

ΕΜΠ – ΣΧΟΛΗ ΗΜΜΥ – ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2024-25

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ-I, 1^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ

Διδάσκοντες: Γ. Καραποστόλη, Ι. Ράπτης (ΣΕΜΦΕ)

Α΄ ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

13 Οκτωβρίου 2024

Να επιστραφούν λυμένες μέχρι 30/10/24, οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.

[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι χειρόγραφες και να αναρτηθούν ως PDF στο Helios [Εργασίες]], είτε να σταλούν στα email των διδασκόντων από τους φοιτητές που δεν έχουν ακόμη πρόσβαση στο Helios.

1. (α) Να υπολογισθεί η τιμή της θετικής σταθεράς c , έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{r}_1 = \hat{x} + \hat{y} + c\hat{z}$ και $\vec{r}_2 = \hat{x} + \hat{y} - 2c\hat{z}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους. (β) Να υπολογισθούν τα τρία (3) μοναδιαία διανύσματα $(\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3)$ ενός δεξιόστροφου τρισσορθογώνιου συστήματος αξόνων, που οι δύο πρώτοι άξονες είναι παράλληλοι στα διανύσματα που προκύπτουν από το ερώτημα-(α). (γ) Να βρείτε τις προβολές του διανύσματος $\vec{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 4\hat{z}$ παράλληλα σε καθένα από τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3$.

2. Δύο δακτύλιοι οι οποίοι μπορούν να κινούνται κατά μήκος των κάθετων αξόνων x και y , συνδέονται αρθρωτά με στερεά άκαμπτη ράβδο σταθερού μήκους $L = a\sqrt{2}$. Ο 1^{ος} δακτύλιος που κινείται κατά μήκος του άξονα- x μεταβάλλει τη θέση του σύμφωνα με τη σχέση $x = a \sin \omega t$. (α) Να υπολογισθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του 2^{ου} δακτυλίου που κινείται κατά μήκος του άξονα- y , ως συναρτήσεις του χρόνου. (β) Να υπολογισθεί η σχετική διανυσματική ταχύτητα του 2^{ου} ως προς τον 1^ο, $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{V}(t)$

3. (α) Δείξτε ότι, εφαρμόζοντας τη σχέση του αναπτύγματος Taylor για τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln(a+x), \text{ λαμβάνουμε: } \ln(a+x) = \ln(a) + \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \dots, \text{ [έχετε}$$

υπόψη σας ότι αυτή η σειρά συγκλίνει σε καλώς ορισμένο όριο όταν $\left|\frac{x}{a}\right| < 1 \Rightarrow -a < x < +a$]

(β) Υπολογίστε το άθροισμα των πέντε (5) πρώτων όρων του $\ln(3,5)$, αν γνωρίζετε τις τιμές των λογαρίθμων $\ln(3)=1,098612288$ και $\ln(4)=1,386244111$, και χρησιμοποιώντας κατάλληλες εναλλακτικές μορφές του αναπτύγματος Taylor.

(γ) Υπολογίστε την ποσοστιαία διαφορά του τελευταίου αθροίσματος, για καθε εναλλακτική έκφραση, ως προς την «ακριβέστερη» τιμή $\ln(3,5)=1,2253514846$.

(δ) Ποιό ανάπτυγμα Taylor, (ως προς ποιά αρχική τιμή), θα χρησιμοποιούσατε αν το ζητούμενο ήταν: (δ₁) η τιμή του $\ln(3,1)$, ή (δ₂) η τιμή του $\ln(3,9)$;

4. Η κίνηση ενός κινητού περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες από τις εκφράσεις

$$\rho = \rho_0 \left[1 + 0,1 \cos \left(8\pi \frac{t}{T} \right) \right] \text{ και } \varphi = 2\pi \frac{t}{T}, \text{ για } 0 \leq t \leq T$$

(α) Σχεδιάστε την τροχιά του κινητού στο επίπεδο των πολικών συντεταγμένων

(β) Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου

(γ) Υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, συναρτήσει του χρόνου.

5. Σε μία επίπεδη κίνηση, η θέση του κινητού περιγράφεται από τις συναρτήσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, είτε, μέσω κατάλληλης απαλοιφής του χρόνου, από τη συνάρτηση $y=y(x)$. Το διαφορικό

διάστημα μίας τέτοιας κίνησης είναι : $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Η ολοκλήρωση

αυτού του διαφορικού μεταξύ των ορίων της κίνησης, δίνει το συνολικό μήκος της καμπύλης τροχιάς. Σε μία οριζόντια βολή με γνωστή αρχική ταχύτητα v_0 , από γνωστό ύψος H , μέσα σε ομογενές παδίο βαρύτητας με γνωστή επιτάχυνση βαρύτητας g , να υπολογιστεί το είδος της τροχιάς $y=y(x)$, τα όρια της τροχιάς, και το μήκος της καμπύλης τροχιάς μέχρι να φτάσει το βλήμα στο έδαφος.

6. Σημειακή μάζα m κινείται πάνω σε τροχιά που δίνεται σε παραμετρική μορφή ως

$$x = a \cos(\omega t), \quad y = a \sin(\omega t), \quad z = bt^2,$$

όπου t είναι ο χρόνος, και a , b και ω είναι θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$, η ταχύτητα $\vec{v}$ και η επιτάχυνση $\vec{a}$ της μάζας συναρτήσει του χρόνου.

(β) Αν K είναι ένα σημείο πάνω στον άξονα των z που έχει διάνυσμα θέσης $\vec{c} = z\hat{z} = bt^2\hat{z}$, και $\vec{R} = \vec{r} - \vec{c}$ είναι το διάνυσμα από το σημείο K στη μάζα, να βρείτε το διάνυσμα $\vec{R}$ και να δείξετε ότι η απόσταση της μάζας από το σημείο K ή τον άξονα των z είναι σταθερή.

(γ) Βρείτε τη δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται πάνω στη μάζα, $\vec{F} = m\vec{a}$.

Δείξτε ότι αποτελείται από δύο συνιστώσες: μία κεντρομόλο δύναμη με σταθερό μέτρο προς το σημείο K , και μία σταθερή στην κατεύθυνση z .

7. (α) Σε ηλεκτρονικό παιχνίδι, μέλισσα πλησιάζει στην κυψέλη της ακολουθώντας σπειροειδή τροχιά που περιγράφεται από τις εξισώσεις $r = b - ct$ και $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = kt$. Υπολογίστε την ταχύτητά της ως συνάρτηση του χρόνου. (β) Όταν φεύγει από την κυψέλη ακολουθεί τροχιά που περιγράφεται από τις σχέσεις $\rho = be^{at}$, $\theta = \omega t$. Δείξτε ότι η γωνία ταχύτητας και επιτάχυνσης παραμένει σταθερή με το χρόνο. [Υπόδειξη: να χρησιμοποιήσετε πολικές συντεταγμένες]

8. Η γραμμική πυκνότητα $\lambda = (dm/dx)$ μίας λεπτής ράβδου AB μήκους L δίνεται από την σχέση $\lambda(x) = \frac{2m}{L} \left(\frac{3}{2} + \frac{x}{L} \right)$, όπου x η απόσταση από κέντρο (μέσον) O της ράβδου. Να υπολογίσετε τη μάζα M της ράβδου.

9. (α) Δείξτε ότι το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης “τοξημ” έχει τη μορφή:

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} \dots, \quad |x| < 1$$

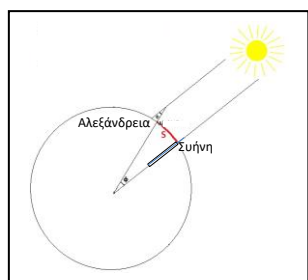
(β) Υπολογίστε το άθροισμα των τεσσάρων (4) πρώτων όρων, για $x=0,3$

(γ) Υπολογίστε την ποσοστιαία διόρθωση που επιφέρει ο $4^{ος}$ όρος στο άθροισμα των τριών (3) πρώτων.

10. Αν τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι σταθερά διανύσματα και $\mathbf{r}(t) = e^{at}\mathbf{A} + e^{-at}\mathbf{B}$ (όπου a σταθερά), να δείξετε ότι τα διανύσματα $\dot{\mathbf{r}}(t)$ και $\mathbf{r}(t)$ έχουν την ίδια κατεύθυνση για κάθε t .

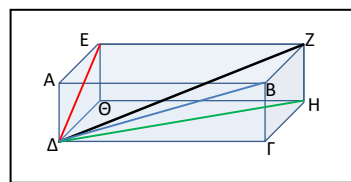
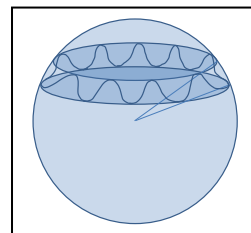
11. Δείξτε ότι αν το άθροισμα και η διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{A}, \vec{B}$ έχουν ίσα μέτρα $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$, τότε τα δύο διανύσματα, $\vec{A}, \vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ορθογώνιου παραλληλογράμμου). Επίσης, δείξτε ότι το άθροισμα, $\vec{A} + \vec{B}$, και η διαφορά, $\vec{A} - \vec{B}$, δύο διανυσμάτων $\vec{A}, \vec{B}$ που έχουν ίσα μέτρα, $|\vec{A}| = |\vec{B}|$ είναι διανύσματα κάθετα μεταξύ τους (διαγώνιοι ρόμβου).

12. Χρησιμοποιείτε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης $x = A \sin(at)$, για να υπολογίσετε, με μορφή αναπτύγματος σε σειρά, το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \frac{A \sin(at)}{bt} dt$.



13. Ο αρχαίος Έλληνας μαθηματικός Ερατοσθένης, που γεννήθηκε στη Κυρήνη (της σημερινής Λιβύης) και έζησε και εργάστηκε στην Αλεξάνδρεια (276-195 π.Χ), πληροφορήθηκε ότι κατά το μεσημέρι του θερινού ηλιοστασίου, στην πόλη Σήνη (σημερινό Ασσουάν της Αιγύπτου) ο ήλιος «ρίχνει» τις ακτίνες του κατακόρυφα (φωτίζοντας μέχρι και τον πυθμένα ενός βαθιού πηγαδιού), ενώ αντίστοιχα στην Αλεξάνδρεια οι ακτίνες του Ήλιου «έπεφταν» υπό γωνία 7.2° ως προς την τοπική κατακόρυφο. Ο Ερατοσθένης, γνωρίζοντας την απόσταση «Αλεξάνδρεια – Σήνη», υπολόγισε το μήκος της περιφέρειας της Γης. Βρείτε την απόσταση «Αλεξάνδρεια – Σήνη» από το δίκτυο, και επαναλάβετε τον υπολογισμό.

14. Σημειακό κινητό κινείται στην επιφάνεια σφαίρας και η θέση του, συναρτήσει του χρόνου, σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από τις σχέσεις: $r = R$, $\varphi = \omega t$, $\theta = (\pi/4)[1 + 0.25 \sin(4\omega t)]$. Βρείτε το μέτρο της ταχύτητας του κινητού συναρτήσει του χρόνου και περιγράψτε την τροχιά που διαγράφει. [Εφαρμογή: $\omega = 2\pi \text{ s}^{-1}$]



15. Βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζουν, ανά δύο, οι διαγώνιοι εδρών που άγονται από μία κορυφή προς τις παρακείμενες έδρες ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, διαστάσεων $(2 \times 3 \times 5)$, καθώς και οι γωνίες που κάθε μία από αυτές τις διαγωνίους σχηματίζει με την «χωρο-διαγώνιο» που άγεται από την ίδια κορυφή προς την απέναντι κορυφή του παραλληλεπιπέδου.

16. Δύο σωματίδια με μάζες m και $2m$, κινούνται έτσι ώστε να έχουν διανύσματα θέσης

$$\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z} \quad \text{και} \quad \vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$$

αντίστοιχα, όπου $t = \text{χρόνος}$ (οι αποστάσεις σε m και ο χρόνος σε s).

(α) Αποδείξτε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε τότε θα συμβεί αυτό. Απ.: $\tau = 2 \text{ s}$

(β) Ποια δύναμη ασκείται πάνω στο κάθε σωματίδιο; Ποια είναι η ολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα; Απ.: $\vec{F}_{ολ} = \mathbf{0}$

(γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; Αν ναι, πόση είναι; Απ.: $\vec{P}_{ολ} = m(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z})$

(δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου. Απ.: $\vec{r} = \frac{1}{3}(40\hat{x} + 24\hat{y} + 7\hat{z}) + \frac{1}{3}t(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z})$