

Συμβολισμοί:

- w είναι η ασθενής τοπολογία σε ένα χώρο με νόρμα.
- w^* είναι η ασθενής* τοπολογία στο δυϊκό ενός χώρου με νόρμα.

ΘΕΜΑ 1: Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $e : X \rightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Να δείξετε ότι:

- (i) (0,5 μ.) Η e είναι $w - w^*$ ομοιομορφισμός (εντός).
- (ii) (1 μ.) ο X είναι ανακλαστικός ανν το $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ είναι $w -$ συμπαγές.

ΘΕΜΑ 2: (i) (0,5 μ.) Έστω τ, τ' τοπολογίες πάνω στο μη κενό σύνολο E έτσι ώστε

$$\tau \subseteq \tau', \quad (E, \tau) \text{ Hausdorff}, \quad (E, \tau') \text{ συμπαγής.}$$

Να δείξετε ότι $\tau = \tau'$.

(ii) (1,5 μ.) Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και $A \subseteq Y$ $w -$ συμπαγές. Να δείξετε ότι το A είναι $w -$ μετριοποιήσιμο.

[Θεωρήστε γνωστό το παρακάτω:

Εάν $\Phi \subseteq Y^*$ αριθμήσιμο που χωρίζει σημεία στον Y και $\mathcal{T}_\Phi$ η επαγόμενη ασθενής τοπολογία στον Y , τότε ο $(Y, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι μετριοποιήσιμος.]

(iii) (1 μ.) [Θ. Eberlein.] Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ $w -$ συμπαγές. Να δείξετε ότι κάθε ακολουθία στο A , έχει $w -$ συγκλίνουσα υπακολουθία μέσα στο A .

ΘΕΜΑ 3: Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου και $p, q \in (1, +\infty)$ με $1/p + 1/q = 1$.

(i) (1 μ.) [ανισότητα Hölder]. Εάν $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, να δείξετε ότι

$$\int_{\Omega} |uv| d\mu \leq \left(\int_{\Omega} |u|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\Omega} |v|^q d\mu \right)^{1/q}.$$

[Δίνεται ότι $\forall a, b \in \mathbb{R}, |a \cdot b| \leq |a|^p/p + |b|^q/q$.]

(ii) (1 μ.) Έστω $u \in L^p(\Omega)$. Θεωρούμε τον τελεστή $T_u : L^q(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ με

$$T_u(v) = u \cdot v, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Να δείξετε ότι ο T_u είναι καλώς ορισμένος, γραμμικός, φραγμένος και $\|T_u\| = \|u\|_p$.

ΘΕΜΑ 4: (i) (1 μ.) [Θ.Κλειστού Γραφήματος.] Έστω $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach. Είναι γνωστό ότι ο γραμμικός χώρος $X \times Y$ είναι Banach ως προς τη νόρμα

$$\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Εάν $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής με γράφημα $G_T = \{(x, T(x)) : x \in X\}$ κλειστό ως προς την παραπάνω νόρμα, να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος.

(ii) (1 μ.) Έστω $C^1[0, 1]$ ο γραμμικός χώρος των συνεχώς διαφορίσιμων πραγματικών συναρτήσεων πάνω στο $[0, 1]$. Εφαρμόζοντας το (i) στον τελεστή $T : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ με $T(u) = u'$, να δείξετε ότι ο $(C^1[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι Banach.

ΘΕΜΑ 5: (i) (1 μ.) Έστω E γραμμικός χώρος, Φ κλάση γραμμικών συναρτησιακών που διαχωρίζει σημεία στον E και $\mathcal{T}_\Phi$ η ασθενής τοπολογία που επάγεται από την Φ στον E . Εάν $f : (E, \mathcal{T}_\Phi) \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνεχής, να δείξετε ότι $f \in \langle \Phi \rangle$.

(ii) (1 μ.) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής ώστε $g \circ T \in X^*, \forall g \in Y^*$. Να δείξετε ότι T φραγμένος. [Υπόδειξη: Θ. Ομοιομόρφου Φράγματος.]

(iii) (1,5 μ.) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $S : Y^* \rightarrow X^*$ γραμμικός τελεστής που είναι $w^* - w^*$ συνεχής. Να δείξετε ότι υπάρχει $T : X \rightarrow Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε

$$S(g) = g \circ T, \quad \forall g \in Y^*.$$