



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή ΗΜΜΥ, Σχολή ΕΜΦΕ

Μαθηματική Λογική, 2024-25

Επιμέλεια ασκήσεων: Γ. Κολέτσος

5η σειρά γραπτών ασκήσεων

Άσκηση 1.

Από τις ασκήσεις 5.4 (σελ. 81-82) τις 2, 4, 6.

Άσκηση 2.

Ορισμός

Έστω $\phi_1, \dots, \phi_n$ απόδειξη από το Γ, ϕ στην οποία σε κάθε βήμα έχουμε και την αιτιολόγησή της. Θα λέμε ότι ο ϕ_i εξαρτάται από τον ϕ σε αυτή την απόδειξη αν

- (1) ϕ_i είναι ϕ και η αιτιολόγηση για το ϕ_i είναι ότι ανήκει στο Γ . ή
- (2) ϕ_i δικαιολογείται ως (άμεσο) συμπέρασμα MP ή Gen από κάποιους προηγούμενους τύπους, στην απόδειξη εκ των οποίων τουλάχιστον ένας εξαρτάται από τον ϕ .

Άσκηση 1:

Θεωρείστε την ακόλουθη απόδειξη $\phi, \forall x\phi \rightarrow \psi \vdash \forall\psi$.

$\phi_1 :$	ϕ	Υπόθ.
$\phi_2 :$	$\forall x\phi$	1, Gen
$\phi_3 :$	$\forall x\phi \rightarrow \psi$	Υποθ.
$\phi_4 :$	ψ	2, 3, MP
$\phi_5 :$	$\forall x\psi$	4, Gen

Γράψτε ποιά ϕ_i της απόδειξης εξαρτώνται από το ϕ ή/και $\forall x\phi \rightarrow \psi$.

Άσκηση 2:

Αποδείξτε το ακόλουθο:

Έαν ψ δεν εξαρτάται από το ϕ στην απόδειξη $\Gamma, \phi \vdash \psi$ τότε $\Gamma \vdash \psi$.

Άσκηση 3: (Γενικότερο θεώρημα απαγωγής)

Έστω $\Gamma, \phi \vdash \psi$, όπου στην απόδειξη δεν έχουμε εφαρμογή του Gen σε τύπο που εξαρτάται από τον ϕ με μεταβλητή που είναι ελεύθερη στον ϕ . Τότε $\Gamma \vdash \phi \rightarrow \psi$ [δηλ. δεν μπορούμε να έχουμε στην απόδειξη ... $\underbrace{\phi' \dots \forall x\phi'}_{\text{Gen}} \dots$, όπου ϕ' εξαρτάται από ϕ και x είναι ελεύθερη στον ϕ].

Πάρτε ως άμεσο πόρισμα το θεώρημα απαγωγής των σημειώσεων.