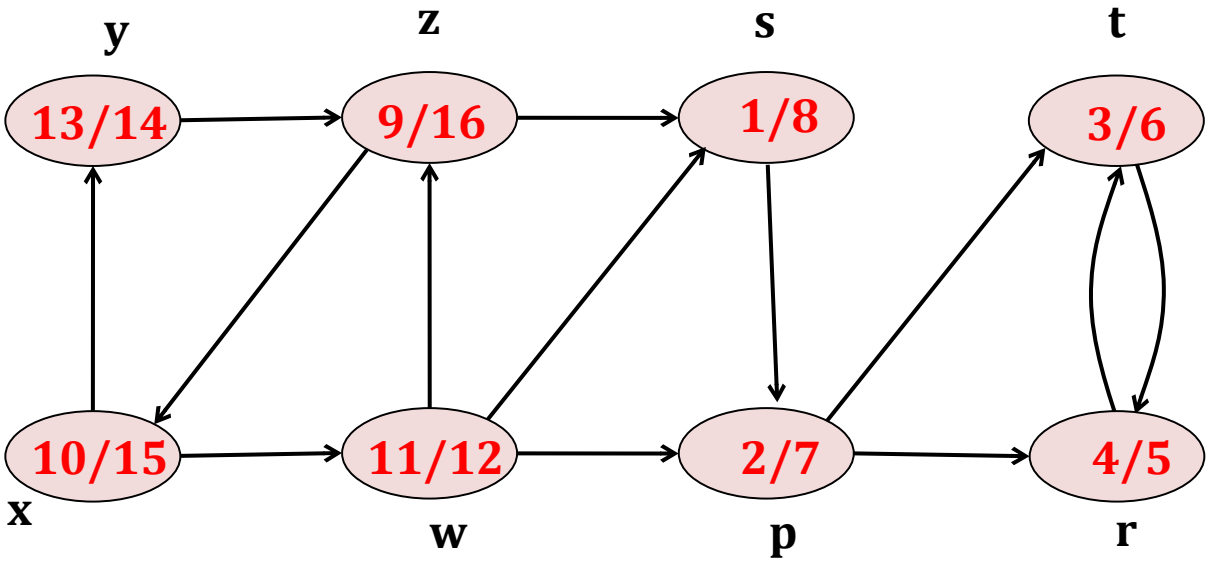


# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

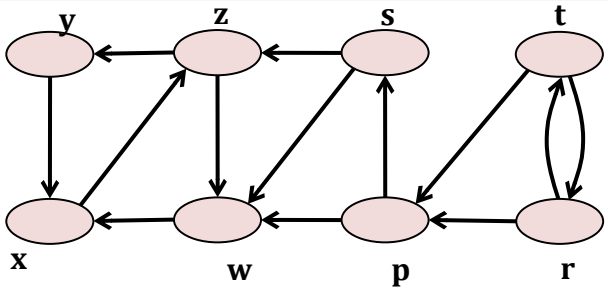
## Παράδειγμα εκτέλεσης

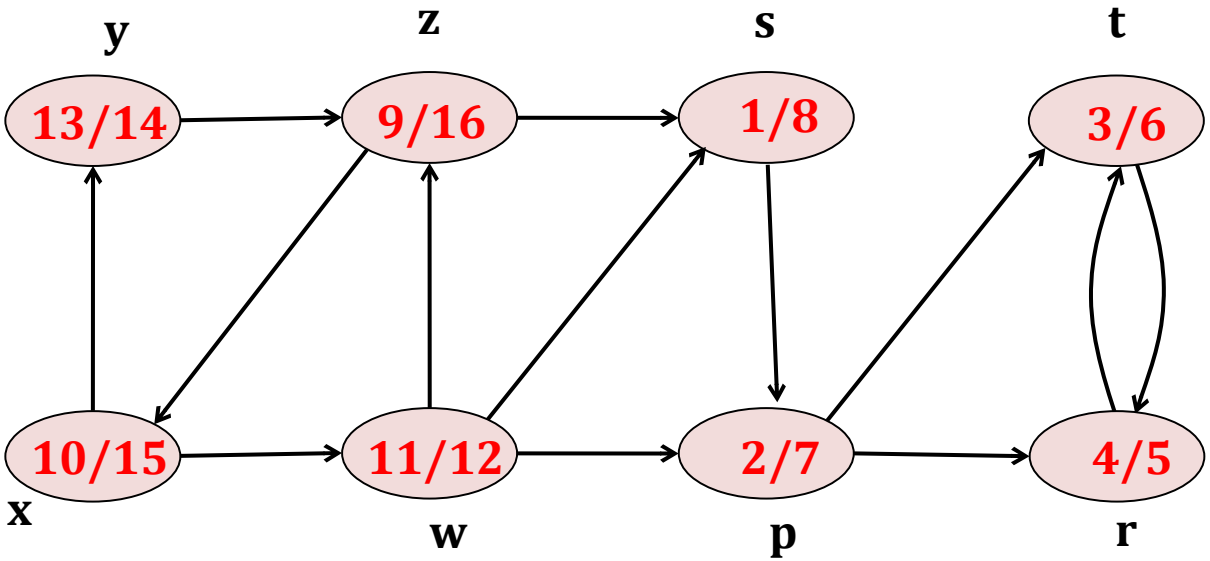


# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

## Παράδειγμα εκτέλεσης

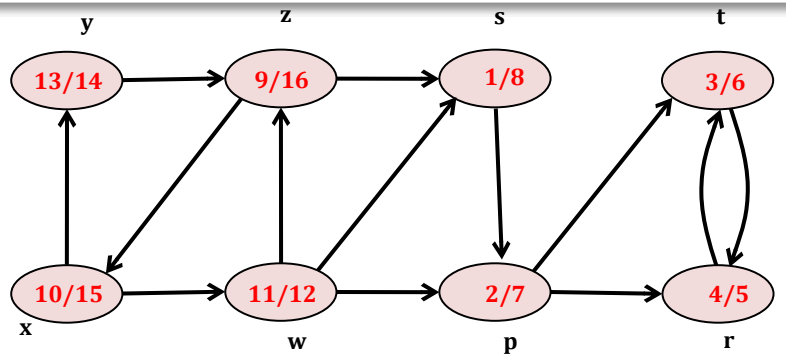


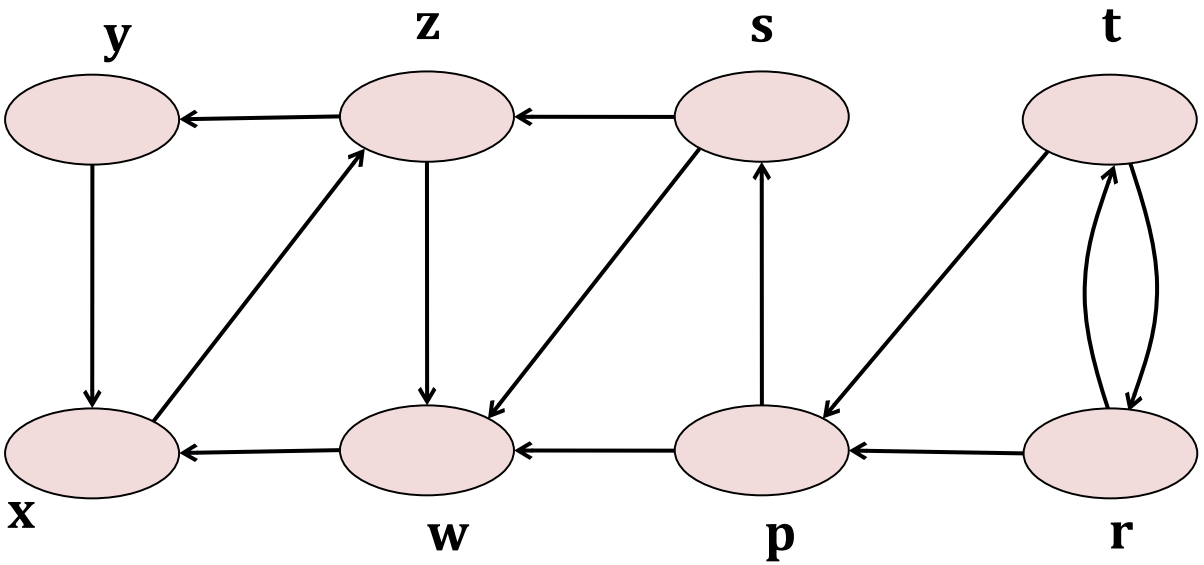




**Διάταξη κατά φθίνον $t^R$ : z x y w s p t r**

# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

## Παράδειγμα εκτέλεσης

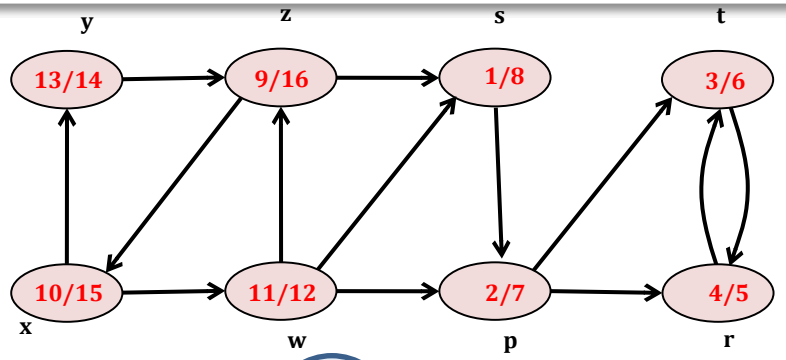


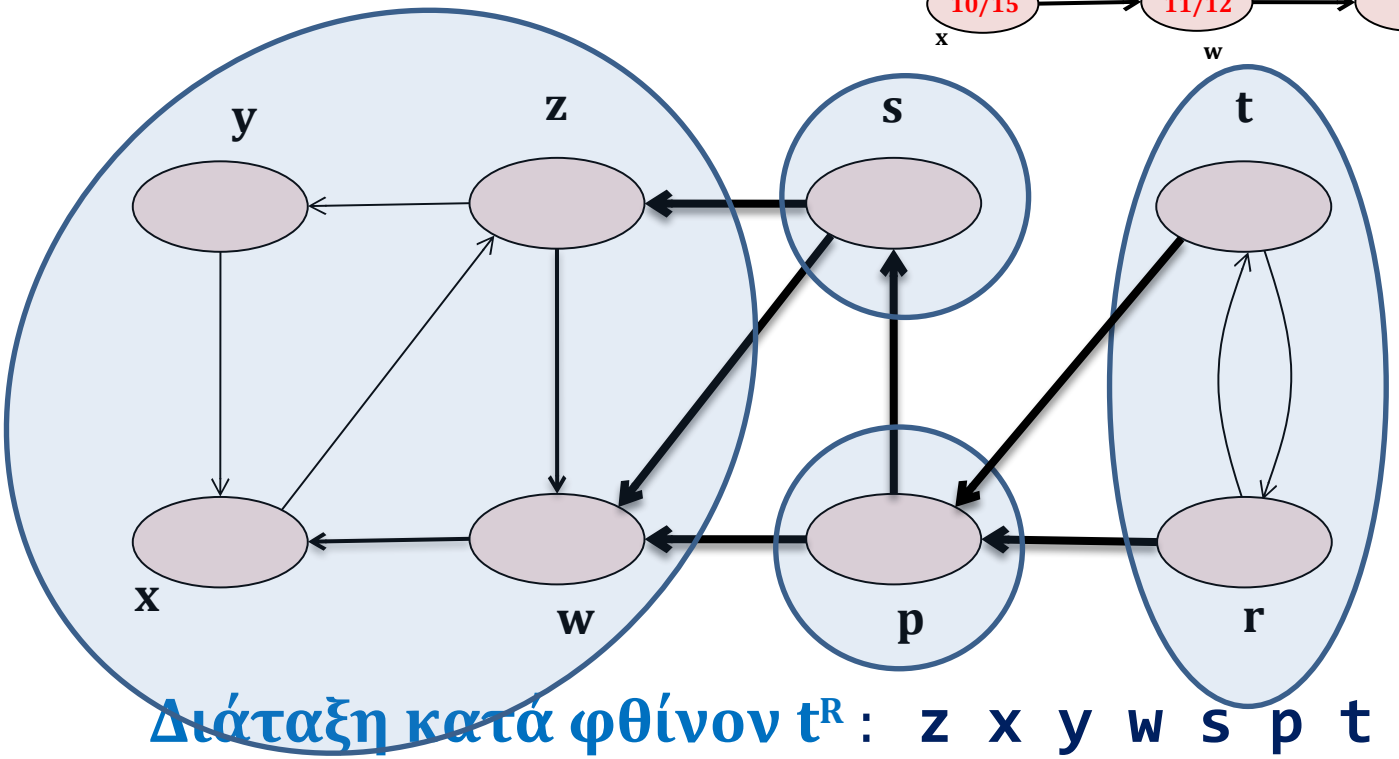




**Διάταξη κατά φθίνον $t^R$ : z x y w s p t r**

# Ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες (SCCs)

## Παράδειγμα εκτέλεσης



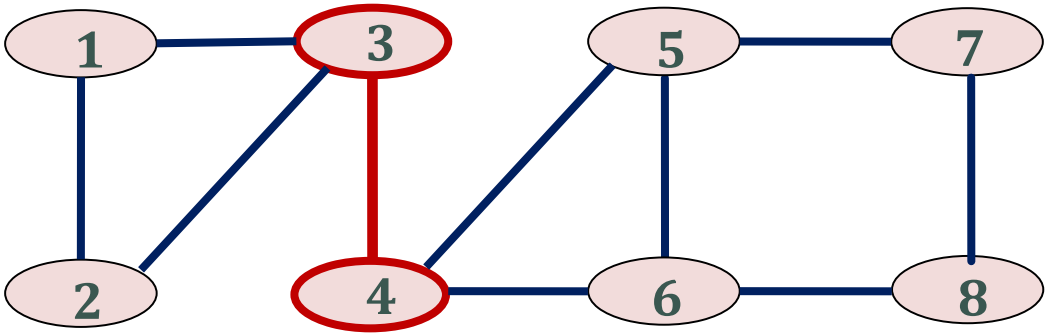




**Διάταξη κατά φθίνον $t^R$ : z x y w s p t r**

# Εφαρμογές DFS

Σημεία άρθρωσης (articulation points): κορυφές που η αφαίρεσή τους αποσυνδέει τον γράφο

Γέφυρες (bridges): ακμές που η αφαίρεσή τους αποσυνδέει τον γράφο

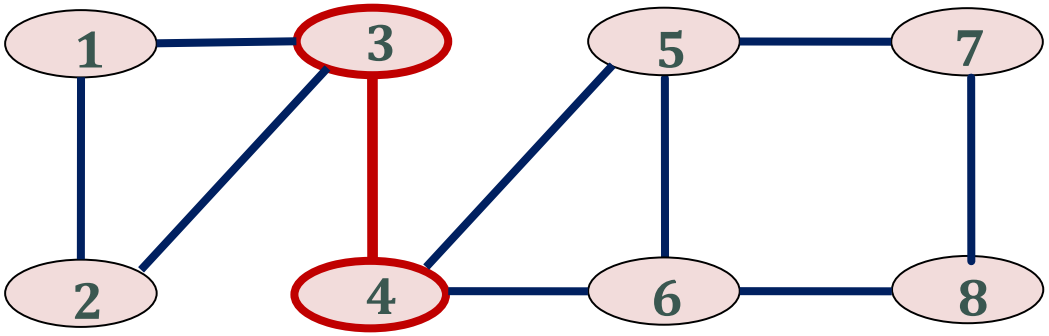



Ορίζεται σε **μη κατευθυνόμενους** γράφους

# Εφαρμογές DFS

Σημεία άρθρωσης (articulation points): κορυφές που η αφαίρεσή τους αποσυνδέει τον γράφο

Γέφυρες (bridges): ακμές που η αφαίρεσή τους αποσυνδέει τον γράφο



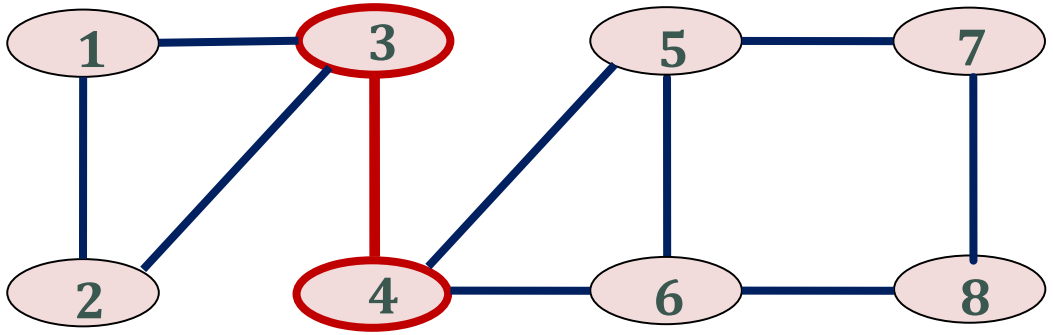

1 εκτέλεση DFS αρκεί !!

# Εφαρμογές DFS

## Κριτήριο σημείων άρθρωσης με βάση δένδρο DFS

Σημείο άρθρωσης είναι:

- Η ρίζα αν έχει τουλάχιστον 2 παιδιά

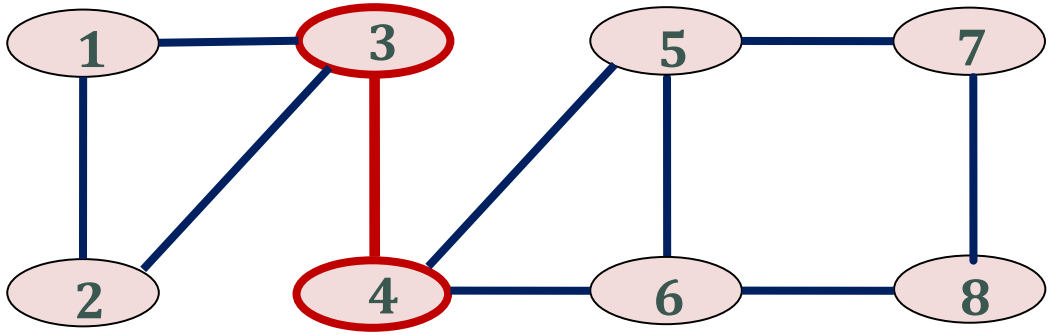


# Εφαρμογές DFS

## Κριτήριο σημείων άρθρωσης με βάση δένδρο DFS

Σημείο άρθρωσης είναι:

- Η ρίζα αν έχει τουλάχιστον 2 παιδιά
- Κάθε εσωτερικός κόμβος *v* που έχει τουλάχιστον ένα παιδί με υποδένδρο που δεν έχει back edges σε κόμβους που προηγούνται του *v*



# Εφαρμογές DFS

## Εύρεση όλων των σημείων άρθρωσης

- Ελέγχουμε την ρίζα ξεχωριστά (π.χ. έξω από την DFS-Help).
- Για κάθε κόμβο u ορίζουμε low[u] τον ελάχιστο αρχικό χρόνο A[w] που "είδαμε" εντός της αναδρομικής κλήσης του u.

```
DFS-Help(u) // επιστρέφει low[u]
    status[u] ← VISITED
    A[u] ← time ← time+1
    min ← time
    for each vertex v ∈ adj(u) do
        if status[v] = UNVISITED
            low_v ← DFS-Help(v)
            if low_v < min then min ← low_v
            if low_v ≥ A[u] then print u
        else if A[v] < min then min ← A[v]
    return min
```

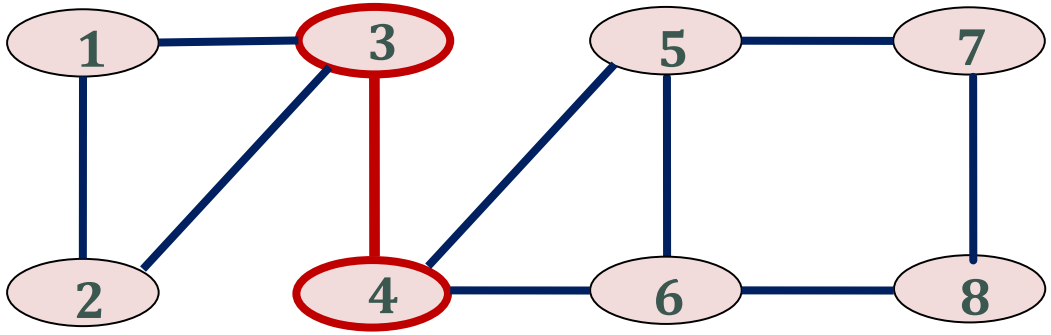
# Εφαρμογές DFS

## Κριτήριο γέφυρας με βάση δένδρο DFS

Γέφυρα είναι μια ακμή $(u,v)$ αν είναι δενδρική και:

- Το ένα άκρο της είναι «φύλλο» ή
- Τα δύο άκρα της $u,v$ είναι σημεία άρθρωσης **και**

  στο άκρο που βρέθηκε δεύτερο (έστω $v$) κανένας κόμβος του υποδένδρου του δεν έχει back edge προς το άκρο που βρέθηκε πρώτο ($u$)

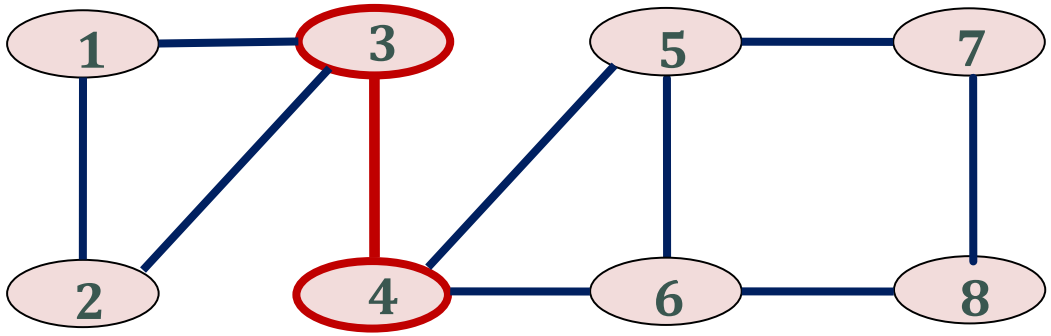


# Εφαρμογές DFS

## Ισοδύναμο κριτήριο γέφυρας με βάση δένδρο DFS

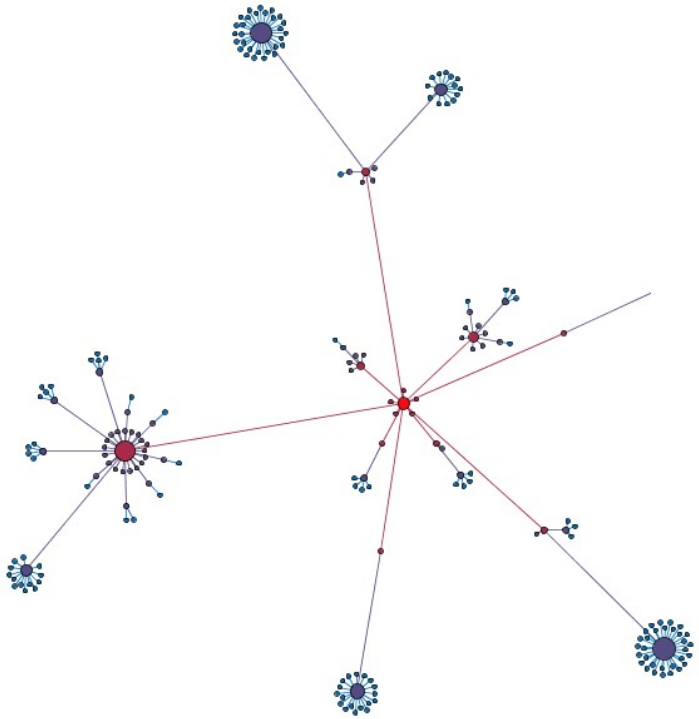
Γέφυρα είναι μια ακμή $(u,v)$ αν είναι δενδρική και:

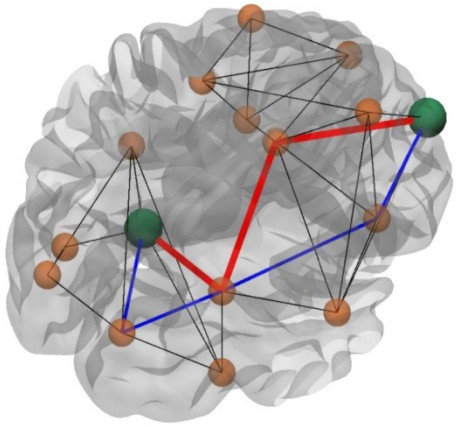
- Στο άκρο που βρέθηκε δεύτερο (έστω $v$) κανένας κόμβος του υποδένδρου του δεν έχει back edge προς το άκρο που βρέθηκε πρώτο ($u$) ούτε σε πρόγονο του $u$.



# Εφαρμογές BFS

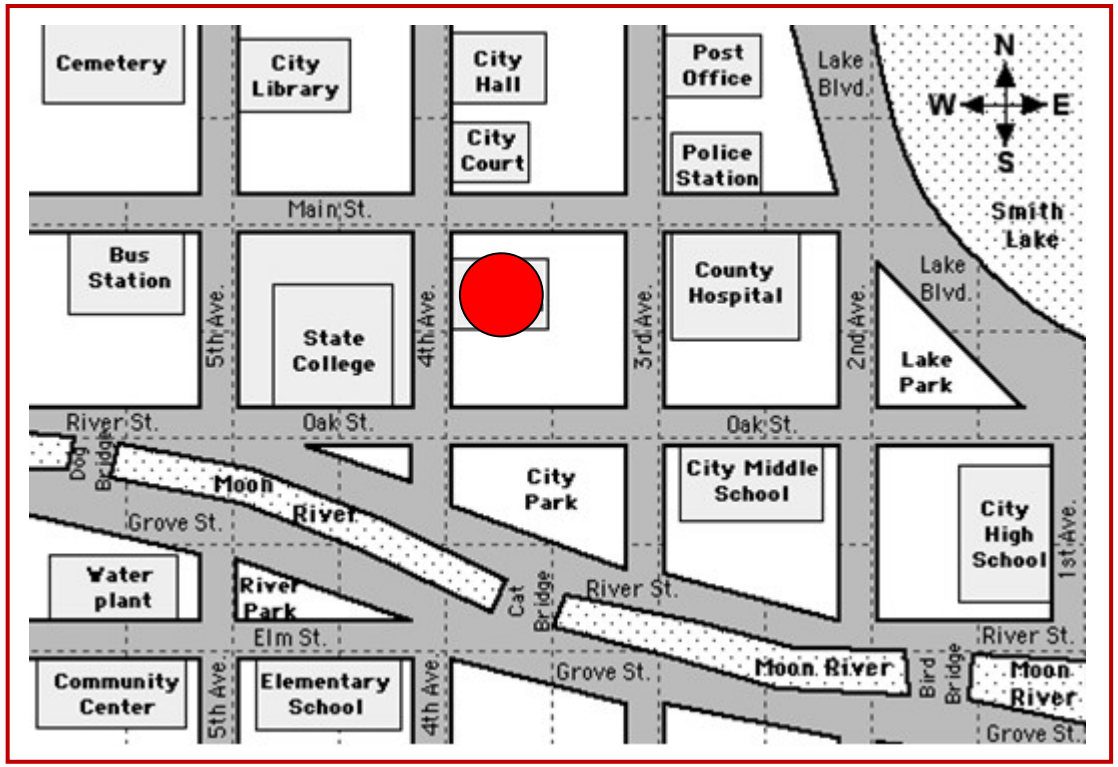
## Χωροθέτηση Υπηρεσιών και Λαβύρινθοι





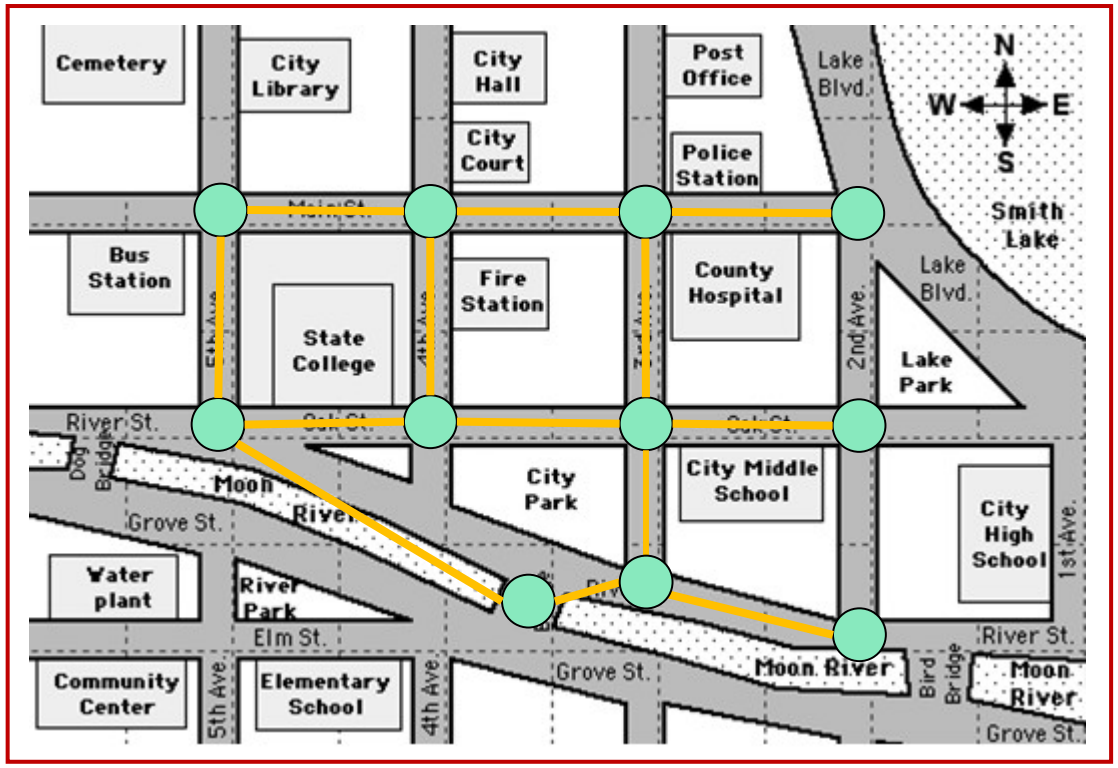
# Εφαρμογές BFS

## Χωροθέτηση Πυροσβεστικού Τμήματος




# Εφαρμογές BFS

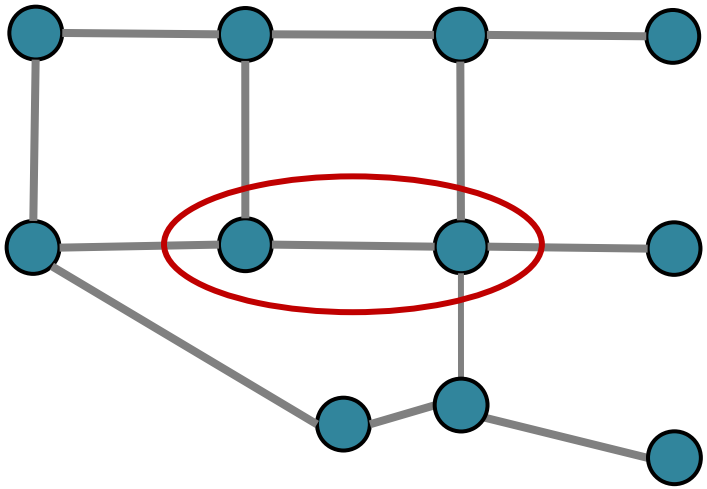
## Χωροθέτηση Πυροσβεστικού Τμήματος




# Εφαρμογές BFS

## Χωροθέτηση Πυροσβεστικού Τμήματος

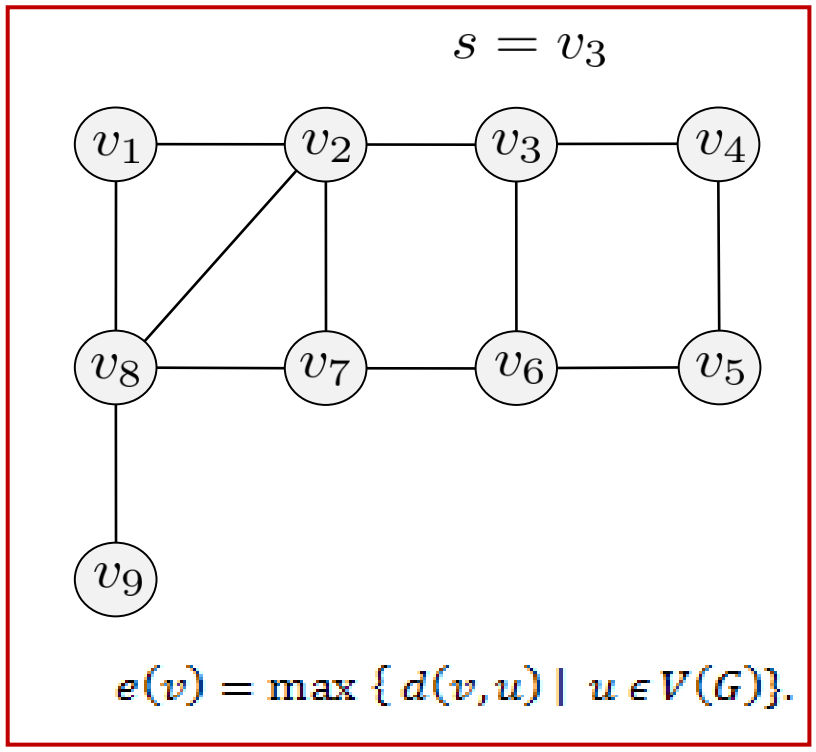
Ζητείται ελάχιστη εκκεντρότητα (eccentricity)



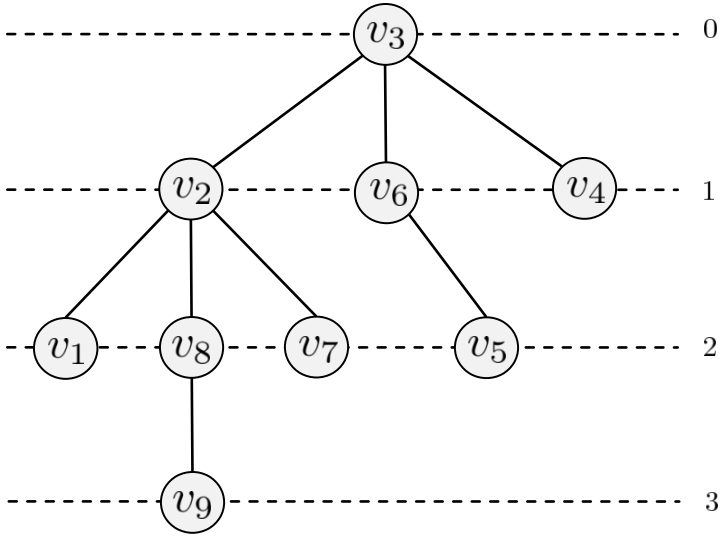
$$e(v) = \max \{ d(v,u) \mid u \in V(G) \}.$$

# Εφαρμογές BFS

## Χωροθέτηση Πυροσβεστικού Τμήματος

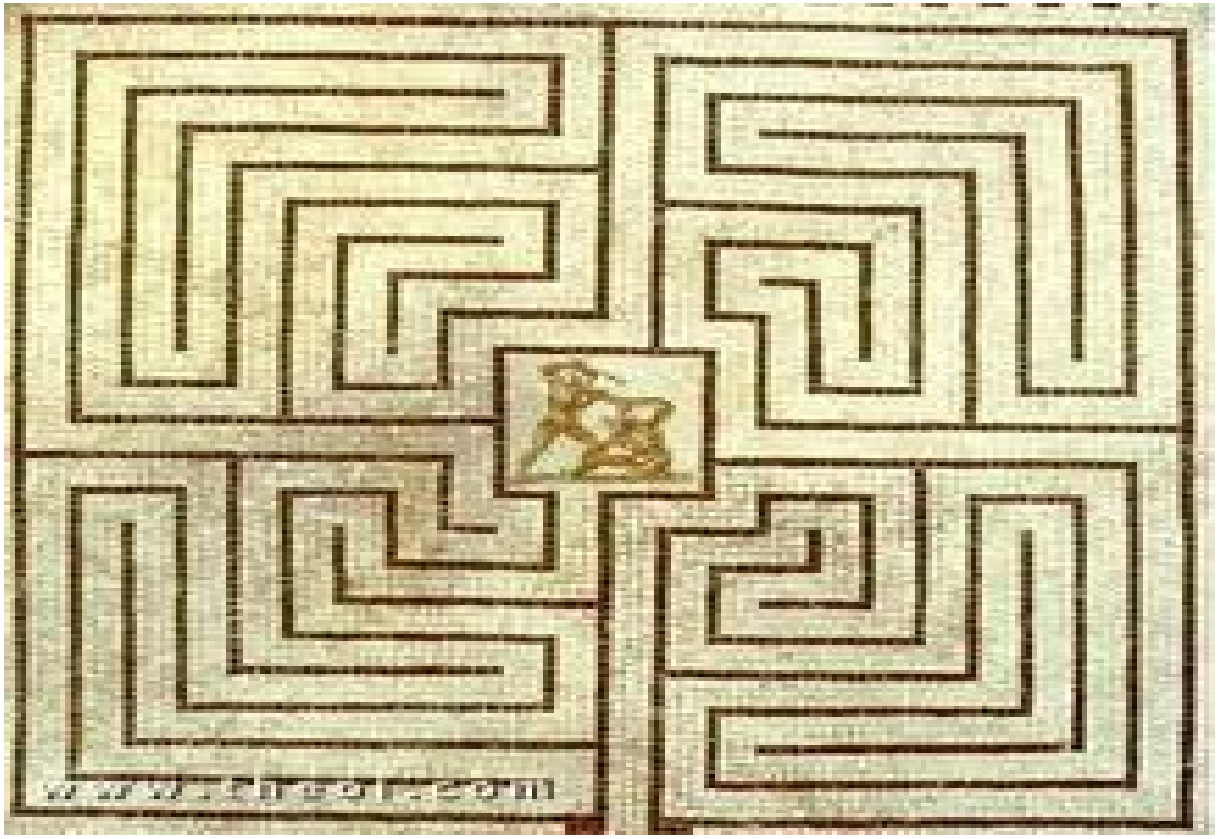



**BFS-δένδρο**



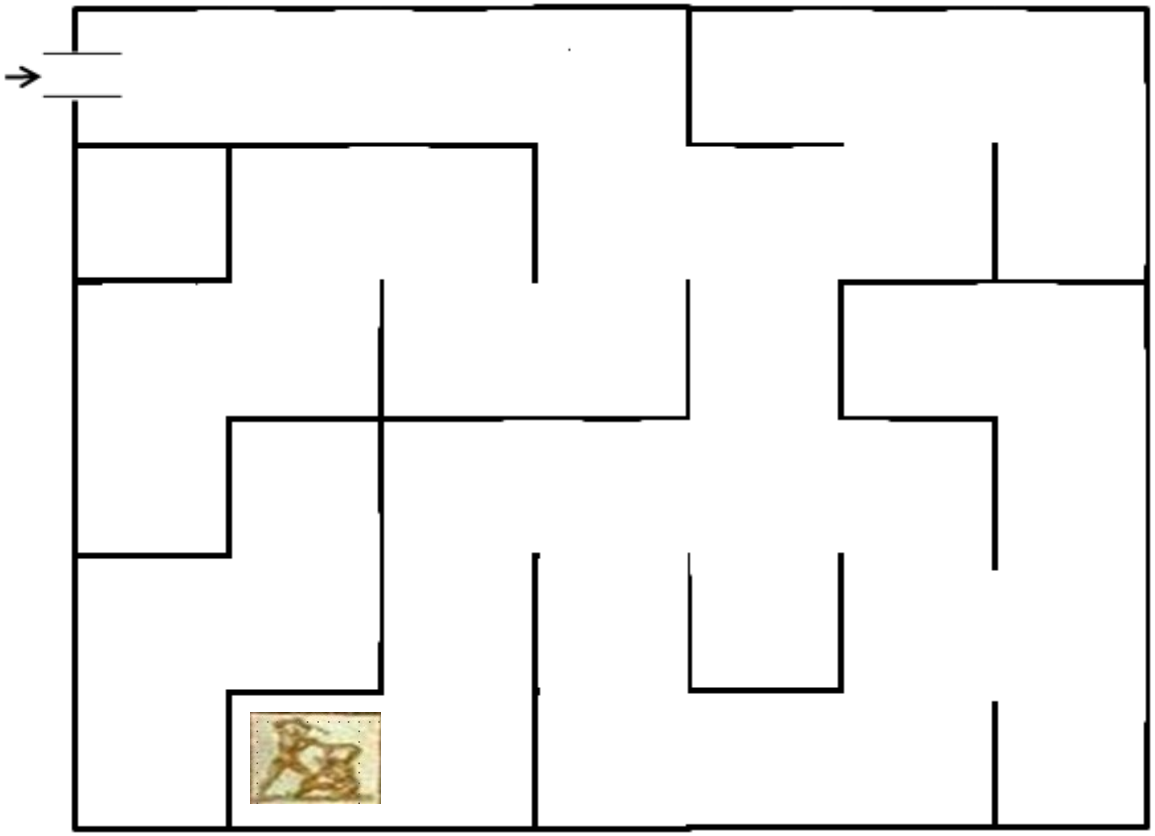
# Εφαρμογές BFS & DFS

## Ξετυλίγοντας τον Μίτο της Αριάδνης!



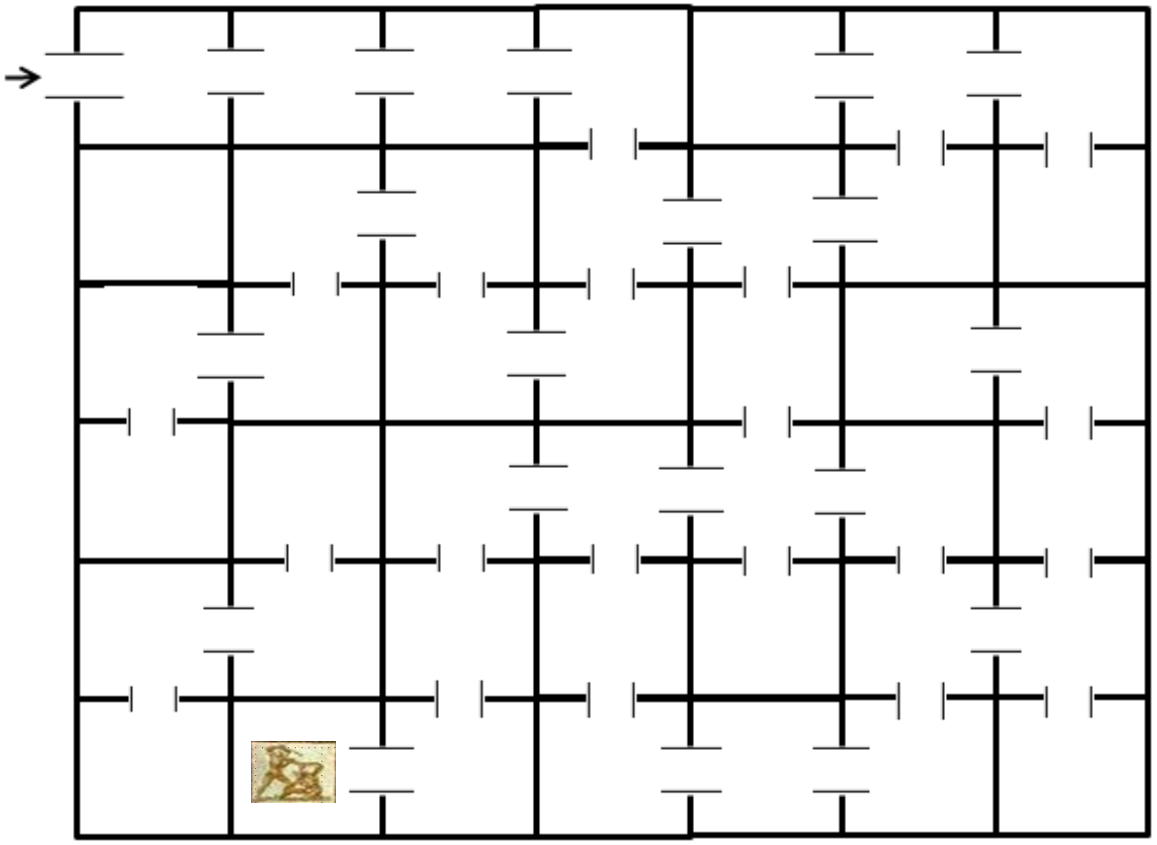
# Εφαρμογές BFS & DFS

## Ξετυλίγοντας τον Μίτο της Αριάδνης!



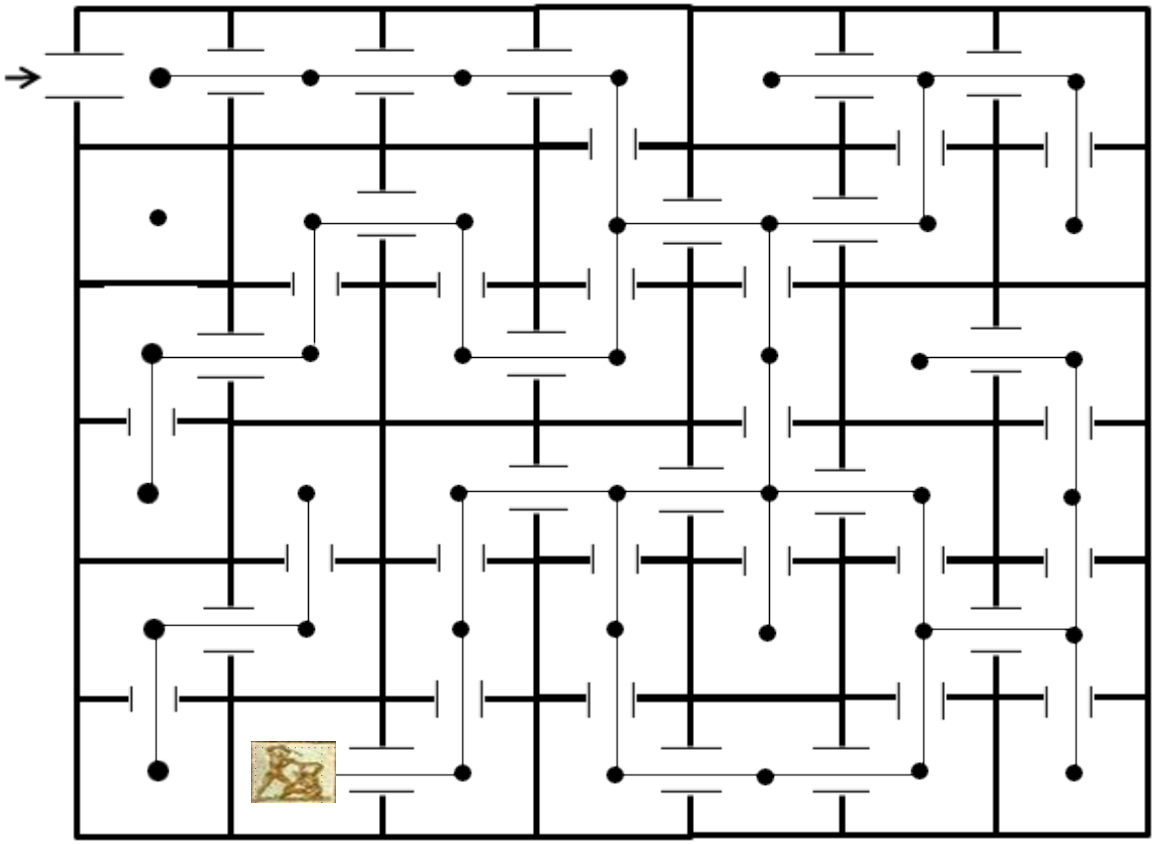
# Εφαρμογές BFS & DFS

## Ξετυλίγοντας τον Μίτο της Αριάδνης!



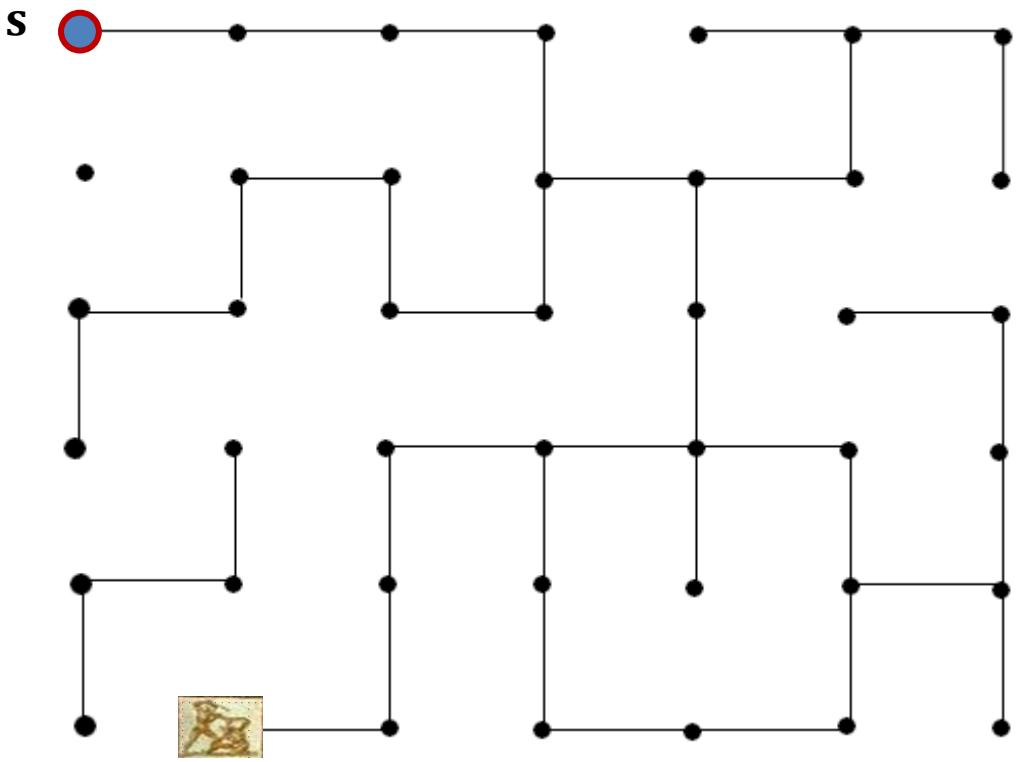
# Εφαρμογές BFS & DFS

- Ξετυλίγοντας τον Μίτο της Αριάδνης!

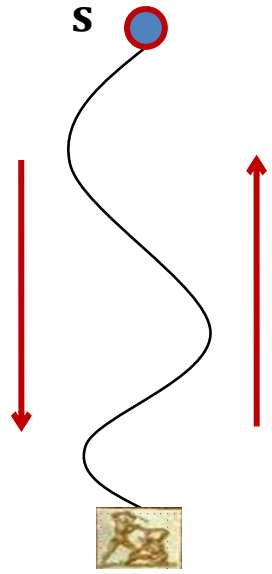


# Εφαρμογές BFS & DFS

## Ξετυλίγοντας τον Μίτο της Αριάδνης!




**DFS-εξερεύνηση**




***πότε προτιμούμε DFS;***