



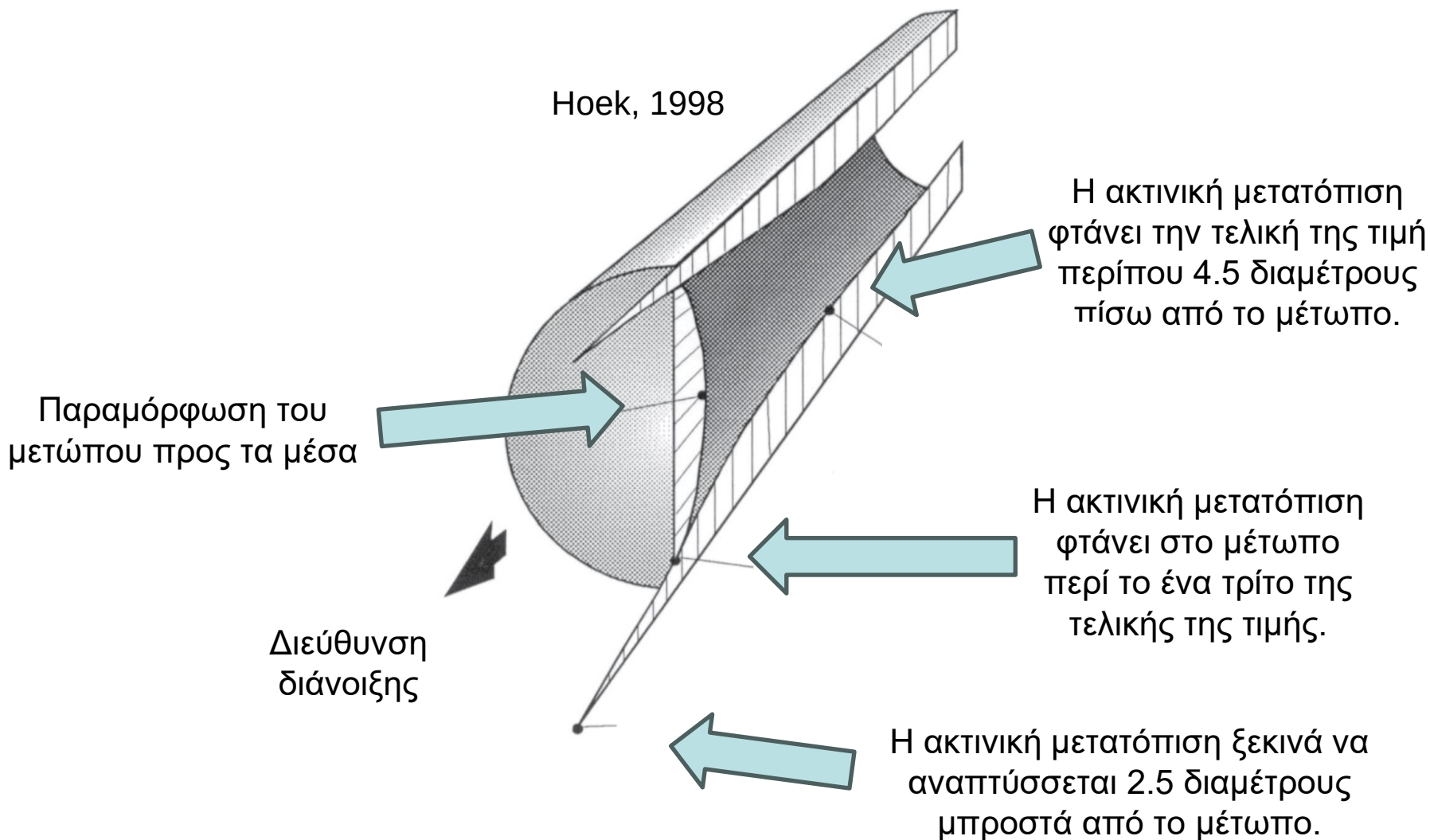
Σχεδιασμός Υπογείων Έργων

Αντώνης Ζερβός

Διαφάνειες βασισμένες σε διδακτικό υλικό του Καθηγ. Β. Παπαδόπουλου

ΣΗΡΑΓΓΕΣ: ΕΛΑΣΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

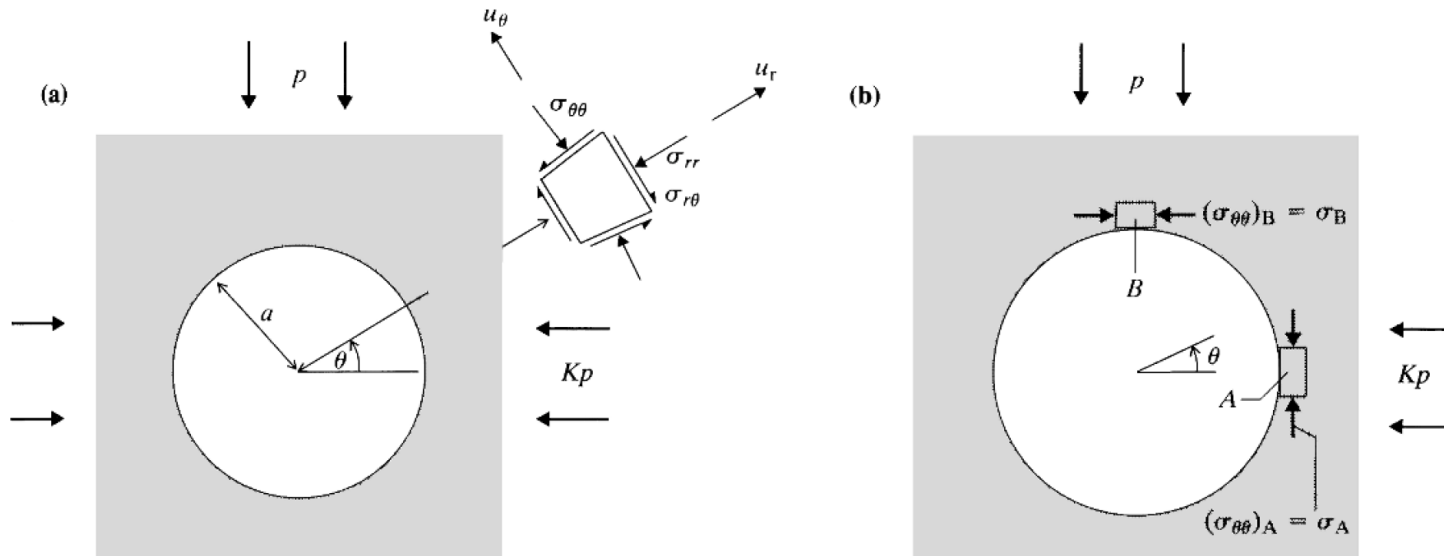
Παραμορφώσεις κατά τη διάνοιξη



Γιατί γραμμική ελαστικότητα;

- Το πεδίο τάσεων προκύπτει λύνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας.
 - Μικρή/καθόλου εξάρτηση από ελαστικές σταθερές.
 - Λύσεις «περίπου» σωστές και για ανελαστικά υλικά.
- Υπάρχουν έτοιμες λύσεις για διαφορετικές γεωμετρίες και φορτίσεις.
 - Π.χ. Elastic solutions for soil and rock mechanics, των Poulos και Davis.
- Μπορεί να γίνει χρήση της αρχής της επαλληλίας για πιο σύνθετα προβλήματα.

Σήραγγα κυκλικής διατομής



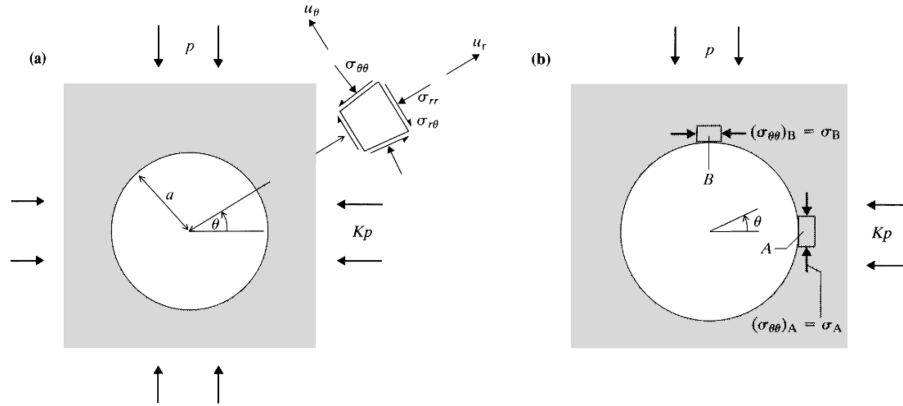
Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 - K) \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

Kirsch, 1898
(Brady and Brown, 2006)



Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 - K) \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

Kirsch, 1898
(Brady and Brown, 2006)

• $\Gamma \propto r \rightarrow a$:

$$\sigma_{\theta\theta} = p[(1 + K) + 2(1 - K) \cos 2\theta]$$

$$\sigma_{rr} = 0$$

$$\sigma_{r\theta} = 0$$

• $\Gamma \propto r \rightarrow \infty$ ($\theta = 0^0$):

$$\sigma_{rr} = Kp, \quad \sigma_{\theta\theta} = p, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$

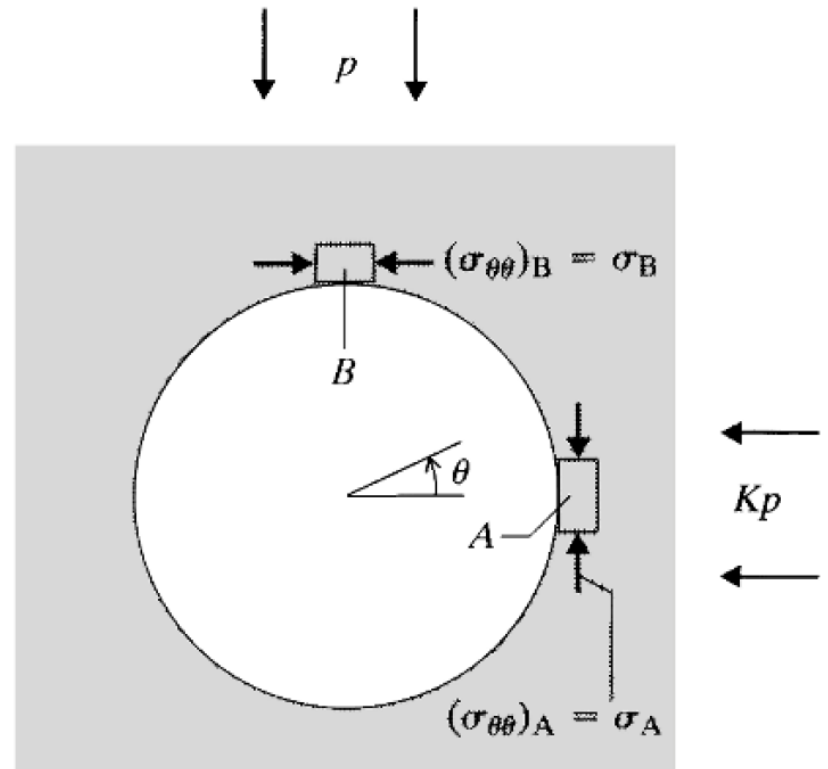
$$\text{Για } r \rightarrow a: \sigma_{\theta\theta} = p[(1 + K) + 2(1 - K) \cos 2\theta]$$

$$\text{Για } K = 1: \sigma_{\theta\theta} = 2p$$

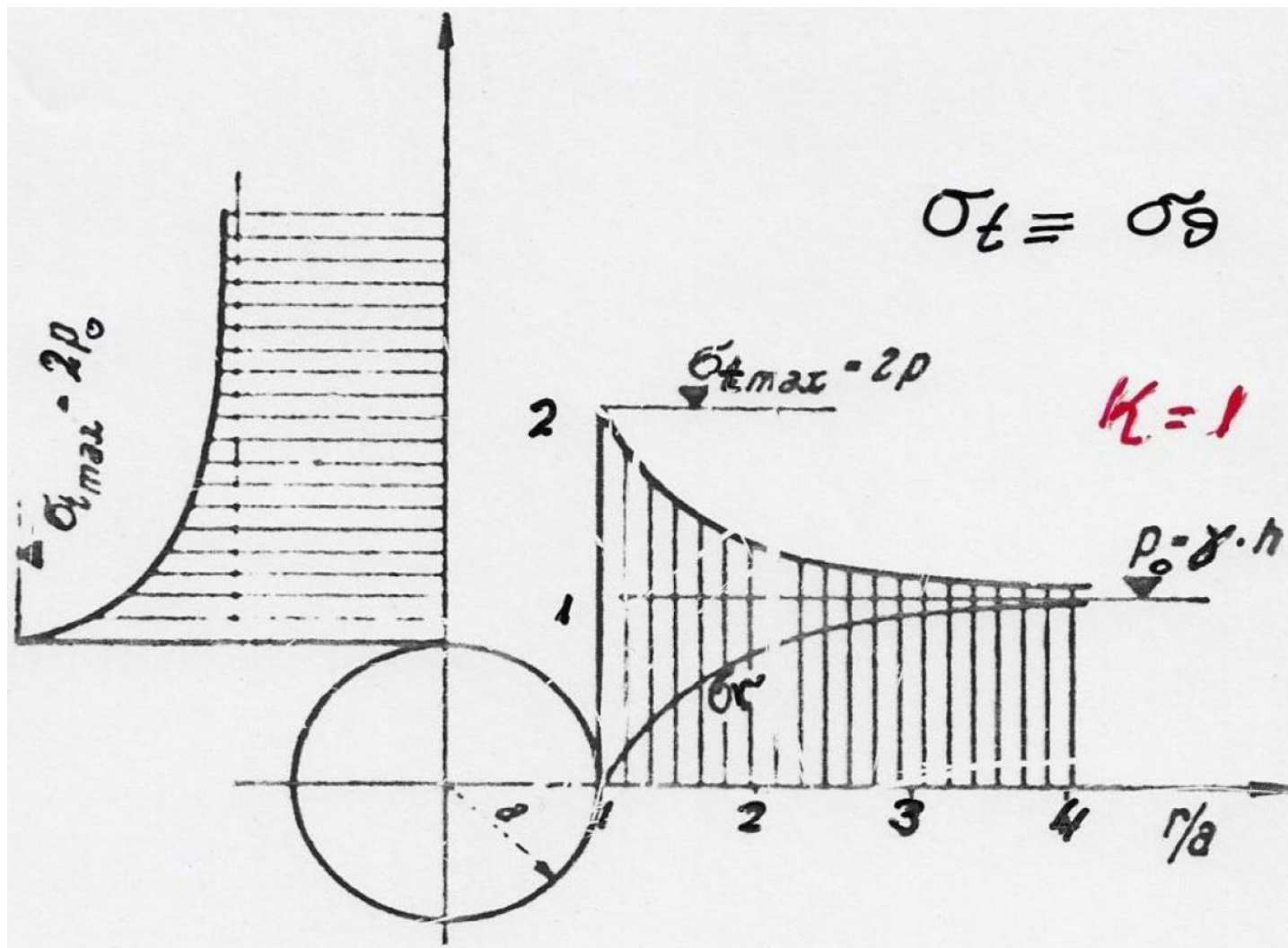
$$\text{Για } K = 0:$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 3p \quad (\theta = 0^\circ)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p \quad (\theta = 90^\circ)$$

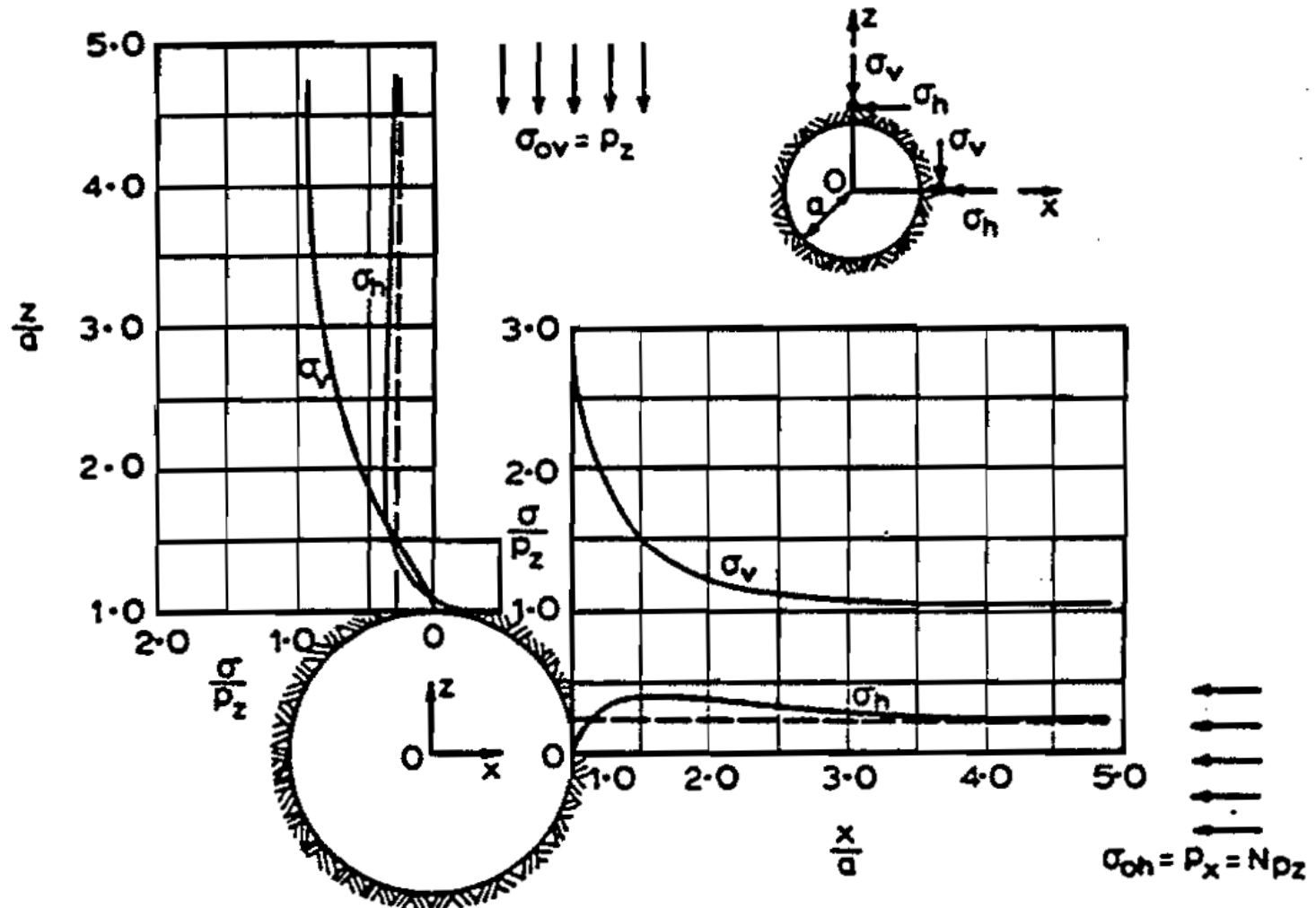


Ενδεικτικές κατανομές τάσεων



(Από σημειώσεις Β. Παπαδόπουλου)

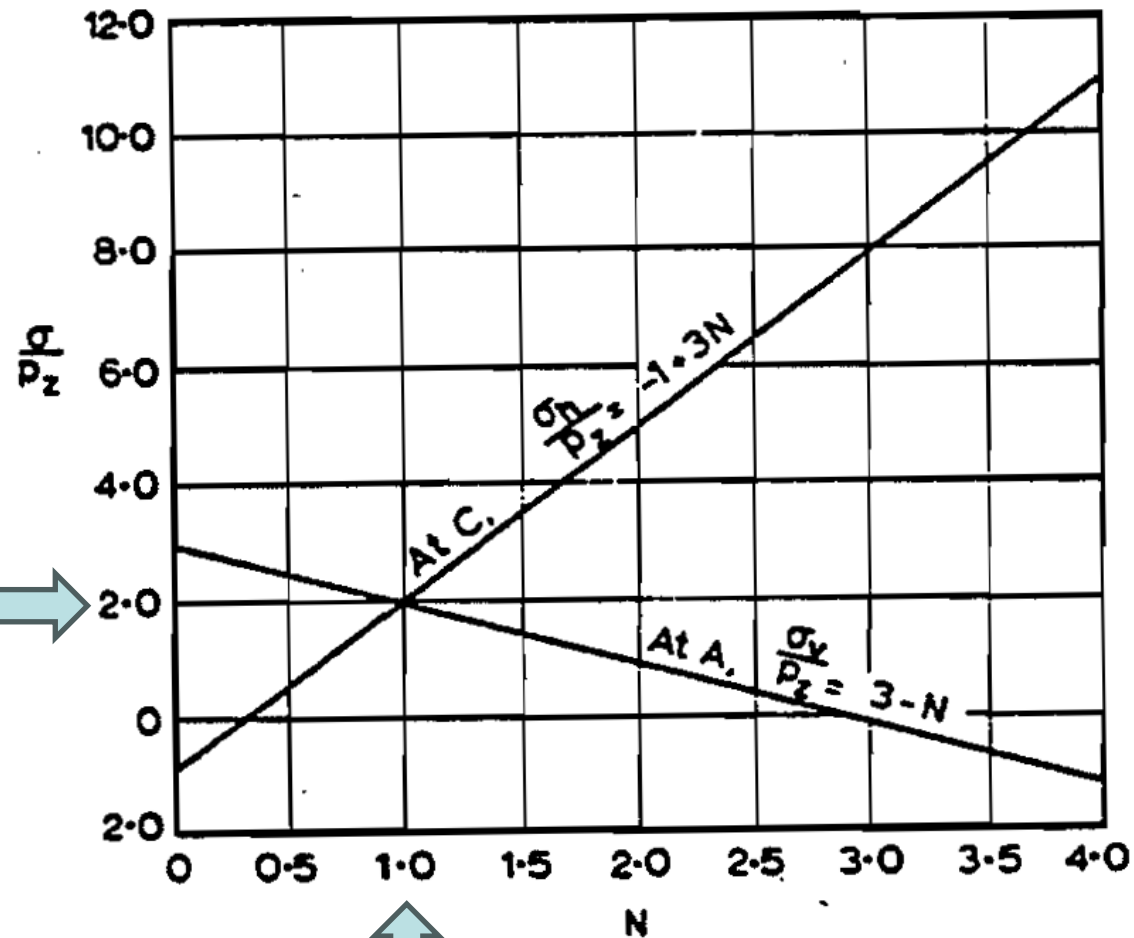
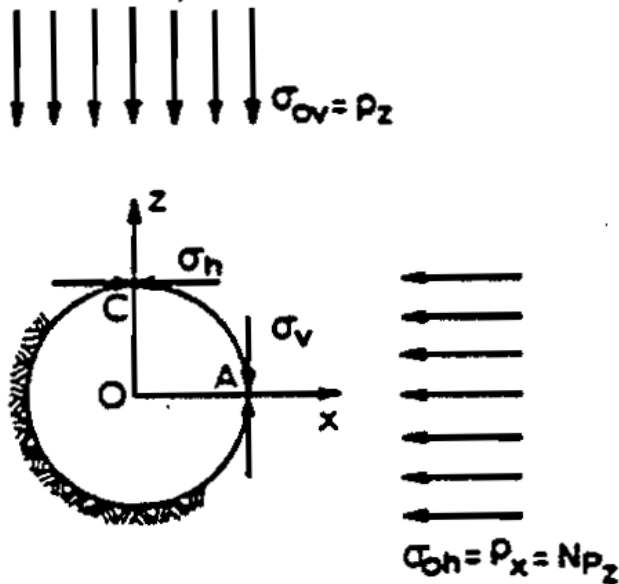
$K=1.0$

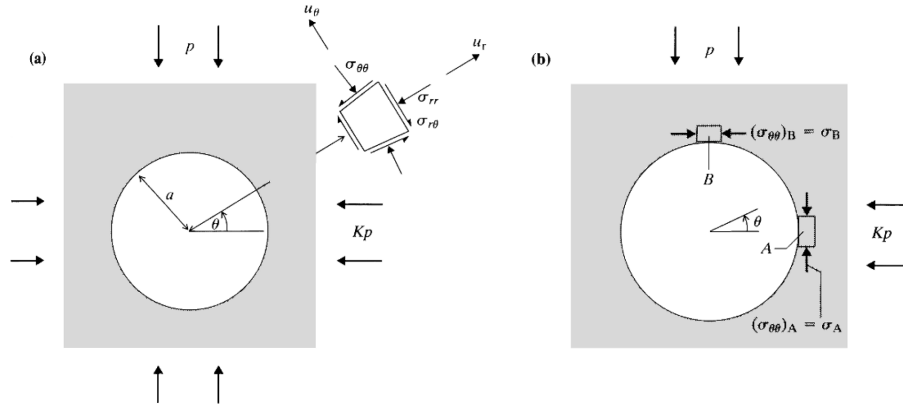


Terzaghi and Richart, 1952
(Poulos and Davis, 1974)

$K=0.25$

Ακραίες εφαπτομενικές τάσεις





Brady and Brown, 2006

$$\sigma_{rr} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) - (1 - K) \left(1 - 4 \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 + K) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + (1 - K) \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{p}{2} \left[(1 - K) \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \right]$$

Kirsch, 1898
(Brady and Brown, 2006)

Μετατοπίσεις: (σημ.: $G = E/[2(1 + \nu)]$)

$$u_r = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[(1 + K) - (1 - K) \left\{ 4(1 - \nu) - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right]$$

$$u_\theta = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[(1 - K) \left\{ 2(1 - 2\nu) + \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2\theta \right]$$

Ακτινικές μετατοπίσεις

$$u_r = -\frac{pa^2}{4Gr} \left[(1 + K) - (1 - K) \left\{ 4(1 - \nu) - \frac{a^2}{r^2} \right\} \cos 2\theta \right]$$

- Στην άντυγα ($r=a$):

$$u_r = -\frac{pa}{4G} [(1 + K) - (1 - K) \cdot 4(1 - \nu) \cdot \cos 2\theta]$$

- Στην άντυγα για $K=1$: $u_r = -\frac{pa}{2G}$

- Στην άντυγα για $K=0$:

$$u_r = -\frac{pa}{4G} [1 - 4(1 - \nu) \cdot \cos 2\theta]$$

Μέτρο ελαστικότητας βραχώμαζας

Κατά Hoek and Diederichs (2005):

$$E_{rm}(MPa) = 100000 \left(\frac{1-D/2}{1+e^{(75+25D-GSI)/11}} \right)$$

(απλουστευμένη)

$$E_{rm} = E_i \left(0.02 + \frac{1-D/2}{1+e^{(60+15D-GSI)/11}} \right)$$

$$E_i = (MR)\sigma_{c,i}$$

MR: σταθερά παραμορφωσιμότητας (modulus ratio)

Ενδεικτικές τιμές του MR

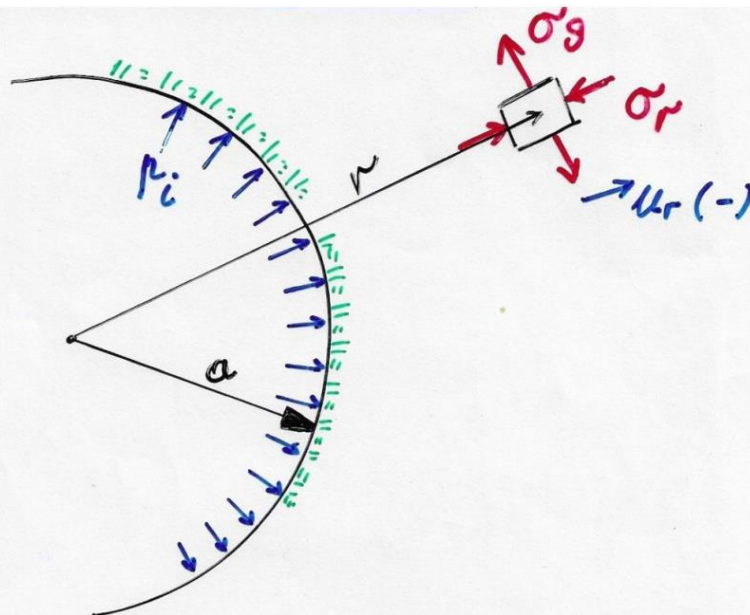
Rock type	Class	Group	Texture			
			Coarse	Medium	Fine	Very fine
Sedimentary	Clastic		Conglomerates 300–400 Breccias 230–350	Sandstones 200–350	Siltstones 350–400 Greywackes 350	Claystones 200–300 Shales 150–250 ^a Marls 150–200
	Non-clastic	Carbonates	Crystalline limestones 400–600	Sparitic limestones 600–800	Micritic Limestones 800–1000	Dolomites 350–500
		Evaporites		Gypsum (350) ^b	Anhydrite (350) ^b	
		Organic				Chalk 1000 +
Metamorphic	Non-foliated		Marble 700–1000	Hornfels 400–700 Metasandstone 200–300	Quartzites 300–450	
	Slightly foliated		Migmatite 350–400	Amphibolites 400–500	Gneiss 300–750 ^a	
	Foliated ^a			Schists 250–1100 ^a	Phyllites/Mica Schist 300–800 ^a	Slates 400–600 ^a
Igneous	Plutonic	Light	Granite ^c 300–550 Granodiorite ^c 400–450	Diorite ^c 300–350		
		Dark	Gabbro 400–500 Norite 350–400	Dolerite 300–400		
	Hypabyssal			Porphyries (400) ^b	Diabase 300–350	Peridotite 250–300
	Volcanic	Lava		Rhyolite 300–500 Andesite 300–500	Dacite 350–450 Basalt 250–450	
		Pyroclastic	Agglomerate 400–600	Volcanic breccia (500) ^b	Tuff 200–400	

^aHighly anisotropic rocks: the value of MR will be significantly different if normal strain and/or loading occurs parallel (high MR) or perpendicular (low MR) to a weakness plane. Uniaxial test loading direction should be equivalent to field application.

^bNo data available, estimated on the basis of geological logic.

^cFelsic Granitoids: coarse grained or altered (high MR), fined grained (low MR).

Εσωτερική πίεση p_i



ΠΙΕΣΕΙΣ ΜΟΝΟΝ ΛΟΓΩ ΤΗΣ p_i

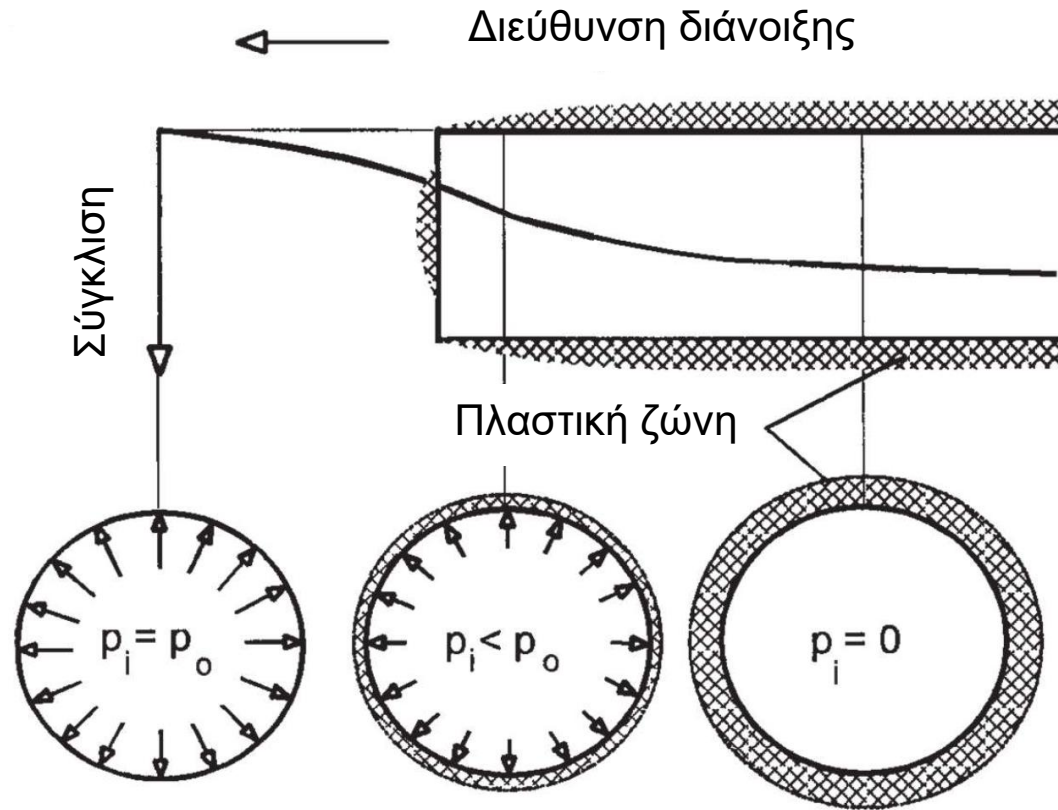
$$\sigma_r = + p_i \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{θλιπτική})$$

$$\sigma_\theta = - p_i \frac{a^2}{r^2} \quad (\text{έφελκυστική})$$

$$(u_r = - \frac{p_i a (1+\nu)}{E})$$

(Από σημειώσεις Β. Παπαδόπουλου)

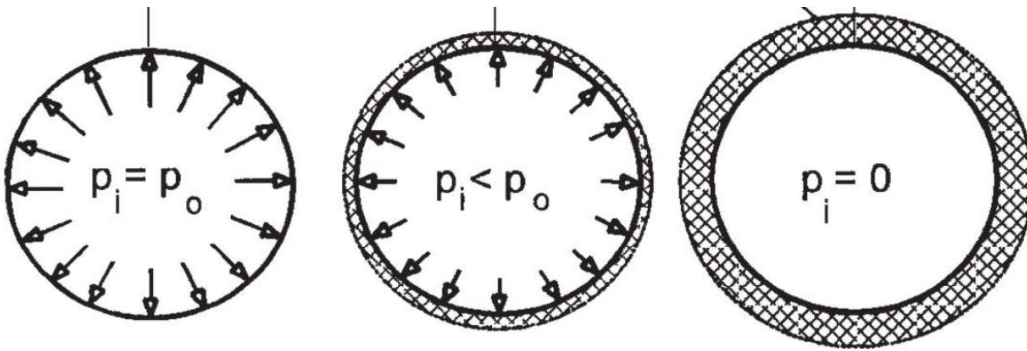
Προσομοίωμα ισοδύναμης πίεσης



Hoek, 1999

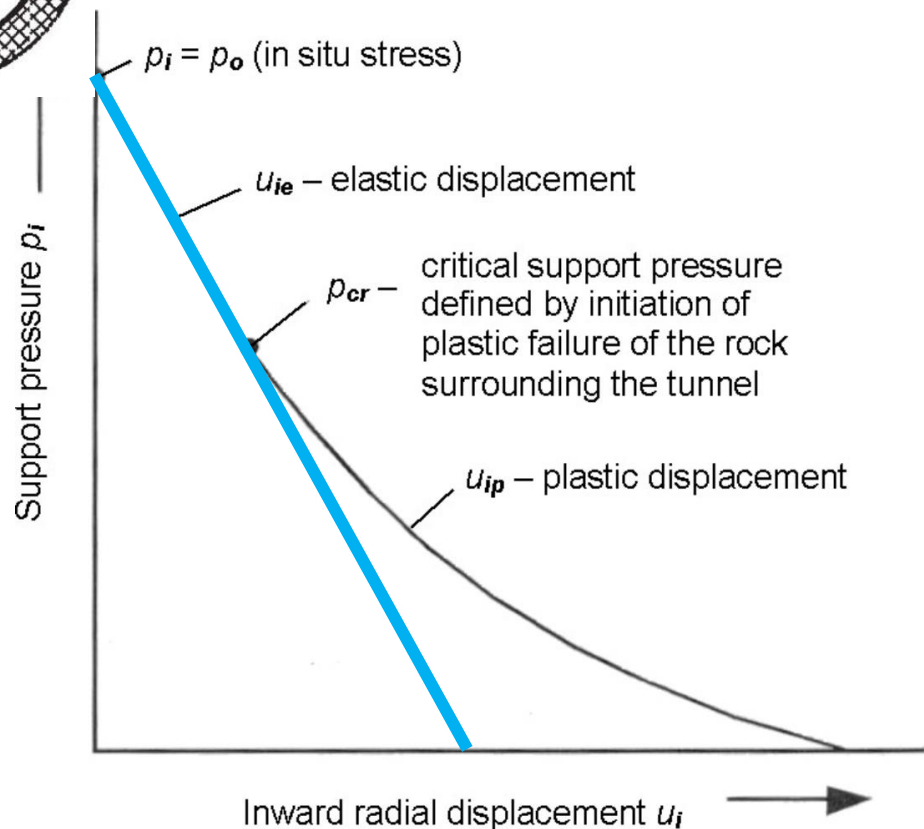
Πίεση υποστήριξης σε διαφορετικές θέσεις ως προς το μέτωπο.

Αρχές της μεθόδου σύγκλισης-αποτόνωσης

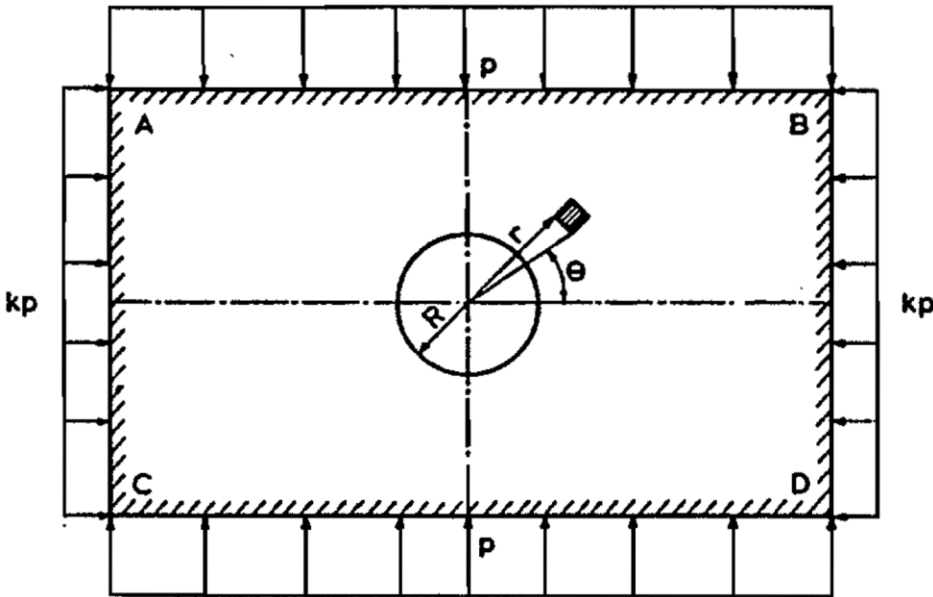


Για $K=1$, $u_r = \frac{a}{2G} (p_o - p_i)$

Καθώς το μέτωπο προωθείται, $p_i \rightarrow 0$



Επενδεδυμένη σήραγγα



Poulos and Davis, 1974

$$\sigma_r = \frac{1}{2}p \left\{ (1+k) \left[1 - a_1 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - (1-k) \left[1 - 3a_2 \left(\frac{R}{r} \right)^4 - 4a_3 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}p \left\{ (1+k) \left[1 + a_1 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + (1-k) \left[1 - 3a_2 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \cos 2\theta \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2}p(1-k) \left[1 + 3a_2 \left(\frac{R}{r} \right)^4 + 2a_3 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \sin 2\theta$$

Πλήρης συνάφεια
(NS – no slippage)

$$a_1 = \frac{(1-2\nu)(C-1)}{(1-2\nu)C+1}$$

$$a_2 = \frac{(1-2\nu)(1-C)F - \frac{1}{2}(1-2\nu)^2 C + 2}{[(3-2\nu) + (1-2\nu)C]F + (\frac{5}{2} - 8\nu + 6\nu^2)C + 6 - 8\nu}$$

$$a_3 = \frac{[1 + (1-2\nu)C]F - \frac{1}{2}(1-2\nu)C - 2}{[(3-2\nu) + (1-2\nu)C]F + (\frac{5}{2} - 8\nu + 6\nu^2)C + 6 - 8\nu}$$

Ελεύθερη ολίσθηση
(FS – free slippage)

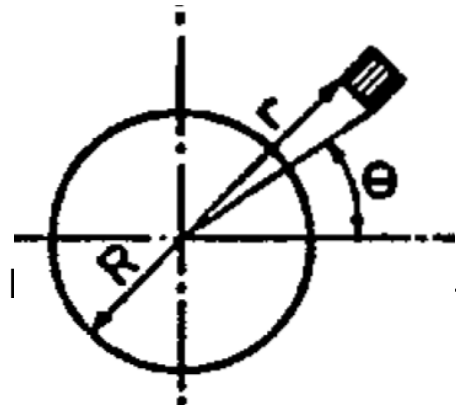
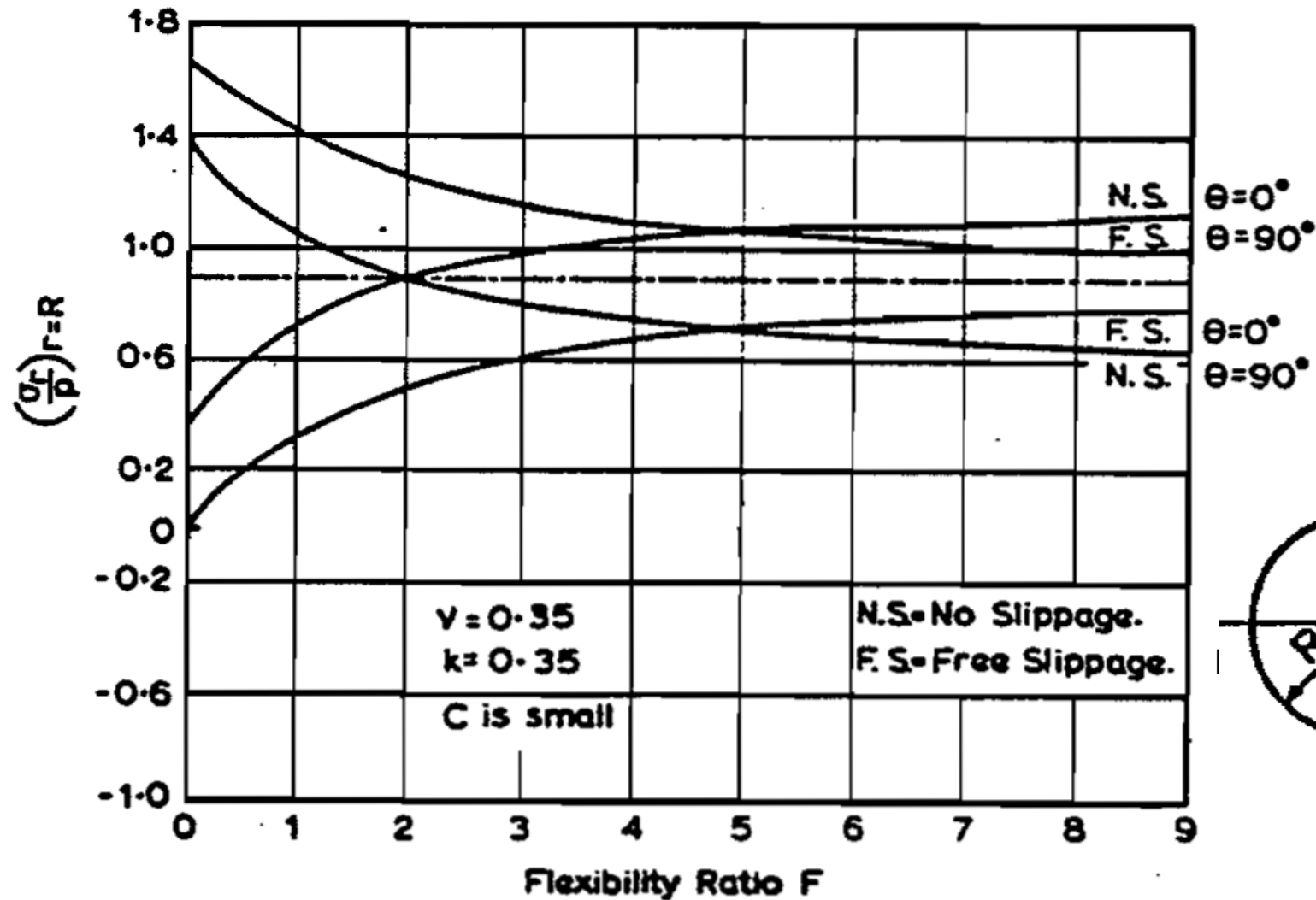
$$a_1 = \frac{(1-2\nu)(C-1)}{(1-2\nu)C+1}$$

$$a_2 = \frac{2F+1-2\nu}{2F+5-6\nu}$$

$$a_3 = \frac{2F-1}{2F+5-6\nu}$$

- D : διάμετρος της σήραγγας.
- t, E_c, ν_c : πάχος και ελαστικές σταθερές επένδυσης
- Μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης: $M = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
- Λόγος συμπιεστότητας: $C = \frac{1}{2} \frac{(1-\nu_c^2)}{(1-\nu)} \frac{M}{E_c} \left(\frac{D}{t}\right)$
- Λόγος ευκαμψίας: $F = \frac{1}{4} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (1-\nu_c^2) \frac{M}{E_c} \left(\frac{D}{t}\right)^3$

Ακτινική τάση επαφής ως συνάρτηση της ευκαμψίας



Στερεή (απαραμόρφωτη) επένδυση: $C=F=0$

Τι γίνεται στα όρια; Για $K = 1$ και $r = a$:

$$\sigma_r = p(1 - a_1)$$

$$\sigma_\theta = p(1 + a_1)$$

$$a_1 = \frac{(1 - 2\nu)(C - 1)}{(1 - 2\nu)C + 1}$$

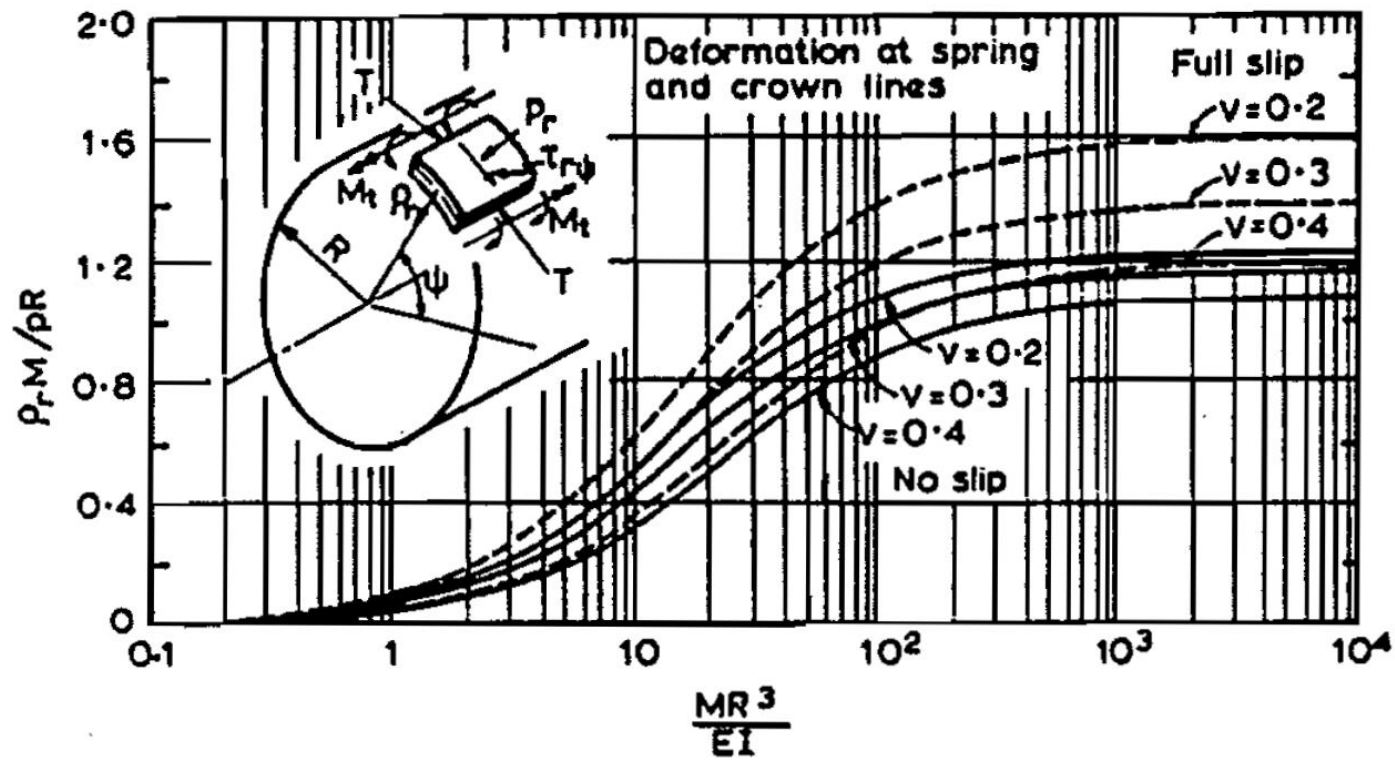
- Για στερεή (απαραμόρφωτη) επένδυση:

$$C = 0 \Rightarrow \sigma_r = 2p(1 - \nu), \sigma_\theta = 2p\nu$$

- Για (πάρα πολύ) εύκαμπτη επένδυση:

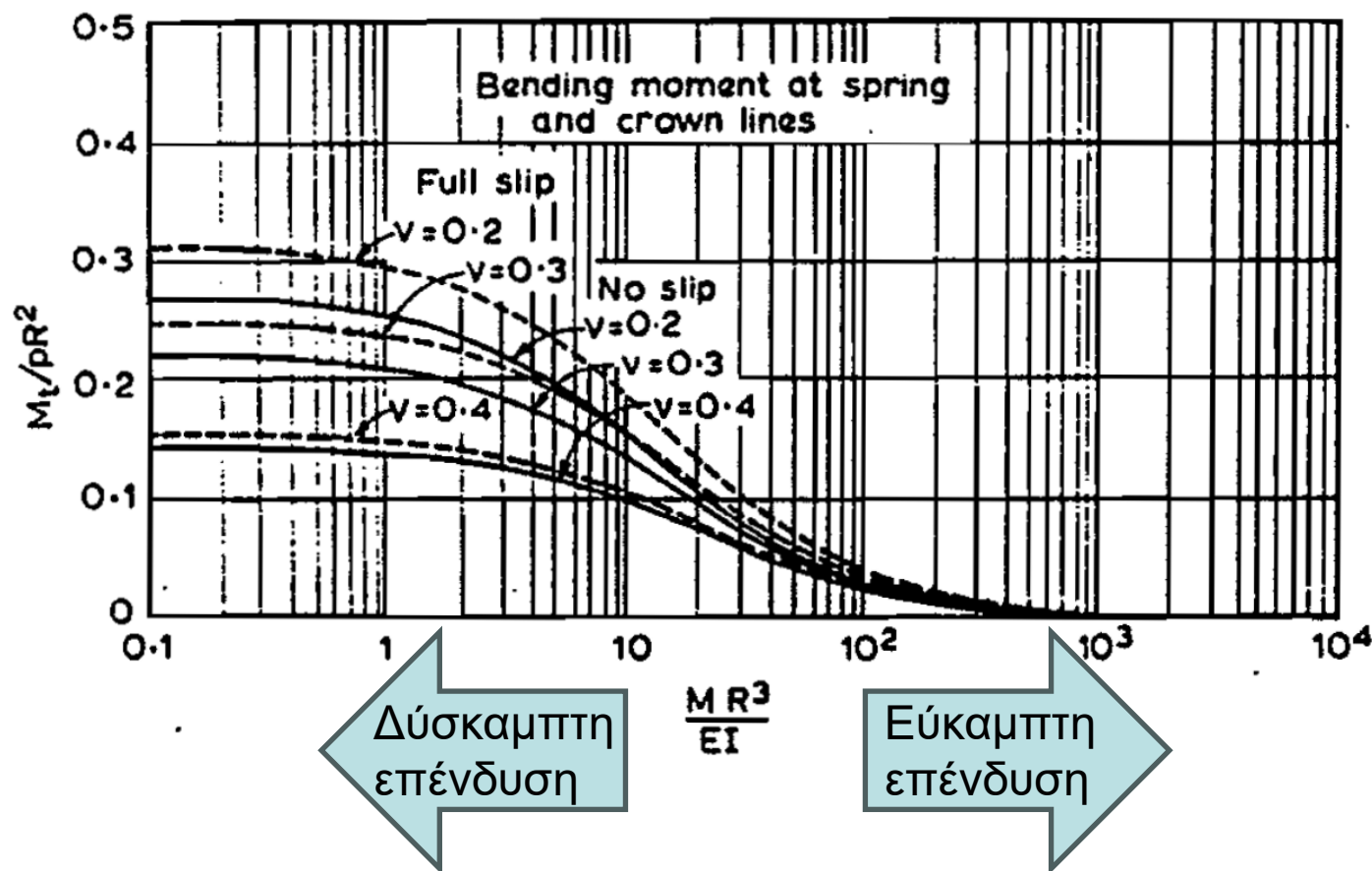
$$C \rightarrow \infty \Rightarrow \sigma_r \rightarrow 0, \sigma_\theta \rightarrow 2p$$

Παραμόρφωση ως συνάρτηση της ευκαμψίας ($K=0$)



Kay and Krizek, 1970
(Poulos and Davis, 1974)

Ροπή κάμψης ως συνάρτηση της ευκαμψίας ($K=0$)



Kay and Krizek, 1970
(Poulos and Davis, 1974)

Άσκηση-B1: Αποδείξτε ότι σε κυκλική, βαθιά, ανυποστήρικτη σήραγγα σε γραμμικά ελαστικό βράχο, οι ακραίες εφαπτομενικές τάσεις $\sigma_{\theta, \min}$ και $\sigma_{\theta, \max}$ αντιστοιχούν πάντα στα σημεία του ορίου (άντυγας) κατά την κατακόρυφη διάμετρο (C, C') ή την οριζόντια (A, A'), ανάλογα με την τιμή του συντελεστή οριζόντιων ωθήσεων K .

Για ποιό διάστημα τιμών του K αντιστοιχεί στο C η $\sigma_{\theta, \max}$ και για ποιο η $\sigma_{\theta, \min}$;

Άσκηση-B2: Για την ανυποστήρικτη σήραγγα του Σχήματος, ακτίνας $a=5\text{m}$, σε γραμμικά ελαστικό βράχο, ζητούνται:

α) Οι ακτινικές παραμορφώσεις στα σημεία C και A για i) $K = 1$, και ii) $K = 0$.

β) Να χαραχθεί η θεωρητική γραμμή σύγκλισης-αποτόνωσης για την περίπτωση (i)

