

ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΕΜΦΕ – ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2024-25
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-I, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΧΟΛΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΜΥ

Διδάσκοντες: Γ. Καραποστόλη, Ι. Ράπτης

Γ' ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

28/11/2024

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 20/12/24, οι 1, 2, 3, 4, 5.

[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν, ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις Εργασίες του Helios]

1. Δύναμη έχει τη μορφή $\vec{F}(x, y) = \hat{x}(A_1x + A_2y + A_3xy) + \hat{y}(B_1x + B_2y - B_3xy)$.

(α) Να βρείτε το έργο που παράγεται από την δύναμη, κατά την μετακίνηση του σημείου εφαρμογής της, σε ευθύγραμμη διαδρομή από το σημείο (0,0,0) ως το σημείο $(x_0, y_0 = ax_0, 0)$.

(β) Βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι (θετικές) σταθερές $(A_{1,2,3}, B_{1,2,3})$, (ή όσες εξ αυτών είναι απαραίτητο), ώστε η $\vec{F}(x, y)$ να είναι διατηρητική, για κάθε σημείο (x, y) .

(γ) Αν ισχύουν οι συνθήκες του ερωτήματος (β), να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y)$, με δεδομένο ότι $U(0, 0) = 0$.

2. Κυκλική οριζόντια πλατφόρμα μάζας M και ακτίνας R , μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας της. Άνθρωπος μάζας m , βρίσκεται πάνω στην πλατφόρμα σε απόσταση $r_0 (< R)$. (α) Ο συντελεστής τριβής πλατφόρμας-ανθρώπου είναι μ , και κάποια στιγμή ο άνθρωπος αρχίζει να κινείται διαγράφοντας κύκλο ομόκεντρο με την πλατφόρμα, με ακτίνα $r_0 (< R)$. Δείξτε ότι η πλατφόρμα θα περιστρέφεται, προσδιορίστε την φορά περιστροφής, σε σχέση με τη φορά κίνησης του ανθρώπου, και υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω της πλατφόρμας, αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του ανθρώπου, ως προς την πλατφόρμα, είναι v_R . (β) Ως προς το, μη-αδρανειακό, σύστημα αναφοράς της πλατφόρμας, υπολογίστε τις ψευδοδυνάμεις που αισθάνεται ο άνθρωπος, παράλληλα προς την επιφάνεια της πλατφόρμας. (γ) Διατυπώστε την εξίσωση κίνησης, ως προς το μη-αδρανειακό σύστημα της πλατφόρμας, και ως προς το αδρανειακό σύστημα του δαπέδου. (δ) Υπολογίστε την μέγιστη ταχύτητα v , που μπορεί να αναπτύξει ο άνθρωπος, χωρίς να αρχίσει να γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα.

$$\vec{F}_{\phi\gamma} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R), \quad \vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R$$

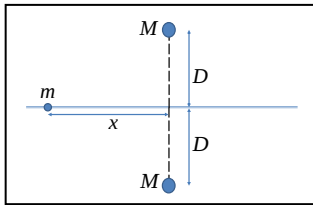
3. Θεωρείστε γνωστό ότι ένα ομογενές σφαιρικό κέλυφος με μάζα Δm , στα μεν σώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του δεν ασκεί καμία βαρυτική δύναμη, στα δε σώματα που βρίσκονται στο εξωτερικό του ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που θα ασκούσε μία σημειακή μάζα Δm , συγκεντρωμένη στο κέντρο του σφαιρικού κελύφους. (α) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται σε σημειακή μάζα, m_0 , που βρίσκεται σε απόσταση r , από το κέντρο ομογενούς σφαίρας ακτίνας R και μάζας M , είτε $F_1(r)$ για $r \geq R$, είτε $F_2(r)$ για $0 < r \leq R$. (β) Ιδανικό εκκρεμές, μήκους L μάζας m , μεταφέρεται σε ύψος $H = xR$, ($x \geq 0$), πάνω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_H , και στη συνέχεια σε βάθος $D = yR$, ($0 \leq y < 1$), κάτω από την επιφάνεια της Γης, όπου η κυκλική συχνότητα ταλάντωσής του μετράται ίση με ω_D . Η Γη θεωρείται ως ιδανική ομοιογενής σφαίρα ακτίνας R . Υπολογίστε το λόγο ω_D/ω_H συναρτήσει των $\{x, y\}$. [Δίνεται ο όγκος σφαίρας, ακτίνας r : $V(r) = 4\pi r^3/3$]

ΥΠΟ-ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

(β1) Βρείτε την κοινή τιμή $H=D=?$, για την οποία το ω_D/ω_H διέρχεται από ακρότατο.

(β2) Βρείτε την κοινή τιμή $H=D\neq 1$, για την οποία οι δύο συχνότητες είναι ίδιες.

(β3) Βρείτε την τιμή $H=2D\neq 2R$, για την οποία το ω_D/ω_H διέρχεται από ακρότατο



4. Σημειακή μάζα m είναι περιορισμένη να κινείται χωρίς τριβές πάνω σε ράβδο που συμπίπτει με τον άξονα- x . Δύο ίσες σημειακές μάζες M βρίσκονται στα σημεία $(x=0, y=\pm D)$ και κρατούνται ακλόνητες. Οι τρεις μάζες αλληλεπιδρούν βαρυτικά, και το σύστημα βρίσκεται μακριά από την επίδραση άλλων μαζών.

Δίνεται η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ για

το σύστημα δύο μαζών, M και m , σε απόσταση r .

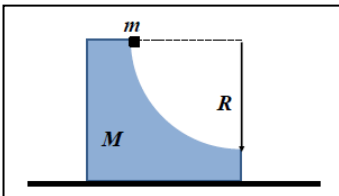
(α) Υπολογίστε, ως συνάρτηση του x , τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U=U(x)$ της μάζας m , υπό την βαρυτική επίδραση των δύο άλλων μαζών M και σχεδιάστε προσεγγιστικά την $U=U(x)$.

(β) Δείξτε ότι το μέσον μεταξύ των δύο ακλόνητων μαζών M είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας για τη μάζα m και, για μικρές απομακρύνσεις από αυτό το σημείο, η μάζα m εκτελεί, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση της οποίας να υπολογισθεί η συχνότητα.

(γ) Αν η μάζα m αφεθεί σε πεπερασμένη απόσταση $x_0 = D\sqrt{3}$ από το μέσο των των δύο

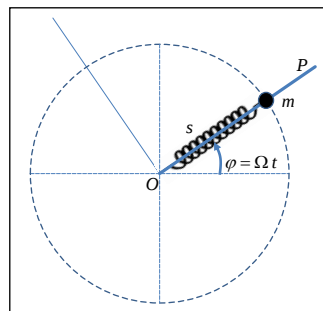
μαζών M , με αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0 = \sqrt{\frac{4GM}{6D}}$, να δείξετε ότι θα εκτελέσει περιοδική

κίνηση, να υπολογίσετε το εύρος $2x_{\max}$ αυτής της κίνησης, την ταχύτητα $v=v(x)$, ως συνάρτηση της θέσης, και να γράψετε το ολοκλήρωμα από το οποίο μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος αυτής της κίνησης.



5. Σημειακή μάζα m αφήνεται στο ανώτατο σημείο μίας άλλης μάζας M η οποία φέρει μία κοίλη κυλινδρική επιφάνεια (τεταρτοκύκλιο ακτίνας R , όπως στο σχήμα) και μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σε οριζόντιο επίπεδο, ενώ και μεταξύ των μαζών m και M δεν υπάρχει τριβή. Το σύστημα βρίσκεται σε σταθερό κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο με επιτάχυνση βαρύτητας g .

Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία φτάνει η μάζα m στο κατώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου και να μελετηθούν οι οριακές περιπτώσεις, $M \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$, $M = m$.



6. Ράβδος OP περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O , με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω =σταθ.. Η ράβδος περιβάλλεται από ελατήριο φυσικού μήκους L_0 και σταθεράς σκληρότητας s , το ένα άκρο του οποίου είναι συνδεδεμένο στο άκρο O της ράβδου, ενώ στο άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένη σημειακή μάζα m , τέτοια ώστε $s/m = \omega_0^2 > \Omega^2$. (α) Αν, κατά τη μόνιμη περιστροφή της ράβδου, η μάζα m διατηρείται σε σταθερή απόσταση από το άκρο O , να υπολογιστεί, συναρτήσει των L_0, ω_0, Ω , η σταθερή επιμήκυνση x_0

του ελατηρίου. (β) Κατά την μόνιμη περιστροφή της ράβδου, απομακρύνουμε λίγο τη μάζα m κατά μήκος της ράβδου, από την σταθερή της απόσταση ως προς το O . Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες $[\varphi(t)=\Omega t, \rho(t)=L_0+x_0+x(t)]$, δείξτε ότι η μάζα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση, κατά μήκος της ράβδου, και προσδιορίστε την κυκλική συχνότητα ω

αυτής της ταλάντωσης. (γ) Υπολογίστε την κάθετη δύναμη F_φ που ασκείται από τη ράβδο στη σημειακή μάζα m , κατά τις περιπτώσεις (α) και (β).

Όλο το φαινόμενο μελετάται εκτός πεδίου βαρύτητας και δεν υπάρχουν τριβές.

[Επιτάχυνση σε Πολικές συντεταγμένες: $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi}$]

7. Σώμα μάζας m μπορεί να κινείται κατά μήκος του θετικού άξονα- x , ($x > 0$), σε περιοχή

στην οποία η συνάρτηση δυναμικής ενέργεια δίνεται από την έκφραση $U(x) = -\frac{Ax}{b^2 + x^2}$

όπου (A, b) θετικές σταθερές. (α) Υπολογίστε τα σημεία ισορροπίας του σώματος και το είδος της ισορροπίας, και σχεδιάστε ένα ποιοτικό σκαρίφημα της $U(x)$ (β) Θεωρήστε ότι, ενώ το σώμα βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, του προσδίδεται μία μικρή κινητική ενέργεια, σε σχέση με την απόλυτη τιμή της δυναμικής του ενέργειας, και δείξτε ότι το σώμα θα εκτελέσει, με καλή προσέγγιση, αρμονική ταλάντωση, και υπολογίστε την κυκλική συχνότητα ω_0 αυτής της ταλάντωσης. (γ) Όταν το σώμα βρίσκεται στο σημείο ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, να υπολογίστε την κρίσιμη ταχύτητα $v_{0\kappa\rho}$ του σώματος, κάτω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση πεπερασμένου πλάτους (είναι δέσμιος) και πάνω από την οποία το σώμα εκτελεί κίνηση άπειρου πλάτους (είναι ελεύθερο). (δ) Υπολογίστε τα σημεία αναστροφής της πορείας του σώματος, (x_1, x_2) όταν αυτό αφεθεί στη θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας με ταχύτητα $v_0 = v_{0\kappa\rho}/2$.

8. Η δυναμική ενέργεια ενός διατομικού μορίου είναι ίση με $U(r) = -U_0 + U_0 \left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$,

όπου r είναι η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων και U_0 και a είναι θετικές σταθερές. Έστω ότι το ένα άτομο παραμένει ακίνητο στη θέση $r=0$. (α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(r)$. (β) Βρείτε τη δύναμη που ασκείται στο ελεύθερο άτομο. Εξηγήστε για ποια r είναι η δύναμη ελκτική, μηδενική, απωστική. (γ) Το ελεύθερο άτομο βρίσκεται αρχικά στη θέση $r = 3r_0/2$ και αφήνεται να κινηθεί, με μηδενική ταχύτητα. Βρείτε τη μέγιστη ταχύτητα που θα αποκτήσει. Περιγράψετε την κίνηση που θα επακολουθήσει. (δ) Αν μπορούσαμε να συμπίεσουμε τα δύο άτομα, έτσι ώστε να πλησιάσουν σε απόσταση μικρότερη από την απόσταση ευσταθούς ισορροπίας τους, πόση πρέπει να γίνει η μεταξύ τους απόσταση ώστε, όταν αφεθούν ελεύθερα, να απομακρυνθούν με τρόπο ώστε να διασπασθεί το μόριο; $a > \ln 2 / r_0$.

9. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς S και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho} = -r\vec{v}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$, ($\gamma = r/2m$), $\left(\gamma^2 = \omega_0^2 \equiv \frac{S}{m} \Rightarrow r = 2\sqrt{sm}\right)$.

(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t = 0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα v_0 , υπολογίστε τις σταθερές A και B .

(β) Αν $v_0 = -2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα διέρχεται από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0 , και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r = \sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας Q .

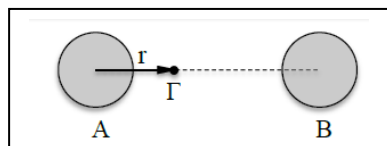
10. Σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινηθεί σε 1-διάσταση (x) μέσα σε διατηρητικό πεδίο δυνάμεων, η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας του οποίου είναι μηδέν παντού πλὴν της περιοχής $-x_0 \leq x \leq x_0$, εντός της οποίας έχει τη μορφή $U(x) = c(x_0^2 - x^2)$, $c > 0$.

(α) Σχεδιάστε την $U(x)$. Προσδιορίστε τα σημεία και το είδος ισορροπίας του πεδίου.

(β) Το σωματίδιο αφήνεται στη σημείο $x_1 = -2x_0$ με ταχύτητα $\vec{v}_0 = +\hat{x}(x_0\sqrt{2.2c/m})$. Δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το $x=0$, υπολογίστε την ταχύτητα διέλευσης, και μελετήστε την κίνηση του σωματιδίου στη συνέχεια.

(γ) Αν $U(x) = c(x^2 - x_0^2)$, $c > 0$, και τη στιγμή $t=0$ αφήσουμε το σωματίδιο στο σημείο $x_1 = -2x_0$ με ταχύτητα $\vec{v}_0 = +\hat{x}(x_0\sqrt{2c/m})$, δείξτε ότι το σωματίδιο θα περάσει από το σημείο $x_2 = +2x_0$ και υπολογίστε τη χρονική στιγμή και την ταχύτητα διέλευσης από αυτό το σημείο. $\left[\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} \right]$.

11. Απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα m και σταθερά ελατηρίου s , διεγείρεται από μία δύναμη $F=F_0\sin(\omega t)$. α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση $x=x(t)$, στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=0$ και $\dot{x}(t=0)=v_0$. β) Για συχνότητες διέγερσης κοντά στη συχνότητα $\omega_0=\sqrt{s/m}$, θεωρήστε ότι $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ (όπου $\Delta\omega$ μικρό και τέτοιο ώστε $\Delta\omega t \ll 1$). Αναπτύσσοντας τη λύση του ερωτήματος (α) γύρω από το ω_0 , να δείξετε ότι το πλάτος της μετατόπισης αυξάνει γραμμικά με το χρόνο.



12. Δύο αφαιρικά σώματα A και B με μάζες M_A , $M_B=4M_A$ και ακτίνες $R_A=R_B$, βρίσκονται σε σταθερή απόσταση $R=9R_A$. Ένα σώμα Γ, μάζας m , και αμελητέων διαστάσεων, τοποθετείται σε απόσταση r από το κέντρο του σώματος A, πάνω στην ευθεία που ορίζεται από τα κέντρα των δύο

σωμάτων A, B.

(α) Βρείτε τη δυναμική ενέργεια του σώματος Γ λόγω της βαρύτητας των δύο σωμάτων A, B, συναρτήσει του r . [Υπόδειξη: η βαρυτική δυναμική ενέργεια δύο σφαιρικών μαζών είναι

$$U_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}}, \text{ όπου } r_{12} \text{ είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων τους].$$

(β) Σχεδιάστε το διάγραμμα της δυναμικής ενέργειας του ερωτήματος (α), για $R_A \leq r \leq R - R_B$. Υπάρχει σημείο ισορροπίας για το σώμα Γ; Αν ναι, εξετάστε την ευστάθειά του.

(γ) Πόση κινητική ενέργεια πρέπει να δοθεί στο σώμα Γ, αν βρεθεί στην επιφάνεια του σώματος A ώστε να καταφέρει να φτάσει στην επιφάνεια του σώματος B;

(δ) Περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σώματος Γ, αν βρίσκεται στην επιφάνεια του σώματος A και του δοθεί η μισή κινητική ενέργεια από αυτή που απαιτείται στο ερώτημα (γ).

13. Σωματίδιο μάζας m κινείται στο επίπεδο (x, y) , υπό την επίδραση ενός δυναμικού πεδίου, για το οποίο η δύναμη έχει τη μορφή $\vec{F}(x, y) = -\hat{x}(Ax + By) - \hat{y}(Cx + Dy)$.

(α) Βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι (θετικές) σταθερές (A, B, C, D) , (ή όσες εξ αυτών είναι απαραίτητο), προκειμένου η δύναμη $\vec{F}(x, y)$ να είναι διατηρητική.

Αν η δύναμη είναι διατηρητική:

(β) Να βρείτε το έργο που παράγεται από το δυναμικό αυτό πεδίο επί του σωματιδίου κατά την μετακίνησή του από το σημείο $(-1, -1)$ ως το σημείο $(1, 1)$ ακολουθώντας: (β1). Την (ευθύγραμμη) διαδρομή $(-1, -1) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (1, 1)$, και (β2). Την (ευθύγραμμη) διαδρομή $(-1, -1) \rightarrow (1, -1)$ ακολουθούμενη από την (ευθύγραμμη) διαδρομή $(1, -1) \rightarrow (1, 1)$. Εξηγήστε!

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x, y)$, με δεδομένο ότι $U(0, 0) = 0$.

14. Οι συντεταγμένες ενός σώματος με μάζα m , που κινείται στο επίπεδο (x, y) , είναι: $x = a \sin \omega t$, $y = b \cos \omega t$.

(α) Δείξτε ότι το σώμα διαγράφει ελλειπτική τροχιά και υπολογίστε τους ημιάξονες αυτής της έλλειψης

(β) Υπολογίστε τη δύναμη που ασκείται στο σώμα και δείξτε ότι είναι κεντρική:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$$

(γ) Προσθέστε την κινητική και τη δυναμική ενέργειά του σώματος σε κάθε θέση (x, y) , δείξτε ότι αυτή είναι σταθερή και υπολογίστε αυτή την σταθερή τιμή E_0 συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος (a, b, m, ω) .

(δ) Δείξτε ότι σε ένα σύστημα αξόνων (r, ν) , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\nu = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, (χώρος των φάσεων), τα διαδοχικά στιγμιότυπα του συστήματος σχηματίζουν επίσης μία έλλειψη, και υπολογίστε τους ημιάξονες αυτής της έλλειψης.

(ε) Δείξτε ότι η ποσότητα $m(\dot{x}y - y\dot{x})$ είναι σταθερή. Τι αντιπροσωπεύει αυτή η ποσότητα και ποιός είναι ο φυσικός λόγος που έχει σταθερή τιμή

15. Σωματίδιο μάζας m κινείται σε περιοχή που χαρακτηρίζεται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας εξαρτώμενη μόνο από μία διάσταση, σύμφωνα με τη σχέση

$$U(x) = U_0 a^2 \frac{(x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^2}. \quad (\alpha) \text{ Υπολογίστε την δύναμη } \vec{F} = \vec{F}(x). \quad (\beta) \text{ Βρείτε τα σημεία}$$

μηδενισμού της δυναμικής ενέργειας και τα σημεία μηδενισμού της δύναμης και σχεδιάστε ποιοτικά το μέγεθος $U(x)/U_0$ συναρτήσεις του x . (γ) Βρείτε τα σημεία ευσταθούς και ασταθούς ισορροπίας, καθώς και τη συχνότητα ταλαντώσεων μικρού πλάτους γύρω από τα σημεία ευσταθούς ισορροπίας. (δ) Βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να δοθεί στο σωματίδιο όταν έχει την ελάχιστη δυναμική ενέργεια, πέραν της οποίας το σωματίδιο μπορεί να διαφύγει προς το $x \rightarrow \infty$. Σε αυτή την περίπτωση, ποιο θα είναι το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου καθώς $x \rightarrow \infty$. (ε) Βρείτε τα όρια της περιοχής μέσα στην οποία κινείται το σωματίδιο όταν η συνολική του ενέργεια είναι μηδενική, καθώς και τη μέγιστη ταχύτητα και το σημείο στο οποίο αυτή λαμβάνει χώρα, σε αυτή την περίπτωση.