



Γραμμική Άλγεβρα Ασκήσεις 8β. Αντιστρέψιμοι Πίνακες

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Άσκηση 1

Αν $A, B \in M_{n \times n}$ και ο ένας είναι αντιστρέψιμος, τότε να δείξετε ότι:

$$|A \cdot B + I_n| = |B \cdot A + I_n|$$

Λύση

Έστω ότι A αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχει A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$|A \cdot B + I_n| = |A \cdot B + A \cdot A^{-1}| = (\text{επιμεριστική πινακων}) |A \cdot (B + A^{-1})| =$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + AC$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B, A, B \in M_{n \times n} \quad (\text{γινόμενο οριζουσών}) |A| \cdot |B + A^{-1}| =$$

$$(\text{αντιμεταθετική πραγματικών}) |B + A^{-1}| \cdot |A| =$$

$$(\text{γινόμενο οριζουσών}) |(B + A^{-1}) \cdot A| =$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$(\text{επιμεριστική πινακων}) |B \cdot A + A^{-1} \cdot A| = |B \cdot A + I_n|.$$

Όμοια δείχνουμε αν υποθέσουμε πως ο B είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2

α) Να εξετάσετε αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Αν ναι, να βρείτε τον αντίστροφό του με τη χρήση γραμμοπράξεων.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

β) Με βάση τους υπολογισμούς στο (α), και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα $\det A$ του A ;

γ) Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Άσκηση 2α-Λύση

α) Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο εύρεσης αντιστρόφου:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_1 \rightarrow -\gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - 2\gamma_1 \\ \gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \gamma_3 - \gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3/5 & -1/5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \gamma_3}$$

Αντίστροφος A^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + 2\gamma_3 \\ \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 + 3\gamma_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array} \right]$$

Μοναδιαίος

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/10 & 7/10 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 1/2 \end{array} \right]$$

Άσκηση 2β-Λύση(συνέχεια)

β) Με βάση τον υπολογισμό στο (α) και χωρίς να την υπολογίσετε, ποια είναι η ορίζουσα $\det A$ του A ;

Πρέπει να δούμε:

- i. ποιες από τις γραμμοπράξεις επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας;
- ii. πώς επηρεάζουν τον υπολογισμό της;

1) Αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) με τον αριθμό λ , τότε η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με λ .

$$\begin{vmatrix} \lambda \cdot \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \lambda \cdot \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \lambda \cdot \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \alpha_1 \cdot \det A_{11} - \lambda \cdot \alpha_2 \cdot \det A_{21} + \lambda \cdot \alpha_3 \cdot \det A_{31} =$$
$$= \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot \det A_{11} - \alpha_2 \cdot \det A_{21} + \alpha_3 \det A_{31}) = \lambda \cdot \det A$$

2) Αν στα στοιχεία μιας γραμμής (ή μιας στήλης) προσθέσουμε τα αντίστοιχα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (ή στήλης) πολλαπλασιασμένα επί λ , τότε η ορίζουσα δε μεταβάλλεται.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 + \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 + \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 + \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \lambda \cdot a_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \lambda \cdot a_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \lambda \cdot a_3 \end{vmatrix}}_{\text{Δύο στήλες ανάλογες}} =$$
$$= \det A + 0 = \det A$$

Παρατηρώντας τις γραμμοπράξεις που κάναμε, εκείνες που επηρεάζουν τον υπολογισμό της ορίζουσας είναι οι εξής:

$$1) \gamma_1 \rightarrow -\gamma_1$$

$$2) \gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_2$$

$$3) \gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_3$$

Πιο συγκεκριμένα:

Η γραμμοπράξη $A \xrightarrow{\gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\gamma_2} A_1$, προκαλεί την εξής μεταβολή:

$$\det A_1 = \frac{1}{5} \det A \Leftrightarrow \det A = 5 \cdot \det A_1$$

Επομένως συνολικά έχουμε:

$$\det A = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot \det A_{\text{ανηγμενος κλιμακωτος}} =$$

$$(-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot \det I_3 = (-1) \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = -10$$

Άσκηση 2γ-Λύση(συνέχεια)

γ) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος είναι ο αντιστρέψιμος πίνακας A στο (α).

Άρα το σύστημα γράφεται: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, όπου $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Και η λύση δίνεται από τη σχέση: $A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$

Επομένως:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11/5 \\ -14/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3α

α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ συναρτήσει της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος;

Άσκηση 3α-Λύση

$$\alpha) \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ 0 & 4+2\alpha & -8 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4+2\alpha & -8 \end{vmatrix} = 16 + 4\alpha$$

Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow 16 + 4\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -4$$

Άσκηση 3β

β) Επιλέξτε στην τύχη μία από τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (α) και

υπολογίστε για αυτήν την τιμή τον αντίστροφο του $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$;

Άσκηση 3β-Λύση

Επιλέγουμε τυχαία έναν πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -4$. Έστω $\alpha = -3$. Εφαρμόζοντας τη διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan έχουμε:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2 \cdot L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2 \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{-1}{4} L_3}$$

Άσκηση 3β-Λύση (συνέχεια)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array} \right] \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - 2 \cdot L_3]{L_1 \rightarrow L_1 + 5 \cdot L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -5/2 & -3/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 3 \cdot L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{array} \right] = [I_3 | A^{-1}]$$

Επομένως:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & 3/2 & 1/4 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3γ

γ) Χρησιμοποιήστε την τιμή του α που επιλέξατε στο ερώτημα (β) και βρείτε τη λύση

$$\text{του συστήματος } A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \text{ όπου } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ και } \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3γ-Λύση

γ) Αφού $\det A \neq 0$, το σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ έχει μία και μοναδική λύση την $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Άρα :

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3δ

δ) Εφαρμόστε τον αλγόριθμο Gauss-Jordan για να λύσετε το σύστημα

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \text{ όπου } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

για τις τιμές (ή τιμή) του α για τις οποίες (ή οποία) ο A είναι μη αντιστρέψιμος. Να διακρίνετε τις βασικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές. Τέλος, να βρείτε τη λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, χωρίς να το επιλύσετε.

Άσκηση 3δ-Λύση

δ) Για $\alpha = -4$, έχουμε $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, θα βρούμε τη λύση

του συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ με αλγόριθμο Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 4 \cdot L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$rank(A|b) = 2$

$rank(A) = 2$

$\begin{cases} x_1 = -3 - 3 \cdot x_3 \\ x_2 = -1 - 2 \cdot x_3 \\ x_3 \in R \end{cases}$

2 pivots: 2 βασικοί άγνωστοι οι x_1, x_2

$$n - rank A = 3 - 2 = 1, \text{ μία ελεύθερη μεταβλητή, η } x_3$$

Άσκηση 3δ-Λύση (συνέχεια)

Άρα το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in R \right\}$$

Λύση αντίστοιχου ομογενούς

δ) Από την προηγούμενη γενική μορφή του συνόλου λύσης του συστήματος $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ προκύπτει ότι και το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ έχει άπειρες λύσεις (αφού $\text{rank}(A) \neq 3$). Και το σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι η εξής:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in R \right\}$$