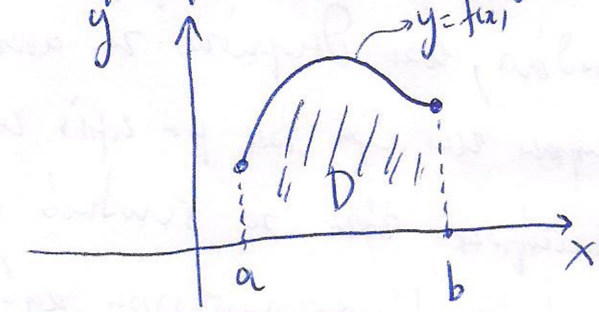
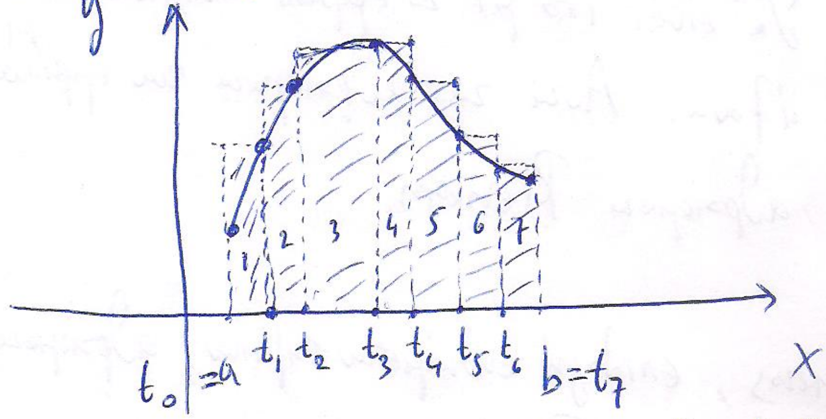
Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα (Ολοκλήρωμα Riemann)

Ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης είναι μία κλάση συναρτήσεων, το ορισμένο ολοκλήρωμα συνάρτησης είναι αριθμός. Θα δούμε ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, αναπαριστά το εμβαδό του χωρίου του επιπέδου που βρίσκεται ανάμεσα στο γράφημα της $y=f(x)$ και του άξονα των x (όταν $f(x)\geq 0, \forall x\in[a,b]$). Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y=f(x)$, $a\leq x\leq b$, είναι μη αρνητική και το γράφημά της είναι η καμπύλη του σχήματος:



Αν D είναι το επίπεδο χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις $y=f(x)$ και $y=0$, μπορούμε να προσεγγίσουμε το εμβαδό του D μέσω του συνολικού εμβαδού ενός πεπερασμένου πλήθους ορθογωνίων που έχουν βάσεις στο διάστημα $[a,b]$ και ύψη που αγγίζουν το γράφημα της $y=f(x)$. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε 7 ορθογώνια:



Το 1 με βάση $[a,t_1]$ και ύψος $f(t_1)$. Εμβαδό $E_1=f(t_1)(t_1-a)$

Το 2 —ll— $[t_1,t_2]$ —ll— $f(t_2)$. —ll— $E_2=f(t_2)(t_2-t_1)$

Το 3 —ll— $[t_2,t_3]$ —ll— $f(t_3)$. —ll— $E_3=f(t_3)(t_3-t_2)$

Το 4 —ll— $[t_3,t_4]$ —ll— $f(t_3)$. —ll— $E_4=f(t_3)(t_4-t_3)$

Το 5 —ll— $[t_4,t_5]$ —ll— $f(t_4)$. —ll— $E_5=f(t_4)(t_5-t_4)$

Το 6 —ll— $[t_5,t_6]$ —ll— $f(t_5)$. —ll— $E_6=f(t_5)(t_6-t_5)$

Το 7 —ll— $[t_6,b]$ —ll— $f(t_6)$. —ll— $E_7=f(t_6)(b-t_6)$

Θέτοντας $t_0 = a$ και $t_7 = b$, τότε το συνολικό εμβαδό των 7 ορθογωνίων είναι $\sum_{i=1}^{7} E_i = \sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$, όπου $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\forall i = 1, \dots, 7$. Συγκεκριμένα, $\xi_i = t_i$, $i=1,2,3$, ενώ $\xi_i = t_{i-1}$ για $i = 4,5,6,7$. Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{7} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ με $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i \le 7$, είναι μία προσέγγιση το εμβαδό ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και τον άξονα των x. Διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι χωρίζοντας το διάστημα $[a,b]$ σε μεγαλύτερο αριθμό υποδιαστημάτων με μικρότερο μήκος το καθένα, και θεωρώντας τα αντίστοιχα ορθογώνια με βάσεις σε αυτά τα διαστήματα και ύψη ίσα με τιμές της $f(x)$ για x να ανήκει σε αυτά τα διαστήματα, τότε το συνολικό εμβαδό των νέων ορθογωνίων θα αποτελεί μία καλύτερη προσέγγιση από την αρχική, για το εμβαδό του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα $y = f(x)$ και τον x-άξονα. Για να υπολογίσουμε με ακρίβεια αυτό το εμβαδό θα πρέπει να σχηματίσουμε μία ακολουθία αθροισμάτων εμβαδών ορθογωνίων, όπως οι παραπάνω, όπου οι βάσεις των ορθογωνίων θα τείνουν στο 0 καθώς το $n \to \infty$, και το όριο της ακολουθίας των συνολικών εμβαδών θα είναι ίσο με το εμβαδό ανάμεσα στην $y = f(x)$ και τον x-άξονα. Αυτά τα αθροίσματα των εμβαδών των ορθογωνίων καλούνται αθροίσματα Riemann.

<u>Ορισμοί</u>: Διαμέριση διαστήματος, επιλογή ενδιάμεσων σημείων, αθροίσματα Riemann.

Έστω $a<b$ και $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>φραγμένη</u>.

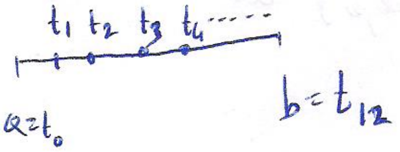
<u>Ορισμός 1</u>: Μία διαμέριση του $[a,b]$ είναι μία <u>πεπερασμένη</u> οικογένεια Δ από κλειστά υποδιαστήματα του $[a,b]$ τέτοια ώστε:

(a) Για κάθε $x\in[a,b]$ υπάρχει $I\in\Delta$ με $x\in I$. Δηλαδή, η ένωση των διαστημάτων της Δ ισούται με το $[a,b]$

(b) Αν $I_1, I_2\in\Delta$ και $I_1\neq I_2$, τότε είτε $I_1\cap I_2=\emptyset$, είτε τα I_1, I_2 είναι διαδοχικά:

(δηλαδή, είτε $I_1\cap I_2=\emptyset$, είτε $I_1\cap I_2=$ μονοσύνολο)

Π.χ.:



Επιλέγοντας 13 σημεία στο $[a,b]$, τα $(t_i)_{i=0}^{12}$ με $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{11}<t_{12}=b$, σχηματίζουμε τη διαμέριση $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ του $[a,b]$

<u>Ορισμός 2</u>: Έστω Δ μία διαμέριση του $[a,b]$. Μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ είναι ένα υποσύνολο $\vec{\xi}_\Delta$ του $[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\} \quad \text{με} \quad \xi_I\in I, \ \forall I\in\Delta.$$

(Με άλλα λόγια μία επιλογή σημείων για τη Δ σχηματίζεται επιλέγοντας ένα σημείο ξ_I από κάθε διάστημα I της Δ, και θεωρώντας το πεπερασμένο σύνολο $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$).

Π.χ.: Αν $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ είναι η διαμέριση του $[a,b]$ του προηγούμενου παραδείγματος, τότε επιλέγουμε τυχαία $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\forall i=1,\dots,12$ και σχηματίζουμε το σύνολο $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_i : i=1,\dots,12\}$ που είναι μία ~~ενδ~~ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ. Εδώ,

$$\xi_{[t_{i-1},t_i]}=\xi_i, \ \forall i=1,\dots,12.$$

<u>Ορισμός 3</u> (Αθροίσματα Riemann για μία φραγμένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$): Αν Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων για τη Δ, τότε ο αριθμός

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I), \quad \text{όπου } \vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$$

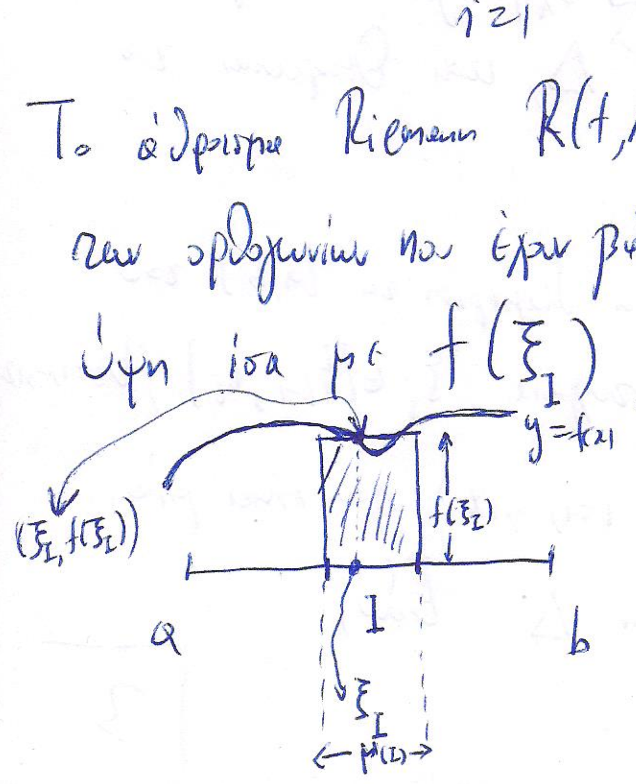
και $\mu(I)$ = μήκος του διαστήματος I, καλείται άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στη διαμέριση Δ του $[a,b]$ και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ.

<u>Π.χ.</u>: Αν $\Delta=\{[t_{i-1},t_i] : i=1,\dots,12\}$ διαμέριση του $[a,b]$, $t_0=a$, $t_{12}=b$, και $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_{[t_{i-1},t_i]} : i=1,\dots,12\}=\{\xi_i : i=1,\dots,12\}$ με

$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $\forall i=1,\dots,12$, τότε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{i=1}^{12} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1}).$$

Το άθροισμα Riemann $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$ ισούται με το συνολικό εμβαδό των ορθογωνίων που έχουν βάση τα διαστήματα I της Δ και ύψη ίσα με $f(\xi_I)$, $\forall I\in\Delta$.



Είναι σαφές ότι υπάρχουν άπειρα αθροίσματα Riemann για μία $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αφού υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις Δ του $[a,b]$ και για κάθε τέτοια διαμέριση Δ υπάρχουν άπειρες επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ.

<u>Ορισμός</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση, θέτουμε

1) $\mathcal{R} = \left\{ R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b],\ \vec{\xi}_\Delta \text{ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της } \Delta \right\}$

Δηλαδή, $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο των αθροισμάτων Riemann της f.

2) Αν $n\in\mathbb{N}$ και $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)\in\mathcal{R}$, τότε λέμε ότι το $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$ είναι άθροισμα Riemann τύπου n, όταν $\mu(I)\leq \frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta$.

Θέτουμε $\mathcal{R}_n = \left\{ R\in\mathcal{R} : R \text{ άθροισμα Riemann τύπου } n\right\}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Παρατήρηση</u>: $\mathcal{R}_{n+1}\subset\mathcal{R}_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ και

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ αφού $\mu(I)\leq b-a$, $\forall I \subsetneq [a,b]$ διάστημα, κλειστό.

<u>Πρόταση</u>: Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με $C\leq f(x)\leq D$, $\forall x\in[a,b]$, τότε

$$C(b-a)\leq R\leq D(b-a),\quad \forall R\in\mathcal{R}.$$

<u>Απόδειξη</u>: $R = R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)$. Αφού $C\leq f(\xi_I)\leq D$ $\forall I\in\Delta$, έχουμε $\sum_{I\in\Delta} C\mu(I) \leq \sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I) \leq \sum_{I\in\Delta} D\mu(I)$.

Άρα, $C(b-a) \leq R \leq D(b-a)$, αφού $\sum_{I \in \Delta} \mu(I) = b-a$, εφόσον

Δ διαμέριση του $[a,b]$

<u>Ορισμός</u> (Ολοκληρώσιμης κατά Riemann συνάρτησης) Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη.

Η f καλείται Riemann ολοκληρώσιμη όταν ικανοποιεί την ιδιότητα:

Για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ της f, με $R_n \in \mathcal{R}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n$ υπάρχει και είναι (αναγκαία) πραγματικός.

<u>Παρατήρηση</u>: Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη όταν <u>για κάθε ακολουθία</u> αθροισμάτων Riemann της f, $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, με R_n <u>αθρ. Riemann τύπου $n \in \mathbb{N}$</u>, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} R_n$ είναι πραγματικός. Παρατηρούμε ότι λόγω του ότι η f είναι φραγμένη πρότασης, κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann της f είναι φραγμένη, άρα θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αν συγκλίνει.

Κατά συνέπεια θα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, αν συγκλίνει.

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(R_n')_{n\geq 1}^{\infty}$ δύο ακολουθίες αθροισμάτων Riemann της f τέτοιες ώστε R_n και R_n' είναι αθρ. Riemann τύπου n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} R_n'$$

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε $(R_n'')_{n\geq 1}^{\infty}$ ως εξής: $R_{2n-1}'' = R_{2n-1}$ και $R_{2n}'' = R_{2n}'$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Δηλαδή, $R_n'' = \begin{cases} R_n, & \text{αν } n = \text{περιττός} \\ R_n', & \text{αν } n = \text{άρτιος} \end{cases}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε, η $(R''_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αθροισμάτων Riemann της f με R''_n άθροισμα Riemann τύπου n, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} R''_n \in \mathbb{R}$, αφού f ολοκληρώσιμη.

Συνεπώς έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} R''_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} R''_n = \lim\limits_{n\to\infty} R''_{2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} R'_{2n} = \lim_{n\to\infty} R'_n$$

από γνωστές ιδιότητες των υπακολουθιών συγκλινουσών ακολουθιών πραγματικών.

<u>Ορισμός</u> (Ολοκλήρωμα Riemann). Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη. Ονομάζουμε ολοκλήρωμα Riemann (ή ορισμένο ολοκλήρωμα) της f, και το συμβολίζουμε με $\int_a^b f$ (ή $\int_a^b f(x)dx$), το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$, όπου R_n άθροισμα Riemann τύπου n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή, $\int_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} R_n$.

<u>Παρατήρηση</u>: Από την Πρόταση 2 έχουμε ότι το $\int_a^b f$ είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με R_n άθροισμα Riemann τύπου n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, που επιλέγουμε.

<u>Παράδειγμα</u>: 1) Αν $f(x) = c =$ σταθερά, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f = c(b-a)$. Πράγματι, αν Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ τότε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I) = \sum_{I\in\Delta} c\,\mu(I) = c\sum_{I\in\Delta}\mu(I) = c(b-a)$$

αφού $\sum\limits_{I\in\Delta}\mu(I) = b-a$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$. Συνεπώς,

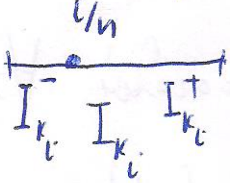
$$\mathcal{R} = \{c(b-a)\} \Rightarrow \int_a^b f = c(b-a)$$

2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, $\forall x\in[0,1]$. Τότε, $\int_0^1 f=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$. Έστω $n\in\mathbb{N}$.

Θεωρούμε μία τυχαία διαμέριση Δ του $[0,1]$ με $\mu(I)<\frac{1}{n}$, $\forall I\in\Delta$. Επίσης θεωρούμε μία τυχαία ενδιάμεση επιλογή σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ. Η Δ αποτελείται από διαδοχικά, κλειστά υποδιαστήματα του $[0,1]$. Μπορούμε να αριθμήσουμε αυτά τα διαστήματα σαν $I_1,\dots,I_m$, όπου $m=|\Delta|$, έτσι ώστε I_i και I_{i+1} να είναι διαδοχικά, $\max I_i=\min I_{i+1}$, $\forall i=1,\dots,m-1$.

Άρα, $0\in I_1$ και $1\in I_m$. Για κάθε φυσικό $i\in\{1,\dots,n\}$, θεωρούμε το πρώτο από τα αριστερά διάστημα I_{k_i} με $\frac{i}{n}\in I_{k_i}$, $\forall i=1,\dots,n$. Τότε $2\le k_1<k_2<\dots<k_n=m$ γιατί το μήκος κάθε διαστήματος της Δ είναι μικρότερο από $\frac{1}{n}$. Ειδικότερα,

, $\forall i=1,\dots,n$, όπου θέτουμε $k_0=1$. Επίσης, θέτουμε $\xi_i=\xi_{I_i}$, $\forall i=1,\dots,m$. Εξετάζουμε το άθροισμα Riemann $R_n=R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{f(\xi_i)}_{\xi_i}\mu(I_i)$. Συμβολίζουμε με $I_{k_i}^-$ το υποδιάστημα του I_{k_i} αριστερά από το i/n, και με $I_{k_i}^+$ το υποδιάστημα του I_{k_i} δεξιά από το i/n:

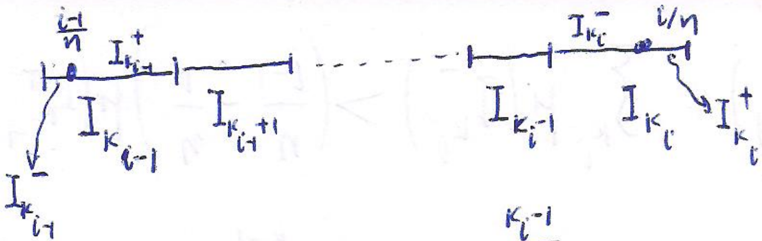


, $\forall i=1,\dots,n$

Για $i=0$, έχουμε $k_0=1$ και $I_{k_0}^+=I_{k_0}$, ενώ για $i=n$ έχουμε $I_{k_n}^-=I_{k_n}$

Τότε, $R_n=$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{k_{i-1}}\mu(I_{k_{i-1}}^+)+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{j=k_i-1}\xi_j\mu(I_j)+\xi_{k_i}\mu(I_{k_i}^-)\right]$$



Βλέπουμε ότι $\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j) + \mu(I^-_{k_i}) = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$

Επίσης, $\frac{i-1}{n} \leq \xi_j \leq \frac{i}{n}$, $\forall j = k_{i-1}+1, \dots, k_i-1$

Ενώ, $\left|\xi_{k_{i-1}} - \frac{i-1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$ και $\left|\xi_{k_i} - \frac{i}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

Ακόμα έχουμε ότι $\xi_{k_{i-1}} < \frac{i}{n}$ και $\xi_{k_i} > \frac{i-1}{n}$. Άρα,

$$\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i}) < \frac{i}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\frac{i}{n}\mu(I_j) +$$

$$+\left(\frac{i}{n}+\frac{1}{n}\right)\mu(I^-_{k_i}) = \frac{i}{n}\left[\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j) + \mu(I^-_{k_i})\right] + \frac{1}{n}\mu(I^-_{k_i}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i}) \leq \frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\mu(I^-_{k_i}) \leq \frac{i}{n^2} + \frac{1}{n^2},$$

$\forall i = 1, \dots, n$. Άρα, $R_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}}) + \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j) + \xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i})\right] < \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) =$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n^2}\cdot n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} + \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_n < \frac{n+1}{2n} + \frac{1}{n}$, αφού $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ (άθροισμα αριθμ. προόδου). Ανάλογα έχουμε ότι

$$\xi_{k_{i-1}}\mu(I^+_{k_{i-1}})+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\xi_j\mu(I_j)+\xi_{k_i}\mu(I^-_{k_i})>\left(\frac{i-1}{n}-\frac{1}{n}\right)\mu(I^+_{k_{i-1}})+$$

$$+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\frac{i-1}{n}\mu(I_j)+\frac{i-1}{n}\mu(I^-_{k_i})=\frac{i-1}{n}\left[\mu(I^+_{k_{i-1}})+\sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i-1}\mu(I_j)+\mu(I^-_{k_i})\right]-$$

$$-\frac{1}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}})=\frac{i-1}{n}\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)-\frac{1}{n}\mu(I^+_{k_{i-1}})\geq\frac{i-1}{n}\cdot\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$$

αφού $\mu(I^+_{k_{i-1}})\leq\mu(I_{k_{i-1}})<\frac{1}{n}$, $\forall i=1,\dots,n$. Συνεπώς έχουμε:

$$R_n>\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n^2}-\frac{1}{n^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i-2}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{2}{n^2}\cdot n=\frac{1+2+\dots+n}{n^2}-\frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow R_n>\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{2}{n}.$$ Άρα, $\frac{n+1}{2n}-\frac{2}{n}<R_n<\frac{n+1}{2n}+\frac{1}{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

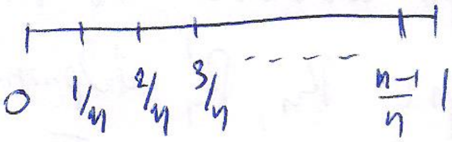
Από το θ. Sandwich έπεται τώρα ότι $\lim_{n\to\infty}R_n=\frac{1}{2}$. Άρα,

$$\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

Παρατήρηση: Ο υπολογισμός ακόμη και ενός απλού ολοκληρώματος, όπως το $\int_0^1 x\,dx$, φαίνεται δύσκολος με χρήση μόνο του ορισμού. Χρειαζόμαστε λοιπόν αλλες μεθόδους υπολογισμού ορισμένων ολοκληρωμάτων ούτως ώστε να αποφύγουμε την απευθείας εφαρμογή του ορισμού του ολοκληρώματος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο υπολογισμός θα ήταν ευκολος αν γνωρίζαμε ότι η $f(x)=x$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$

Τώρα θα είχαμε την ευχέρεια να επιλέξουμε μία βολικότερη ακολουθία αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ (και όχι μία τυχαία) και να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{n\to\infty} R_n$ που θα ήταν αναγκαία ίσο με $\int_0^1 x\,dx$.

Π.χ, για $n\in\mathbb{N}$, μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαμέριση $\Delta_n=\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\dots,\left[\frac{n-1}{n},1\right]\right\}$ και την επιλογή



ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}=\left\{\frac{k}{n} : k=1,\dots,n\right\}$, δηλαδή, $\xi_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}=\frac{k}{n}$ $\forall\, k=1,\dots,n$. Τότε το άθροισμα Riemann $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\mu\left(\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\right)$ είναι τύπου $n-1$, $\forall n\in\mathbb{N}$ με $n\geq 2$. Βλέπουμε ότι $R_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}\Rightarrow$

$$\Rightarrow R_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1+2+\dots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2},\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow R_n=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}$$

Άρα, $\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$ γνωρίζοντας όμως ότι η $f(x)=x$ είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Παρατήρηση</u>: Η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}=\text{άρρητοι του }[0,1]\end{cases}$

Τότε η f δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Πράγματι, αν Δ είναι διαμέριση του $[0,1]$ και $\vec{\xi}_{\Delta}$ επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ με $\xi_I\in\mathbb{Q}$, $\forall I\in\Delta$, τότε $R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta})=\sum\limits_{I\in\Delta}1\cdot\mu(I)=1$. Αν $\vec{\eta}_{\Delta}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ με $\eta_I\notin\mathbb{Q}$, $\forall I\in\Delta$, τότε

$R(f,\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta} 0\cdot\mu(I)=0$. Μπορούμε να βρούμε τέτοιες επιλογές σημείων $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ για κάθε διαμέριση Δ του $[0,1]$ επειδή το σύνολο των ρητών και το σύνολο των αρρήτων είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε ακολουθίες αθροισμάτων Riemann $(R_n)_{n\geq 1}$ και $(R'_n)_{n\geq 1}$ της f με R_n, R'_n αθροίσματα Riemann τάξης n, $\forall n\in\mathbb{N}$, ώστε $R_n=1$ και $R'_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε $R_n\to 1$ και $R'_n\to 0$ συνεπώς η f δεν μπορεί να είναι ολοκληρώσιμη.

Χρειαζόμαστε λοιπόν ένα εύχρηστο κριτήριο που να αποφαίνεται αν μία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη. Αυτό το κριτήριο είναι ανάλογο με το κριτήριο Cauchy για τη σύγκλιση σειρών. Η χρησιμότητα τέτοιων κριτηρίων έγκειται στο γεγονός ότι εφαρμόζονται χωρίς να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το ολοκλήρωμα της συνάρτησης.

<u>Ορισμός</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ. Το άθροισμα

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I),$$

όπου $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$ και $\vec{\eta}_\Delta=\{\eta_I : I\in\Delta\}$ λέγεται άθροισμα Cauchy-Riemann της f. Όταν $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta$, το άθροισμα αυτό λέγεται άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης n.

Ορισμός: Αν Δ και Δ' είναι διαμερίσεις του $[a,b]$, τότε η Δ' λέγεται λεπτότερη από την Δ όταν κάθε διάστημα της Δ' είναι υποσύνολο ενός διαστήματος της Δ. Όταν δηλαδή για κάθε $I'\in\Delta'$ υπάρχει $I\in\Delta$ με $I'\subset I$.

Π.χ. αν $\Delta=\{[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]\}$ και $\Delta'=\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{1}{3},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]\}$ είναι διαμερίσεις του $[0,1]$, τότε η Δ' είναι λεπτότερη της Δ.

Συμβολισμός: Γράφουμε $\Delta'\prec\Delta$ όταν η Δ' είναι λεπτότερη της Δ.

Συμβολισμός: Αν Δ, Δ' είναι διαμερίσεις του $[a,b]$, τότε συμβολίζουμε με $\Delta\sqcap\Delta'=\{I\cap J : I\in\Delta \text{ και } J\in\Delta'\}$ τη διαμέριση του $[a,b]$ που προκύπτει μέσω των τομών των διαστημάτων των Δ και Δ'. Βλέπουμε εύκολα ότι $\Delta\sqcap\Delta'\prec\Delta$ και $\Delta\sqcap\Delta'\prec\Delta'$.

Π.χ.: $\Delta=\{[0,\frac{1}{3}],[\frac{1}{3},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},\frac{5}{6}],[\frac{5}{6},1]\}$ και

$\Delta'=\{[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{2}{3}],[\frac{2}{3},\frac{19}{24}],[\frac{19}{24},\frac{6}{7}],[\frac{6}{7},1]\}$ είναι διαμερίσεις του $[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $\Delta\not\prec\Delta'$ και $\Delta'\not\prec\Delta$ αφού το $[0,\frac{1}{3}]$ δεν είναι υποσύνολο κάποιου διαστήματος της Δ' και $[\frac{1}{4},\frac{2}{3}]$ δεν είναι υποσύνολο κάποιου διαστήματος της Δ. Επίσης έχουμε ότι η διαμέριση $\Delta\sqcap\Delta'$ είναι ίση με

$$\Delta\sqcap\Delta'=\left\{[0,\tfrac{1}{4}],[\tfrac{1}{4},\tfrac{2}{3}],[\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{4}],[\tfrac{3}{4},\tfrac{19}{24}],[\tfrac{19}{24},\tfrac{5}{6}],[\tfrac{5}{6},\tfrac{6}{7}],[\tfrac{6}{7},1]\right\}$$

Παρατηρούμε ότι η $\Delta\sqcap\Delta'$ προκύπτει μέσω της φυσιολογικής διαμέρισης του $[0,1]$ που προκύπτει από τα άκρα των διαστημάτων της Δ και της Δ'.

Η επόμενη πρόταση δείχνει τη σχέση ανάμεσα στα αθροίσματα Riemann και τα αθροίσματα Cauchy-Riemann μιας φραγμένης συνάρτησης

<u>1ο Λήμμα των διαμερίσεων</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και Δ, Δ' διαμερίσεις του $[a,b]$ με $\Delta'\prec\Delta$. Έστω $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_{\Delta'}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων των Δ και Δ' αντίστοιχα. Τότε υπάρχει επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}'_\Delta$ της Δ ώστε $\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-R(f,\Delta',\vec{\eta}_{\Delta'})\right|\le R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}'_\Delta)$

<u>Απόδειξη</u>: Εφόσον $\Delta'\prec\Delta$ έχουμε ότι $I=\bigcup\limits_{\substack{J\in\Delta'\\ J\subset I}} J$, $\forall I\in\Delta$, και

$\Delta'=\bigcup\limits_{I\in\Delta}\{J\in\Delta' : J\subset I\}$. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-R(f,\Delta',\vec{\eta}_{\Delta'})=\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)-\sum_{J\in\Delta'} f(\eta_J)\mu(J)=$$

$$=\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\sum_{\substack{J\in\Delta'\\ J\subset I}}\mu(J)-\sum_{I\in\Delta}\sum_{\substack{J\in\Delta'\\ J\subset I}} f(\eta_J)\mu(J)=$$

$$=\sum_{I\in\Delta}\sum_{\substack{J\in\Delta'\\ J\subset I}}\left[f(\xi_I)-f(\eta_J)\right]\mu(J).$$

Για κάθε $I\in\Delta$, επιλέγουμε

$\eta'_I\in\{\eta_J : J\in\Delta', J\subset I\}$ ώστε $|f(\xi_I)-f(\eta'_I)|=\max\left\{|f(\xi_I)-f(\eta_J)| : \substack{J\in\Delta',\\ J\subset I}\right\}$

Παρατηρούμε ότι $\eta'_I\in I$, $\forall I\in\Delta$, αφού $\eta'_I=\eta_{J_0}$ για κάποιο $J_0\in\Delta'$ με $J_0\subset I$ και $\eta_{J_0}\in J_0\subset I$. Άρα η $\vec{\eta}'_\Delta=\{\eta'_I : I\in\Delta\}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ. Έχουμε τώρα ότι λόγω της τριγωνικής ανισότητας:

$$\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-R(f,\Delta',\vec{\eta}_{\Delta'})\right| \leq \sum_{I\in\Delta}\ \sum_{\substack{J\in\Delta' \\ J\subset I}} |f(\xi_I)-f(\eta_J)|\,\mu(J) \leq$$

$$\leq \sum_{I\in\Delta}\ \sum_{\substack{J\in\Delta' \\ J\subset I}} |f(\xi_I)-f(\eta'_I)|\,\mu(J) = \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I)-f(\eta'_I)| \sum_{\substack{J\in\Delta' \\ J\subset I}} \mu(J) =$$

$$= \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I)-f(\eta'_I)|\,\mu(I) = R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}'_\Delta)$$

<u>2ο Λήμμα των διαμερίσεων</u>: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη, Δ διαμέριση του $[a,b]$ και $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ. Τότε υπάρχουν δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\partial}^+_\Delta$ και $\vec{\partial}^-_\Delta$ της Δ έτσι ώστε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = R(f,\Delta,\vec{\partial}^+_\Delta) - R(f,\Delta,\vec{\partial}^-_\Delta).$$

Με άλλα λόγια κάθε άθροισμα Cauchy-Riemann της f ισούται με τη διαφορά δύο αθροισμάτων Riemann επί της ίδιας διαμέρισης του $[a,b]$

<u>Απόδειξη</u>: $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I)-f(\eta_I)|\,\mu(I)$

Ορίζουμε
$$\partial^+_I = \begin{cases} \xi_I, & \text{αν } f(\xi_I)\geq f(\eta_I) \\ \eta_I, & \text{αν } f(\xi_I)< f(\eta_I) \end{cases}, \quad \forall I\in\Delta$$

και
$$\partial^-_I = \begin{cases} \eta_I, & \text{αν } f(\xi_I)\geq f(\eta_I) \\ \xi_I, & \text{αν } f(\xi_I)< f(\eta_I) \end{cases}, \quad \forall I\in\Delta$$

Τότε, $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} \left[f(\vartheta_I^+) - f(\vartheta_I^-) \right] \mu(I)$.

Αφού $\vartheta_I^+ \in I$ και $\vartheta_I^- \in I$, $\forall I \in \Delta$, έχουμε ότι οι $\vec{\vartheta}_\Delta^+ = \{\vartheta_I^+ : I\in\Delta\}$ και $\vec{\vartheta}_\Delta^- = \{\vartheta_I^- : I\in\Delta\}$ είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ. Άρα, $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = R(f,\Delta,\vec{\vartheta}_\Delta^+) - R(f,\Delta,\vec{\vartheta}_\Delta^-)$.

<u>3ο Λήμμα των διαμερίσεων</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και Δ, Δ' διαμερίσεις του $[a,b]$. Έστω $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\xi}_{\Delta'}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τις Δ και Δ' αντίστοιχα. Τότε υπάρχουν επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}''_\Delta$ και $\vec{\eta}''_{\Delta'}$ για τις Δ και Δ', αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$\left| R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) - R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta'}) \right| \le R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}''_\Delta) + R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}''_{\Delta'})$$

<u>Απόδειξη</u>: Θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta'' = \Delta \sqcap \Delta'$ του $[a,b]$. Τότε $\Delta'' \prec \Delta$ και $\Delta'' \prec \Delta'$. Θεωρούμε και μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}_{\Delta''}$ για την Δ''. Αφού $\Delta'' \prec \Delta$, το 1ο Λήμμα των διαμερίσεων μας δίνει μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}''_\Delta$ της Δ τέτοια ώστε:

$$\left| R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) - R(f,\Delta'',\vec{\eta}_{\Delta''}) \right| \le R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}''_\Delta) \qquad (*)$$

Αφού $\Delta'' \prec \Delta'$ πάλι, από το 1ο Λήμμα των διαμερίσεων βρίσκουμε μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}''_{\Delta'}$ της Δ' τέτοια ώστε:

$$\left| R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'}) - R(f,\Delta'',\vec{\eta}_{\Delta''}) \right| \le R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}''_{\Delta'}) \qquad (**)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (*) και (**) και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα βρίσκουμε ότι

$$\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'})\right|\leq R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}''_\Delta)+R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}''_{\Delta'})$$

<u>Πόρισμα</u> (των διαμερίσεων): Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη και $n\in\mathbb{N}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αν C είναι άθροισμα Cauchy-Riemann της f τάξης n, τότε υπάρχουν αθροίσματα Riemann R και R' της f, τάξης n, τέτοια ώστε

$$C=R-R'.$$

(2) Αν R και R' είναι αθροίσματα Riemann της f τάξης n, τότε υπάρχουν αθροίσματα Cauchy-Riemann C και C' της f, τάξης n, τέτοια ώστε

$$|R-R'|\leq C+C'$$

<u>Απόδειξη</u>: (1): $C=R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)$ για κάποια διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta$, και κάποιες επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_\Delta$ της Δ. Εφαρμόζοντας το 2ο Λήμμα των διαμερίσεων βρίσκουμε επιλογές ενδιάμεσων σημείων ϑ^+_Δ και ϑ^-_Δ της Δ ώστε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=R(f,\Delta,\vartheta^+_\Delta)-R(f,\Delta,\vartheta^-_\Delta).$$

Θέτουμε $R=R(f,\Delta,\vartheta^+_\Delta)$ και $R'=R(f,\Delta,\vartheta^-_\Delta)$. Τότε τα R,R' είναι αθροίσματα Riemann της f, τάξης n, και $C=R-R'$

(2) $R=R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta})$ και $R'=R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'})$ όπου Δ και Δ' διαμερίσεις του $[a,b]$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta$, και $\mu(J)<\frac{b-a}{n}$, $\forall J\in\Delta'$, και $\vec{\xi}_{\Delta}, \vec{\xi}_{\Delta'}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τις Δ και Δ' αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το 3ο Λήμμα των διαμερίσεων βρίσκουμε επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}''_{\Delta}$ και $\vec{\eta}''_{\Delta'}$ για τις Δ και Δ', αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$|R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta})-R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'})|\le R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta},\vec{\eta}''_{\Delta})+R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}''_{\Delta'})$$

Θέτουμε $C=R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta},\vec{\eta}''_{\Delta})$ και $C'=R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}''_{\Delta'})$

Έχουμε ότι C και C' είναι αθροίσματα Cauchy-Riemann της f τάξης n και $|R-R'|\le C+C'$.

<u>Κριτήριο Darboux</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε

f Riemann ολοκληρώσιμη $\iff$ Για κάθε ακολουθία $(C_n)_{n\ge1}^{\infty}$ με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann της f τάξης n, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $C_n\to 0$.

<u>Απόδειξη</u>: "$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $(C_n)_{n\ge1}$ ακολουθία με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας το (1) του Πορίσματος των διαμερίσεων, βρίσκουμε ακολουθίες $(R_n)_{n\ge1}^{\infty}$ και $(R'_n)_{n\ge1}^{\infty}$ με R_n και R'_n αθροίσματα Riemann τάξης n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $C_n=R_n-R'_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αφού f Riemann ολοκληρώσιμη, έχουμε ότι $R_n\to\int_a^b f$ και $R'_n\to\int_a^b f$. Συνεπώς, $C_n=R_n-R'_n\to 0$.

"$\Longleftarrow$" Έστω $(R_n)_{n\ge1}^{\infty}$ ~~ακολουθία~~ και $(R'_n)_{n\ge1}^{\infty}$ ακολουθίες με R_n και R'_n αθροίσματα Riemann τάξης n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε το (2) του Πορίσματος των διαμερίσεων και βρίσκουμε ακολουθίες $(C_n)_{n\ge1}^{\infty}$ και $(C'_n)_{n\ge1}^{\infty}$

με C_n και C_n' αθροίσματα Cauchy-Riemann πάνω η της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, τέλοιες ώστε $|R_n - R_n'| \leq C_n + C_n'$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $C_n \to 0$ και $C_n' \to 0$. Άρα, $R_n - R_n' \to 0$.

Αφού f φραγμένη, οι ακολουθίες $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(R_n')_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι φραγμένες.

Αν $(R_{k_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$, τότε αφού $k_n \geq n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι R_{k_n} είναι άθροισμα Riemann πάνω η της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Παίρνοντας λοιπόν $R_n' = R_{k_n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $R_n - R_{k_n} \to 0$. Συνεπώς η $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy και άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Άρα, $\lim_{n\to\infty} R_n \in \mathbb{R}$ και f Riemann ολοκληρώσιμη.

Ιδιότητες Ολοκληρώσιμων Συναρτήσεων

Θεώρημα: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Τότε:

(1) Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε η λf είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

(3) Η fg είναι ολοκληρώσιμη

(4) Αν υπάρχει $\lambda>0$ ώστε $|f(x)|\geq\lambda$, $\forall x\in[a,b]$, τότε η $\frac{1}{f}$ είναι ολοκληρώσιμη

(5) $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(6) Αν $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f \geq 0$.

(7) Αν $f(x)\leq g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, τότε $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

Απόδειξη: (1) Βλέπουμε εύκολα ότι $R(f+g,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) = R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta) + R(g,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ για τη Δ. Έπεται τώρα ότι αν $(R_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία με R_n άθροισμα Riemann της $f+g$ τάξης n, $\forall n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(R_n')_{n\geq 1}$ και $(R_n'')_{n\geq 1}$ με R_n' και R_n'' αθροίσματα Riemann τάξης n των f, g, αντίστοιχα, $\forall n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $R_n = R_n' + R_n''$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_n' + \lim\limits_{n\to\infty} R_n'' = \int_a^b f + \int_a^b g$, αφού f, g ολοκληρώσιμες.

και συνεπώς $f+g$ ολοκληρώσιμη με $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

(2) Παρόμοια έχουμε $R(\lambda f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta) = \lambda R(f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta)$ και το συμπέρασμα έπεται όπως στο (1)

(3) $R(fg, \Delta, \vec{\xi}_\Delta) = \sum\limits_{I\in\Delta} [f(\xi_I) g(\xi_I)] \mu(I)$ και

$$R(fg, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I) g(\xi_I) - f(\eta_I) g(\eta_I)| \mu(I) \leq$$

$$\leq \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I) g(\xi_I) - f(\xi_I) g(\eta_I) + f(\xi_I) g(\eta_I) - f(\eta_I) g(\eta_I)| \mu(I)$$

$$\leq \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I)| |g(\xi_I) - g(\eta_I)| \mu(I) + \sum_{I\in\Delta} |g(\eta_I)| |f(\xi_I) - f(\eta_I)|$$

Όμως οι f, g είναι φραγμένες και άρα υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$R(fg, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta) \leq M \sum_{I\in\Delta} |f(\xi_I) - f(\eta_I)| \mu(I) + M \sum_{I\in\Delta} |g(\xi_I) - g(\eta_I)| \mu(I)$$

$$= M R(f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta) + M R(g, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta).$$

Έπεται τώρα ότι αν $(C_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης n της fg, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε υπάρχουν ακολουθίες $(C_n')_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(C_n'')_{n\geq 1}^{\infty}$ με C_n' και C_n'' αθροίσματα Cauchy-Riemann τάξης n των f, g, αντίστοιχα, $\forall n\in\mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $C_n \leq M C_n' + M C_n''$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Από το κριτήριο Darboux έχουμε τώρα, αφού f, g ολοκληρώσιμες, ότι $C_n' \to 0$ και $C_n'' \to 0$. Άρα και $C_n \to 0$. Έπεται τώρα, πάλι από το κριτήριο Darboux, ότι fg ολοκληρώσιμη.

4) $$R\left(\frac{1}{f}, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta\right) = \sum_{I\in\Delta} \left|\frac{1}{f(\xi_I)} - \frac{1}{f(\eta_I)}\right| \mu(I) = \sum_{I\in\Delta} \frac{|f(\xi_I) - f(\eta_I)|}{|f(\xi_I)|\,|f(\eta_I)|}\mu(I)$$

$\Rightarrow R\left(\frac{1}{f}, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} R(f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta)$. Άρα, κάθε άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης $n\in\mathbb{N}$ της $1/f$, φράσσεται από $1/\lambda^2$ επί ένα αντίστοιχο άθροισμα Cauchy-Riemann της f. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το κριτήριο Darboux.

5) Βλέπουμε εύκολα, μέσω της τριγωνικής ανισότητας, ότι

$$R(|f|, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta) \leq R(f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta) \quad \text{και}$$

$$|R(f, \Delta, \vec{\xi}_\Delta)| \leq R(|f|, \Delta, \vec{\xi}_\Delta)$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ και κάθε ζεύγος επιλογών ενδιάμεσων σημείων, $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$, της Δ. Η πρώτη ανισότητα μας δίνει, μέσω του κριτηρίου Darboux όπως ακριβώς στα (3),(4), ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Η δεύτερη ανισότητα συνεπάγεται ότι $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

6) Αφού $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)\geq 0$ έχουμε ότι $\int_a^b f\geq 0$.

7) $f(x)-g(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$, άρα $\int_a^b(f-g)\leq 0$ και συνεπώς

$$\int_a^b f=\int_a^b[(f-g)+g]\overset{(1)}{=}\int_a^b(f-g)+\int_a^b g\leq\int_a^b g.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Στην απόδειξη του κριτηρίου Darboux δεν γίνεται χρήση του γεγονότος ότι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση πρέπει να είναι φραγμένη. Αυτό που αποδεικνύεται στο κριτήριο Darboux είναι η ισοδυναμία $\lim\limits_{n\to\infty}R_n\in\mathbb{R}$, για κάθε ακολουθία $(R_n)_{n\geq1}^\infty$ με R_n άθροισμα Riemann τύπου η της f, $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}C_n=0$, για κάθε ακολουθία $(C_n)_{n\geq1}^\infty$ με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann τύπου η της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Όμως, κάθε μία από τις υποθέσεις της ισοδυναμίας αυτής συνεπάγεται ότι η f είναι φραγμένη. Αν η f ικανοποιεί την ιδιότητα $\lim\limits_{n\to\infty}R_n\in\mathbb{R}$ για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann τύπου η, τότε όπως δείξαμε στο (5) του θεωρήματος, την ίδια ιδιότητα θα ικανοποιεί και η $|f|$. Αν η f δεν είναι φραγμένη, θα υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n\geq1}^\infty$ του $[a,b]$ με $|f(x_n)|\to+\infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|f(x_n)|>n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε μία διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ ώστε $\mu(I)=\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$. Επίσης θεωρούμε μία επιλογή ενδιαμέσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}$ της Δ_n που περιλαμβάνει το x_n. Τότε,

$R(|f|,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})\geq\frac{n^2(b-a)}{n}=n(b-a)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θέτουμε $R_n=R(|f|,\Delta_{n+1},\vec{\xi}_{\Delta_{n+1}})$ $\forall n\in\mathbb{N}$ και βλέπουμε ότι R_n είναι άθροισμα Riemann τύπου η της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Όμως $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=+\infty$ αφού $R_n\geq(n+1)(b-a)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άτοπο, άρα f φραγμένη.

Πρόταση 1: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε $\forall \epsilon>0$, $\exists \delta>0$ με την ιδιότητα:
$$\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-\int_a^b f\right|<\epsilon ,$$
για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ.

Αντίστροφα, αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ με την ιδιότητα για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ ισχύει η ανισότητα
$$|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-\lambda|<\epsilon ,$$
τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f=\lambda$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αν το συμπέρασμα της πρότασης δεν ισχύει, τότε $\exists\,\epsilon_0>0$ ώστε $\forall\delta>0$, υπάρχει μία διαμέριση Δ του $[a,b]$ και μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ έτσι ώστε $\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-\int_a^b f\right|\geq\epsilon_0$, και $\mu(I)<\delta, \forall I\in\Delta$.
Εφαρμόζουμε διαδοχικά για $\delta=\frac{b-a}{n}$, και βρίσκουμε διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$ και επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}$ της Δ_n έτσι ώστε
$$\left|R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})-\int_a^b f\right|\geq\epsilon_0 .$$
Έπεται τώρα ότι η ακολουθία $(R_n)_{n\geq1}$ με $R_n=R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, έχει την ιδιότητα ο R_n να είναι άθροισμα Riemann τύπου n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Συνεπώς, $R_n\to\int_a^b f$. Άτοπο γιατί $\left|R_n-\int_a^b f\right|\geq\epsilon_0>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αντίστροφα, αν $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία με R_n άθροισμα Riemann τάξης n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε αν $\epsilon>0$ είναι τυχόν και $\delta>0$ όπως στην υπόθεση της Πρότασης, επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με $\frac{b-a}{n}<\delta$, $\forall n\geq n_0$. Τότε, $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta_n$, όπου $R_n=R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})$, $\forall n\geq n_0$. Έπεται τώρα ότι $|R_n-\lambda|<\epsilon$, $\forall n\geq n_0$. Άρα, $R_n\to\lambda$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με $\int_a^b f=\lambda$.

<u>Πρόταση 2</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη με $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$. Τότε, $\int_a^b f>0$

<u>Απόδειξη</u>: Από το (6) του θεωρήματος έχουμε ότι $\int_a^b f\geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $\int_a^b f=0$. Έστω $\epsilon>0$ τυχόν. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1 για την f και τον $\epsilon(b-a)$ και βρίσκουμε $0<\delta<\epsilon$ ώστε $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)<\epsilon(b-a)$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ της Δ. Θεωρούμε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Τότε υπάρχει $I_1\in\Delta$ τέτοιο ώστε $f(x)<\epsilon$, $\forall x\in I_1$. Σε αντίθετη περίπτωση, σε κάθε $I\in\Delta$ βρίσκουμε $\xi_I\in I$ τέτοιο ώστε $f(\xi_I)\geq\epsilon$. Έπεται τώρα ότι $\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)\geq\epsilon\sum_{I\in\Delta}\mu(I)=\epsilon(b-a)$. Όμως, $\sum_{I\in\Delta} f(\xi_I)\mu(I)=R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$, όπου $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I : I\in\Delta\}$, και συνεπώς $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)<\epsilon(b-a)$. Άτοπο, αφού $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)\geq\epsilon(b-a)$.

Βρίσκουμε $\delta>0$ και I_1 υποδιάστημα του $[a,b]$ με $\mu(I_1)<\delta<\epsilon$ και τέτοιο ώστε $f(x)<\epsilon$, $\forall x\in I_1$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα I_1 (θα το δούμε στην επόμενη πρόταση) και $0\leq\int_{I_1} f\leq\int_a^b f=0$

Εφαρμόζουμε για $\epsilon = 1/2$ και βρίσκουμε κλειστό υποδιάστημα $I_1 \subset [a,b]$ με $\mu(I_1) < 1/2$ και $f(x) < 1/2$, $\forall x \in I_1$. Αφού $f(x) \geq 0$, $\forall x \in I_1$, και $\int_{I_1} f = 0$, εφαρμόζουμε το αρχικό συμπέρασμα για την $f|I_1$ και $\epsilon = 1/4$, και βρίσκουμε κλειστό υποδιάστημα $I_2 \subset I_1$ ώστε $\mu(I_2) < \frac{1}{4}$ και $f(x) < 1/4$, $\forall x \in I_2$. Συνεχίζουμε και με τον ίδιο συλλογισμό κατασκευάζουμε, επαγωγικά, κλειστά υποδιαστήματα $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I_n) < \frac{1}{2^n}$ και $f(x) < \frac{1}{2^n}$, $\forall x \in I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι $I_n = [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $I_{n+1} \subset I_n$, έχουμε ότι $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς η $(a_n)_{n\geq 1}^{\nearrow}$ είναι αύξουσα και η $(b_n)_{n \geq 1}^{\searrow}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων του $[a,b]$. Επιπλέον έχουμε ότι $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έπεται τώρα ότι $a_n \to x_0$ και $b_n \to x_0$ για κάποιο $x_0 \in [a,b]$, αφού $b_n - a_n \to 0$. Επίσης, λόγω της μονοτονίας των $(a_n)_{n\geq1}^{\nearrow}$ και $(b_n)_{n\geq1}^{\searrow}$, έχουμε ότι $a_n \leq x_0 \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $x_0 \in [a_n, b_n] = I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Συμπεραίνουμε ότι $0 < f(x_0) < \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Όμως, $\frac{1}{2^n} \to 0$ και $f(x_0) > 0$. Άτοπο. Άρα, αναγκαία, $\int_a^b f > 0$.

<u>Πρόταση 3</u>: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε η $f|[\gamma,\delta]$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $a \leq \gamma < \delta \leq b$.

(2) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε $\int_a^b f = \int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f$, $\forall \gamma \in (a,b)$.

(3) Αν $\gamma \in (a,b)$ και $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma,b]$ είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: (1) Θεωρούμε μία ακολουθία $(C_n)_{n\geq1}^{\infty}$ ώστε το C_n να είναι άθροισμα Cauchy-Riemann τύπου ΙΙ της $f|[\gamma,\delta]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, $C_n = R(f, \Delta_n, \vec{\xi}_{\Delta_n}, \vec{\eta}_{\Delta_n})$ όπου Δ_n διαμέριση του $[\gamma,\delta]$ με $\mu(I) < \frac{\delta-\gamma}{n}$, $\forall I \in \Delta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι $\mu(I) < \frac{\delta-\gamma}{n} \leq \frac{b-a}{n}$, $\forall I \in \Delta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε διαμερίσεις Δ_n' του $[a,\gamma]$, και Δ_n'' του $[\delta,b]$, τέτοιες ώστε $\mu(I) < \frac{\gamma-a}{n} < \frac{b-a}{n}$, ~~και~~ $\forall I \in \Delta_n'$, και $\mu(I) < \frac{b-\delta}{n} < \frac{b-a}{n}$, $\forall I \in \Delta_n''$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης θεωρούμε επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n'}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_n'}$ για την Δ_n', και $\vec{\xi}_{\Delta_n''}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_n''}$ για την Δ_n'', $\forall n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση $E_n = \Delta_n' \cup \Delta_n \cup \Delta_n''$ του $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και τις επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{E_n} = \vec{\xi}_{\Delta_n'} \cup \vec{\xi}_{\Delta_n} \cup \vec{\xi}_{\Delta_n''}$ και $\vec{\eta}_{E_n} = \vec{\eta}_{\Delta_n'} \cup \vec{\eta}_{\Delta_n} \cup \vec{\eta}_{\Delta_n''}$ για την E_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Θέτουμε $C_n' = R(f, E_n, \vec{\xi}_{E_n}, \vec{\eta}_{E_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $\mu(I) < \frac{b-a}{n}$, $\forall I \in E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι η $(C_n')_{n \geq 1}$ είναι μία ακολουθία αθροισμάτων Cauchy-Riemann της f με C_n' άθροισμα τάξης n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε από το κριτήριο Darboux, ότι $C_n' \to 0$. Όμως, $C_n' = R(f, \Delta_n'', \vec{\xi}_{\Delta_n''}, \vec{\eta}_{\Delta_n''}) + R(f, \Delta_n, \vec{\xi}_{\Delta_n}, \vec{\eta}_{\Delta_n}) + R(f, \Delta_n', \vec{\xi}_{\Delta_n'}, \vec{\eta}_{\Delta_n'})$ και συνεπώς, $0 \leq C_n \leq C_n'$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $C_n \to 0$ και η $f|[\gamma,\delta]$ είναι ολοκληρώσιμη από το κριτήριο Darboux.

(2) Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε από το (1), ότι και οι $f:[a,\gamma] \to \mathbb{R}$ και $f:[\gamma,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες. Έστω Δ_n' διαμέριση του $[a,\gamma]$ με $\mu(I) < \frac{\gamma-a}{n}$, $\forall I \in \Delta_n'$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω Δ_n'' διαμέριση του $[\gamma,b]$ με $\mu(I) < \frac{b-\gamma}{n}$, $\forall I \in \Delta_n''$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $\vec{\xi}_{\Delta_n'}$ και $\vec{\xi}_{\Delta_n''}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τις διαμερίσεις Δ_n' και Δ_n'', αντίστοιχα, $\forall n\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε, $\forall n\in\mathbb{N}$, τη διαμέριση $\Delta_n=\Delta_n'\cup\Delta_n''$ του $[a,b]$ και την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}=\vec{\xi}_{\Delta_n'}\cup\vec{\xi}_{\Delta_n''}$ για την Δ_n. Τότε, $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Είναι σαφές ότι $R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})=R(f,\Delta_n',\vec{\xi}_{\Delta_n'})+R(f,\Delta_n'',\vec{\xi}_{\Delta_n''})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και τα αθροίσματα Riemann $R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})$, $R(f,\Delta_n',\vec{\xi}_{\Delta_n'})$ και $R(f,\Delta_n'',\vec{\xi}_{\Delta_n''})$ είναι τάξης n για τις συναρτήσεις f, $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma,b]$, αντίστοιχα, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, αφού f, $f|[a,\gamma]$, $f|[\gamma,b]$ είναι ολοκληρώσιμες, έχουμε ότι $\int_a^b f=\lim_{n\to\infty}R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n})=$

$$=\lim_{n\to\infty}R(f,\Delta_n',\vec{\xi}_{\Delta_n'})+\lim_{n\to\infty}R(f,\Delta_n'',\vec{\xi}_{\Delta_n''})=\int_a^\gamma f+\int_\gamma^b f$$

(3) Υποθέτουμε ότι οι $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma,b]$ είναι ολοκληρώσιμες. Θεωρούμε μία ακολουθία $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης n^2 της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $C_n=R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n},\vec{\eta}_{\Delta_n})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, όπου Δ_n διαμέριση του $[a,b]$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n^2}$, $\forall I\in\Delta_n$, και $\vec{\xi}_{\Delta_n}$, $\vec{\eta}_{\Delta_n}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ_n, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n^2}<\frac{\gamma-a}{n}$ και $\frac{b-a}{n^2}<\frac{b-\gamma}{n}$, $\forall n\geq n_0$. Σταθεροποιούμε $n\geq n_0$ και συμβολίζουμε με I_{k_n} ένα διάστημα της Δ_n που περιέχει το γ

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το γ είναι εσωτερικό σημείο του I_{k_n}. Θέτουμε $I_{k_n}^- = I_{k_n} \cap (-\infty, \gamma]$ και $I_{k_n}^+ = I_{k_n} \cap [\gamma, +\infty)$.

Ορίζουμε $\Delta_n' = \{I \in \Delta_n : \max I \leq \min I_{k_n}\} \cup \{I_{k_n}^-\}$ και $\Delta_n'' = \{I \in \Delta_n : \min I \geq \max I_{k_n}\} \cup \{I_{k_n}^+\}$. Τότε η Δ_n' είναι διαμέριση του $[a, \gamma]$ με $\mu(I) < \frac{b-a}{n^2} < \frac{\gamma - a}{n}$, $\forall I \in \Delta_n'$. Η Δ_n'' είναι διαμέριση του $[\gamma, b]$ με $\mu(I) < \frac{b-a}{n^2} < \frac{\gamma - b}{n}$, $\forall I \in \Delta_n''$. Επίσης ορίζουμε επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n'} = \{\xi_I : I \in \Delta_n, \max I \leq \min I_{k_n}\} \cup \{\gamma\}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_n'} = \{\eta_I : I \in \Delta_n, \max I \leq \min I_{k_n}\} \cup \{\gamma\}$, για την Δ_n'.

Ανάλογα ορίζουμε $\vec{\xi}_{\Delta_n''} = \{\xi_I : I \in \Delta_n, \min I \geq \max I_{k_n}\} \cup \{\gamma\}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_n''} = \{\eta_I : I \in \Delta_n, \min I \geq \max I_{k_n}\} \cup \{\gamma\}$, επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ_n''. Θέτουμε $C_n' = R(f, \Delta_n', \vec{\xi}_{\Delta_n'}, \vec{\eta}_{\Delta_n'})$ και $C_n'' = R(f, \Delta_n'', \vec{\xi}_{\Delta_n''}, \vec{\eta}_{\Delta_n''})$, $\forall n \geq n_0$. Τότε C_n' και C_n'' είναι αθροίσματα Cauchy-Riemann τάξη n για τις $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma, b]$, αντίστοιχα, $\forall n \geq n_0$. Συνεπώς, $C_n' \to 0$ και $C_n'' \to 0$ από το κριτήριο Darboux αφού $f|[a,\gamma]$ και $f|[\gamma,b]$ ολοκληρώσιμες. Έχουμε τώρα ότι $C_n - C_n' - C_n'' = |f(\xi_{I_{k_n}}) - f(\eta_{I_{k_n}})| \mu(I_{k_n}) \leq 2M \frac{(b-a)}{n^2}$, $\forall n \geq n_0$, όπου M άνω φράγμα της $|f|$ στο $[a,b]$. Άρα, $C_n \leq C_n' + C_n'' + \frac{2M(b-a)}{n^2}$, $\forall n \geq n_0$. Συνεπώς, $C_n \to 0$, για κάθε ακολουθία $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann της f τάξης n^2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Αν τώρα $(C_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία με C_n άθροισμα Riemann-Cauchy τάξης n της f, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $C_n \not\to 0$, τότε υπάρχει $\epsilon_0>0$ και υπακολουθία $(C_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(C_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ με $C_{m_n}\geq \epsilon_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε όμως η $(C_{m_{n^2}})_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(C_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $m_{n^2}\geq n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $\mu(I)<\frac{b-a}{m_{n^2}}\leq \frac{b-a}{n^2}$, $\forall I$ διάστημα της διαμέρισης του $[a,b]$ που ορίζει το $C_{m_{n^2}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς το $C_{m_{n^2}}$ είναι άθροισμα Cauchy-Riemann τάξης n^2 της f, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα, $C_{m_{n^2}}\to 0$ όπως δείξαμε προηγουμένως. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί $C_{m_{n^2}}\geq \epsilon_0>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>Πρόταση 4</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη αν, και μόνο αν, $\forall \epsilon>0$, $\exists \delta>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και για κάθε επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\eta}_\Delta, \vec{\xi}_\Delta$ για τη Δ, έχουμε ότι $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon$.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αν το συμπέρασμα της πρότασης δεν ισχύει, τότε υπάρχει $\epsilon_0>0$ ώστε $\forall \delta>0$, υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_\Delta$ για τη Δ τέτοιες ώστε $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)\geq \epsilon_0$. Εφαρμόζουμε διαδοχικά για $\delta=\frac{b-a}{n}$ και κατασκευάζουμε ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και ακολουθίες $(\vec{\xi}_{\Delta_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ και $(\vec{\eta}_{\Delta_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ με $\vec{\xi}_{\Delta_n}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_n}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ_n, $\forall n\in\mathbb{N}$, τέτοιες ώστε

Θέτοντας $C_n = R(f, \Delta_n, \vec{\xi}_{\Delta_n}, \vec{\eta}_{\Delta_n})$, που είναι άθροισμα Cauchy-Riemann της f τάξης n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ~~...~~ ότι $C_n \geq \epsilon_0 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Όμως η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $C_n \to 0$, από το κριτήριο Darboux. Άτοπο, άρα ο ισχυρισμός του συμπεράσματος ~~ισχύει~~ είναι αληθής.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $(\epsilon - \delta)$ συμπέρασμα της πρότασης ισχύει. Έστω $(C_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία με C_n άθροισμα Cauchy-Riemann της f τάξης n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $C_n = R(f, \Delta_n, \vec{\xi}_{\Delta_n}, \vec{\eta}_{\Delta_n})$ με Δ_n διαμέριση του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I) < \frac{b-a}{n}$, $\forall I \in \Delta_n$, και $\vec{\xi}_{\Delta_n}, \vec{\eta}_{\Delta_n}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ_n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $\epsilon > 0$. Τότε, με βάση την υπόθεση, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $C < \epsilon$, για κάθε Cauchy-Riemann άθροισμα C της f που αντιστοιχεί σε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I) < \delta$, $\forall I \in \Delta$. Αφού $\frac{b-a}{n} \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{b-a}{n} < \delta$, $\forall n \geq n_0$. Έπεται ότι $C_n < \epsilon$, $\forall n \geq n_0$. Αφού $\epsilon > 0$, έχουμε ότι $C_n \to 0$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη από το κριτήριο Darboux.

<u>Πρόταση 5</u>: Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Υποθέτουμε ότι $\forall \gamma \in (a,b)$ η συνάρτηση $f|[a,\gamma]$ είναι ολοκληρώσιμη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f = \lim_{\gamma \to b^-} \int_a^\gamma f$

Απόδειξη: Έστω $\epsilon>0$. Επιλέγουμε $a<\gamma<b$ με $b-\frac{\epsilon}{4M}<\gamma$, όπου $M>0$ έχει την ιδιότητα $|f(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,b]$ (αφού f φραγμένη). Η $f|[a,\gamma]$ είναι ολοκληρώσιμη. Άρα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $\delta<\frac{\epsilon}{4M}$ και $C<\epsilon/4$, για κάθε άθροισμα Cauchy-Riemann της $f|[a,\gamma]$ που αντιστοιχεί σε διαμέριση Δ' του $[a,\gamma]$ ώστε $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta'$. (Πρόταση 4).

Θεωρούμε τώρα μία τυχαία διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Έστω $\vec{\xi}_\Delta$, $\vec{\eta}_\Delta$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ. Ορίζουμε τη διαμέριση Δ' του $[a,\gamma]$ με $\Delta'=\{I\cap[a,\gamma]: I\in\Delta\}$. Τότε $\mu(J)<\delta$, $\forall J\in\Delta'$. Έστω $I_0\in\Delta$ με $\gamma\in I_0$ (υποθέτουμε ότι τα διαστήματα $I\cap[a,\gamma]$, $I\in\Delta$, έχουν θετικό μήκος). Θέτουμε $J_0=I_0\cap[a,\gamma]\in\Delta'$.

Ορίζουμε $\vec{\xi}_{\Delta'}=\{\xi_I : I\in\Delta,\ \max I\leq\min I_0\}\cup\{\gamma\}$ και

$\vec{\eta}_{\Delta'}=\{\eta_I : I\in\Delta,\ \max I\leq\min I_0\}\cup\{\gamma\}$, επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ'. Παρατηρούμε ότι $I\cap[a,\gamma]=I$, αν $\max I\leq\min I_0$, $(I\in\Delta)$. Άρα, $\xi_{J_0}=\eta_{J_0}=\gamma$. Έπεται τώρα ότι $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)-R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}_{\Delta'})$

$$=\sum_{\substack{I\in\Delta:\\ \min I\geq\min I_0}}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)\leq 2M\sum_{\substack{I\in\Delta:\\ \min I\geq\min I_0}}\mu(I)\leq 2M(b-\gamma)+2M\mu(I_0)<$$

$$<2M\cdot\frac{\epsilon}{4M}+2M\cdot\delta<\frac{\epsilon}{2}+2M\cdot\frac{\epsilon}{4M}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$ αφού αν $I\in\Delta$ και $\min I>\min I_0$, έχουμε ότι $I\subset[\gamma,b]$. Όμως, $R(f,\Delta',\vec{\xi}_{\Delta'},\vec{\eta}_{\Delta'})<\epsilon/4$. Άρα, $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon+\epsilon/4$. Αφού $\epsilon>0$ τυχόν, έπεται από την Πρόταση 4

ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Από την Πρόταση 3 έχουμε ακόμα ότι η $f|[\gamma,b]$ είναι ολοκληρώσιμη, $\forall \gamma\in(a,b)$, και $\int_a^\gamma f + \int_\gamma^b f = \int_a^b f$, $\forall\gamma\in(a,b)$.

Άρα, $\left|\int_a^b f - \int_a^\gamma f\right| \leq \int_\gamma^b |f| \leq M(b-\gamma)$, $\forall \gamma\in(a,b)$. Άρα, για $\gamma\to b^-$ έχουμε ότι $\lim_{\gamma\to b^-}\int_a^\gamma f = \int_a^b f$.

<u>Πρόταση 6</u>: Έστω I_0 φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με άκρα $a_0<b_0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\chi_{I_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\chi_{I_0}(x)=\begin{cases}1, & x\in I_0\\ 0, & x\notin I_0.\end{cases}$

Τότε η χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,b]$ με $a\leq a_0$ και $b\geq b_0$, και $\int_a^b \chi_{I_0} = \mu(I_0)$.

<u>Απόδειξη</u>: Πρώτα δείχνουμε ότι η χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_0,b_0]$ με $\int_{a_0}^{b_0}\chi_{I_0}=\mu(I_0)$. Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $[a_0,b_0]$ με $\mu(I)<\frac{b_0-a_0}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Επίσης θεωρούμε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, μία επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_n}$ για τη Δ_n. Συμβολίζουμε, $\forall n\in\mathbb{N}$, με I_n^- και I_n^+ τα διαστήματα της Δ_n με $a_0\in I_n^-$ και $b_0\in I_n^+$. Αν $I\in\Delta_n$ και $I\neq I_n^-, I_n^+$, τότε $I\subset(a_0,b_0)$ και άρα $\chi_{I_0}(x)=1$, $\forall x\in I$. Έπεται λοιπόν ότι

$$R(\chi_{I_0},\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n}) = \chi_{I_0}(\xi_{I_n^-})\mu(I_n^-) + \sum_{\substack{I\in\Delta_n\\ I\neq I_n^-,I_n^+}}\mu(I) + \chi_{I_0}(\xi_{I_n^+})\mu(I_n^+).$$

Επίσης, $\sum_{\substack{I\in\Delta_n\\ I\neq I_n^-,I_n^+}}\mu(I) = \mu(I_0)-\mu(I_n^-)-\mu(I_n^+)$. Άρα έχουμε ότι

$$\left|R(\chi_{I_0}, \Delta_n, \vec{\xi}_{\Delta_n}) - \mu(I_0)\right| \le \mu(I_n^-)+\mu(I_n^+) < 2\cdot\frac{b_0-a_0}{n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty} R(\chi_{I_0},\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n}) = \mu(I_0)$. Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε ακολουθία $(R_n)_{n\ge1}$ αθροισμάτων Riemann της χ_{I_0} στο $[a_0,b_0]$ με R_n είναι η για κάθε $n\in\mathbb{N}$, συγκλίνει στο $\mu(I_0)$. Άρα χ_{I_0} ολοκληρώσιμη στο $[a_0,b_0]$ και $\int_{a_0}^{b_0}\chi_{I_0}=\mu(I_0)$. Έστω $a<a_0$ και $b>b_0$. Αφού $\chi_{I_0}=0$ σε κάθε διάστημα $[a,\gamma]$, $a<\gamma<a_0$, και $\chi_{I_0}=0$ σε κάθε διάστημα $[\gamma,b]$ με $b_0<\gamma<b$, έχουμε από την Πρόταση 5 ότι η χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,a_0]$ και $[b_0,b]$ με $\int_{a}^{a_0}\chi_{I_0}=\int_{b_0}^{b}\chi_{I_0}=0$.

Η χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_0,b_0]$. Άρα, από την Πρόταση 3 συμπεραίνουμε ότι χ_{I_0} είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $\int_a^b \chi_{I_0} = \int_{a_0}^{b_0}\chi_{I_0}=\mu(I_0)$

<u>Πρόταση 7</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μονότονη. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. (Αν f φθίνουσα, τότε η $-f$ είναι αύξουσα)

Η f είναι φραγμένη αφού $f(a)\le f(x)\le f(b)$, $\forall x\in[a,b]$. Έστω $\epsilon>0$. Αν Δ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με $\mu(I)<\epsilon$, $\forall I\in\Delta$, και $\vec{\xi}_\Delta$, $\vec{\eta}_\Delta$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ, τότε έχουμε ότι:

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) = \sum_{I\in\Delta}\left|f(\xi_I)-f(\eta_I)\right|\mu(I) \overset{f\uparrow}{\le} \sum_{I\in\Delta}\left|f(\max I)-f(\min I)\right|\mu(I)$$

Τα διαστήματα της Δ είναι διαδοχικά. Έστω $I_1,\dots,I_n$ μία αρίθμηση των διαστημάτων της Δ ώστε $\max I_i=\min I_{i+1}$, $\forall i=1,\dots,n-1$. Τότε, αφού $\mu(I)<\epsilon$, $\forall I\in\Delta$, έχουμε ότι $\sum_{I\in\Delta}\left|f(\max I)-f(\min I)\right|\mu(I) =$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{I\in\Delta}[f(\max I)-f(\min I)]\mu(I) = \sum_{k=1}^{n}[f(\max I_k)-f(\min I_k)]\mu(I_k) \le$$

$$\le \epsilon \sum_{k=1}^{n}[f(\max I_k)-f(\min I_k)] = \epsilon \sum_{k=1}^{n}[f(\max I_k)-f(\max I_{k-1})] \quad , \text{ όπου}$$

θέσαμε $\max I_0 = a$, άρα, $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta) \le \epsilon[f(b)-f(a)]$.

Από την Πρόταση 4 έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Χαρακτηρισμός ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Το Θεώρημα του Lebesgue

<u>Κριτήριο Riemann</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ $\forall\, \epsilon>0$, υπάρχει διαμέριση Δ_0 του $[a,b]$ με την ιδιότητα: $R(f,\Delta_0,\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}_{\Delta_0})<\epsilon$, για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_0}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_0}$ της Δ_0.

<u>Απόδειξη</u>: "$\Longrightarrow$" Από την Πρόταση 1 υπάρχει $\delta>0$, δοθέντος $\epsilon>0$, τέτοιο ώστε $\left|R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)-\int_a^b f\right|<\epsilon/2$ για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$ $\forall I\in\Delta$. Θεωρούμε μία διαμέριση Δ_0 του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta_0$. Τότε, αν $\vec{\xi}'_{\Delta_0}$ και $\vec{\eta}'_{\Delta_0}$ είναι (τυχαίες) επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ_0, έχουμε ότι $\left|R(f,\Delta_0,\vec{\xi}'_{\Delta_0})-R(f,\Delta_0,\vec{\eta}'_{\Delta_0})\right|\le\left|R(f,\Delta_0,\vec{\xi}'_{\Delta_0})-\int_a^b f\right|+\left|R(f,\Delta_0,\vec{\eta}'_{\Delta_0})-\int_a^b f\right|<\epsilon$

Έστω $\vec{\xi}_{\Delta_0}$ και $\vec{\eta}_{\Delta_0}$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ_0. Το δεύτερο λήμμα των διαμερίσεων μας δίνει επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}'_{\Delta_0}$ και $\vec{\eta}'_{\Delta_0}$ της Δ_0 ώστε $R(f,\Delta_0,\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}_{\Delta_0}) = R(f,\Delta_0,\vec{\xi}'_{\Delta_0})-R(f,\Delta_0,\vec{\eta}'_{\Delta_0})$. Άρα, $R(f,\Delta_0,\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}_{\Delta_0})<\epsilon$.

"$\Leftarrow$" Έστω $\epsilon>0$. Επιλέγουμε διαμέριση Δ_0 του $[a,b]$ τέτοια ώστε $R(f,\Delta,\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}_{\Delta_0})<\epsilon/2$ για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}_{\Delta_0}$ της Δ_0.
Έστω $n_0=|\Delta_0|$ και $M>0$, άνω φράγμα της $|f|$. Επιλέγουμε $0<\delta<\dfrac{\epsilon}{4n_0 M}$. Έστω Δ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Ορίζουμε $\Delta'=\{I\in\Delta : I$ είναι υποσύνολο κάποιου $J\in\Delta_0\}$ και $\Delta_0'=\{J\in\Delta_0 : \exists I\in\Delta', I\subset J\}$. Έστω $\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων για τη Δ. Για κάθε $J\in\Delta_0'$ επιλέγουμε $I_J\in\Delta'$ ώστε

$$|f(\xi_{I_J})-f(\eta_{I_J})|=\max\{|f(\xi_I)-f(\eta_I)| : I\in\Delta', I\subset J\}$$

Ορίζουμε επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}'_{\Delta_0}$ και $\vec{\eta}'_{\Delta_0}$ για την Δ_0 ως εξής:

$$\vec{\xi}'_{\Delta_0}=\{\xi'_J : J\in\Delta_0\} \quad\text{και}\quad \vec{\eta}'_{\Delta_0}=\{\eta'_J : J\in\Delta_0\} \text{ με}$$

$$\xi'_J=\begin{cases}\xi_{I_J}, & \text{αν } J\in\Delta_0'\\ \underbrace{\gamma_J\in J}_{\text{τυχόν}}, & \text{αν } J\notin\Delta_0'\end{cases} \quad\text{και}\quad \eta'_J=\begin{cases}\eta_{I_J}, & \text{αν } J\in\Delta_0'\\ \gamma'_J\in J, & \text{αν } J\notin\Delta_0'\end{cases}$$

για κάθε $J\in\Delta_0$. Τότε, $\displaystyle\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)=$

$$=\sum_{J\in\Delta_0'}\sum_{\substack{I\in\Delta'\\ I\subset J}}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)\le\sum_{J\in\Delta_0'}|f(\xi_{I_J})-f(\eta_{I_J})|\sum_{\substack{I\in\Delta'\\ I\subset J}}\mu(I)=$$

$$=\sum_{J\in\Delta_0'}|f(\xi'_J)-f(\eta'_J)|\mu(J)=R(f,\Delta_0,\vec{\xi}_{\Delta_0},\vec{\eta}'_{\Delta_0})<\epsilon/2$$

Για την εκτίμηση του αθροίσματος $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'} |f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)$ παρατηρούμε ότι αφού κάθε $I\in\Delta\setminus\Delta'$ τέμνει τουλάχιστον δύο διαστήματα της διαμέρισης Δ_0 θα έχουμε ότι $|\Delta\setminus\Delta'|\le|\Delta_0|=n_0$. Συνεπώς, $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)\le$

$$\le \sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'} 2M\cdot\mu(I) < \sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'} 2M\cdot\delta = 2M\delta|\Delta\setminus\Delta'|\le 2M\delta n_0 < 2Mn_0\cdot\frac{\epsilon}{4n_0 M} = \epsilon/2 .$$

Άρα, $$\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I) = \sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I) + \sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I) < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

Δηλαδή δείξαμε ότι $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta, \forall I\in\Delta$, και κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ της Δ. Αν $(C_n)_{n\ge1}^{\infty}$ είναι ακολουθία αθροισμάτων Cauchy-Riemann της f με C_n τάξης n, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε έστω $\epsilon>0$. Επιλέγουμε $\delta>0$ όπως παραπάνω. Αν $C_n = R(f,\Delta_n,\vec{\xi}_{\Delta_n},\vec{\eta}_{\Delta_n})$ με $\mu(I)<\frac{b-a}{n}$, $\forall I\in\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, τότε υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ με $\frac{b-a}{n}<\delta$, $\forall n\ge n_1$. Άρα, $C_n<\epsilon$, $\forall n\ge n_1$. Συνεπώς, $C_n\to 0$ και f ολοκληρώσιμη από το κριτήριο Darboux.

Αριθμήσιμα Σύνολα

Ένα σύνολο X καλείται αριθμήσιμο όταν ισούται με το πεδίο τιμών μιας συνάρτησης που ορίζεται στο $\mathbb{N}$. Άρα, X αριθμήσιμο $\iff \exists\, f:\mathbb{N}\xrightarrow{\text{επί}} X$. Αν X αριθμήσιμο, τότε τα στοιχεία του μπορούν να αριθμηθούν όπως οι όροι μιας ακολουθίας. Πράγματι, αν $f:\mathbb{N}\to X$ συνάρτηση επί, θέσουμε $f(n)=x_n\in X$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, $X=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$.

Παραδείγματα: 1) Το $\mathbb{N}$ και κάθε υποσύνολο του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμα

2) Το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\{(m,n): m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο. Πράγματι, θέτουμε $A_k=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : m+n=k\}$, $\forall k\in\mathbb{N}$. $(A_1=\emptyset)$. Τότε $A_k\cap A_\ell=\emptyset$ αν $k\neq\ell$. Βλέπουμε επίσης ότι $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. Μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$, όπου F_k διαδοχικά υποσύνολα του $\mathbb{N}$ $(\max F_k=\min F_{k+1}-1)$ και $|F_k|=|A_k|$, $\forall k\in\mathbb{N}$. (κάθε A_k είναι πεπερασμένο) Ορίζουμε την απεικόνιση $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ με $f|F_k : F_k\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}A_k$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

Η f είναι καλά ορισμένη αφού $|F_k|=|A_k|$, $\forall k\in\mathbb{N}$, και $F_k\cap F_\ell=\emptyset$, $k\neq\ell$, $A_k\cap A_\ell=\emptyset$, $k\neq\ell$. Έτσι, η f είναι 1-1 και επί και άρα το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

3) $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο, αφού η $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}^+$ με $f(m,n)=\frac{m}{n}$, όπου $\mathbb{Q}^+=\{q\in\mathbb{Q}: q>0\}$ είναι επί. Ανάλογα, $\mathbb{Q}^-=\{q\in\mathbb{Q}: q<0\}$ είναι αριθμήσιμο και επίσης παίρνουμε ότι $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\mathbb{Q}^-\cup\{0\}$ είναι αριθμήσιμο

4) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο αφού υπάρχει $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ επί και άρα η απεικόνιση $f\otimes f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ με $(f\otimes f)(m,n)=(f(m),f(n))$, $\forall (m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι επί. Αν $h:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι απεικόνιση επί, ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ αριθμήσιμο), τότε η $(f\otimes f)\circ h:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ είναι επί.

5) Η οικογένεια των ανοιχτών διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα, είναι αριθμήσιμη, αφού το $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Άρα αυτή η οικογένεια γράφεται ως $\{(p_n,q_n): n\in\mathbb{N},\ p_n<q_n \text{ στο } \mathbb{Q}\}$, όπου

$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} = \left\{(p_n, q_n) : n\in\mathbb{N},\ p_n\in\mathbb{Q},\ q_n\in\mathbb{Q}\right\}$ είναι μία αρίθμηση του $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. (Εδώ το $(p_n,q_n)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Όταν βλέπουμε το διάστημα (p_n,q_n), θεωρούμε ότι $p_n<q_n$)

<u>Λήμμα</u>: Έστω $T\subset\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t\in T$, N_t είναι κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $(t_n)_{n\geq1}^{\infty}$ από στοιχεία του T ώστε $\bigcup\limits_{t\in T} N_t = \bigcup\limits_{n\geq1}^{\infty} N_{t_n}$.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $N_t\subset\mathbb{N}$, $\forall t\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $M=\bigcup\limits_{t\in T}N_t\subset\mathbb{N}$. Άρα μπορούμε να γράψουμε $M=\{m_n : n\in\mathbb{N}\}$. Αν $n\in\mathbb{N}$, τότε $m_n\in M$ και υπάρχει $t_n\in T$ με $m_n\in N_{t_n}$. Άρα, $M\subset\bigcup\limits_{n\geq1}^{\infty}N_{t_n}\subset M \Rightarrow M=\bigcup\limits_{n\geq1}^{\infty}N_{t_n}$

<u>Θεώρημα</u> (Lindelöf) Έστω $T\subset\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t\in T$, (a_t,b_t) είναι ένα ανοιχτό και φραγμένο υποδιάστημα του $\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει μία ακολουθία $(t_n)_{n\geq1}^{\infty}$ από στοιχεία του T ώστε $\bigcup\limits_{t\in T}(a_t,b_t)=\bigcup\limits_{n\geq1}^{\infty}(a_{t_n},b_{t_n})$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\left\{(p_n,q_n) : n\in\mathbb{N},\ p_n\in\mathbb{Q},\ q_n\in\mathbb{Q},\ p_n<q_n\right\}$ μία αρίθμηση της οικογένειας των ανοιχτών φραγμένων υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$ με ρητά άκρα. Αν J είναι ανοιχτό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$, τότε η πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ μας δίνει $M\subset\mathbb{N}$ ώστε $J=\bigcup\limits_{n\in M}(p_n,q_n)$. Συνεπώς, για κάθε $t\in T$ υπάρχει $N_t\subset\mathbb{N}$ ώστε $(a_t,b_t)=\bigcup\limits_{n\in N_t}(p_n,q_n)$. Άρα, $\bigcup\limits_{t\in T}(a_t,b_t)=\bigcup\limits_{t\in T}\bigcup\limits_{n\in N_t}(p_n,q_n)=$

$$=\bigcup_{n\in\bigcup\limits_{t\in T}N_t}(p_n,q_n)=\bigcup_{n\geq1}^{\infty}\bigcup_{n\in N_{t_n}}(p_n,q_n)=\bigcup_{n\geq1}^{\infty}(a_{t_n},b_{t_n}),$$ από το λήμμα.

__Θεώρημα__ (Heine-Borel) Έστω $a<b$, $T\subset\mathbb{R}$ και οικογένεια ανοιχτών και φραγμένων υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$, $\{(a_t,b_t) : a_t<b_t,\ t\in T\}$ τέτοια ώστε $[a,b]\subset\bigcup_{t\in T}(a_t,b_t)$. Τότε υπάρχει $T_0\subset T$ __πεπερασμένο__ ώστε $[a,b]\subset\bigcup_{t\in T_0}(a_t,b_t)$

__Απόδειξη__: Από το θεώρημα Lindelöf, υπάρχει ακολουθία $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ από στοιχεία του T τέτοια ώστε $\bigcup_{t\in T}(a_t,b_t)=\bigcup_{n\geq 1}^{\infty}(a_{t_n},b_{t_n})$. Άρα, $[a,b]\subset\bigcup_{n\geq 1}^{\infty}(a_{t_n},b_{t_n})$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $[a,b]\subset\bigcup_{k\geq 1}^{n}(a_{t_k},b_{t_k})$. Ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιο $n\in\mathbb{N}$. Τότε $[a,b]\not\subset\bigcup_{k\geq 1}^{n}(a_{t_k},b_{t_k})$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Επιλέγουμε $x_n\in[a,b]\setminus\bigcup_{k\geq 1}^{n}(a_{t_k},b_{t_k})$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Η φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ έχει, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ με $\lim_{n\to\infty}x_{m_n}=x_0\in[a,b]$. Άρα, θα υπάρχει $\ell\in\mathbb{N}$ με $x_0\in(a_{t_\ell},b_{t_\ell})$. Αφού $x_{m_n}\to x_0$ έχουμε ότι $x_{m_n}\in(a_{t_\ell},b_{t_\ell})$, $\forall n\geq n_0$, για κατάλληλο φυσικό $n_0\in\mathbb{N}$. Όμως, $m_n\to\infty$, άρα υπάρχει $n>n_0$ με $m_n>\ell$. Τότε $x_{m_n}\in[a,b]\setminus\bigcup_{k\geq 1}^{m_n}(a_{t_k},b_{t_k})$, από την επιλογή των x_n, και συνεπώς, $x_{m_n}\notin(a_{t_\ell},b_{t_\ell})$ αφού $\ell<m_n$. Άτοπο, αφού $x_{m_n}\in(a_\ell,b_\ell)$.
Έστω, $T_0=\{t_1,\dots,t_n\}$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος.

Σύνολα μηδενικού μέτρου: Αν $E \subset \mathbb{R}$, το E έχει μέτρο μηδέν όταν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μία ακολουθία $(I_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ανοιχτών και φραγμένων ~~υποσυνόλων~~ διαστημάτων του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} I_n$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \mu(I_n) \leq \epsilon$.

Παρατήρηση: 1) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μηδενικού μέτρου αφού $\forall \epsilon > 0$, έχουμε ότι $A \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\infty}\left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)$ και $\sum_{n\geq 1}\mu\left(a_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) = $
$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon$.

2) Κάθε υποσύνολο ενός συνόλου με μέτρο μηδέν, είναι σύνολο μέτρου μηδέν.

3) Το σύνολο Cantor $\left\{\sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0,2\}\right\}$ είναι μηδενικού μέτρου και ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$, όπως μπορεί να αποδειχθεί.

4) Τα διαστήματα θετικού μήκους δεν είναι μέτρου μηδέν.

Λήμμα: Αν $(E_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, μηδενικού μέτρου, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n$ είναι επίσης μηδενικού μέτρου

Απόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$. Αφού το E_n είναι μηδενικού μέτρου, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα υπάρχει ακολουθία $(I_{nk})_{k\geq 1}^{\infty}$ από ανοιχτά και φραγμένα διαστήματα ώστε $E_n \subset \bigcup_{k\geq 1}^{\infty} I_{nk}$ και $\sum_{k\geq 1}^{\infty} \mu(I_{nk}) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, $E = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{k\geq 1}^{\infty}\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} I_{nk}$ και η ακολουθία $\{I_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ των ανοιχτών φραγμένων διαστημάτων έχει συνολικό μήκος $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\sum_{k\geq 1}^{\infty} \mu(I_{nk}) \leq \sum_{n\geq 1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon$.

Ορισμός: Αν $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ ~~συνεχής~~ συνάρτηση, η f λέγεται σχεδόν παντού συνεχής αν το σύνολο των ασυνεχειών της f είναι μηδενικού μέτρου

Παράδειγμα: Κάθε μονότονη συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, είναι σχεδόν παντού συνεχής αφού το σύνολο των ασυνεχειών της f είναι αριθμήσιμο.

Ταξινόμηση των ασυνεχειών μιας συνάρτησης: Αν $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει ασυνέχεια σε εσωτερικό σημείο $x_0 \in I$, τότε θα υπάρχει $\epsilon_0 > 0$ με την ιδιότητα σε κάθε διάστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$, $\delta>0$, υπάρχουν $\xi \neq \eta$ ώστε $|f(\xi)-f(\eta)| \geq \epsilon_0$ [Αλλιώς, $\forall \epsilon>0$, $\exists \delta>0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$ και $|f(\xi)-f(\eta)|<\epsilon$, $\forall \xi, \eta \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$. Άρα, $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ η f συνεχής στο x_0] Λέμε τότε ότι η f είναι ϵ_0-ασυνεχής στο x_0.

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι ϵ-ασυνεχής σε κάποιο $x_0 \in I$, τότε θα είναι και ϵ'-ασυνεχής στο x_0, $\forall\, 0<\epsilon'<\epsilon$. Αν συμβολίσουμε με A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f (στο I), τότε $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, όπου για κάθε $k \in \mathbb{N}$, A_k είναι το σύνολο των σημείων του I στα οποία η f είναι $\frac{1}{k}$-ασυνεχής. Έπεται (από το Λήμμα) ότι το A είναι μηδενικού μέτρου αν και μόνο αν το A_k είναι μηδενικού μέτρου, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα του Lebesgue: Έστω $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε

f είναι ολοκληρώσιμη $\iff$ f είναι σχεδόν παντού συνεχής

Απόδειξη: "$\Longrightarrow$" Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Αν A είναι το σύνολο των ασυνεχειών της f στο $[a,b]$, γράφουμε $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, όπου για κάθε $k \in \mathbb{N}$, A_k είναι το σύνολο των ασυνεχειών της f στα οποία η f είναι $\frac{1}{k}$-ασυνεχής. Θα δείξουμε ότι το A_k είναι μηδενικού μέτρου για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και συνεπώς το A θα είναι μηδενικού μέτρου, από το Λήμμα. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$. Το κριτήριο Riemann δίνει μία διαμέριση Δ_ϵ (δοθέντος $\epsilon>0$) τέτοια ώστε

$R(f,\Delta_\circ,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\dfrac{\epsilon}{2K}$, για κάθε επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_\Delta$ από τη Δ. Συμβολίζουμε με $\mathring{I}$ το εσωτερικό του διαστήματος $I\in\Delta$. Αν $A_K\cap\mathring{I}=\phi$, $\forall I\in\Delta$, τότε το A_K είναι πεπερασμένο αφού θα είναι υποσύνολο του πεπερασμένου συνόλου με στοιχεία τα άκρα των διαστημάτων της Δ. Άρα, το A_K θα είναι μηδενικού μέτρου. Υποθέτουμε τώρα ότι $A_K\cap\mathring{I}\neq\phi$ για κάποια από τα διαστήματα I της διαμέρισης Δ.

Θέτουμε $\Delta'=\{I\in\Delta : A_K\cap I^\circ\neq\phi\}$. Για κάθε $I\in\Delta'$, αφού $A_K\cap I^\circ\neq\phi$ επιλέγουμε $\xi_I,\eta_I\in I^\circ$, $\xi_I\neq\eta_I$, τέτοια ώστε $|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\geq\dfrac{1}{K}$.

Η επιλογή αυτή είναι δυνατή γιατί υπάρχει $x_I\in A_K\cap I^\circ$ και άρα αν $\delta>0$ ώστε $(x_I-\delta,x_I+\delta)\subset I$, υπάρχουν ξ_I,η_I στο $(x_I-\delta,x_I+\delta)$ με $|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\geq\dfrac{1}{K}$.

Ορίζουμε τώρα τις επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}'_\Delta$ και $\vec{\eta}'_\Delta$ της Δ ως εξής:

$$\xi'_I=\begin{cases}\xi_I, & \text{αν } I\in\Delta'\\ \gamma_I\in I, \text{ τυχόν}, & \text{αν } I\in\Delta\setminus\Delta'\end{cases}\quad\text{και}\quad \eta'_I=\begin{cases}\eta_I, & \text{αν } I\in\Delta'\\ \gamma_I, & \text{αν } I\in\Delta\setminus\Delta'\end{cases}$$

$\left(\vec{\xi}'_\Delta=\{\xi'_I : I\in\Delta\}\right.$ και $\left.\vec{\eta}'_\Delta=\{\eta'_I : I\in\Delta\}\right)$. Από το κριτήριο Riemann έχουμε ότι

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}'_\Delta,\vec{\eta}'_\Delta)<\frac{\epsilon}{2K}\Rightarrow\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi'_I)-f(\eta'_I)|\mu(I)<\frac{\epsilon}{2K}$$

$$\Rightarrow\frac{\epsilon}{2K}>\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)\geq\sum_{I\in\Delta'}\frac{1}{K}\mu(I)\Rightarrow\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)<\epsilon/2$$

Έπεται ότι $A'_K=\{x\in A_K : x\in I^\circ \text{ για κάποιο } I\in\Delta\}\subset\bigcup_{I\in\Delta'}I^\circ$ και $\sum_{I\in\Delta'}\mu(I^\circ)=\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)<\epsilon/2$

Το σύνολο $A''_K=\{x\in A_K : x \text{ είναι άκρο κάποιου } I\in\Delta\}$ είναι πεπερασμένο, και άρα έχει μέτρο μηδέν. Άρα, $A''_K\subset\bigcup_{s=1}^{m}J_s$ με $\sum_{s=1}^{m}\mu(J_s)<\epsilon/2$, όπου κάθε J_s

είναι ανοιχτό και φραγμένο διάστημα. Άρα, $A_k = A_k' \cup A_k'' \subset \bigcup_{I\in\Delta'} I^\circ \cup \bigcup_{s=1}^{m} J_s$ και $\sum_{I\in\Delta'}\mu(I^\circ) + \sum_{s=1}^{m}\mu(J_s) < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Αφού $\epsilon>0$, το A_k έχει μέτρο μηδέν $\forall k\in\mathbb{N}$, άρα A είναι μέτρο μηδέν και η f είναι σχεδόν παντού συνεχής.

"$\Longleftarrow$" Υποθέτουμε τώρα ότι η f είναι σχεδόν παντού συνεχής. Συμβολίζουμε με A το σύνολο των ασυνεχειών της f και με Σ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Έστω $\epsilon>0$. Αφού A έχει μέτρο 0, μπορούμε να βρούμε μία ακολουθία ανοιχτών και φραγμένων διαστημάτων $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ ώστε $\{a,b\}\cup A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(J_n) < \frac{\epsilon}{2M}$, όπου M είναι φράγμα της $|f|$. Έστω $x\in\Sigma$, $x\neq a$, $x\neq b$. Τότε υπάρχει $\delta_x>0$ ώστε $(x-\delta_x, x+\delta_x)\subset(a,b)$ και $|f(y)-f(z)|<\epsilon/2(b-a)$, $\forall y,z\in(x-\delta_x, x+\delta_x)$. [αφού f συνεχής στο $x\in(a,b)$]. Θέτουμε $I_x = \left(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}\right)$, $\forall x\in\Sigma\cap(a,b)$. Παρατηρούμε ότι αν $y\in I_x$ και $z\in[a,b]$ με $|y-z|<\frac{\delta_x}{2}$, τότε $z\in(x-\delta_x, x+\delta_x)$ και άρα $|f(y)-f(z)|<\epsilon$ [αφού $|y-x|<\frac{\delta_x}{2}$ και $|y-z|<\frac{\delta_x}{2}$, η τριγωνική ανισότητα δίνει $|z-x|<\delta_x$. Άρα $z\in(x-\delta_x, x+\delta_x)$ και $y\in(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\delta_x/2)\subset(x-\delta_x, x+\delta_x)$, συνεπώς $|f(y)-f(z)|<\epsilon/2(b-a)$ από την επιλογή του $\delta_x>0$].

Έχουμε ότι $[a,b] = (A\cup\{a,b\})\cup[\Sigma\cap(a,b)] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \cup \bigcup_{x\in(a,b)\cap\Sigma} I_x$. Από το θεώρημα Heine-Borel, υπάρχουν $m\in\mathbb{N}$ και $x_1,\dots,x_k\in(a,b)\cap\Sigma$, για κάποιο $m,k\in\mathbb{N}$, ώστε $[a,b]\subset\bigcup_{n=1}^{m} J_n \cup \bigcup_{i=1}^{k} I_{x_i}$. Επιλέγουμε $0<\delta<\frac{1}{2}\delta_{x_i}$, $\forall i=1,\dots,k$. Θεωρούμε μία διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Θέτουμε

$$\Delta' = \left\{I\in\Delta : I\cap\bigcup_{i=1}^{k} I_{x_i}\neq\emptyset\right\} \text{ και } \Delta''=\Delta\setminus\Delta'$$

Αν $I\in\Delta'$, τότε υπάρχει κάποιο $i\in\{1,\dots,k\}$ με $I\cap I_{x_i}\neq\emptyset$. Επιλέγουμε $y_i\in I\cap I_{x_i}$. Τότε αν $z\in I$ έχουμε ότι $|z-y_i|\le\delta<\frac{1}{2}\delta_{x_i}$ (αφού $\mu(I)<\delta<\min\limits_{j\le k}\frac{\delta_{x_j}}{2}$) και άρα, από την αρχική περιγραφή, έχουμε ότι $z\in(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$. Άρα, $I\subset(x_i-\delta_{x_i},x_i+\delta_{x_i})$ και συνεπώς $|f(\xi)-f(\eta)|\le \epsilon/2(b-a)$, $\forall\,\xi,\eta\in I$. $(*)$

Αν $I\in\Delta''$, τότε $I\cap\bigcup\limits_{i=1}^{k}I_{x_i}=\emptyset$ και άρα $I\subset\bigcup\limits_{n=1}^{m}J_n$. Συνεπώς, $\bigcup\limits_{I\in\Delta''}I\subset\bigcup\limits_{n=1}^{m}J_n$

$$\Rightarrow \sum_{I\in\Delta''}\chi_{I^\circ}\le \chi_{\bigcup_{n=1}^m J_n}\le\sum_{n=1}^{m}\chi_{J_n}\Rightarrow\int_a^b\Big(\sum_{I\in\Delta''}\chi_{I^\circ}\Big)\le\int_a^b\sum_{n=1}^m\chi_{J_n}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{I\in\Delta''}\int_a^b\chi_{I^\circ}\le\sum_{n=1}^m\int_a^b\chi_{J_n}\le\sum_{n=1}^m\mu(J_n)\Rightarrow\sum_{I\in\Delta''}\mu(I^\circ)\le\sum_{n=1}^m\mu(J_n),$$

από την Πρόταση 6. Αφού $\mu(I^\circ)=\mu(I)$, $\forall I\in\Delta''$, συμπεραίνουμε ότι $\sum\limits_{I\in\Delta''}\mu(I)\le\sum\limits_{n=1}^m\mu(J_n)<\epsilon/2M$ $(**)$

Έστω τώρα επιλογές $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_\Delta$ ενδιάμεσων σημείων της Δ. Έχουμε ότι

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)=\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)+\sum_{I\in\Delta''}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)$$

$$\overset{(*)}{\le}\sum_{I\in\Delta'}\frac{\epsilon}{2(b-a)}\mu(I)+\sum_{I\in\Delta''}2M\mu(I)=\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)+2M\sum_{I\in\Delta''}\mu(I)\overset{(**)}{<}\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)+\frac{\epsilon}{2}$$

$$\le\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και για κάθε δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta$ και $\vec{\eta}_\Delta$ της Δ, έχουμε ότι $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon$. Από την Πρόταση 4, ή από το κριτήριο Riemann, έχουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 8: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $\epsilon>0$ και $\epsilon'>0$. Τότε υπάρχει $\delta>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, υπάρχει $\Delta'\subset\Delta$ τέτοιο ώστε

(1) $|f(x)-f(y)|<\epsilon'$, $\forall x,y\in I$, $\forall I\in\Delta'$.

(2) $\displaystyle\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\epsilon$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4 για το $\epsilon\epsilon'>0$ για να βρούμε $\delta>0$ με την ιδιότητα $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon\epsilon'$, για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, και για κάθε δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta$ της Δ. Ορίζουμε $\Delta'=\{I\in\Delta:\ |f(x)-f(y)|<\epsilon',\ \forall x,y\in I\}$. Παρατηρούμε ότι αν $I\in\Delta\setminus\Delta'$, τότε υπάρχουν ξ_I,η_I στοιχεία του I τέτοια ώστε $|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\geq\epsilon'$. Ορίζουμε δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}'_\Delta,\vec{\eta}'_\Delta$ της Δ ως εξής: $\vec{\xi}'_\Delta=\{\xi'_I: I\in\Delta\}$, $\vec{\eta}'_\Delta=\{\eta'_I: I\in\Delta\}$ με

$$\xi'_I=\begin{cases}\xi_I, & I\in\Delta\setminus\Delta'\\ \gamma_I\in I \text{ τυχόν}, & \text{αν } I\in\Delta'\end{cases}\quad\text{και}\quad \eta'_I=\begin{cases}\eta_I, & I\in\Delta\setminus\Delta'\\ \gamma_I, & I\in\Delta'\end{cases}$$

Τότε, $\displaystyle R(f,\Delta,\vec{\xi}'_\Delta,\vec{\eta}'_\Delta)=\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)<\epsilon\epsilon'$. Άρα,

$\displaystyle\epsilon'\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\epsilon\epsilon'\Rightarrow\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\epsilon$, δηλαδή ικανοποιείται η (2). Εξ ορισμού της Δ' έχουμε ότι ικανοποιείται και η (1).

Πρόταση 9: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη με την ιδιότητα: Για κάθε $\epsilon>0$ και $\epsilon'>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, υπάρχει $\Delta'\subset\Delta$ που ικανοποιεί τις (1),(2) της πρότασης 8. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη: Έστω $M>0$ ώστε $|f(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Έστω $\epsilon>0$. Η υπόθεση για τα "ϵ" $=\dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$ και $\epsilon'=\dfrac{\epsilon}{4M}$ μας δίνει $\delta>0$ ώστε για κάθε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$, υπάρχει $\Delta'\subset\Delta$ τέτοια ώστε

(1) $|f(x)-f(y)|<\dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$, $\forall x,y\in I$, $\forall I\in\Delta'$

(2) $\displaystyle\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{4M}$

Θεωρούμε διαμέριση Δ του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Επιλέγουμε $\Delta'\subset\Delta$ ώστε να ικανοποιούνται οι (1) και (2). Έστω $\vec{\xi}_\Delta, \vec{\eta}_\Delta$ επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ. Τότε, $|f(\xi_I)-f(\eta_I)|<\dfrac{\epsilon}{2(b-a)}$, $\forall I\in\Delta'$, λόγω της (1), αφού $\xi_I,\eta_I\in I$. Επίσης, $\displaystyle\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{4M}$. Κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)=\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)+\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)$$

$$\overset{(1)}{\le}\sum_{I\in\Delta'}\frac{\epsilon}{2(b-a)}\mu(I)+\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}2M\mu(I)\overset{(2)}{<}\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)+2M\frac{\epsilon}{4M}\le\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

Από την Πρόταση 4 συνάγεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός: Η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται __κλιμακωτή__ όταν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ τέτοια ώστε $f|I^\circ=$ σταθερή, $\forall I\in\Delta$. (όπου I° είναι το εσωτερικό του διαστήματος I. Υπενθυμίζεται ότι $\mu(I)>0$, $\forall I\in\Delta$). Λέμε τότε ότι η f φέρεται από τη διαμέριση Δ του $[a,b]$.

Έπεται ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι κλιμακωτή όταν υπάρχει διαμέριση Δ του $[a,b]$ και πραγματικοί αριθμοί $(c_I)_{I\in\Delta}$ ώστε $f|_{\bigcup_{I\in\Delta} I^\circ} = \sum_{I\in\Delta} c_I \chi_{I^\circ}$

Θέτοντας ∂I για το σύνολο των άκρων του I, έχουμε ότι $\bigcup_{I\in\Delta}\partial I$ είναι πεπερασμένο. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 6 βλέπουμε ότι $f|I$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_I f = c_I\,\mu(I)$, $\forall I\in\Delta$. Η Πρόταση 3 τώρα μας δίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b f = \sum_{I\in\Delta}\int_I f = \sum_{I\in\Delta} c_I\,\mu(I)$

<u>Πρόταση 10</u>: Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν, και μόνο αν, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχουν διαμέριση Δ του $[a,b]$, κλιμακωτή συνάρτηση $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ που φέρεται από τη Δ, και $\Delta'\subset\Delta$ έτσι ώστε

(1) $|f(x)-\varphi(x)|<\epsilon$, $\forall x\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta'$

(2) $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\epsilon$.

<u>Απόδειξη</u>: $\Rightarrow$ Έστω $\epsilon>0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει, από την Πρόταση 8, $\delta>0$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα της πρότασης 8 για $\epsilon=\epsilon'$. Έστω Δ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$ με $\mu(I)<\delta$, $\forall I\in\Delta$. Βρίσκουμε $\Delta'\subset\Delta$ τέτοιο ώστε:

(3) $|f(x)-f(y)|<\epsilon$, $\forall x,y\in I$, $\forall I\in\Delta'$

(4) $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\epsilon$.

Επιλέγουμε $\xi_I\in I^\circ$, και θέτουμε $c_I=f(\xi_I)$, $\forall I\in\Delta$. Τότε η $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $\varphi(x)=\begin{cases} c_I, & x\in I^\circ,\ I\in\Delta \\ 0, & x\in\partial I,\ I\in\Delta\end{cases}$, $\forall x\in[a,b]$ είναι κλιμακωτή και φέρεται από τη Δ. Επίσης,

$|f(x)-\varphi(x)|=|f(x)-f(\xi_I)|<\epsilon$, $\forall x\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta'$, από (3). Άρα η (1) ικανοποιείται. Επίσης η (2) ικανοποιείται λόγω της (4).

"⇐", Επιλέγουμε $\boxed{M>0}$ ώστε $|f(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Η υπόθεση για $\frac{\epsilon}{8M}$ δίνει μία διαμέριση Δ του $[a,b]$, $\Delta'\subset\Delta$ και κλιμακωτή συνάρτηση $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ που φέρεται από τη Δ έτσι ώστε: $|f(x)-\varphi(x)|<\frac{\epsilon}{8M}$, $\forall x\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta'$, και, $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{8M}$.

Έπεται τώρα ότι $|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{4M}$, $\forall x,y\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta'$, και, $\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{8M}$.

Αν $\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta$ είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ τέτοιες ώστε $\xi_I\in I^\circ$, $\eta_I\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta$, τότε

$$R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)=\sum_{I\in\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)+\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}|f(\xi_I)-f(\eta_I)|\mu(I)$$

$$\le\frac{\epsilon}{4M}\sum_{I\in\Delta'}\mu(I)+2M\sum_{I\in\Delta\setminus\Delta'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{4M}(b-a)+2M\frac{\epsilon}{8M}<\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\epsilon/2$$

Βρήκαμε λοιπόν, δοθέντος $\epsilon>0$, διαμέριση Δ του $[a,b]$ με την ιδιότητα: $R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta)<\epsilon/2$, για κάθε δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_\Delta,\vec{\eta}_\Delta$ της Δ τέτοιες ώστε $\xi_I\in I^\circ$ και $\eta_I\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta$.

Αν $I\in\Delta$, επιλέγουμε υποδιάστημα I_2 του I° με $\mu(I_2)=\left(1-\frac{\epsilon}{4M(b-a)}\right)\mu(I_2)$

Γράφουμε $I=I_1\cup I_2\cup I_3$, όπου I_1,I_2,I_3 είναι διαδοχικά υποδιαστήματα του I. Ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta''=\{I_1,I_2,I_3: I\in\Delta\}$ του $[a,b]$. Τότε, αν $\vec{\xi}_{\Delta''},\vec{\eta}_{\Delta''}$ είναι επιλογές ενδιάμεσων σημείων της Δ'' έχουμε ότι: $R(f,\Delta'',\vec{\xi}_{\Delta''},\vec{\eta}_{\Delta''})=$

$$=\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_{I_1})-f(\eta_{I_1})|\mu(I_1)+\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_{I_3})-f(\eta_{I_3})|\mu(I_3)+\sum_{I\in\Delta}|f(\xi_{I_2})-f(\eta_{I_2})|\mu(I_2)$$

$$\le 2M\sum_{I\in\Delta}(\mu(I_1)+\mu(I_3))+\frac{\epsilon}{2},$$ αφού $\xi_{I_2},\eta_{I_2}\in I^\circ$, $\forall I\in\Delta$. Άρα,

$$|R(f,\Delta'',\vec{\xi}_{\Delta''},\vec{\eta}_{\Delta''})|<2M\sum_{I\in\Delta}\left(\frac{\epsilon}{4M(b-a)}\right)\mu(I_2)+\frac{\epsilon}{2}=\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{I\in\Delta}\mu(I_2)+\frac{\epsilon}{2}\le\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

για κάθε δύο επιλογές ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta''}$ και $\vec{\eta}_{\Delta''}$ της Δ''.

Συμπεραίνουμε, από το κριτήριο Riemann, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.

Το Θεώρημα Arzela-Osgood.

Θεώρημα (Arzela-Osgood). Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έστω $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, με τις ιδιότητες:

(i) Υπάρχει $M>0$ ώστε $|f_n(x)|\le M$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$

Τότε, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b |f_n-f| = 0$

Συμβολισμοί: Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ το σύνολο των υποσυνόλων του $[a,b]$ που εκφράζονται σαν πεπερασμένη ένωση, μη επικαλυπτόμενων ανά δύο, υποδιαστημάτων του $[a,b]$. Έτσι, $E\in\mathcal{D}$ όταν $E=\bigcup_{k=1}^{n} I_k$, $n\in\mathbb{N}$, $I_1,\dots,I_n$ υποδιαστήματα του $[a,b]$ και $I_k^{\circ}\cap I_l^{\circ}=\emptyset$, αν $k\neq l$ στο $\{1,\dots,n\}$.

Λήμμα 1: Αν $I_1,\dots,I_n$ ($n\in\mathbb{N}$) είναι φραγμένα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$, τότε υπάρχουν $m\le n$ και υποδιαστήματα $J_1,\dots,J_m$, μη επικαλυπτόμενα ανά δύο, τέτοια ώστε $\bigcup_{k=1}^{n} I_k=\bigcup_{k=1}^{m} J_k$.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο $n\in\mathbb{N}$. Αν $n=1$, τότε $m=1$ και $J_1=I_1$. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει για το φυσικό αριθμό n. Έστω $I_1,\dots,I_n,I_{n+1}$ φραγμένα υποδιαστήματα του $\mathbb{R}$. Θέτουμε a_k (αντίστοιχα b_k) για το αριστερό (αντίστοιχα δεξιό) άκρο του I_k, $k\le n+1$. Έστω $a=\min\{a_k : k\le n+1\}$. Θέτουμε $\Delta_1=\{k\le n+1 : a_k=a\}$. Αν $|\Delta_1|=n+1$, τότε το σύνολο $\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k$ είναι ένα διάστημα με άκρα στο a και $\max\{b_k : k\le n+1\}$ και ο ισχυρισμός προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι $|\Delta_1|<n+1$. Έστω $b=\max\{b_k : k\in\Delta_1\}$. Τότε το $\bigcup_{k\in\Delta_1} I_k$ είναι ένα διάστημα με άκρα στα a,b. Αφού $|\Delta_1|\ge 1$, η οικογένεια των διαστημάτων $\{I_k : k\le n+1, k\notin\Delta_1\}$ έχει πληθάριθμο μικρότερο, ή ίσο του n. Η επαγωγική υπόθεση μας δίνει $l\le n$ και μη επικαλυπτόμενα διαστήματα $J_1,\dots,J_l$ ώστε $\bigcup_{k\notin\Delta_1} I_k=\bigcup_{k=1}^{l} J_k$. Έστω γ_k (αντ. δ_k) το αριστερό (αντ. δεξιό) άκρο του J_k, για $k\le l$. Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\gamma_{k+1}\ge\delta_k$, $\forall k=1,\dots,l-1$. (αν $l\ge 2$). Έστω $J_0=\bigcup_{k\in\Delta_1} I_k$. Το J έχει άκρα τα a,b.

Αν $b<\gamma_k$, $\forall k=1,\dots,l$, τότε $\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k = J_0 \cup \bigcup_{k=1}^{l} J_k$ είναι ένωση $l+1\le n+1$ μη επικαλυπτόμενων ανά δύο διαστημάτων. Αν υπάρχει $k\le l$ με $\gamma_k \le b$, θέτουμε $k_0=\max\{k\le l: \gamma_k\le b\}$.
Αν $\delta_{k_0}\le b$, τότε $\bigcup_{k\in\Delta_1} I_k \cup \bigcup_{k=1}^{k_0} J_k = J_0$ και $\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k = J_0\cup\bigcup_{k=k_0+1}^{l} J_k$ είναι ένωση το πολύ $l+1\le n+1$ μη επικαλυπτόμενων ανά δύο διαστημάτων (αφού $b<\gamma_{k_0+1}$)
Αν $b<\delta_{k_0}$, τότε υπάρχει διάστημα J_0' με άκρα τα b και δ_{k_0} έτσι ώστε
$\bigcup_{k\in\Delta_1} I_k\cup\bigcup_{k=1}^{k_0}J_k = J_0\cup J_0'$ και άρα $\bigcup_{k=1}^{n+1} I_k = J_0\cup J_0'\cup\bigcup_{k=k_0+1}^{l} J_k$ είναι ένωση το πολύ $l+1\le n+1$ μη επικαλυπτόμενων ανά δύο διαστημάτων (αφού $\delta_{k_0}\le\gamma_{k_0+1}$).

Πόρισμα: Αν $E\in\mathcal{D}$, τότε $[a,b]\setminus E\in\mathcal D$. Επίσης, αν $E_1,\dots,E_n$ ($n\in\mathbb N$) ανήκουν στη $\mathcal D$ τότε και $\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal D$ και $\bigcap_{k=1}^n E_k\in\mathcal D$. Ακόμα, αν $E\in\mathcal D$ και $E'\in\mathcal D$, τότε $E\setminus E'\in\mathcal D$.

Απόδειξη: $E=\bigcup_{k=1}^n I_k$, $n\in\mathbb N$, με $I_1,\dots,I_n$ μη επικαλυπτόμενα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$.
Έστω a_k, b_k τα άκρα ($a_k\le b_k$) του I_k, $k\le n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_{k-1}\le a_k$ για $k=2,\dots,n$. Θέτουμε $a_0=a$ και $b_{n+1}=b$. Τότε $[a,b]\setminus E = J_0\cup J_1\cup\dots\cup J_n$ όπου το J_0 έχει άκρα τα a_0, a_1, το J_n έχει άκρα τα b_n, b_{n+1} και το J_i έχει άκρα τα b_i, a_{i+1}, $\forall i=1,\dots,n-1$. Άρα τα $J_0,\dots,J_n$ είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα. Άρα, $[a,b]\setminus E\in\mathcal D$.
Αν $E_1,\dots,E_n\in\mathcal D$ τότε έχουμε ότι $\bigcup_{k=1}^n E_k\in\mathcal D$, από Λήμμα 1. Επίσης, $[a,b]\setminus E_k\in\mathcal D$ $\forall k=1,\dots,n$ και άρα $\bigcup_{k=1}^n([a,b]\setminus E_k) = [a,b]\setminus\bigcap_{k=1}^n E_k\in\mathcal D$. Άρα, $\bigcap_{k=1}^n E_k\in\mathcal D$.

Αν $E, E'\in\mathcal D$, τότε $[a,b]\setminus E'\in\mathcal D$. Άρα, $E\cap([a,b]\setminus E')\in\mathcal D\Rightarrow E\setminus E'\in\mathcal D$

Ορισμός: (Μέτρο, ή μήκος, των στοιχείων της $\mathcal D$) Αν $E\in\mathcal D$, $E=\bigcup_{k=1}^n I_k$, με $I_1,\dots,I_n$ μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα του $[a,b]$, θέτουμε $\mu(E)=\sum_{k=1}^n \mu(I_k)$, το μέτρο (ή μήκος) του E.

__Παρατήρηση__: Το μέτρο $\mu(E)=\sum_{k=1}^{n}\mu(I_k)$, όπου $E=\bigcup_{k=1}^{n} I_k \in \mathcal{D}$ με $I_1,\dots,I_n$ ανά δύο μη επικαλυπτόμενα, είναι ανεξάρτητο της αναπαράστασης του E σαν ένωση μη επικαλυπτόμενων ανά δύο υποδιαστημάτων του $[a,b]$. Πράγματι, αν $E=\bigcup_{k=1}^{m} I_k'$, όπου τα $I_1',\dots,I_m'$ είναι ανά δύο μη επικαλυπτόμενα, τότε ορίζουμε τη συνάρτηση $\chi_E:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\chi_E(x)=\begin{cases}1, & x\in E\\ 0, & x\notin E\end{cases}$. Η χ_E είναι φραγμένη και ασυνεχής σ' ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που αποτελείται από ~~περιλαμβάνει~~ κάποια από τα άκρα των διαστημάτων $I_1,\dots,I_n$. Έπεται, από το Θεώρημα Lebesgue ότι η χ_E είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Επίσης, $\chi_E \le \sum_{k=1}^{m}\chi_{I_k'}$ και συνεπώς $\int_a^b \chi_E \le \sum_{k=1}^{m}\mu(I_k')$, ενώ $\sum_{k=1}^{m}\chi_{(I_k')^\circ} \le \chi_E$ και άρα $\sum_{k=1}^{m}\mu(I_k')=\sum_{k=1}^{m}\mu((I_k')^\circ) \le \int_a^b \chi_E$, από το Θεώρημα, σελ. 19, και την Πρόταση 6. Συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m}\mu(I_k')=\int_a^b \chi_E=\sum_{k=1}^{n}\mu(I_k)$$

__Λήμμα 2__: Έστω $E_1,\dots,E_n$ $(n\in\mathbb{N})$ μέλη του $\mathcal{D}$. Αν $E_i\cap E_j=\emptyset$, $(i\neq j)$ τότε $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$. Αν $E_1\subset E_2$, τότε $\mu(E_1)\le\mu(E_2)$

__Απόδειξη__: Από το Λήμμα έχουμε ότι $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in\mathcal{D}$. Όταν $E_i\cap E_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$, τότε

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^{n}E_i}=\sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}$$ Άρα, $$\int_a^b \chi_{\bigcup_{i=1}^{n}E_i}=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b \chi_{E_i},$$ συνεπώς $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)$

Αν $E_1\subset E_2$ στο $\mathcal{D}$, τότε $\chi_{E_1}\le\chi_{E_2}$ και συνεπώς $\mu(E_1)=\int_a^b\chi_{E_1}\le\int_a^b\chi_{E_2}=\mu(E_2)$

__Λήμμα 3__: Έστω $E_n\in\mathcal{D}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και $E_n\supset E_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε υπάρχει το $\lim_{n\to\infty}\mu(E_n)\in\mathbb{R}$ [__Απόδειξη__: $\mu(E_n)\ge 0$ και $\mu(E_n)\ge\mu(E_{n+1})$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Δηλαδή η ακολουθία $(\mu(E_n))_{n=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και φραγμένη.]

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Arzela-Osgood θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Ramsey:

<u>Θεώρημα</u> (Ramsey) Έστω $N \subset \mathbb{N}$ άπειρο και $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (= δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$) τέτοιο ώστε $|F|=k$, $\forall F \in \mathcal{F}$. Τότε υπάρχει $M \subset N$ άπειρο με την ιδιότητα: Είτε $F \in \mathcal{F}$, $\forall F \subset M$ με $|F|=k$, είτε $F \notin \mathcal{F}$, $\forall F \subset M$ με $|F|=k$.

<u>Απόδειξη</u>: Με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$. Αν $k=1$, τότε το $\mathcal{F}$ αποτελείται από μονοσύνολα του $\mathbb{N}$. Ορίζουμε $N_1 = \{n \in N : \{n\} \in \mathcal{F}\}$. Αν N_1 άπειρο, τότε $M=N_1$ έχει την ιδιότητα $\{n\} \in \mathcal{F}$, $\forall n \in M$. Αν N_1 πεπερασμένο, τότε $M = N \setminus N_1$ είναι άπειρο και $\{n\} \notin \mathcal{F}$, $\forall n \in M$. Υποθέτουμε ότι $k \geq 2$ και το θεώρημα ισχύει με το $k-1$. Έστω $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ με $|F|=k$, $\forall F \in \mathcal{F}$. Επιλέγουμε $m_1 \in N$ τυχόν. Ορίζουμε

$\mathcal{F}_1 = \{F \subset N : |F|=k-1,\ m_1 < \min F$ και $F \cup \{m_1\} \in \mathcal{F}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $M_1 \subset N$ άπειρο με $\min M_1 > m_1$, ώστε είτε $\{m_1\} \cup F \in \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_1$ με $|F|=k-1$, είτε $\{m_1\} \cup F \notin \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_1$ με $|F|=k-1$. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι το M_1 είναι καλό. Στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το M_1 είναι κακό. Επαγωγικά κατασκευάζουμε άπειρα υποσύνολα $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$ του N και στοιχεία $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ του N τέτοια ώστε:

$m_i < \min M_i$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $m_i \in M_{i-1}$, $\forall i = 2,3,\dots$ και

είτε το M_i είναι καλό: $\{m_i\} \cup F \in \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_i$, $|F|=k-1$

είτε το M_i είναι κακό: $\{m_i\} \cup F \notin \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_i$, $|F|=k-1$

Αν τα m_i, M_i έχουν κατασκευαστεί για κάποιο $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $m_{i+1} = \min M_i$. Ορίζουμε

$\mathcal{F}_{i+1} = \{F \subset M_i,\ |F|=k-1,\ \min F > m_{i+1},\ F \cup \{m_{i+1}\} \in \mathcal{F}\}$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $M_{i+1} \subset M_i$ άπειρο, $\min M_{i+1} > m_{i+1}$, ώστε είτε $\{m_{i+1}\} \cup F \in \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_{i+1}$ $|F|=k-1$, είτε $\{m_{i+1}\} \cup F \notin \mathcal{F}$, $\forall F \subset M_{i+1}$, $|F|=k-1$. Στην πρώτη περίπτωση το M_{i+1} είναι καλό. Στη δεύτερη το M_{i+1} είναι κακό.

Θέτουμε $I = \{i \in \mathbb{N} : M_i$ είναι καλό$\}$. Αν I άπειρο, θέτουμε $M = \{m_i : i \in I\}$ που είναι ένα άπειρο υποσύνολο του N. Τότε, αν $F \subset M$ και $|F| = k$, έχουμε ότι $F \in \mathcal{F}$. Πράγματι, έστω $m_{i_0} = \min F$ για κάποιο $i_0 \in I$. Έχουμε ότι $F \setminus \{m_{i_0}\} \subset M_{i_0}$ και $\min(F \setminus \{m_{i_0}\}) > m_{i_0}$, και $|F \setminus \{m_{i_0}\}| = k-1$. Συνεπώς, από την κατασκευή του M_{i_0} έχουμε $F = (F \setminus \{m_{i_0}\}) \cup \{m_{i_0}\} \in \mathcal{F}$ γιατί M_{i_0} είναι καλό. Αν το I είναι πεπερασμένο, τότε το $J = \{i \in \mathbb{N} : M_i$ είναι κακό$\}$ είναι άπειρο. Θέτουμε $M = \{m_i : i \in J\} \subset N$ άπειρο. Αν $F \subset M$, $|F| = k$ και $m_{j_0} = \min F$, τότε $F \setminus \{m_{j_0}\} \subset M_{j_0}$ που είναι κακό. Αφού $|F \setminus \{m_{j_0}\}| = k-1$ έπεται ότι $F = (F \setminus \{m_{j_0}\}) \cup \{m_{j_0}\} \notin \mathcal{F}$. Από την αρχή της επαγωγής το θεώρημα ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

<u>Συμβολισμός</u>: Αν $(E_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$ και $n_1 < n_2$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε θέτουμε $E_{[n_1, n_2)} = \bigcup_{i=n_1}^{n_2 - 1} E_i$. Από το Θεώρημα έχουμε ότι $E_{[n_1, n_2)} \in \mathcal{D}$.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(E_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$, $E \in \mathcal{D}$ και $\epsilon > 0$. Υποθέτουμε ότι $\mu[E \cap E_{[n_1, n_2)}] \geq \epsilon$, για κάθε επιλογή σημείων $n_1 < n_2$ από ένα άπειρο υποσύνολο N του $\mathbb{N}$. Έστω $\overset{\delta<\epsilon}{~~\delta~~}$. Τότε υπάρχει $M \subset N$ άπειρο τέτοιο ώστε $\mu[E \cap E_{[m_1, m_2)} \cap E_{[m_3, m_4)}] \geq \epsilon - \delta$ για κάθε επιλογή σημείων $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ του M.

<u>Απόδειξη</u>: Ορίζουμε $\mathcal{F} = \{F \subset N, |F| = 4,\ F = \{n_1 < n_2 < n_3 < n_4\}$ με $\mu[E \cap E_{[n_1, n_2)} \setminus E_{[n_3, n_4)}] < \delta\}$

Το Θεώρημα Ramsey μας δίνει $M \subset N$ άπειρο ώστε είτε $F \in \mathcal{F}$, $\forall F \subset M$ με $|F| = 4$, είτε $F \notin \mathcal{F}$, $\forall F \in \mathcal{F}$ με $|F| = 4$. Θα δείξουμε ότι η δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατη. Ας υποθέσουμε, αντίθετα, ότι υπάρχει $M\subset N$ άπειρο τέτοιο ώστε $F\notin\mathcal{F}$, $\forall F\subset M$ με $|F|=4$. Αυτό σημαίνει ότι $\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\setminus E_{[m_3,m_4)}]\geq\delta$ για κάθε $m_1<m_2<m_3<m_4$ στο M. Επιλέγουμε $k\in\mathbb{N}$ με $\frac{b-a}{k}<\delta$. Επίσης επιλέγουμε $2k+2$ σημεία $m_1<m_2<\dots<m_{2k-1}<m_{2k}<m_{2k+1}<m_{2k+2}$ του M.

Για την τετράδα $m_1<m_2<m_3<m_{2k+2}$ έχουμε, λόγω υπόθεσης, ότι

$$\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\setminus E_{[m_3,m_{2k+2})}]\geq\delta.$$

Για τον ίδιο λόγο έχουμε για την τετράδα $m_3<m_4<m_5<m_{2k+2}$ ότι $\mu[E\cap E_{[m_3,m_4)}\setminus E_{[m_5,m_{2k+2})}]\geq\delta$.

Ομοίως, για κάθε τετράδα $m_{2i-1}<m_{2i}<m_{2i+1}<m_{2k+2}$, $i=1,\dots,k$, έχουμε ότι

$$\mu[E\cap E_{[m_{2i-1},m_{2i})}\setminus E_{[m_{2i+1},m_{2k+2})}]\geq\delta.$$

Θέτουμε

$$E_i'=E\cap E_{[m_{2i-1},m_{2i})}\setminus E_{[m_{2i+1},m_{2k+2})},\ \forall i=1,\dots,k.$$

Τότε $E_i'\in\mathcal{D}$, $\forall i=1,\dots,k$ και $E_i'\cap E_j'=\emptyset$, $\forall i\neq j$ στο $\{1,\dots,k\}$. Πράγματι, αν $1\leq i<j\leq k$, τότε $E_j'\subset E_{[m_{2j-1},m_{2j})}$ και $E_i'\cap E_{[m_{2i+1},m_{2k+2})}=\emptyset$. Αφού $i<j$, έχουμε ότι $E_{[m_{2j-1},m_{2j})}\subset E_{[m_{2i+1},m_{2k+2})}$ και άρα $E_j'\cap E_i'=\emptyset$. Έπεται τώρα από το Λήμμα 2 ότι $b-a\geq\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}E_i'\right)=\sum_{i=1}^{k}\mu(E_i')\geq k\delta>b-a$. Άτοπο.

Άρα, υπάρχει $M\subset N$ άπειρο ώστε $F\in\mathcal{F}$, $\forall F\subset M$ με $|F|=4$. Συνεπώς, αν $m_1<m_2<m_3<m_4$ στο M έχουμε ότι $\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\setminus E_{[m_3,m_4)}]<\delta$.

Από την υπόθεση έχουμε ότι $\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}]\geq\varepsilon$. Πάλι, από το Λήμμα 2 έχουμε ότι $\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}]=\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\cap E_{[m_3,m_4)}]+\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\setminus E_{[m_3,m_4)}]$.

Συνεπώς, $\mu[E\cap E_{[m_1,m_2)}\cap E_{[m_3,m_4)}]\geq\varepsilon-\delta$.

Πόρισμα 2: Έστω $(E_n)_{n\ge 1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{D}$ και $\epsilon>0$ τέτοιο ώστε $\mu(E_n)\geq\epsilon$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Αν $0<\delta<\epsilon$, υπάρχει $M\subset\mathbb{N}$ άπειρο, $M=\{m_1<m_2<m_3<\dots\}$ έτσι ώστε $\mu\left[E_{[m_1,m_2)}\cap E_{[m_3,m_4)}\cap\dots\cap E_{[m_{2n-1},m_{2n})}\right]\geq\epsilon-\delta$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την Πρόταση για το $E=[a,b]$, $N=\mathbb{N}$, ϵ, $\delta/2$ (αφού $E_{[n_1,n_2)}\supset E_{n_1}\Rightarrow\mu(E_{[n_1,n_2)})\geq\mu(E_{n_1})\geq\epsilon$, $\forall n_1<n_2$ στο $\mathbb{N}$) και βρίσκουμε $M_1\subset N$ άπειρο ώστε $\mu\left[E_{[n_1,n_2)}\cap E_{[n_3,n_4)}\right]\geq\epsilon-\delta/2$, $\forall n_1<n_2<n_3<n_4$ στο M_1.

Έστω $m_1<m_2$ τα δύο πρώτα στοιχεία του M_1. Εφαρμόζουμε τώρα την Πρόταση για το $E=E_{[m_1,m_2)}$, $N=\{m\in M_1: m>m_2\}$, $\epsilon-\delta/2$ και το $\delta/4$ και βρίσκουμε $M_2\subset M_1$ άπειρο ώστε $\mu\left[E_{[m_1,m_2)}\cap E_{[n_1,n_2)}\cap E_{[n_3,n_4)}\right]\geq\epsilon-\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{4}$, για κάθε επιλογή σημείων $n_1<n_2<n_3<n_4$ στο M_2. Έστω $m_3<m_4$ τα δύο πρώτα στοιχεία του M_2. Επαγωγικά κατασκευάζουμε άπειρα υποσύνολα $M_1\supset M_2\supset M_3\supset\dots\supset M_k\supset\dots$ του $\mathbb{N}$ και φυσικούς αριθμούς $m_1<m_2<\dots$ έτσι ώστε για κάθε $k\in\mathbb{N}$, έχουμε:

(i) $m_{2k-1}<m_{2k}$ είναι τα δύο πρώτα στοιχεία του M_k.

(ii) $\mu\left[E_{[m_1,m_2)}\cap\dots\cap E_{[m_{2k-1},m_{2k})}\cap E_{[n_1,n_2)}\right]\geq\epsilon-\sum_{i=1}^{k}\frac{\delta}{2^i}$, για κάθε επιλογή $n_1<n_2$ στο M_k με $n_1>m_{2k}$.

Το επαγωγικό βήμα γίνεται εφαρμόζοντας την Πρόταση για $E=E_{[m_1,m_2)}\cap\dots\cap E_{[m_{2k-1},m_{2k})}$, $N=\{n\in M_k: n>m_{2k}\}$, $\epsilon-\sum_{i=1}^{k}\delta/2^i$ και $\delta/2^{k+1}$. Τότε βρίσκουμε $M_{k+1}\subset N$ άπειρο ώστε $\mu\left[E_{[m_1,m_2)}\cap\dots\cap E_{[m_{2k-1},m_{2k})}\cap E_{[n_1,n_2)}\cap E_{[n_3,n_4)}\right]\geq\epsilon-\sum_{i=1}^{k+1}\delta/2^i$ για κάθε τετράδα $n_1<n_2<n_3<n_4$ σημείων του M_{k+1}. Ορίζουμε $m_{2k+1}<m_{2k+2}$ να είναι τα πρώτα δύο σημεία του M_{k+1}. Είναι σαφές τώρα ότι το $M=\{m_1,m_2,\dots\}$ ικανοποιεί το συμπέρασμα του Πορίσματος.

Απόδειξη Θεωρήματος Arzela-Osgood: Αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα όταν $f=0$ και $f_n(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Πράγματι, η ακολουθία των συναρτήσεων $g_n=|f_n-f|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ικανοποιεί $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$, $g_n(x)\geq 0$ και $g_n(x)\leq 2M$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[a,b]$. Αρκεί λοιπόν να δείξει ότι $\int_a^b g_n\to 0$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $M\geq f_n(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$. ~~Εφαρμόζουμε την Πρόταση 8 για τη συνάρτηση f_n, $\forall n\in\mathbb{N}$, και βρίσκουμε~~ Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος δεν ισχύει. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υπάρχει $\epsilon>0$ ώστε $\int_a^b f_n\geq\epsilon>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 8 για τη συνάρτηση f_n και βρίσκουμε, $\forall n\in\mathbb{N}$, διαμέριση Δ_n του $[a,b]$ και $\Delta_n'\subset\Delta$ ώστε

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{[2(b-a)+M]2}=\epsilon',\ \forall x,y\in I,\ \forall I\in\Delta_n',\ \text{και},\ \sum_{I\in\Delta_n\setminus\Delta_n'}\mu(I)<\frac{\epsilon}{[2(b-a)+M]2}=\epsilon'$$

Ορίζουμε $\Delta_n''=\{I\in\Delta_n' : \forall x\in I \Rightarrow f_n(x)\geq\epsilon'\}$. Παρατηρούμε ότι αν $I\in\Delta_n'\setminus\Delta_n''$, τότε υπάρχει $x\in I$ με $f_n(x)<\epsilon'$. Άρα, $|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon'$, $\forall y\in I$ και άρα $|f_n(y)|<2\epsilon'$, $\forall y\in I$, $\forall I\in\Delta_n'\setminus\Delta_n''$. Έχουμε τώρα ότι

$$\epsilon\leq\int_a^b f_n=\sum_{I\in\Delta_n}\int_I f_n=\sum_{I\in\Delta_n''}\int_I f_n+\sum_{I\in\Delta_n'\setminus\Delta_n''}\int_I f_n+\sum_{I\in\Delta_n\setminus\Delta_n'}\int_I f_n\leq$$

$$\leq M\sum_{I\in\Delta_n''}\mu(I)+2\epsilon'\sum_{I\in\Delta_n'\setminus\Delta_n''}\mu(I)+M\sum_{I\in\Delta_n\setminus\Delta_n'}\mu(I)\leq M\sum_{I\in\Delta_n''}\mu(I)+2\epsilon'(b-a)+M\epsilon'$$

$$\Rightarrow\ \epsilon\leq M\sum_{I\in\Delta_n''}\mu(I)+[2(b-a)+M]\epsilon'<M\sum_{I\in\Delta_n''}\mu(I)+\epsilon/2.$$ Άρα,

$$\sum_{I\in\Delta_n''}\mu(I)\geq\frac{\epsilon}{2M},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$ Ορίζουμε $E_n=\bigcup_{I\in\Delta_n''} I$. Τότε $E_n\in\mathcal{A}$ και είναι ίσο με μία πεπερασμένη ένωση μη επικαλυπτόμενων ανά δύο <u>κλειστών</u> υποδιαστημάτων του $[a,b]$ με $\mu(E_n)\geq\frac{\epsilon}{2M}$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Εφαρμόζουμε τώρα το Πόρισμα 2, με $\delta = \frac{\epsilon}{4M}$, και βρίσκουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ τέτοια ώστε

$$\mu[E_{[m_1,m_2)} \cap \dots \cap E_{[m_{2n-1},m_{2n})}] \geq \frac{\epsilon}{4M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $f_n(x) \geq \epsilon' > 0$, $\forall x \in E_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$E'_n = E_{[m_1,m_2)} \cap \dots \cap E_{[m_{2n-1},m_{2n})}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε $E'_n \in \mathcal{D}$ και είναι ίσο με μία πεπερασμένη ένωση <u>κλειστών</u> υποδιαστημάτων του $[a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, γιατί κάθε E_n έχει αυτή την ιδιότητα, και συνεπώς κάθε $E_{[m_{2k-1},m_{2k})}$ την πληρεί επίσης ως πεπερασμένη ένωση κάποιων από τα E_n. Αφού $\mu(E'_n) \geq \frac{\epsilon}{4M}$ έχουμε ότι $E'_n \neq \emptyset$ και $E'_{n+1} \subset E'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε $x_n \in E'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία $(x_n)_{n \geq 1}^\infty$ αποτελείται από σημεία του $[a,b]$ και συνεπώς έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq 1}^\infty$. Έστω $x = \lim_{n \to \infty} x_{k_n}$. Έχουμε τώρα ότι $x \in E'_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, γιατί $(x_{k_i})_{i \geq m}^\infty$ περιέχεται στο E'_m το οποίο ισούται με μία πεπερασμένη ένωση κλειστών υποδιαστημάτων του $[a,b]$. Άρα, $x \in \bigcap_{n \geq 1}^\infty E'_n$.

Έπεται τώρα ότι $x \in E_{[m_{2k-1},m_{2k})}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε $l_k \in [m_{2k-1}, m_{2k})$ με $x \in E_{l_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα, $f_{l_k}(x) \geq \epsilon'$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Όμως, $l_k < m_{2k} < m_{2k+1} \leq l_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Άρα, $f_{l_k}(x) \to 0$. Άτοπο. Άρα, θα πρέπει $\int_a^b f_n \to 0$

<u>Σημείωση</u>: Στην απόδειξη δεν χρησιμοποιούνται έννοιες από τη Θεωρία Μέτρου και πιο συγκεκριμένα από το μέτρο Lebesgue των μετρήσιμων κατά Lebesgue υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Κάνοντας χρήση αυτών των εννοιών έχουμε ότι $\mu(E_n) \geq \frac{\epsilon}{2M}$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\limsup E_n) \geq \frac{\epsilon}{2M} > 0$. Συνεπώς υπάρχει κάποιο $x \in \limsup_n E_n$. Άρα υπάρχουν $l_1 < l_2 < \dots$ στο $\mathbb{N}$ με $x \in E_{l_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και τότε $f_{l_n}(x) \geq \epsilon'$, $\forall n \in \mathbb{N}$, που είναι άτοπο γιατί $f_{l_n}(x) \to 0$, από υπόθεση.

Το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής στο Ολοκλήρωμα Riemann

Θεώρημα (Αλλαγής μεταβλητής). Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση 1-1 και παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι: (i): g' ολοκληρώσιμη, και, (ii): $g'\neq 0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Έστω $[\gamma,\delta]$ το πεδίο τιμών της g. Τότε για κάθε ολοκληρώσιμη $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ έχουμε ότι η $f\circ g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $\int_a^b (f\circ g)|g'| = \int_\gamma^\delta f$.

Παρατήρηση: Η g είναι 1-1 και συνεχής (ως παραγωγίσιμη) και συνεπώς η g είναι γνήσια μονότονη. Άρα το πεδίο τιμών $[\gamma,\delta]$ της g είναι το κλειστό διάστημα με άκρα στα $g(a)$ και $g(b)$. Αν η g είναι γνήσια αύξουσα, τότε $g'(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$ και $\gamma=g(a)$, $\delta=g(b)$. Αν η g είναι γνήσια φθίνουσα, τότε $|g'|=-g$, $\gamma=g(b)$ και $\delta=g(a)$. Σε κάθε περίπτωση, η ισότητα $\int_a^b(f\circ g)|g'|=\int_\gamma^\delta f$ γράφεται ισοδύναμα ως $\int_a^b(f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής θα χρειαστούμε μία σειρά βοηθητικών αποτελεσμάτων. Αν $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση, τότε με f_- συμβολίζουμε τη συνάρτηση $f_-:[-\delta,-\gamma]\to\mathbb{R}$ με $f_-(x)=f(-x)$, $\forall x\in[-\delta,-\gamma]$.

Λήμμα 1: Έστω $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) f ολοκληρώσιμη $\Longleftrightarrow$ f_- ολοκληρώσιμη.
Όταν f ολοκληρώσιμη, τότε $\int_\gamma^\delta f = \int_{-\delta}^{-\gamma} f_-$

(ii) Αν $g:[a,b]\to[\gamma,\delta]$ είναι συνάρτηση, τότε $f\circ g = f_-\circ(-g)$

Απόδειξη: (ii) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f_-(-g(x)) = [f_-\circ(-g)](x)$, $\forall x\in[\gamma,\delta]$.

(i) Αν Δ είναι διαμέριση του $[\gamma,\delta]$, τότε η $-\Delta=\{-I: I\in\Delta\}$ (όπου $-I=\{-x:x\in I\}$) είναι διαμέριση του $[-\delta,-\gamma]$. Αν $\vec{\xi}_\Delta=\{\xi_I: I\in\Delta\}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της Δ, τότε η $\vec{\xi}_{-\Delta}=\{-\xi_I: I\in\Delta\}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων σημείων της $-\Delta$.

Κατά συνέπεια, $R(f_-,-\Delta,\vec{\xi}_{-\Delta}) = R(f,\Delta,\vec{\xi}_\Delta)$, αφού $\mu(-I)=\mu(I)$, $\forall I\in\Delta$.
Έπεται από αυτό ότι κάθε άθροισμα Riemann τύπου ή της f, ισούται μ' ένα άθροισμα Riemann τύπου ή της f_- και αντίστροφα. Άρα, f ολοκληρώσιμη στο $[\gamma,\delta]$ $\Longleftrightarrow$ f_- ολοκληρώσιμη στο $[-\delta,-\gamma]$ και $\int_\gamma^\delta f = \int_{-\delta}^{-\gamma} f_-$.

Ορισμός: Αν $G\subset\mathbb{R}$, τότε το G καλείται ανοιχτό όταν για κάθε $x\in G$ υπάρχει $\delta_x>0$ με $(x-\delta_x,\ x+\delta_x)\subset G$.

Σημείωση: G ανοιχτό $\Longleftrightarrow$ G ισούται με την ένωση μίας οικογένειας ανοιχτών και φραγμένων διαστημάτων.

Πρόταση: Έστω $G\subset\mathbb{R}$ ανοιχτό και φραγμένο. Τότε υπάρχει $M\subset\mathbb{N}$ και (αριθμήσιμη) οικογένεια ανοιχτών υποδιαστημάτων $\{(a_n,b_n): n\in M\}$ του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(a_n,b_n)\cap(a_m,b_m)=\emptyset$, $\forall n\neq m$ στο M, και $G=\bigcup\limits_{n\in M}(a_n,b_n)$.

Απόδειξη: Έστω $x\in G$. Ορίζουμε $I_x=\{p\in\mathbb{R}: x<p \text{ και } [x,p)\subset G\}$. Τότε $I_x\neq\emptyset$ αφού υπάρχει $\delta_x>0$ με $(x-\delta_x,x+\delta_x)\subset G$ και άρα $x+\delta_x\in I_x$. Επίσης το I_x είναι διάστημα γιατί αν $p_1<p_2$ ανήκουν στο I_x και $p\in\mathbb{R}$ με $p_1<p<p_2$, τότε $x<p_1<p$ και $[x,p)\subset[x,p_2)\subset G$. Δηλαδή, $p>x$ και $p\in I_x$. Συνεπώς, το I_x είναι ένα φραγμένο, ανοιχτό υποδιάστημα του $\mathbb{R}$ με αριστερό άκρο το x. Άρα, $I_x=(x,b'_x)$ για κάποιο $b'_x\in\mathbb{R}\setminus G$. (Αν $b'_x\in G$, θα υπήρχε $t>0$ με $(b'_x-t,b'_x+t)\subset G\Rightarrow[x,b'_x+t)\subset G$ $\Rightarrow b'_x+t\in I_x=(x,b'_x)$, άτοπο) Παρόμοια δείχνουμε ότι υπάρχει $a'_x<x$ με $(a'_x,x]\subset G$ και $a'_x\notin G$. Έπεται τώρα ότι $(a'_x,b'_x)\subset G$ και $x\in(a'_x,b'_x)$. Άρα, $G=\bigcup\limits_{x\in G}(a'_x,b'_x)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι αν $x\neq y$ ανήκουν στο G, τότε είτε $(a'_x,b'_x)=(a'_y,b'_y)$, είτε $(a'_x,b'_x)\cap(a'_y,b'_y)=\emptyset$. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $x<y$. Αν $b'_x\leq a'_y$, τότε $(a'_x,b'_x)\cap(a'_y,b'_y)=\emptyset$. Αν $a'_y<b'_x$, τότε πρέπει $y<b'_x$, γιατί αν $b'_x<y$ ($b'_x\notin G, y\in G\Rightarrow b'_x\neq y$), τότε $a'_y<b'_x<y\Rightarrow b'_x\in(a'_y,y)\subset G$, άτοπο. Άρα, $y<b'_x$, και αναγκαία έχουμε ότι $b'_x=b'_y$. Πράγματι, αν $b'_x<b'_y$, τότε $y<b'_x<b'_y\Rightarrow b'_x\in(y,b'_y)\subset G\Rightarrow b'_x\in G$, άτοπο. Αν $b'_y<b'_x$, τότε $x<y<b'_y<b'_x\Rightarrow$ $\Rightarrow b'_y\in(x,b'_x)\subset G$, άτοπο. Άρα, $b'_x=b'_y$. Παρόμοια, δείχνουμε ότι $a'_x=a'_y$. Πράγματι, $b'_x>a'_y$ συνεπάγεται ότι $a'_y<x$. Σε αντίθετη περίπτωση, $x<a'_y\Rightarrow$ $\Rightarrow x<a'_y<b'_x\Rightarrow a'_y\in(x,b'_x)\subset G$, άτοπο. Άρα, $a'_y<x$. Αν $a'_x<a'_y$, τότε $a'_x<a'_y<x\Rightarrow a'_y\in(a'_x,x)\subset G$, άτοπο. Αν $a'_y<a'_x$, τότε $a'_y<a'_x<x<y\Rightarrow$ $\Rightarrow a'_x\in(a'_y,y)\subset G$, άτοπο. Άρα, $a'_x=a'_y$ και $b'_x=b'_y$, όταν $a'_y<b'_x$.

Δηλαδή, $(a_x', b_x') = (a_y', b_y')$ όταν $a_y' < b_x'$, και $(a_x', b_x') \cap (a_y', b_y') = \phi$ όταν $b_x' \leq a_y'$. Έπεται τώρα ότι υπάρχει $G' \subset G$ ώστε $(a_x', b_x') \cap (a_y', b_y') = \phi$ όταν $x \neq y$ ανήκουν στο G', και $G = \bigcup_{x \in G'} (a_x', b_x')$. Από το θεώρημα Lindelöf υπάρχει $G'' \subset G'$ αριθμήσιμο με $G = \bigcup_{x \in G''} (a_x', b_x')$.

Έπεται τώρα ότι $G = \bigcup_{n \in M} (a_n, b_n)$, όπου $M \subset \mathbb{N}$ και

$\{(a_n, b_n) : n \in M\} = \{(a_x', b_x') : x \in G''\}$. Ειδικότερα, $(a_n, b_n) \cap (a_m, b_m) = \phi$, αν $n \neq m$ στο M.

<u>Λήμμα 2</u>: Έστω $(I_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ και $(J_n)_{n \geq 1}^{\infty}$ ακολουθίες ανοιχτών και φραγμένων υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$ ώστε $\bigcup_{n \geq 1}^{\infty} I_n \subset \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} J_n$. Υποθέτουμε ότι $I_n \cap I_{n'} = \phi$, $\forall n \neq n'$ στο $\mathbb{N}$.

Τότε, $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(I_n) \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(J_n)$.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε ότι $I_n = (a_n, b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έστω $\epsilon > 0$ τυχόν. Επιλέγουμε $0 < \delta_n < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ με $\delta_n < \frac{b_n - a_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $I_n' = [a_n + \delta_n, b_n - \delta_n] \subset I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Αν $k \in \mathbb{N}$ είναι τυχόν, τότε $\bigcup_{n \geq 1}^{k} I_n' \subset \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} J_n$. Από το θεώρημα Heine-Borel υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε $\bigcup_{n \geq 1}^{k} I_n' \subset \bigcup_{n \geq 1}^{l} J_n$. Έπεται τώρα ότι $\sum_{n \geq 1}^{k} \chi_{I_n'} = \chi_{\bigcup_{n \geq 1}^{k} I_n'} \leq \chi_{\bigcup_{n \geq 1}^{l} J_n} \leq \sum_{n \geq 1}^{l} \chi_{J_n}$

και άρα $\int_a^b \sum_{n \geq 1}^{k} \chi_{I_n'} \leq \int_a^b \sum_{n \geq 1}^{l} \chi_{J_n}$, όπου $[a,b]$ διάστημα που έχει το $\bigcup_{n \geq 1}^{l} J_n$ ως υποσύνολό του. Έχουμε τώρα ότι $\sum_{n \geq 1}^{k} \int_a^b \chi_{I_n'} \leq \sum_{n \geq 1}^{l} \int_a^b \chi_{J_n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1}^{k} \mu(I_n') \leq \sum_{n \geq 1}^{l} \mu(J_n) \Rightarrow \sum_{n \geq 1}^{k} \mu(I_n) - \sum_{n \geq 1}^{k} 2\delta_n \leq \sum_{n \geq 1}^{l} \mu(J_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1}^{k} \mu(I_n) \leq \sum_{n \geq 1}^{l} \mu(J_n) + 2 \sum_{n \geq 1}^{k} \epsilon/2^{n+1} \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(J_n) + \epsilon, \ \forall k \in \mathbb{N}, \forall \epsilon > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(I_n) \leq \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(J_n).$$

Λήμμα 3: Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη. Έστω $A\subset(a,b)$ και J ανοιχτό υποδιάστημα του $(g(a),g(b))$. Έστω $c>0$.
Υποθέτουμε ότι: (i): g' συνεχής σε κάθε $x\in A$ και $g'(x)>c$, $\forall x\in A$.
(ii): $g(A)\subset J$.

Τότε υπάρχει μία ακολουθία $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ από ανοιχτά και ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του (a,b) τέτοια ώστε: (1): $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. (2): $g(I_n)\subset J$, $\forall n\in\mathbb{N}$, και
(3): $\mu(I_n)\leq\frac{1}{c}\mu[g(I_n)]$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Σημείωση: g γν. αύξουσα και συνεχής $\Rightarrow$ $g(I)$ διάστημα με άκρα $g(s),g(t)$, όπου s και t είναι τα άκρα του I, για κάθε υποδιάστημα I του (a,b)

Απόδειξη: Η g είναι γν. αύξουσα και συνεχής. Άρα η εικόνα του (a,b) μέσω της g είναι το ανοιχτό διάστημα $(g(a),g(b))$. Η g^{-1} είναι επίσης γν. αύξουσα και συνεχής. Άρα το $g^{-1}(J)$ είναι ένα ανοιχτό υποδιάστημα του (a,b) με $A\subset g^{-1}(J)$, λόγω της (ii).
Έστω $x\in A$. Αφού g' συνεχής στο x και $g'(x)>c$, λόγω της (i), υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα U_x, με κέντρο το x, ώστε $U_x\subset(a,b)$ και $g'(t)>c$, $\forall t\in U_x$.
Επειδή $x\in A\subset g^{-1}(J)$ και $g^{-1}(J)$ ανοιχτό διάστημα, το $U_x\cap g^{-1}(J)$ είναι ανοιχτό υποδιάστημα του (a,b). Θέτουμε $(a_x,b_x)=U_x\cap g^{-1}(J)$, $\forall x\in A$. Τότε $x\in(a_x,b_x)\subset g^{-1}(J)$ και $g'(t)>c$, $\forall t\in(a_x,b_x)$, $\forall x\in A$.
Θέτουμε $G=\bigcup_{x\in A}(a_x,b_x)$. Το $G\subset\mathbb{R}$ είναι ανοιχτό, $A\subset G\subset g^{-1}(J)\subset(a,b)$.
Από την Πρόταση, υπάρχει $M\subset\mathbb{N}$ ώστε $G=\bigcup_{n\in M}(a_n,b_n)$, με $(a_n,b_n)\cap(a_m,b_m)=\emptyset$ $\forall n\neq m$ στο M. Επίσης έχουμε ότι $g'(x)>c$, $\forall x\in G$, από τον τρόπο ορισμού του G.
Παρατηρούμε τώρα ότι $|g(x)-g(y)|\geq c|x-y|$, $\forall x,y\in I_n=(a_n,b_n)$, $\forall n\in M$.
Πράγματι, έστω $n\in M$ και x,y στοιχεία του $I_n=(a_n,b_n)$. Από το ΘΜΤ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x,y, και άρα $\xi\in I_n\subset G$, ώστε $|g(x)-g(y)|=|g'(\xi)||x-y|$.

Αφού $\xi \in G$, έχουμε ότι $g'(\xi) > c$. Συνεπώς, $|g(x)-g(y)| \geq c|x-y|$.

Έχουμε τώρα ότι $A \subset G = \bigcup_{n \in M} I_n \subset g^{-1}(J)$. Άρα το (1) ικανοποιείται.

Αφού $I_n \subset g^{-1}(J)$, $\forall n \in M$, $\Rightarrow g(I_n) \subset J$, $\forall n \in M$, δηλαδή το (2) ισχύει.

Τέλος, αφού $|g(x)-g(y)| \geq c|x-y|$, $\forall x, y \in I_n$, $\forall n \in M$, έχουμε ότι $\mu(I_n) \leq \frac{1}{c} \mu[g(I_n)]$, $\forall n \in M$, δηλαδή ικανοποιείται και το (3)

(Αν $M \subsetneq \mathbb{N}$, θέτουμε $I_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus M$).

<u>Απόδειξη Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής</u>: Αρκεί να δείξουμε το θεώρημα όταν η g είναι γνησίως αύξουσα. (Αφού g 1-1 και παραγωγίσιμη $\Rightarrow$ g είναι γνησίως μονότονη).

Αν η g είναι γν. φθίνουσα, τότε η $-g$ είναι γν. αύξουσα και $(-g)' = -g'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ με $(-g)' \geq 0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Τότε, $\gamma = g(b)$ και $\delta = g(a)$. Έστω $f : [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Από το Λήμμα 1 έχουμε ότι η $f_- : [-\delta, -\gamma] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_\gamma^\delta f = \int_{-\delta}^{-\gamma} f_- = \int_a^b [f_- \circ (-g)](-g') =$

$= \int_a^b (f \circ g)|g'|$, από το Λήμμα 1, με την προϋπόθεση ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί για γν. αύξουσες συναρτήσεις όπως η $-g$.

Θα δείξουμε λοιπόν το θεώρημα υποθέτοντας ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και άρα $g'(x) > 0$ σχεδόν για κάθε $x \in [a,b]$. Έστω $f : [g(a), g(b)] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θα δείξουμε πρώτα ότι η $f \circ g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Η $f \circ g$ είναι φραγμένη, γιατί η f είναι φραγμένη. Αρκεί λοιπόν, από το θεώρημα του Lebesgue, να δείξουμε ότι η $f \circ g$ είναι σχεδόν παντού συνεχής στο (a,b).

Παρατηρούμε ότι το $x \in (a,b)$ είναι σημείο ασυνέχειας της $f \circ g$, τότε και μόνο όταν το $g(x)$ είναι σημείο ασυνέχειας της f στο $(g(a), g(b))$. Πράγματι, αν η f ήταν συνεχής στο $g(x)$ τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας, η $f \circ g$ θα ήταν συνεχής στο x αφού η g είναι συνεχής στο x.

<u>Ισχυρισμός</u>: Αν $B \subset (g(a), g(b))$ είναι μέτρου μηδέν, τότε και το $g^{-1}(B)$ είναι μέτρου μηδέν.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι ο ισχυρισμός αυτός έχει αποδειχθεί. Αν B είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $(g(a), g(b))$, τότε όπως δείξαμε παραπάνω, το $g^{-1}(B)$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της $f \circ g$ στο (a,b). Από τον ισχυρισμό θα έχουμε ότι το $g^{-1}(B)$ είναι μηδενικού μέτρου. Άρα η $f \circ g$ θα είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$.

<u>Απόδειξη Ισχυρισμού</u>: Ορίζουμε $Z = \{x \in (a,b) : g'(x) = 0\} \cup \{x \in (a,b) : g' \text{ ασυνεχής στο } x\}$

Από την υπόθεση (ί) και το θεώρημα Lebesgue έχουμε ότι η g' είναι σχεδόν παντού συνεχής στο (a,b) και από την (ii) έχουμε ότι $g' > 0$ σχεδόν παντού στο (a,b). Άρα το Z έχει μέτρο μηδέν σαν ένωση δύο υποσυνόλων μηδενικού μέτρου. Έχουμε ότι $g^{-1}(B) = [g^{-1}(B) \cap Z] \cup [g^{-1}(B) \setminus Z]$. Αφού Z μέτρου μηδέν έπεται ότι το $g^{-1}(B) \cap Z$ είναι μέτρου μηδέν. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι και το $g^{-1}(B) \setminus Z$ είναι μηδενικού μέτρου. Για κάθε $x \in g^{-1}(B) \setminus Z$ έχουμε ότι $g'(x) > 0$ και g' συνεχής στο x. Θέτοντας $A_m = \{x \in (a,b) : g(x) \in B,$ g' συνεχής στο x και $g'(x) > \frac{1}{m}\}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $g^{-1}(B) \setminus Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$.

Αρκεί να δείξουμε ότι το A_m έχει μέτρο μηδέν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Σταθεροποιούμε $m \in \mathbb{N}$. Αφού B είναι μέτρου μηδέν, αν $\varepsilon > 0$ είναι τυχόν, τότε βρίσκουμε ακολουθία $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ από ανοιχτά υπο-διαστήματα του $(g(a), g(b))$ (γιατί $B \subset (g(a), g(b))$) τέτοια ώστε $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(J_n) < \frac{\varepsilon}{m}$

Αν $x \in A_m$, τότε $g(x) \in B$. Άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $g(x) \in J_k$

Θέτουμε $A_{m,k} = \{x \in A_m : g(x) \in J_k\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Τότε, $A_m = \bigcup_{k \geq 1}^{\infty} A_{m,k}$. Από τον ορισμό έχουμε ότι αν $x \in A_{m,k}$ τότε η g' είναι συνεχής στο x, $g'(x) > \frac{1}{m}$ και $g(x) \in J_k$, ανοιχτό υποδιάστημα του $(g(a), g(b))$. Δηλαδή, $A_{m,k} \subset (a,b)$, g' συνεχής στα σημεία του $A_{m,k}$, $g'(x) > c = \frac{1}{m}$, $\forall x \in A_{m,k}$, και $g(A_{m,k}) \subset J_k \subset (g(a), g(b))$.

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3 και να βρούμε μία ακολουθία $(I_{m,k,n})_{n=1}^{\infty}$ από ανοιχτά υποδιαστήματα του (a,b) τέτοια ώστε: $I_{m,k,n} \cap I_{m,k,n'} = \emptyset$, αν $n \neq n'$, (δηλαδή τα $(I_{m,k,n})_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι ξένα ανά δύο), $A_{m,k} \subset \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} I_{m,k,n}$, $g(I_{m,k,n}) \subset J_k$ και $\mu(I_{m,k,n}) \leq m \mu[g(I_{m,k,n})]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τα διαστήματα $(I_{m,k,n})_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι ανοιχτά και ξένα ανά δύο. Αφού η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής έχουμε ότι τα $(g(I_{m,k,n}))_{n \geq 1}^{\infty}$ είναι ανοιχτά διαστήματα, ξένα ανά δύο. Συμπεραίνουμε μέσω του Λήμματος 2, ότι $\sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(I_{m,k,n}) \leq m \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu[g(I_{m,k,n})] \leq m \mu(J_k)$

Έχουμε τώρα ότι η ακολουθία $(I_{m,k,n})_{n \geq 1, k \geq 1}^{\infty}$ αποτελείται από ανοιχτά υποδιαστήματα του (a,b) και $A_m = \bigcup_{k \geq 1}^{\infty} A_{m,k} \subset \bigcup_{k \geq 1}^{\infty} \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} I_{m,k,n}$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \geq 1}^{\infty} \mu(I_{m,k,n}) \leq \sum_{k \geq 1}^{\infty} m \mu(J_k) < m \cdot \frac{\epsilon}{m} = \epsilon.$$

Αφού $\epsilon > 0$ τυχόν, έπεται ότι το A_m έχει μηδενικό μέτρο για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Άρα και το $\bigcup_{m \geq 1}^{\infty} A_m = g^{-1}(B) \setminus Z$ έχει μηδενικό μέτρο, γεγονός που αποδεικνύει ότι η $f \circ g$ είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$ και άρα ολοκληρώσιμη.

Μένει να δειχθεί ότι $\int_a^b (f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$, όταν η g είναι γνησίως αύξουσα.

Η g' είναι φραγμένη γιατί είναι ολοκληρώσιμη. Άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|g'(x)|\leq M, \forall x\in[a,b]$

Αφού η g είναι συνεχής, έχουμε ότι το $g(I)$ είναι ένα κλειστό υποδιάστημα του $[g(a),g(b)]$ όταν το I είναι ένα κλειστό υποδιάστημα του $[a,b]$. Επιπλέον έχουμε ότι $\mu[g(I)]\leq M\mu(I)$. Πράγματι, από το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi\in I^{o}$ ώστε $g(\max I)-g(\min I)=g'(\xi)\mu(I)$. Αφού η g είναι γν. αύξουσα έχουμε ότι $g(I)=[g(\min I), g(\max I)]$ και συνεπώς έπεται ότι $\mu[g(I)]=g(\max I)-g(\min I)\leq M\mu(I)$. Έστω τώρα $n\in\mathbb{N}$ με $n> M\dfrac{b-a}{g(b)-g(a)}$.

Αν Δ είναι διαμέριση του $[a,b]$ με $\mu(I)<\dfrac{b-a}{n^2}, \forall I\in\Delta$, τότε η $g(\Delta)=\{g(I): I\in\Delta\}$ είναι διαμέριση του $[g(a),g(b)]$ με $\mu[g(I)]\leq M\mu(I)<M\dfrac{b-a}{n^2}<\dfrac{g(b)-g(a)}{n}$, $\forall I\in\Delta$

Για κάθε $I\in\Delta$ επιλέγουμε, από το ΘΜΤ, $\xi_I\in I^{o}$ ώστε $g(\max I)-g(\min I)=g'(\xi_I)\mu(I)$

Θεωρούμε την επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\vec{\xi}_{\Delta}=\{\xi_I : I\in\Delta\}$ της Δ. Τότε, η $\vec{\xi}_{g(\Delta)}=\{g(\xi_I): I\in\Delta\}$ είναι επιλογή ενδιάμεσων της διαμέρισης $g(\Delta)$ του $[g(a),g(b)]$

Θέτοντας $\xi_J=g(\xi_I)$, όπου $J=g(I)\in g(\Delta)$ για κάποιο $J\in g(\Delta)$, έχουμε

$$R\left[(f\circ g)g', \Delta, \vec{\xi}_{\Delta}\right]=\sum_{I\in\Delta} f(g(\xi_I))g'(\xi_I)\mu(I)=\sum_{I\in\Delta} f(g(\xi_I))\mu[g(I)]=$$

$$=\sum_{J\in g(\Delta)} f(\xi_J)\mu(J)=R\left(f, g(\Delta), \vec{\xi}_{g(\Delta)}\right).$$ Δηλαδή, $\forall n>M\dfrac{b-a}{g(b)-g(a)}$

υπάρχει ένα άθροισμα Riemann $R_n[(f\circ g)g']$ της $(f\circ g)g'$, τάξης n^2, που είναι ίσο μ' ένα άθροισμα Riemann $R_n(f)$ της f, τάξης n. Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b (f\circ g)g' = \lim_{n\to\infty} R_n\left[(f\circ g)g'\right]=\lim_{n\to\infty} R_n(f)=\int_{g(a)}^{g(b)} f$$

Θεώρημα (Sard). Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής με g συνεχώς παραγωγίσιμη στο (a,b). Έστω K το σύνολο των κρίσιμων σημείων της g στο (a,b), δηλαδή $K=\{x\in(a,b): g'(x)=0\}$. Τότε το $g(K)$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

Απόδειξη: Έστω $\epsilon>0$, τυχόν. Ορίζουμε $G=\left\{x\in(a,b): |g'(x)|<\frac{\epsilon}{2(b-a)}\right\}$.

Αφού η g' είναι συνεχής, το G είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του (a,b). Από την Πρόταση μπορούμε να γράψουμε $G=\bigcup_{n\geq1} I_n$, όπου τα I_n είναι ξένα ανά δύο, ανοιχτά υποδιαστήματα του (a,b). Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $x<y$ στο I_n. Από το ΘΜΤ υπάρχει $\xi\in(x,y)\subset I_n\subset G$ τέτοιο ώστε $g(x)-g(y)=g'(\xi)(x-y)$. Άρα, $|g(x)-g(y)|\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}(y-x)$, $\forall\, x<y$ στοιχεία του $I_n=(a_n,b_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Η g είναι συνεχής και άρα $|g(x)-g(y)|\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}(y-x)$, $\forall\, x\leq y$ στοιχεία του $[a_n,b_n]$. Πάλι λόγω της συνέχειας της g, έχουμε ότι $g([a_n,b_n])=[\gamma_n,\delta_n]$ με κάποια $\gamma_n\leq\delta_n$ και όλα τα $n\in\mathbb{N}$. Έπεται τώρα ότι $0\leq\delta_n-\gamma_n\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b_n-a_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα έχουμε ότι $g(G)\subset\bigcup_{n\geq1}g(I_n)\subset\bigcup_{n\geq1}[\gamma_n,\delta_n]$ και

$$\sum_{n\geq1}^{\infty}(\delta_n-\gamma_n)\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{n\geq1}^{\infty}(b_n-a_n)=\frac{\epsilon}{2(b-a)}\sum_{n\geq1}^{\infty}\mu(I_n)\leq\frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\epsilon}{2},$$

από το Λήμμα 2, αφού $I_n\subset(a,b)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Κατά συνέπεια, $K\subset G\Rightarrow g(K)\subset g(G)\subset$

$$\subset\bigcup_{n\geq1}^{\infty}[\gamma_n,\delta_n]\subset\bigcup_{n\geq1}^{\infty}\left(\gamma_n-\frac{\epsilon}{2^{n+2}},\delta_n+\frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right)=\bigcup_{n\geq1}^{\infty}J_n,$$

όπου $J_n=\left(\gamma_n-\frac{\epsilon}{2^{n+2}},\delta_n+\frac{\epsilon}{2^{n+2}}\right)$ και $\mu(J_n)=\delta_n-\gamma_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Συμπερασματικά, δοθέντος $\epsilon>0$, βρήκαμε ακολουθία ανοιχτών και φραγμένων υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$, $(J_n)_{n\geq1}^{\infty}$, τέτοια ώστε $g(K)\subset\bigcup_{n\geq1}^{\infty}J_n$ και

$$\sum_{n\geq1}^{\infty}\mu(J_n)=\sum_{n\geq1}^{\infty}\left(\delta_n-\gamma_n+\frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right)\leq\sum_{n\geq1}^{\infty}(\delta_n-\gamma_n)+\frac{\epsilon}{2}\sum_{n\geq1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\leq$$

$$\leq\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Άρα, το $g(K)$ έχει μηδενικό μέτρο.

Πόρισμα: Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1 συνάρτηση με g' συνεχή. Έστω $[\gamma,\delta]$ το πεδίο τιμών της g. Τότε, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$, έχουμε ότι η συνάρτηση $(f\circ g)g'$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b (f\circ g)|g'| = \int_\gamma^\delta f$. (Ισοδύναμα, $\int_a^b (f\circ g)g' = \int_{g(a)}^{g(b)} f$).

Απόδειξη: Θέτουμε $K=\{x\in[a,b]: g'(x)=0\}$, και, $G=\{x\in(a,b): g'(x)\neq 0\}$. Το G είναι ανοιχτό υποσύνολο του (a,b) και άρα, από την Πρόταση, μπορούμε να γράψουμε $G=\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} I_n$, όπου τα ανοιχτά διαστήματα I_n είναι ξένα ανά δύο. Θέτουμε $I_n=(a_n,b_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έστω $f:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής, εφαρμοσμένο στο διάστημα $[a_n,b_n]$ ($g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a_n,b_n)$, άρα $g'(x)\neq 0$ σχεδόν για κάθε $x\in[a_n,b_n]$, ενώ η g' είναι συνεχής) έχουμε ότι η $f\circ g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a_n,b_n]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Έστω E_n το σύνολο των ασυνεχειών της $f\circ g$ που βρίσκονται στο διάστημα $[a_n,b_n]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε, από το Θεώρημα Lebesgue, έχουμε ότι το E_n είναι μέτρου μηδέν, $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα και το $\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n$ είναι μέτρου μηδέν. Παρατηρούμε ότι η $(f\circ g)g'$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του K. Πράγματι, έστω $x_0\in K$ και $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ ακολουθία στοιχείων του $[a,b]$ με $x_n\to x_0$. Η g' είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα $g'(x_n)\to g'(x_0)=0$. Η $f\circ g$ είναι φραγμένη συνάρτηση, γιατί η f είναι φραγμένη, και συνεπώς έχουμε ότι $(f\circ g)(x_n)\, g'(x_n)\to 0=(f\circ g)(x_0)\cdot g'(x_0)$. Άρα κάθε $x_0\in K$ είναι σημείο συνέχειας της $(f\circ g)g'$. Αφού η g' είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο των ασυνεχειών της $(f\circ g)g'$ στο $[a,b]$, είναι υποσύνολο του $\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} E_n$ για το οποίο δείξαμε ότι έχει μέτρο μηδέν. Έπεται ότι η $(f\circ g)g'$ είναι φραγμένη και σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη, Παρατηρούμε ότι $\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} I_k} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}$ γιατί τα I_k είναι ξένα ανά δύο, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και άρα η $\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} I_k}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ακόμα έχουμε ότι

$(f\circ g)g'\chi_G = (f\circ g)g'$ σε κάθε σημείο του $(a,b) = G\cup\{x\in(a,b) : g'(x)=0\}$ αφού και οι δύο συναρτήσεις μηδενίζονται στο σύνολο $(a,b)\setminus G$. Έπεται ότι και η $(f\circ g)g'\chi_G$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ γιατί είναι φραγμένη και σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$. Επίσης, για κάθε $0<\tau<\frac{b-a}{2}$, έχουμε ότι $(f\circ g)g'(1-\chi_G)=0$ στο διάστημα $[a+\tau,b-\tau]$ (αφού $x\in[a+\tau,b-\tau]\subset(a,b) \Rightarrow g'(x)=0$, αν $x\notin G$, ενώ $1=\chi_G(x)$, αν $x\in G$). Άρα, $\int_{a+\tau}^{b-\tau}(f\circ g)g' = \int_{a+\tau}^{b-\tau}(f\circ g)g'\chi_G$, $\forall \tau\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$. Παίρνοντας το όριο καθώς $\tau\to 0^+$, έχουμε ότι $\int_a^b (f\circ g)g' = \int_a^b (f\circ g)g'\chi_G$.

Στη συνέχεια έχουμε ότι $(f\circ g)g'\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} I_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f\circ g)g'\chi_G(x)$, $\forall x\in[a,b]$ γιατί $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Συμπεραίνουμε, από το Θεώρημα Arzela–Osgood, ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f\circ g)g'\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} I_k} = \int_a^b (f\circ g)g'\chi_G = \int_a^b (f\circ g)g'.$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b (f\circ g)\chi_{I_k} g' = \int_a^b (f\circ g)g' \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}(f\circ g)g' = \int_a^b (f\circ g)g',$$ αφού $I_n=(a_n,b_n)$,

$\forall n\in\mathbb{N}$, και άρα $\int_a^b (f\circ g)g' = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}(f\circ g)g' = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{g(a_n)}^{g(b_n)} f$, εφαρμόζοντας

το Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής σε κάθε διάστημα $[a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$. ($g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a_n,b_n)=I_n\subset G$). Μένει να δείξουμε ότι

$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{g(a_n)}^{g(b_n)} f$. Θέτουμε $L=[\gamma,\delta]\setminus g(G)$.

Τότε, $L \subset g(K) \cup \{\gamma, \delta\}$ και άρα, από το Θεώρημα Sard, το L είναι σύνολο μηδενικού μέτρου, γιατί το $g(K)$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

Έχουμε ακόμα ότι $g(G) = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} g(I_n)$ είναι ίσο με μία ένωση ξένων ανά δύο ανοιχτών υποδιαστημάτων του $[\gamma, \delta]$, αφού η g είναι γνησίως μονότονη (ως 1-1 και συνεχής). Έπεται τώρα ότι η $\mathcal{X}_{g(G)}$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $g(G)$ (αφού ισούται με τη σταθερή συνάρτηση 1 σε κάθε ανοιχτό διάστημα $g(I_n)$). Κατά συνέπεια, τα σημεία ασυνέχειας της $\mathcal{X}_{g(G)}$ βρίσκονται στο σύνολο $[\gamma, \delta] \setminus g(G) = L$ που είναι μηδενικού μέτρου, όπως δείξαμε παραπάνω. Άρα, η $\mathcal{X}_{g(G)}$ είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $[\gamma, \delta] \Rightarrow \mathcal{X}_{g(G)}$ ολοκληρώσιμη στο $[\gamma, \delta]$. Έπεται ότι και η $\mathcal{X}_L = 1 - \mathcal{X}_{g(G)}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\gamma, \delta]$.

Θα δείξουμε ότι $\int_\gamma^\delta \mathcal{X}_L = 0$. Αν $\epsilon > 0$, αφού L έχει μέτρο μηδέν, υπάρχουν ανοιχτά και φραγμένα υποδιαστήματα $(J_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ του $\mathbb{R}$ ώστε $L \subset \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} J_n$ και $\sum_{n\geq 1}^{\infty} \mu(J_n) < \epsilon$.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $L \subset \bigcup_{k\geq 1}^{n} J_k$. Σε αντίθετη περίπτωση επιλέγουμε $y_n \in L \setminus \bigcup_{k\geq 1}^{n} J_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν επιλέγουμε $x_n \in [a,b]$ με $g(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αφού g είναι επί του $[\gamma, \delta]$). Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία $(x_{m_n})_{n\geq 1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty}$ και $x_0 \in [a,b]$ με $x_{m_n} \to x_0$. Άρα, $g(x_{m_n}) = y_{m_n} \to g(x_0) = y_0 \in [\gamma, \delta]$.

Όμως $y_n \in L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα, πρέπει $y_0 \in L$. Σε αντίθετη περίπτωση, $y_0 \in g(G)$ $\Rightarrow y_0 \in g(I_\ell)$, για κάποιο $\ell \in \mathbb{N}$, και το $g(I_\ell)$ είναι ανοιχτό διάστημα. Άρα, αφού $y_{m_n} \to y_0$, θα πρέπει $y_{m_n} \in g(I_\ell)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Όμως $y_{m_n} \in L$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $L \cap g(I_\ell) = \emptyset$. Αφού λοιπόν $y_0 \in L$, θα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με $y_0 \in J_{n_1}$ που είναι ανοιχτό διάστημα. Πάλι, αφού $y_{m_n} \to y_0$, θα πρέπει $y_{m_n} \in J_{n_1}$, $\forall n \geq n_2 > n_1$.

Άρα, $y_{m_{n_2}} \in J_{n_1}$, άτοπο, αφού $y_{m_{n_2}} \notin \bigcup_{k\geq 1}^{n_2} J_k$ και $n_2 > n_1$, Δείξαμε, τελικά ότι $L \subset \bigcup_{k=1}^{n} J_k$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\chi_L \le \sum_{k=1}^{n} \chi_{J_k}$

$$\Rightarrow 0 \le \int_\gamma^\delta \chi_L \le \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma^\delta \chi_{J_k} = \sum_{k=1}^{n} \mu(J_k) < \varepsilon.$$

Αφού $\varepsilon > 0$ τυχόν, έπεται ότι $\int_\gamma^\delta \chi_L = 0$.

Έπεται τώρα ότι $\left| \int_\gamma^\delta f \chi_L \right| \le M \int_\gamma^\delta \chi_L = 0$ (όπου M ένα φράγμα της $|f|$ στο $[\gamma, \delta]$)

και άρα,

$$\int_\gamma^\delta f = \int_\gamma^\delta f(\chi_L + \chi_{g(G)}) = \int_\gamma^\delta f\chi_L + \int_\gamma^\delta f\chi_{g(G)} \Rightarrow \int_\gamma^\delta f = \int_\gamma^\delta f\chi_{g(G)}$$

$$\Rightarrow \int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_{g(a)}^{g(b)} f\chi_{g(G)}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $f\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} g(I_k)}(x) \xrightarrow{n\to\infty} f\chi_{g(G)}(x)$ $\forall x \in [\gamma, \delta]$, αφού $g(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g(I_n)$ και τα διαστήματα $g(I_n)$ είναι ξένα ανά δύο.

Από το Θεώρημα Arzela-Osgood συμπεραίνουμε ότι $\int_{g(a)}^{g(b)} f\chi_{g(G)} = \lim_{n\to\infty} \int_{g(a)}^{g(b)} f\chi_{\bigcup_{k=1}^{n} g(I_k)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{g(a)}^{g(b)} f \sum_{k=1}^{n} \chi_{g(I_k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{g(a)}^{g(b)} f\chi_{g(I_k)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{g(a_k)}^{g(b_k)} f =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{g(a_n)}^{g(b_n)} f = \int_a^b (f\circ g) g',$$ όπως είχαμε δείξει αρχικά.

Καταλήγοντας, έχουμε ότι $\int_{g(a)}^{g(b)} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{g(a_n)}^{g(b_n)} f = \int_a^b (f\circ g) g'$.

<u>Σημείωση</u>: Η υπόθεση για τη συνέχεια της g' στο Πόρισμα, είναι ισχυρότερη της υπόθεσης ότι η g' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ του Θεωρήματος αλλαγής μεταβλητής. Όμως, στις υποθέσεις του Πορίσματος, δεν περιλαμβάνεται η υπόθεση ότι η $g' \neq 0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$, όπως στο Θεώρημα αλλαγής μεταβλητής.