13/12/2024

ΦΥΛΛΑΔΙΟ Ι

(14) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Να δ.ο.

X ανακλ. ανν κάθε $\|\cdot\|$-κλειστός $< X^*$ είναι w^*-κλειστός.

ΛΥΣΗ

$(\Rightarrow)$ Υποθ. ότι X ανακλ. κ' $Y < X^*$ $\|\cdot\|$-κλειστός.

$w = w^*$ στον X^* αφού X ανακλ.

$$\overline{Y}^{w^*} = \overline{Y}^{w} \overset{(\text{Mazur})}{=} \overline{Y}^{\|\cdot\|} = Y \Rightarrow Y\ w^*\text{-κλειστός}$$

$(\Leftarrow)$ Θα δ.ο. η $e: X \to X^{**}$ επί. Έστω $\mathcal{F} \in X^{**}$.

$$\mathcal{F}: X^* \to \mathbb{R}$$

$Y = \ker\mathcal{F} < X^*$ $\|\cdot\|$-κλειστός $\overset{\text{υπόθ.}}{\Longrightarrow}$ Y w^*-κλειστός

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ w^*_συνεχής $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \in e(X)$. $\boxtimes$

(15) (i) Έστω X αυτοπ. κ' $f \in X^*$. Να δ.ο. $\exists x_0 \in X \mid$
$\|x_0\| = 1$, $f(x_0) = \|f\|$

[Υπενθ. $\|f\| = \sup\{ f(x) : \|x\| = 1 \}$].

ΛΥΣΗ

Θ. H-B $\Rightarrow$ $\exists$ $\mathcal{F} \in X^{**} \mid \|\mathcal{F}\| = 1$, $\mathcal{F}(f) = \|f\|$

X αυτοπ. $\Rightarrow \exists x_0 \in X \mid$ $\mathcal{F} = e(x_0) \Rightarrow f(x_0) = \|f\|$

κ' $\|x_0\| = \|e(x_0)\| = \|\mathcal{F}\| = 1$.

<u>ΑΛΛΙΩΣ</u> $\exists (x_n) \mid$ $\|x_n\| = 1$, $n \geq 1$ κ' $f(x_n) \to \|f\|$.

X αυτοπ. κ' (x_n) $\|\cdot\|$-φραγμένη $\Rightarrow$ $\exists$ υπακολ. (x_{k_n}) με
$x_{k_n} \xrightarrow{w} x_0$ $\Rightarrow$ $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(x_0) = \|f\|$. $\|x_0\| \leq \liminf_n \|x_{k_n}\| = 1$

$$\|f\| = f(x_0) \le \|f\| \cdot \|x_0\| \Longrightarrow \|x_0\| \geq 1$$

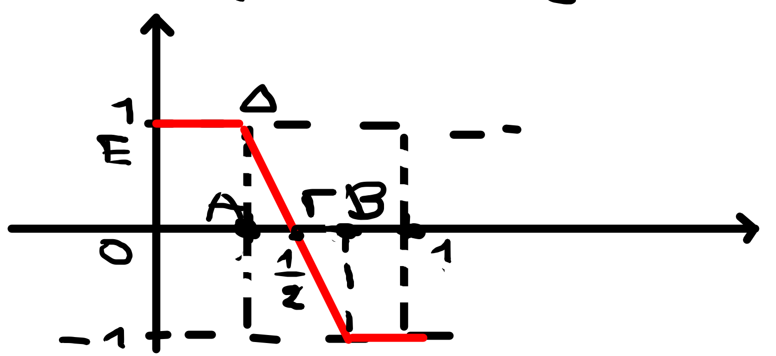
$$\Longrightarrow \|x_0\| = 1.$$

(για $f \neq 0$).

<u>(ii)</u> $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

<u>(α)</u> $\forall \varepsilon \in (0, 1/2)$, να ορίσετε $u_\varepsilon \in C[0,1] \mid \|u_\varepsilon\|_\infty = 1$,

$u_\varepsilon = 1$, στο $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, $u_\varepsilon = -1$, στο $[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]$.



$A(\frac{1}{2} - \varepsilon, 0)$

$B(\frac{1}{2} + \varepsilon, 0)$

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}-\varepsilon] \\ \frac{1-2t}{2\varepsilon}, & t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon] \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}+\varepsilon, 1] \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

(b) Θέτουμε $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(u) = \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt$.

f γραμμικό κ' $|f(u)| \leq \int_0^{1/2} |u| + \int_{1/2}^1 |u| \leq \|u\|_\infty$

$\Rightarrow$ f φραγμένο κ' $\|f\| \leq 1$.

<u>Ισχυρ</u>ι: $\|f\| = 1$

Έστω $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}) \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \exists\, u_\varepsilon \in C[0,1]$ όπως στο (α).

$$\|u_\varepsilon\|_\infty = 1, \quad f(u_\varepsilon) = \int_0^{1/2} |u_\varepsilon| + \int_{1/2}^1 |u_\varepsilon| = \int_0^1 |u_\varepsilon| =$$

$= 2$ Εμβαδό τραπ. $(O\Gamma\Delta E) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\cdot 1 = 1-\varepsilon$

$\Rightarrow \quad f(u_\varepsilon) = 1-\varepsilon$

$\Rightarrow \quad \|f\| \geq 1-\varepsilon \xRightarrow{\varepsilon \to 0^+} \|f\| \geq 1 \Rightarrow \underline{\|f\| = 1}$.

Ισχυρ. 2 $\nexists\, u \in C[0,1] \mid \|u\|_\infty = 1$ κ' $f(u) = \|f\| = 1$.

Έστω ότι υπάρχει τέτοια u. Τότε,

$$1 = f(u) = \int_0^{1/2} u - \int_{1/2}^1 u \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \int_0^{1/2} u - \int_{1/2}^1 u$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{1/2}(1-u)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{1/2}^1 (1+u)}_{\geq 0} = 0 \xRightarrow{(-1 \leq u \leq 1)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2}(1-u) = \int_{1/2}^{1}(1+u) = 0 \quad \overset{1+u\geq 0}{\underset{1-u \geq 0}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-u=0, & \text{στο } [0,1/2] \\ 1+u=0, & \text{στο } [1/2,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u=1, & \text{στο } [0,1/2] \\ u=-1, & \text{στο } [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

(Άτοπο) διότι u συνεχής!

Από τους ισχυρ. 1, 2 κ' ερώτ. (i) $\Longrightarrow$ $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ όχι ανακλ. !

$\boxtimes$

(16) $(X, \|\cdot\|)$

(i) εάν $x_n \xrightarrow{w} x$ τότε $\|x\| \le \liminf_n \|x_n\|$ (έχει γίνει στο μάθημα).

(ii) Υποθ. ότι X ανακλ., $Y < X$ $\|\cdot\|$-κλειστός, $x_0 \in X \setminus Y$. Να δ.ο. $\exists\ y_0 \in Y \mid \|x_0 - y_0\| = d(x_0, Y)$.

ΛΥΣΗ: $d(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| : y \in Y\} = d$

$\exists\ (y_n) \subseteq Y \mid \|x_0 - y_n\| \to d \Rightarrow (y_n)$ $\|\cdot\|$-φραγμ.

X ανακλ. $\Longrightarrow$ $\exists$ υπακολ. $y_{k_n} \xrightarrow{w} y_0 \in Y$ διότι

$\overline{Y}^{w} = \overline{Y}^{\|\cdot\|} = Y$ κ' $\|x_0 - y_0\| \overset{(i)}{\le} \liminf_n \|x_0 - y_{k_n}\| = d$

Αλλά $\|x_0 - y_0\| \geq d \Rightarrow \|x_0 - y_0\| = d$. $\boxtimes$

(17) X, Y χώροι με νόρμα, $T: X \to Y$ γραμμικός.

ο T λέγεται

→ <u>συμπαγής</u> αν $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ $\|\cdot\|$-συμπαγές

→ <u>ισχυρά συνεχής</u> αν $\forall (x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, ισχύει

$T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$.

Να δ-ο.

<u>(i)</u> (T συμπαγής) $\Rightarrow$ (T ισχυρά συνεχής)

Έστω $x_n \xrightarrow{w} x$ με $\|T(x_n) - T(x)\| \not\to 0$.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0$ κ' $\exists$ υπακολουθία x_{k_n} |

$$\|T(x_{k_n}) - T(x)\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall n \quad (1)$$

$x_{k_n} \xrightarrow{w} x \Rightarrow \sup_n \|x_{k_n}\| = M < \infty$

$\Rightarrow T(x_{k_n}) \in M\,T(B_X) \subseteq M\,\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ = $\|\cdot\|$-συμπαγές

$\Rightarrow \exists$ περαιτέρω υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}) = (z_n)$ |

$$T(z_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} y \in Y.$$

Αλλά $z_n \xrightarrow{w} x$ κ' T φραγμένος (άρα κ' w-w συνεχής)

$\Rightarrow T(z_n) \xrightarrow{w} T(x) \Rightarrow y = T(x) \Rightarrow \|T(z_n) - T(x)\| \xrightarrow{n} 0$

(ΑΤΟΠΟ), λόγω της (1).

(ii) Υποθ. X αυτοπαθής κ' $T: X \to Y$ ισχυρά συνεχής.

Τότε, T συμπαγής.

Θα δ.ο. $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Αρκεί να δ.ο. κάθε ακολουθία στο $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$

Έστω $(y_n) \subseteq \overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|} \Rightarrow \forall n, \ \exists x_n \in B_X \mid \|y_n - T(x_n)\| < \frac{1}{n}$

X αυτοπαθ. $\Rightarrow \exists$ υπακολ. $x_{k_n} \xrightarrow{w} x \in B_X \Rightarrow$

$T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x) \Rightarrow y_{k_n} \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x) \in T(B_X)$.

(iii) Εάν X αυτοπαθής, κι $T: X \to \ell^1$ γραμμικός φραγμένος, τότε T συμπαγής.

Πράγματι· έστω $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{w} x \overset{(T\ w\text{-}w \text{ συνεχής})}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ στον $\ell^1 \overset{(\text{Schur})}{\Longrightarrow} T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} T(x)$.

Άρα, T ισχυρά συνεχής $\overset{(ii)}{\underset{X \text{ αυτοπ.}}{\Longrightarrow}}$ T συμπαγής. $\boxtimes$

(Η-W) Αντιπαράδειγμα για το (ii)