



Γραμμική Άλγεβρα

1α. Πίνακες και Βασικές Πράξεις

Κάλλια Παυλοπούλου

2024-2025

ΠΙΝΑΚΕΣ

Ένα σύστημα δύο εξισώσεων α' βαθμού με δύο αγνώστους, π.χ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Χαρακτηρίζεται πλήρως

από τους έξι αριθμούς: 2, 3, 1, 3, -1, και 7.

Ο καθένας έχει συγκεκριμένο «ρόλο» στο σύστημα:

- είναι ή **συντελεστής του x** ή **συντελεστής του y** ή **σταθερός όρος**, και
- ανήκει ή στην **πρώτη** ή στη **δεύτερη εξίσωση**.

Το σύστημα θα μπορούσε να οριστεί πλήρως από τους 6 παραπάνω αριθμούς, γραμμένους με ορθογώνια διάταξη σε 2 γραμμές και 3 στήλες, ώστε να δηλώνεται η θέση που κατέχουν στο σύστημα:

Συντελεστής x	Συντελεστής y	Σταθερός όρος		
↓	↓	↓		
2	3	1	←	Της α' εξίσωσης
3	-1	7	←	Της β' εξίσωσης

- Μια τέτοια διάταξη αριθμών λέγεται πίνακας 2 γραμμών και 3 στηλών ή απλά πίνακας 2×3 .
- Γράφεται:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \text{ ή } \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{array} \right\|$$

Ορισμός Πίνακα

- Γενικά κάθε ορθογώνια διάταξη $\mu \cdot \nu$ αριθμών ($\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$) σε μ γραμμές και ν στήλες λέγεται **πίνακας $\mu \times \nu$** (matrix) και συμβολίζεται

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mu 1} & \cdots & a_{\mu\nu} \end{bmatrix} = [a_{ij}], 1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \nu.$$

- Οι αριθμοί που ορίζουν έναν πίνακα λέγονται **στοιχεία** του πίνακα (elements of a matrix).
- Το στοιχείο που ανήκει στην i -γραμμή ($1 \leq i \leq \mu$) και j -στήλη ($1 \leq j \leq \nu$) συμβολίζεται συνήθως a_{ij} .
- Οι θετικοί ακέραιοι μ, ν ονομάζονται **διαστάσεις** του πίνακα.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\mu \times \nu$ συμβολίζεται με $M_{\mu \times \nu}$ ή $\Pi_{\mu \times \nu}$.
- Το σύνολο όλων των πινάκων διάστασης $\nu \times \nu$ συμβολίζεται με M_ν ή Π_ν (τετραγωνικοί πίνακες διάστασης ν).

Παράδειγμα:

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Το στοιχείο a_{32} του πίνακα A είναι το στοιχείο που βρίσκεται στην 3^η γραμμή και τη 2^η στήλη, δηλαδή ο αριθμός 8.

Σημείωση:

Όταν πρόκειται για πίνακες μεγάλων διαστάσεων, μπορούμε να διαχωρίσουμε τον αριθμό που προσδιορίζει τη γραμμή από τη στήλη με ένα κόμμα.

- Σε έναν πίνακα 100×50 το στοιχείο $a_{84,3}$ ανήκει στην 84^η γραμμή και την 3^η στήλη ενώ το $a_{8,43}$ ανήκει στην 8^η γραμμή και την 43^η στήλη.

Η σχέση της ισότητας στο σύνολο $\Pi_{\mu \times \nu}$

Δύο πίνακες $A = [a_{ij}]$ και $B = [\beta_{ij}]$ ίδιου τύπου $\mu \times \nu$ είναι **ίσοι** (equal) αν και μόνο αν τα αντίστοιχα στοιχεία τους ταυτίζονται. Δηλαδή:

$$A = B \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu, a_{ij} = \beta_{ij}.$$

Για κάθε ($\forall$), για όλες τις τιμές του i και για όλες τις τιμές του j τα στοιχεία του πίνακα A να είναι ίσα με τα αντίστοιχα στοιχεία του B .

Χρήση Πινάκων

1) Το μαθητικό δυναμικό ενός σχολείου κατά φύλο και κατά τάξη μπορεί να παρασταθεί με πίνακα 2×3 . Π.χ.

$$\begin{bmatrix} 125 & 82 & 60 \\ 101 & 85 & 57 \end{bmatrix}$$

το οποίο δίνει ένα πλήθος πληροφοριών: στην Α τάξη φοιτούν 125 αγόρια και 101 κορίτσια, τα κορίτσια της Γ τάξης είναι 57, κτλ.

A	B	Γ	
125	82	60	Αγόρια
101	85	57	Κορίτσια

2) Το προσωπικό ενός εργοστασίου κατανεμημένο σε 3 κατηγορίες και σε 5 τμήματα μπορεί να παρασταθεί με πίνακα π.χ. 3×5 :

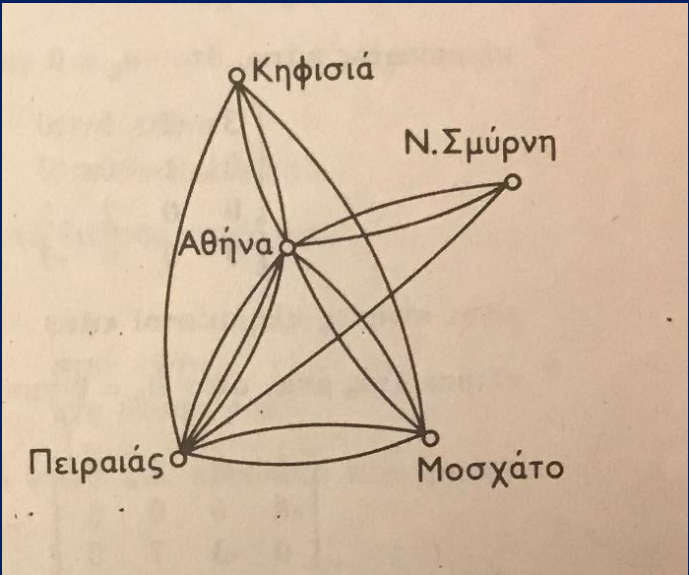
128	205	316	107	156
250	318	354	285	204
400	389	425	376	158

που μας πληροφορεί ότι

στο 4^ο τμήμα της 2^{ης} κατηγορίας απασχολούνται 285 εργάτες,

στο 3^ο τμήμα της 3^{ης} κατηγορίας 425 εργάτες κ.τ.λ.

3) Στο επόμενο σχήμα έχουμε ένα μέρος του συγκοινωνιακού δικτύου της περιοχής της πρωτεύουσας:



Οι πληροφορίες αυτές θα μπορούσαν να δοθούν και στην μορφή του επόμενου πίνακα. Σε κάθε κουτάκι σημειώνεται το πλήθος των συγκοινωνιακών συνδέσεων μεταξύ των αντίστοιχων περιοχών της πρωτεύουσας:

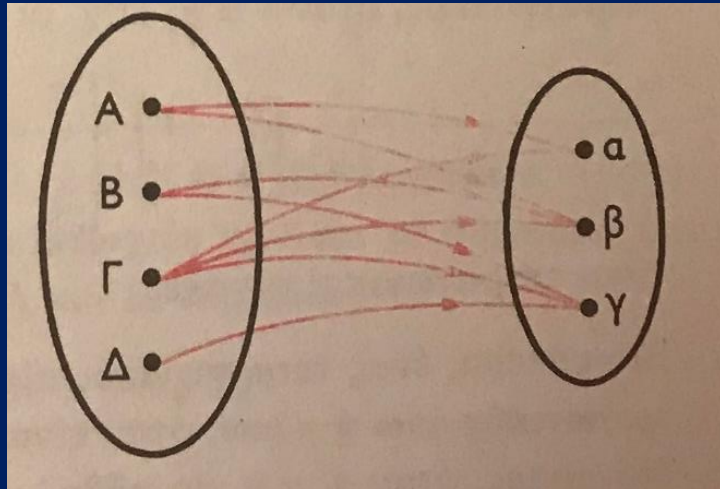
	ΑΘΗΝΑ	ΠΕΙΡΑΙΑΣ	ΜΟΣΧΑΤΟ	Ν. ΣΜΥΡΝΗ	ΚΗΦΙΣΙΑ
ΑΘΗΝΑ	0	3	2	2	2
ΠΕΙΡΑΙΑΣ	3	0	2	1	1
ΜΟΣΧΑΤΟ	2	2	0	0	1
Ν. ΣΜΥΡΝΗ	2	1	0	0	0
ΚΗΦΙΣΙΑ	2	1	1	0	0

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 5×5 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Μια διμελής σχέση με την οποία συνδέονται τα στοιχεία δύο πεπερασμένων συνόλων μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία είναι 1 ή 0, για την περίπτωση σχετιζόμενων ή όχι στοιχείων των συνόλων.

Π.χ. η διμελής σχέση που δίνεται με το βελοδιάγραμμα



Μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα

	α	β	γ
A	1	1	0
B	0	1	1
Γ	1	1	1
Δ	0	0	1

Δηλαδή, μπορεί να εκφραστεί με τον επόμενο πίνακα 4×3 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είδη Πινάκων $\mu \times \nu$

- Πίνακας-**γραμμή**, όταν $\mu=1$, (τύπου $1 \times \nu$)

$$\text{π.χ. } A = [3 \quad -6 \quad 7] \in \Pi_{1 \times 3}, B = [0 \quad 1] \in \Pi_{1 \times 2}.$$

- Πίνακας-**στήλη**, όταν $\nu=1$, (τύπου $\mu \times 1$)

$$\text{π.χ. } \Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \in \Pi_{2 \times 1}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \Pi_{3 \times 1}.$$

- Πίνακας-**στοιχείο**, όταν $\mu=\nu=1$, (τύπου 1×1)

$$\text{π.χ. } E=[-5], Z=[7], H=[0].$$

- **Τετραγωνικός (square matrix)** , όταν $\mu=\nu$, π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Γενική μορφή:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\nu 1} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix}$$

- Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται στοιχεία της **κύριας ή πρωτεύουσας διαγωνίου**
- Τα στοιχεία $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2(\nu-1)}, \dots, \alpha_{\nu 1}$ λέγονται στοιχεία της **δευτερεύουσας διαγωνίου**
- Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου λέγεται **ίχνος** του πίνακα A

$$tr A = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{\nu\nu}$$

Σημείωση: Σε μη τετραγωνικό πίνακα $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$, τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{kk}$ όπου $k = \min\{\mu, \nu\}$ καλούνται στοιχεία **της κυρίας διαγωνίου** του πίνακα A .

- Για παράδειγμα στους πίνακες $A = [2 \ 0 \ 3]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$,
- το στοιχείο $\alpha_{11} = 2$ είναι το μόνο στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του A ,
- ενώ τα στοιχεία $\beta_{11} = 1, \beta_{22} = 5, \beta_{33} = 9$ είναι τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του B .

- **Τριγωνικός κάτω** όταν είναι τετραγωνικός $[a_{ij}]$ τύπου $n \times n$ και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\forall i < j, a_{ij} = 0$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

- **Τριγωνικός άνω** όταν είναι τετραγωνικός $[a_{ij}]$ τύπου $n \times n$ και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικά.

$$\forall i > j, a_{ij} = 0$$

π.χ. $\begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

Μπορεί να έχει 0 σε άλλες θέσεις, δεν είναι απαγορευτικό

Κύρια διαγώνιος

- **Διαγώνιος** (diagonal matrix), όταν είναι τετραγωνικός $[a_{ij}]$ τύπου $n \times n$ και ισχύει

$$\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = 0$$

Δηλαδή τετραγωνικός όπου όλα τα στοιχεία που δεν ανήκουν στην κύρια διαγώνιο είναι όλα μηδέν.

π.χ. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Συμβολίζεται:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ή } \Delta = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

- Παρατήρηση:

Αν ένας πίνακας $[a_{ij}]$ τύπου $n \times n$ είναι ταυτόχρονα **τριγωνικός άνω και τριγωνικός κάτω**, τότε θα είναι **διαγώνιος** πίνακας και αντίστροφα.

Πράξεις Πινάκων: Πρόσθεση Πινάκων

- Μία βιομηχανία ηλεκτρικών ειδών διαθέτε σε ένα μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18	35	21	Στην Αθήνα
13	29	22	Στη Θεσσαλονίκη

- Και τον επόμενο μήνα:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
22	19	12	Στην Αθήνα
25	18	31	Στη Θεσσαλονίκη

- Τότε τους δύο αυτούς μήνες η βιομηχανία διέθεσε συνολικά:

Ψυγεία	Κουζίνες	πλυντήρια	
18+22	35+19	21+12	Στην Αθήνα
13+25	29+18	22+31	Στη Θεσσαλονίκη

- Η **κίνηση της βιομηχανίας κάθε μήνα** αλλά και **συνολικά** περιγράφεται αντίστοιχα με τους επόμενους πίνακες 2x3:

$$A = \begin{bmatrix} 18 & 35 & 21 \\ 13 & 29 & 22 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον 1}^\circ \text{ μήνα}$$

$$B = \begin{bmatrix} 22 & 19 & 12 \\ 25 & 18 & 31 \end{bmatrix} \text{ η κίνηση της βιομηχανίας τον 2}^\circ \text{ μήνα}$$

Η **κίνηση της βιομηχανίας συνολικά** τους δύο μήνες:

$$G = \begin{bmatrix} 18 + 22 & 35 + 19 & 21 + 12 \\ 13 + 25 & 29 + 18 & 22 + 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 54 & 33 \\ 38 & 47 & 53 \end{bmatrix} = A + B$$

- Ο πίνακας G λέγεται **άθροισμα των πινάκων** A και B . Γενικά ορίζουμε:

Άθροισμα των $\mu \times \nu$ πινάκων $A = [\alpha_{ij}]$, $B = [\beta_{ij}]$ λέγεται ο πίνακας $\Gamma = A + B = [\gamma_{ij}]$, διάστασης $\mu \times \nu$, του οποίου κάθε στοιχείο είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A και B , δηλαδή:

$$\forall 1 \leq i \leq \mu, \forall 1 \leq j \leq \nu \quad \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{τότε } A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Στο σύνολο $\Pi_{\mu \times \nu}$ η πρόσθεση είναι μια **εσωτερική πράξη** που ορίζεται ως εξής:

$$+: \Pi_{\mu \times \nu} \times \Pi_{\mu \times \nu} \rightarrow \Pi_{\mu \times \nu}, (A, B) \rightarrow A + B := [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]$$

Ιδιότητες Πρόσθεσης Πινάκων

Αντιμεταθετική: $\forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + B = B + A$

Προσεταιριστική: $\forall A, B, \Gamma \in \Pi_{\mu \times \nu}, (A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$

Ουδέτερο στοιχείο: $\forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \exists \mathbf{O} \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$

Το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση είναι ο μηδενικός πίνακας $\mathbf{O} = [0]_{\mu \times \nu}$, που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0.

Αντίθετος Πίνακας (opposite):

$$\forall A \in \Pi_{\mu \times \nu}, \exists -A \in \Pi_{\mu \times \nu}, A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{O}.$$

Ο αντίθετος πίνακας είναι ο $-A = [-a_{ij}]$, που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο $-a_{ij}$.

Παράδειγμα αντίθετου πίνακα:

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet -A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A + (-A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 3}$$

Πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα ή βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα

Αν ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι τύπου $\mu \times \nu$, ονομάζουμε **βαθμωτό γινόμενο του πραγματικού (ή μιγαδικού) αριθμού λ με τον πίνακα A ή πολλαπλασιασμό αριθμού με πίνακα** τον πίνακα τύπου $\mu \times \nu$ τον οποίο λαμβάνουμε αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A με λ . Το γινόμενο αυτό συμβολίζεται με $\lambda \cdot A$ και ισχύει ότι:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot [a_{ij}] = [\lambda \cdot a_{ij}]$$

Π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 & 4 \cdot 0 & 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 & 4 \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 \\ 12 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall A, B \in \Pi_{\mu \times \nu}$, ισχύουν:

i) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$

iv) $1 \cdot A = A$, όπου 1 είναι η μονάδα των πραγματικών αριθμών

v) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = (A\lambda)B = A(\lambda B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \Pi_{\mu \times \nu}$, $B \in \Pi_{\nu \times \rho}$

Παρατήρηση: Θα δούμε αργότερα πως το σύνολο $\Pi_{\mu \times \nu}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, αποκτά τη δομή διανυσματικού χώρου.