



Γραμμική Άλγεβρα

5. Αναγωγή σε ανηγμένο κλιμακωτό

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Αναγωγή πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ σε ανηγμένο κλιμακωτό (row reduced echelon form)

Κάθε πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ με διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών ανάγεται αρχικά σε κλιμακωτό και στη συνέχεια σε ανηγμένο κλιμακωτό.

Η διαδικασία αναγωγής είναι αλγοριθμική, ονομάζεται αλγόριθμος Gauss-Jordan και περιγράφεται ως εξής:

Διαδικασία:

A) Κάνουμε το 1^ο στοιχείο της 1^{ης} μη μηδενικής στήλης διάφορο του μηδενός, με εναλλαγή γραμμών και το ονομάζουμε **βασικό στοιχείο** ή **pivot**.

B) Το στοιχείο a_{11} γίνεται ίσο με 1, εφαρμόζοντας:

$$\gamma_1 \rightarrow (1/a_{11}) \cdot \gamma_1$$

γ_1 η 1^η γραμμή του πίνακα

Δηλαδή διαιρούμε όλα τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής με το a_{11} .

Γ) Μηδενίζουμε όλα τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης εκτός του βασικού.

$$\begin{aligned}\gamma_2 &\rightarrow \gamma_2 - a_{21} \cdot \gamma_1 \\ &\vdots \\ \gamma_\mu &\rightarrow \gamma_\mu - a_{\mu 1} \cdot \gamma_1\end{aligned}$$

Δ) Αγνοώντας την 1^η γραμμή και 1^η στήλη που έχει προκύψει και με επανάληψη της παραπάνω διαδικασίας κάνουμε

- το a_{22} να γίνει ίσο με 1 ($\gamma_2 \rightarrow (1/a_{22}) \cdot \gamma_2$) και
- όλα τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης που είναι κάτω από το a_{22} ίσα με 0. Συνεχίζουμε μέχρι ο A να γίνει κλιμακωτός με τα ηγετικά στοιχεία των γραμμών του ίσα με 1.

Σημ. ως εδώ τα 3 βήματα αποτελούν τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss.

Ε) Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μετατρέπουμε τα μη μηδενικά στοιχεία κάθε στήλης που περιέχει το ηγετικό στοιχείο 1 μιας γραμμής σε μηδενικά, αρχίζοντας από αυτήν που είναι δεξιότερα.

Σημ. Η πλήρης μέθοδος ονομάζεται η μέθοδος απαλοιφής των Gauss-Jordan.

Παρατηρήσεις

- Ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ**, αλλά έχει πάντα τον ίδιο αριθμό μη μηδενικών γραμμών! (=βαθμός πίνακα)
- Ο ανηγμένος κλιμακωτός που προκύπτει με τον παραπάνω αλγόριθμο είναι **ΜΟΝΑΔΙΚΟΣ**.
- Δεν μπορώ στο πρώτο βήμα να εφαρμόσω γραμμοπράξεις και στο επόμενο βήμα να εφαρμόσω στηλοπράξεις. Δουλεύω μόνο με γραμμές ή μόνο με στήλες. Εμείς θα εφαρμόσουμε στη συνέχεια **μόνο γραμμοπράξεις**.

Παράδειγμα 1 (3 × 3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow (-1) \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 6 \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{11} \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3 \cdot R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_R$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

Λέμε ότι ο πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα A_R ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός

Παράδειγμα 2 (4 × 4)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 3 \cdot R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4} \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 18 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4 \cdot R_2}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 8 & -6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - 8 \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{10} \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/10 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow \frac{1}{-14} \cdot R_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{14}{10} \cdot R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_4}$$

Παράδειγμα 2 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 5 \cdot R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 2 \cdot R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 2 \cdot R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B_R$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

Λέμε ότι ο πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα $B_R = I_4$, τον μοναδιαίο 4×4 , ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός

Παράδειγμα 3 (3 × 5)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 8 & 16 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2 \cdot R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & -6 & 14 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 12 & 11 & -20 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2 \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -34 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow \frac{1}{17} \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 3 \cdot R_3}$$

Κλιμακωτός με pivots 1

Παράδειγμα 3 (συνέχεια)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3 \cdot R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - 3 \cdot R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -16 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = C_R$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

Λέμε ότι ο πίνακας C είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα C_R ο οποίος είναι ανηγμένος κλιμακωτός

Βαθμός ή τάξη ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$,
συμβολικά $\text{rank}(A)$

Ονομάζουμε **τάξη ή βαθμό του πίνακα** $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$,
συμβολικά **$\text{rank}(A)$** , το πλήθος όλων των ηγετικών στοιχείων στην
κλιμακωτή του μορφή κατά γραμμές.

ή αλλιώς,

το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του όταν τον φέρουμε σε
κλιμακωτή μορφή κατά γραμμές.

Παρατηρήσεις:

- Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό πως η τάξη ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{\mu \times \nu}$ θα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\text{rank}(A) \leq \min\{\mu, \nu\}.$$

- Την τάξη ενός πίνακα μπορούμε να την υπολογίσουμε μετατρέποντας τον πίνακα είτε σε κλιμακωτό είτε σε ανηγμένο κλιμακωτό κατά γραμμές. Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών θα είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.
- Θεώρημα: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{\nu \times \nu}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνον αν ισχύει $\text{rank}(A) = \nu$.