

ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2024-25
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-I, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ
Διδάσκοντες: Γ. Καραποστόλη, Ι. Ράπτης

Δ΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

22/12/2024

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 10/1/25, οι 1, 2, 3, 4, 5,

[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]

1. Μία λεπτή τετράγωνη πόρτα με μάζα M και πλευρά a μπορεί να περιστραφεί χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα AB που συμπίπτει με μία από τις πλευρές της. Αρχικά η πόρτα είναι ανοιχτή και σχηματίζει γωνία 90° με τον τοίχο. Μία μπάλα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα V και συγκρούεται κάθετα με την πόρτα σε απόσταση $a/2$ από τον άξονα AB . Η κρούση είναι ελαστική.

(α) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας της πόρτας ως προς τον άξονα AB .

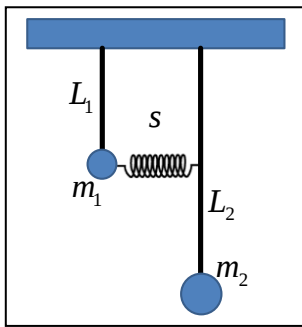
(β) Ποιες ποσότητες διατηρούνται κατά την ελαστική κρούση της μπάλας με την πόρτα?

(γ) Σε πόσο χρόνο θα κλείσει η πόρτα από την στιγμή σύγκρουσης με την μπάλα?

2. Δυο αθλητές A και B , που έχουν την ίδια μάζα m , κρέμονται από τα δυο άκρα ενός σχοινιού αμελητέας μάζας, που περνάει από μια τροχαλία επίσης αμελητέας μάζας. Οι αθλητές, που βρίσκονται σε ίση απόσταση L από την τροχαλία και είναι αρχικά ακίνητοι, αρχίζουν ταυτόχρονα να αναρριχώνται με ταχύτητες μέτρου v και $3v$, αντίστοιχα, ως προς το σχοινί. (α) Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται ο καθένας για να φτάσει στην τροχαλία. (β) Υπολογίστε τους αντίστοιχους χρόνους, αν η τροχαλία έχει μάζα m_0 , ακτίνα R και ροπή αδράνειας $I = m_0 R^2 / 2$

3. Ράβδος OA μήκους l είναι ακίνητη πάνω σε τραχειά οριζόντια επιφάνεια με συντελεστή τριβής μ μεταξύ της ράβδου και της οριζόντιας επιφάνειας. Η ράβδος έχει γραμμική πυκνότητα, $\lambda = \kappa(2l - r)$ όπου r η απόσταση από το άκρο O της ράβδου και $\kappa > 0$. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της O . (α) Να βρείτε την μάζα m_r της ράβδου (συναρτήσεως των (κ, l)), την απόσταση του Κέντρου Μάζας της ράβδου από το O , και την ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κατακόρυφο άξονα ε που διέρχεται από το άκρο της O . (β) Μπάλα του γκολφ μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_0 και κτυπάει την ράβδο κάθετα στο μέσον της. Εάν η κρούση είναι ελαστική να βρείτε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση. (γ) Να βρείτε την στροφορμή της ράβδου συναρτήσεως του χρόνου.

4. Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R , μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Στην περιφέρεια της πλατφόρμας, που ακινητεί, στέκεται άνθρωπος μάζας m ο οποίος, τη χρονική στιγμή $t = 0$, εκτοξεύει μάζα m_0 εφαπτομενικά προς την περιφέρεια, με ταχύτητα v_0 , ως προς τον ίδιο. (α) Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα αρχίσει να περιστρέφεται, και υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω_0 . (β) Μόλις η πλατφόρμα συμπληρώσει ένα τέταρτο του κύκλου, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας (κατά μήκος μίας ακτίνας) με ταχύτητα v και σταματά σε απόσταση $R/2$ από το κέντρο. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του συστήματος Πλατφόρμα-Άνθρωπος για το χρονικό διάστημα που ο άνθρωπος μετακινείται. (γ) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής, από τη στιγμή που ο άνθρωπος σταματά και έπειτα.

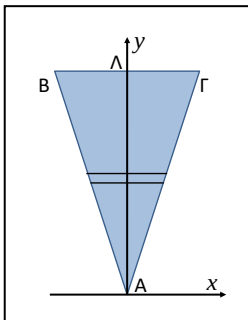


5. Δύο ιδανικά εκκρεμή αποτελούνται από σημειακές μάζες m_1, m_2 , και από αβαρείς ράβδους με μήκη L_1, L_2 , αντίστοιχα. Τα δύο εκκρεμή είναι αναρτημένα από ακλόνητα σημεία μέσα σε κατακόρυφο ομοιογενές βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση g , και συνδέονται μεταξύ τους, όπως στο σχήμα, με ελατήριο το οποίο έχει σταθερά σκληρότητας s και φυσικό μήκος ίσο με την απόσταση των δύο σημείων ανάρτησης των εκκρεμών. Διαταράσσουμε το σύστημα έτσι ώστε τα δύο εκκρεμή να εκτελούν ταλαντώσεις μικρών γωνιών, ($\sin \theta_1 \approx \theta_1, \sin \theta_2 \approx \theta_2$), στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

(α) Γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης για το κάθε εκκρεμές,

(β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κανονικές ταλαντώσεις της μορφής $x_1 = A \sin(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B \sin(\omega t + \varphi)$, αντικαταστήστε στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του ερωτήματος-α, και γράψτε τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα πλάτη A και B .

(γ) Υπολογίστε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, ω_1^2, ω_2^2 , συναρτήσει του ω_0^2 , αν $L_2 = 2L_1$, $m_2 = m_1/2$ και $g/L_1 = s/m_1 = \omega_0^2$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να ξεκινήσετε με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης κάθε εκκρεμούς περί το σημείο ανάρτησής του, $I_1 \ddot{\theta} = N$].



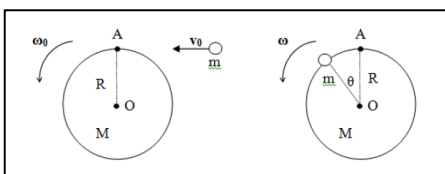
6. (α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας $I_A = I_A(M, \beta, \nu)$ λεπτού ισοσκελούς τριγώνου ABΓ, ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο που διέρχεται από την κορυφή A, αν είναι γνωστή η μάζα του M , η βάση του $B\Gamma = \beta$ και το ύψος του $A\Lambda = \nu$. (β) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_K = I_K(M, \beta, \nu)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας K. (γ) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του ίδιου τριγώνου, $I_\Lambda = I_\Lambda(M, \beta, \nu)$ ως προς άξονα κάθετο στο τρίγωνο, που διέρχεται από το μέσο Λ της βάσης του.

7. Σημειακή μάζα διαγράφει κλειστή επίπεδη τροχιά σε πεδίο κεντρικής δύναμης στο οποίο η δυναμική ενέργειά του είναι $U = kr^2$, όπου r η απόσταση της μάζας από το ελκτικό κέντρο O και $k > 0$. Αν η πλησιέστερη απόσταση της μάζας από το O είναι r_1 και η ταχύτητα της μάζας, όταν διέρχεται από την μεγαλύτερη απόσταση από το O, είναι v_1 , να υπολογιστεί η τιμή της μάζας m .

8. Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης R και ύψος H. Αποτελείται από υλικό του οποίου η πυκνότητα μεταβάλλεται με την απόσταση r από τον άξονα του κυλίνδρου σύμφωνα με τη σχέση $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, όπου ρ_0 είναι θετική σταθερά.

α) Να υπολογισθεί η μάζα M του κυλίνδρου

β) Να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του, συναρτήσει της μάζας M και της ακτίνας R.



γ) Θεωρήστε ότι ο κύλινδρος περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα που ταυτίζεται με τον άξονά του, με γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Τη χρονική στιγμή $t=0$, μια μικρή μάζα m με ταχύτητα v_0 κτυπάει και κολλάει στην άκρη του κυλίνδρου, όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος

αμέσως μόλις κολλήσει η μάζα στον κύλινδρο.

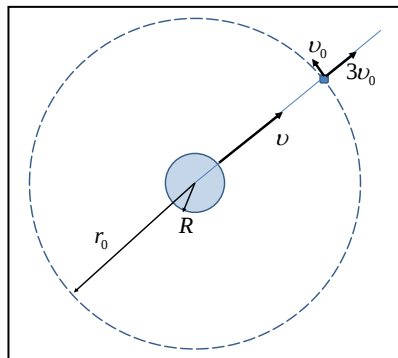
δ) Χρησιμοποιήστε τη σχέση $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N}$ για να υπολογίσετε το τετράγωνο της γωνιακής ταχύτητας $\omega'^2(\theta)$ όταν το σύστημα έχει περιστραφεί κατά γωνία θ , μετά την κρούση.

ε) Πόση δύναμη F ασκείται στη μάζα m από την «κόλληση», καθώς το σύστημα περιστρέφεται, για γωνία θ στο διάστημα $(0, \pi/2)$

9. Ένας μετεωρολογικός δορυφόρος μάζας m κινείται με ταχύτητα v_0 σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 γύρω από τη γη. Τα μετρητικά συστήματα του δορυφόρου έχουν καταστραφεί και η NASA θέλει να απαλλαγεί από τον δορυφόρο στέλνοντάς τον στο διάστημα μακριά από την γήινη ατμόσφαιρα και εκτός του πεδίου βαρύτητας της γης. Για τον σκοπό αυτό εκτοξεύεται ακτινικά ένα βλήμα μάζας m με αρχική ταχύτητα v , συγκρούεται με τον δορυφόρο με ταχύτητα $3v_0$ και ενσωματώνεται με αυτόν δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας $M=2m$.

α) Εξηγήστε γιατί η στροφορμή L του συσσωματώματος ως προς το κέντρο της γης διατηρείται και υπολογίστε την τιμή της.

β) Χρησιμοποιήστε πολικές συντεταγμένες για να αποδείξετε ότι η ολική ενέργεια του συσσωματώματος δίνεται από τη σχέση :

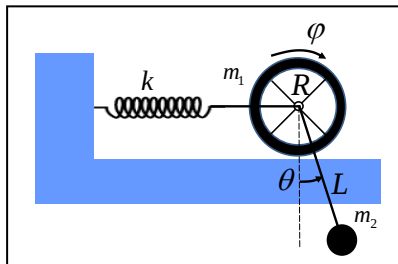
$$E = \frac{1}{2} M (dr/dt)^2 + \frac{L^2}{2Mr^2} + U(r)$$


Περιγράψτε ποιοτικά τις δυνατές κινήσεις του συσσωματώματος.

γ) Είναι αρκετή η ταχύτητα $3v_0$ του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να διαφύγει από το πεδίο βαρύτητας της γης; Σε αυτή την περίπτωση τί ταχύτητα θα έχει σε άπειρη – πολύ μεγάλη απόσταση από την γη;

δ) Για να ακολουθήσει το συσσωμάτωμα παραβολική τροχιά ($E=0$) πόση θα έπρεπε να είναι η αρχική ταχύτητα v του βλήματος;

Θεωρήστε ότι η γη είναι σφαιρική και έχει μάζα M_T .



10. Λεπτότοιχος κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας R είναι συνδεδεμένος, μέσω ελατηρίου σταθεράς k , με ακλόνητο σημείο. Από τον άξονα του κυλίνδρου είναι αναρτημένο εκκρεμές μάζας m_2 και μήκους αβαρούς νήματος L . Διαταράσσουμε το σύστημα ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος, ως προς την κατακόρυφο, να είναι μικρές, $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$, και ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο ($x_1 = R\phi$).

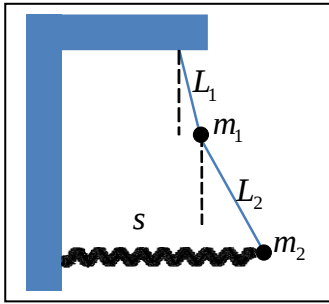
(Ροπή αδράνειας του λεπτότοιχου κυλίνδρου, περί τον άξονα συμμετρίας του: $I = m_1 R^2$).

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωμάτων m_1 και m_2 , από τις θέσεις ισορροπίας τους.

(β) Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B \cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες ω_1, ω_2 των ΚΤΤ συναρτήσει του ω_0 στην περίπτωση που $m_2 = 2m_1 = m$ και $k/m = g/L = \omega_0^2$.

[Υπόδειξη: Προς αποφυγή λαθών, ονομάστε F_{tr} την δύναμη της τριβής και T την τάση του νήματος]

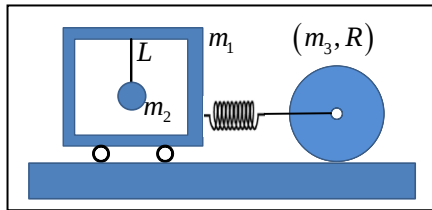
11. Δύο ιδανικά εκκρεμή με μάζες m_1, m_2 , και αβαρείς ράβδους μηκών L_1, L_2 αναρτώνται το ένα κάτω από το άλλο, και το δεύτερο συνδέεται με ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίου



σταθεράς s . Σε κατάσταση ισορροπίας, οι ράβδοι είναι κατακόρυφοι και το ελατήριο οριζόντιο, έχοντας το φυσικό του μήκος, ενώ το σύστημα βρίσκεται μέσα σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση g .

Διαταράσσουμε το σύστημα, έτσι ώστε να έχουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις του κάθε εκκρεμούς από την κατακόρυφο, (τέτοιες ώστε $\sin \theta_{1,2} \approx \tan \theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$), και όλο το σύστημα να βρίσκεται πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

- (α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις των μαζών από την κατάσταση ισορροπίας τους σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μικρών γωνιών.
 (β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0 , όταν $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $(s/m) = (g/L) = \omega_0^2$.



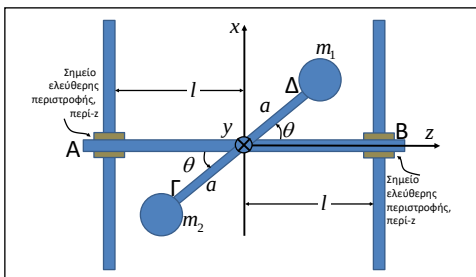
12. Όχημα μάζας m_1 ευρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, επί του οποίου μπορεί να κινείται χωρίς τριβές, έχει αναρτημένο στην οροφή του εκκρεμές (m_2, L) , και είναι συνδεδεμένο, μέσω ελατηρίου με σταθερά σκληρότητας s , με ομοιογενή κύλινδρο, μάζας m_3 και ακτίνας R , ο οποίος μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση στο ίδιο

οριζόντιο επίπεδο με το όχημα, όπως στο σχήμα [Ροπή αδράνειας κυλίνδρου, $I = mR^2/2$].

(α) Υποθέτοντας μικρή οριζόντια διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (έτσι ώστε ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς ολίσθηση και το εκκρεμές να διαγράφει μικρές γωνίες, $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$), να γράψετε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης για τις μετατοπίσεις x_1 , x_2 , x_3 του κάθε σώματος, αντίστοιχα, από τη θέση ισορροπίας.

(β) Υποθέτοντας Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης, $x_1 = A \cos(\omega t + \phi)$, $x_2 = B \cos(\omega t + \phi)$, $x_3 = \Gamma \cos(\omega t + \phi)$ να παράγετε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του συστήματος.

(γ) Να υπολογίσετε τις συχνότητες των Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, αν ισχύει $m_1 = m_2 = m = 3m_3/2$, $s/m = \omega_0^2 = g/L$, όπου g : η επιτάχυνση της βαρύτητας.

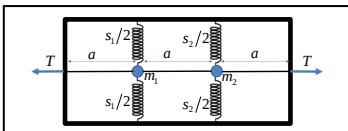


13. Δύο ράβδοι, AB (μήκους $2l$) και ΓΔ (μήκους $2a$), με αμελητέα μάζα, είναι συνδεδεμένοι ακλόνητα, υπό σταθερή γωνία θ . Η ράβδος AB διέρχεται από σημεία ελεύθερης περιστροφής περί τον άξονά της, που συμπίπτει με τον άξονα-z. Στα άκρα της ράβδου ΓΔ είναι στηριγμένες σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m$. Το σύστημα περιστρέφεται περί τον άξονα-z με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$.

(α) Να υπολογισθεί η στροφορμή του συστήματος, ως προς την αρχή του (x,y,z),

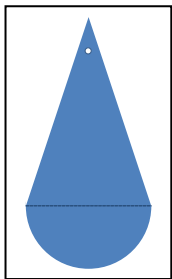
(β) Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της είναι $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε μάζα, αν το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.



14. Ιδανική χορδή αμελητέας μάζας και μήκους $L = 3a$, έχει ακλόνητα άκρα, τείνεται με τάση T και φέρει δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2 , σε απόσταση a μεταξύ τους και από τα άκρα της. Κάθε σωματίδιο είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια, με

σταθερές $s_1/2$ και $s_2/2$, αντίστοιχα, κάθετα στη χορδή, έτσι ώστε τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας. Το πλαίσιο στήριξης της χορδής και των ελατηρίων είναι ακλόνητο και το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας. Διαταράσσουμε τα σωματίδια από την κατάσταση ισορροπίας, κάθετα στην χορδή, ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος να είναι μικρές, $\theta \approx \sin \theta \approx \tan \theta$, και το σύστημα να διατηρείται στο αρχικό του επίπεδο. **(α)** Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωματιδίων από τις θέσεις ισορροπίας τους. **(β)** Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B \cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες, ω_1, ω_2 των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0 , στην περίπτωση που $m_1 = m_2$, $s_1 = s_2$, $T/(ma) = s/m = \omega_0^2$. **(γ)** Να υπολογιστούν οι λόγοι των πλατών A_1/B_1 και A_2/B_2 και οι κανονικές συντεταγμένες.



15. Μεγάλο ρολόι του τοίχου διαθέτει φυσικό εκκρεμές το οποίο αποτελείται από πλάκα σχήματος τριγώνου με βάση μήκους $2R$ και ύψος $3R$, στη βάση του οποίου είναι προσαρτημένη ημικυκλική πλάκα ακτίνας R (βλ. σχήμα). Το συνολικό εκκρεμές έχει μάζα M και διαθέτει μικρή τρύπα (αμελητέων διαστάσεων), που βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας του σχήματος και απέχει απόσταση $R/2$ από την κορυφή του τριγώνου. **(α)** Να υπολογιστεί το κέντρο μάζας του φυσικού εκκρεμούς. **(β)** Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του φυσικού εκκρεμούς, ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδο του φυσικού εκκρεμούς, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. **(γ)** Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ταλάντωσης του φυσικού εκκρεμούς, περί άξονα που διέρχεται από την τρύπα, κάθετα προς αυτό.