



Γραμμική Άλγεβρα

1ε. Ασκήσεις στους Πίνακες

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

Άσκηση 1

Ναδειχτεί ότι αν ο πίνακας A είναι διαγώνιος

$$A = \begin{bmatrix} a - b + 1 & -a - b - c + 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & a + \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

τότε ο πίνακας A είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή ο μοναδιαίος 2×2 .

Λύση

Αν ο $A = \begin{bmatrix} a - b + 1 & -a - b - c + 2 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc & a + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιος τότε πρέπει:

$$\begin{aligned} -a - b - c + 2 &= 0 \\ \text{και } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= 0. \end{aligned}$$

Όμως από την ταυτότητα του Euler έχουμε:

$$\begin{aligned} &a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\ &= \frac{1}{2} (a + b + c) [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \end{aligned}$$

• Άρα λαμβάνουμε:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0 .$$

Άρα

$$2 \cdot [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c .$$

$$1\eta \text{ εξίσωση } a + b + c = 2 \Leftrightarrow a + a + a = 2 \Leftrightarrow 3a = 2$$

$$\text{Επομένως } a = b = c = \frac{2}{3}. \text{ Και προκύπτει από πράξεις ότι } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

Άσκηση 2

$$\text{Αν } A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix},$$

να προσδιοριστούν τα x, y, z έτσι ώστε να ισχύει:

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

Λύση

Γενικά ισχύει η σχέση: $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA$.

Η σχέση

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

ισχύει **αν και μόνο αν** οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε:

$$AB = \begin{bmatrix} x & xy & 0 \\ xy & y & z \\ x & y & z^2 \end{bmatrix} \text{ και } BA = \begin{bmatrix} x & x^2 & 0 \\ y^2 & y & y \\ z & z & z^2 \end{bmatrix}$$

Επομένως η δοσμένη σχέση αληθεύει αν και μόνο αν:
 $xy = x^2, xy = y^2, x = z, y = z.$

Άρα τελικά

$$x = y = z.$$

Άσκηση 3

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_n$. Αν ικανοποιούν τις ιδιότητες: $B^2 = I_n$ και $A = \frac{1}{2}(B + I_n)$, να δείξετε ότι $A^2 = A$.

Λύση

$$A^2 = A \cdot A =$$

$$\frac{1}{2}(B + I_n) \cdot \frac{1}{2}(B + I_n) =$$

$$\frac{1}{4}(B + I_n)(B + I_n) =$$

$$\frac{1}{4}(B \cdot B + I_n \cdot B + B \cdot I_n + I_n \cdot I_n) =$$

$$\frac{1}{4}(B^2 + B + B + I_n) =$$

$$\frac{1}{4}(I_n + 2 \cdot B + I_n) =$$

$$\frac{1}{4}(2 \cdot B + 2 \cdot I_n) =$$

$$\frac{2}{4}(B + I_n) = \frac{1}{2}(B + I_n) = A.$$

Άσκηση 4

Δίνονται οι τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \Pi_n$. Αν ισχύει ότι $A^2 = B^2 = (AB)^2 = I_n$, τότε να δείξετε ότι οι πίνακες A, B αντιμετατίθενται.

Λύση

- Αφού $A^2 = I_n$, αυτό σημαίνει ότι $A \cdot A = I_n$, δηλαδή ο A είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $A^{-1} = A$. (*)
- Ομοίως αφού $B^2 = I_n$, αυτό σημαίνει ότι ο B είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα ότι $B^{-1} = B$. (**)
- Ομοίως αφού $(AB)^2 = I_n$, αυτό σημαίνει ότι $(AB)^{-1} = A \cdot B$.
- Αλλά από γνωστή ιδιότητα $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B \cdot A$, (λόγω των σχέσεων (*) και (**)).

Επομένως: $A \cdot B = B \cdot A$!

Β τρόπος

$$\begin{aligned} A \circ B &= B \circ A \quad (\Leftrightarrow) \\ (A \circ B) \circ (A \circ B) &= (B \circ A) \circ (A \circ B) \quad (\Leftrightarrow) \\ I_V &= B \circ (A \circ A) \circ B \quad (\Leftrightarrow) \\ I_V &= B \circ I_V \circ B \quad (\Leftrightarrow) \\ I_V &= B \circ B \quad (\Leftrightarrow) \\ I_V &= I_V \quad \text{απο 10η 5η} \end{aligned}$$

Άσκηση 5

Θεωρούμε τους τετραγωνικούς πίνακες A, B τάξης $n \times n$.

Αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$,

να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A^{-1} + B^{-1} = I_n .$$

Λύση άσκησης 5

Αν A, B πίνακες τάξης $n \times n$, B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A + B = A \cdot B$, να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει: $A^{-1} + B^{-1} = I_n$.

- $A + B = A \cdot B$
- $(A + B) \cdot B^{-1} = (A \cdot B) \cdot B^{-1}$ *πολ/ζω με B^{-1} (B αντιστρέψιμος)*
- $A \cdot B^{-1} + B \cdot B^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1})$ *επιμεριστική / προσεταιριστική*
- $A \cdot B^{-1} + I_n = A \cdot (I_n)$
- $A \cdot B^{-1} + I_n = A$
- $I_n = A - A \cdot B^{-1}$
- $I_n = A \cdot (I_n - B^{-1})$, *δηλ. ο αντίστροφος του A είναι ο $I_n - B^{-1}$*
- Επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$$A^{-1} = I_n - B^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} + B^{-1} = I_n$$

Άσκηση 6

$$\text{Av } A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

να υπολογίσετε τους πίνακες A^2, A^3, A^p .

Λύση

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\theta \cdot \cos 2\theta - \sin\theta \cdot \sin 2\theta & -\sin\theta \cos 2\theta - \cos\theta \sin 2\theta \\ \sin\theta \cos 2\theta + \cos\theta \sin 2\theta & (\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\sin 3\theta \\ \sin 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ομοίως

$$A^\rho = \begin{bmatrix} \cos \rho\theta & -\sin \rho\theta \\ \sin \rho\theta & \cos \rho\theta \end{bmatrix} . \text{ Απόδειξη επαγωγικά.}$$

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε τη ν -οστή ($\nu \geq 1$) δύναμη του τετραγωνικού πίνακα A , όπου $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Λύση

$$\text{Παρατηρούμε ότι } A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = I_2 \quad (\text{ή } A^4 = A^2 \cdot A^2 = I_2 \cdot I_2 = I_2)$$

Επομένως:

$$A^\nu = \begin{cases} I_2, & \text{αν } \nu = 2\rho, \rho \in \mathbb{N} \\ A, & \text{αν } \nu = 2\rho + 1, \rho \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Απόδειξη επαγωγικά.

Άσκηση 8

Δίνεται τετραγωνικός πίνακας $A \in \Pi_n$ ο οποίος είναι

αντιστρέψιμος και τέτοιος ώστε: $A^{-1} = I_n - A$. Να δείξετε ότι: $A^6 - I_n = O_n$.

Λύση

Αφού ο A αντιστρέψιμος, υπάρχει πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Επομένως:

$$\begin{aligned} I_n &= A \cdot (I_n - A) \Leftrightarrow I_n = A \cdot I_n - A \cdot A \Leftrightarrow I_n = A - A^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A^2 - A + I_n = O_n \Leftrightarrow A \cdot (A^2 - A + I_n) = A \cdot O_n \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$A^3 - A^2 + A = O_n \Leftrightarrow A^3 + (A - A^2) = O_n \Leftrightarrow A^3 + I_n = O_n \Leftrightarrow A^3 = -I_n$$

Άρα

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = (-I_n) \cdot (-I_n) = (-1) \cdot (-1) \cdot (I_n)^2 = 1 \cdot I_n = I_n.$$

Επομένως: $A^6 - I_n = O_n$

Άσκηση 9

Δίνονται τρεις τετραγωνικοί πίνακες A, B, Γ διάστασης $n \times n$.
Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $A = B + \Gamma$ (1), να δείξετε
ότι $B \cdot A^{-1} \cdot \Gamma = \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B$.

Λύση

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει ο αντίστροφός του A^{-1} , και επομένως:

$$B \cdot A^{-1} \cdot \Gamma = (\text{από σχέση 1})$$

$$= (A - \Gamma) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$= (A \cdot A^{-1} - \Gamma \cdot A^{-1}) \cdot (A - B) = (A \cdot A^{-1} = I_n)$$

$$= (I_n - \Gamma \cdot A^{-1}) \cdot (A - B) = (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$= I_n \cdot (A - B) - \Gamma \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$= A - B - \Gamma \cdot A^{-1} \cdot A + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B =$$

$$= A - B - \Gamma \cdot I_n + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B = A - B - \Gamma + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B =$$

$$= O_n + \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B = \Gamma \cdot A^{-1} \cdot B.$$

Άσκηση 10

Αν ο A είναι $n \times n$ πραγματικός συμμετρικός πίνακας και ο B είναι $n \times m$ πίνακας, να δείξετε ότι ο πίνακας $B^T \cdot A \cdot B$ είναι συμμετρικός.

Λύση

$$\begin{aligned} (B^T \cdot A \cdot B)^T &= \text{Από γνωστή ιδιότητα ισχύει } (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \\ &= (A \cdot B)^T \cdot (B^T)^T = \text{Από γνωστή ιδιότητα ισχύει } (B^T)^T = B \\ &= (B^T \cdot A^T) \cdot B = \\ &= B^T \cdot A^T \cdot B = \text{Αφού ο } A \text{ είναι συμμετρικός, ισχύει } A^T = A \\ &= B^T \cdot A \cdot B. \end{aligned}$$

Σημείωση: $(A \cdot B \cdot \Gamma)^T = [(A \cdot B) \cdot \Gamma]^T = \Gamma^T \cdot (A \cdot B)^T = \Gamma^T \cdot B^T \cdot A^T$

Άσκηση 11

Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο $I_n - AB$ να είναι αντιστρέψιμος. Να αποδείξετε ότι και ο $I_n - BA$ είναι αντιστρέψιμος και ότι ισχύει:

$$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$$

Λύση

Υπολογίζουμε το γινόμενο:

$$(I_n - BA) \cdot (I_n + B(I_n - AB)^{-1}A) = (\text{επιμεριστική ιδιότητα})$$

$$I_n \cdot I_n + I_n \cdot B(I_n - AB)^{-1}A - BA \cdot I_n - BA \cdot B(I_n - AB)^{-1}A =$$

$$I_n + B(I_n - AB)^{-1} \cdot \mathbf{A} - B \cdot \mathbf{A} - BA \cdot B(I_n - AB)^{-1} \cdot \mathbf{A} = (\text{επιμ. ιδιότ.})$$

$$I_n + B \cdot [(I_n - AB)^{-1} - I_n - AB(I_n - AB)^{-1}] \cdot \mathbf{A} =$$

$$I_n + B[-I_n + (I_n - AB)^{-1} - AB(I_n - AB)^{-1}] \cdot A =$$

$$I_n + B[-I_n + (I_n - AB) \cdot (I_n - AB)^{-1}] \cdot A =$$

$$I_n + B(-I_n + I_n) \cdot A = I_n + B \cdot O_n \cdot A = I_n$$