



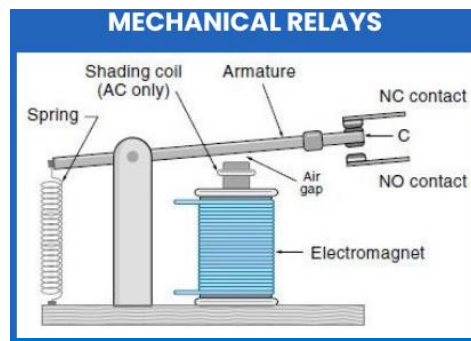
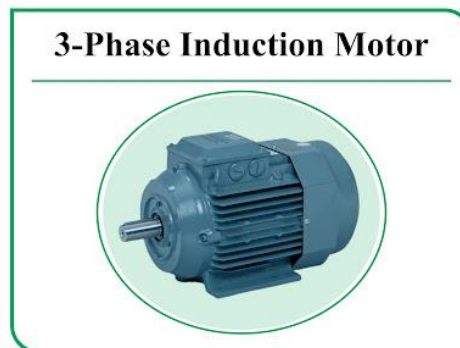
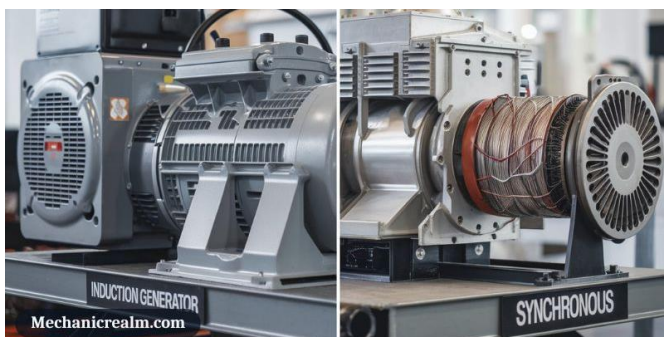
Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

6. Ηλεκτρομηχανική μετατροπή ενέργειας

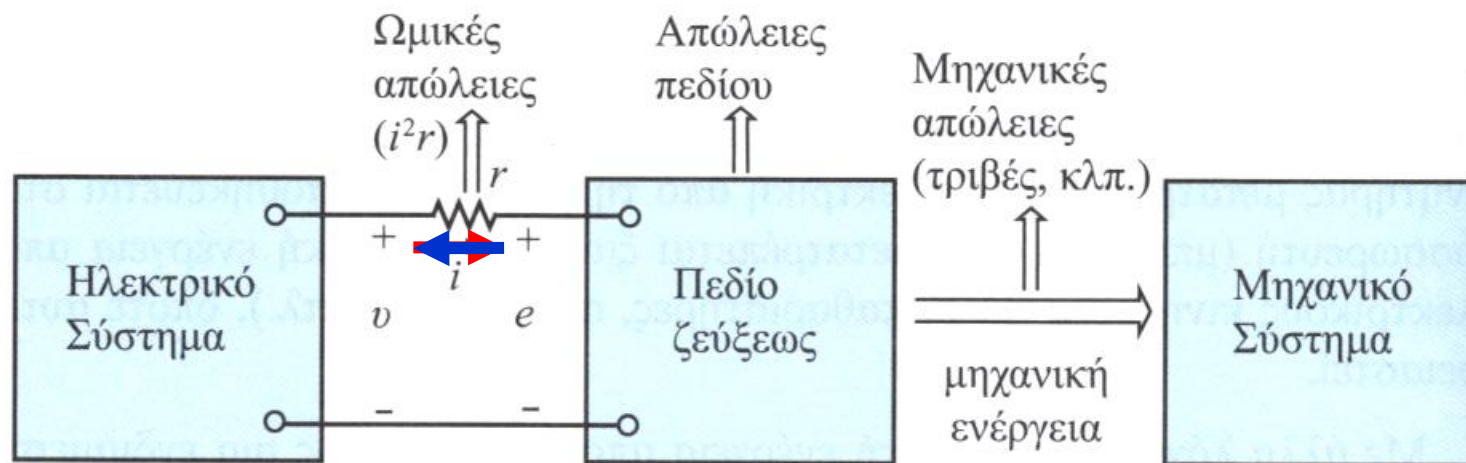
Βασίλης Νικολαΐδης
Επίκουρος Καθηγητής

Συστήματα ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας

- ❑ Συστήματα στα οποία η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική ή αντίστροφα.
- ❑ Απαιτείται η διαμεσολάβηση μαγνητικού πεδίου ζεύξης.



Ροή ενέργειας



Ηλεκτρική
ενέργεια E_e

Ηλεκτρική
ενέργεια E_e

Κινητήρας

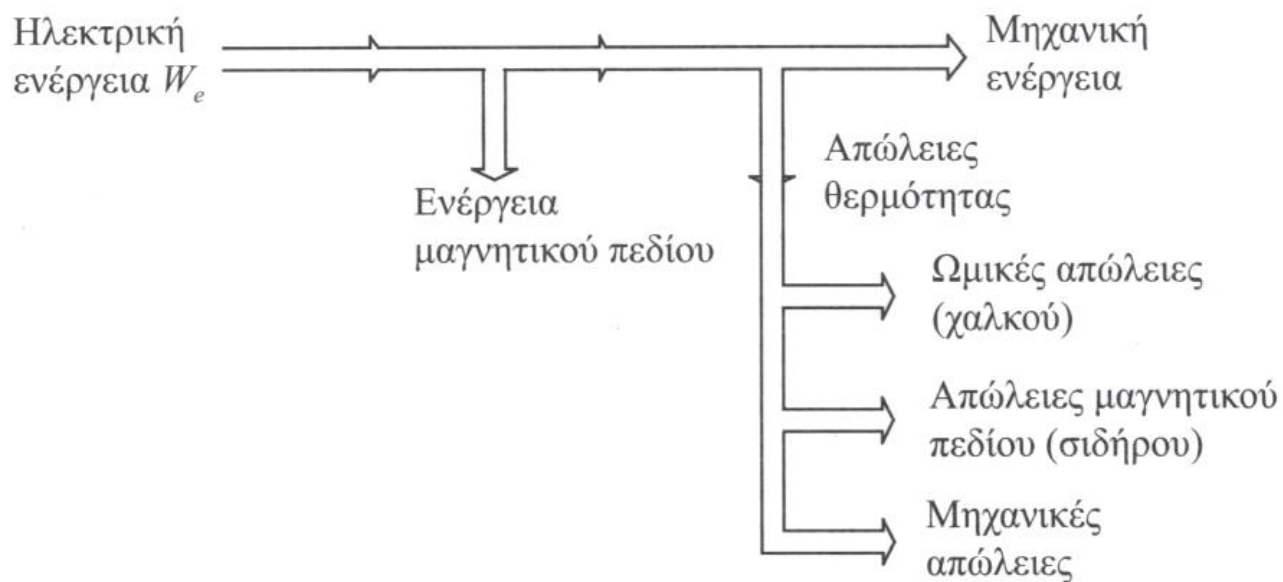
Γεννήτρια

Μηχανική
ενέργεια E_m

Μηχανική
ενέργεια E_m



Αρχή διατήρησης ενέργειας



$$dE_e = dE_\pi + dE_m + dE_{\alpha\pi}$$



Εναλλακτική έκφραση στοιχειωδών ενεργειών

$$dE_e = dE_\pi + dE_m + dE_{\alpha\pi}$$

όπου

$$dE_{\alpha\pi} = dE_{e,\alpha\pi} + dE_{\pi,\alpha\pi} + dE_{m,\alpha\pi}$$

$$(dE_e - dE_{e,\alpha\pi}) = \underbrace{(dE_\pi + dE_{\pi,\alpha\pi})}_{\text{Ενέργεια πεδίου με απώλειες}} + \underbrace{(dE_m + dE_{m,\alpha\pi})}_{\text{Εσωτερική μηχανική ενέργεια}}$$

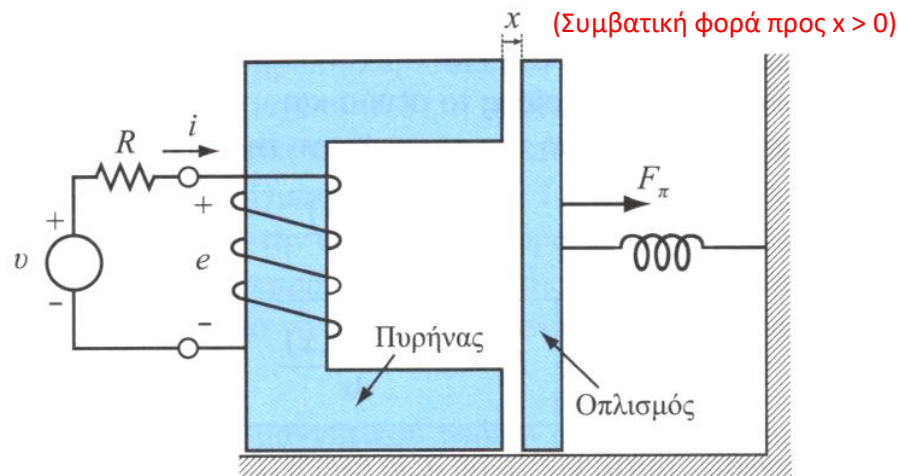
$$dW_e = dW_\pi + dW_m$$

Μέρος της εισερχόμενης καθαρής ηλεκτρικής ενέργειας μετατρέπεται σε μηχανικό έργο και το υπόλοιπο συσσωρεύεται ως ενέργεια μαγνητικού πεδίου.

Ανάπτυξη δύναμης F_π

Σύστημα Η/Μ μετατροπής με:

- ❑ Μία διέγερση (τύλιγμα)
- ❑ Ένας βαθμό ελευθερίας



- Στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς: $p_e = ei = i \frac{d\lambda}{dt}$

- Στοιχειώδης καθαρή ηλεκτρική ενέργεια: $dW_e = p_e dt = i d\lambda$

- Στοιχειώδης εσωτερική μηχανική ενέργεια: $dW_m = F_\pi dx$

$$\left. \begin{array}{l} dW_e = i d\lambda \\ dW_m = F_\pi dx \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{dW_\pi = i d\lambda - F_\pi dx}$$



Ανάπτυξη δύναμης F_π

- Έκφραση στοιχειώδους ενέργειας μαγνητικού πεδίου ως συνάρτηση της πεπλεγμένης ροής και της στιγμιαίας θέσης του σπλισμού:

$$W_\pi = W_\pi(\lambda, x)$$

$$dW_\pi = \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial x} dx$$

$$dW_\pi = i d\lambda - F_\pi dx$$

$$i = \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial \lambda}$$

$$F_\pi = - \frac{\partial W_\pi(\lambda, x)}{\partial x}$$

- Δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο
- Προς την κατεύθυνση ελάττωσης της W_π
- Προς την κατεύθυνση μείωσης της $\mathcal{R}$
- Προς την κατεύθυνση μείωσης του διακένου

Ανάπτυξη ροπής T_π

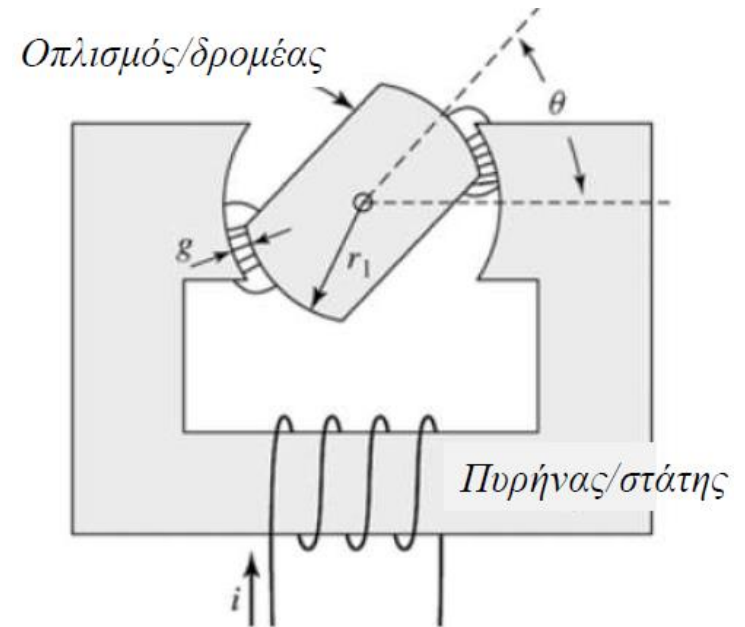
- ❑ Στοιχειώδης μηχανική ενέργεια σε στρεφόμενο μέλος συστήματος Η/Μ μετατροπής:

$$dW_m = T_\pi d\theta$$

όπου T_π η ηλεκτρομαγνητική ροπή και θ η στιγμιαία γωνιακή θέση του κινητού μέλους.

- ❑ Αναπτυσσόμενη ηλεκτρομαγνητική ροπή:

$$T_\pi = - \frac{\partial W_\pi(\lambda, \theta)}{\partial \theta}$$





Ενέργεια και συνενέργεια

- Προτιμότερη η έκφραση στοιχειώδους ενέργειας μαγνητικού πεδίου ως συνάρτηση του ρεύματος και της στιγμιαίας θέσης του οπλισμού:

$$W'_\pi = W'_\pi(i, x) \text{ ή } W'_\pi(i, \theta) \quad \text{Συνενέργεια}$$

- Η συνενέργεια ορίζεται ως εξής:

$$W'_\pi + W_\pi = i\lambda \quad \longrightarrow \quad W'_\pi = i\lambda - W_\pi$$

- Η συνενέργεια δεν έχει φυσική σημασία, αλλά είναι χρήσιμη στους υπολογισμούς



Υπολογισμός δύναμης/ροπής με χρήση της συνενέργειας

$$W'_\pi = i\lambda - W_\pi$$



$$dW'_\pi = id\lambda + \lambda di - dW_\pi$$

$$dW_\pi = id\lambda - F_\pi dx$$

$$\left. \begin{array}{l} dW'_\pi = id\lambda + \lambda di - dW_\pi \\ dW_\pi = id\lambda - F_\pi dx \end{array} \right\} \longrightarrow dW'_\pi = \lambda di + F_\pi dx$$

$$dW'_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i, x)}{\partial i} di + \frac{\partial W'_\pi(i, x)}{\partial x} dx$$

$$\lambda = \frac{\partial W'_\pi(i, x)}{\partial i}$$

$$F_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i, x)}{\partial x}$$

Ομοίως, για στρεφόμενο σπλισμό:

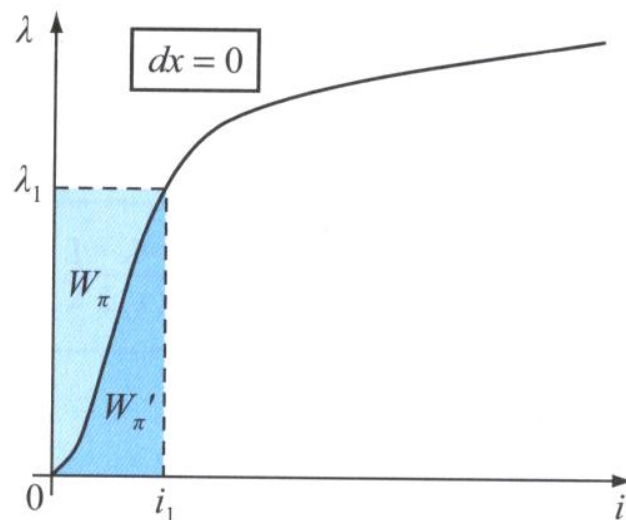
$$T_\pi = \frac{\partial W'_\pi(i, \theta)}{\partial \theta}$$



Υπολογισμός ενέργειας και συνενέργειας

$$dW_\pi = i d\lambda - F_\pi dx \quad \longrightarrow \quad W_\pi(\lambda_1, x) = \int_0^{\lambda_1} i(\lambda, x) d\lambda \quad (dx = 0)$$

$$dW'_\pi = \lambda di + F_\pi dx \quad \longrightarrow \quad W'_\pi(i_1, x) = \int_0^{i_1} \lambda(i, x) di \quad (dx = 0)$$





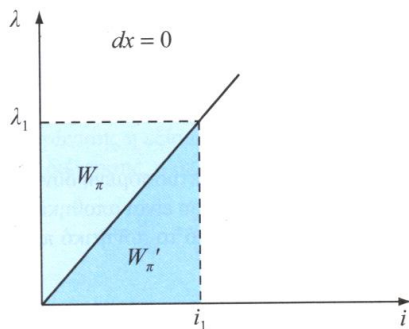
Περίπτωση γραμμικού μαγνητικού πεδίου

□ Το μαγνητικό κύκλωμα χαρακτηρίζεται από γραμμική καμπύλη μαγνήτισης

□ Η πεπλεγμένη ροή δίνεται από τη σχέση: $\lambda = L(x)i$ ή $\lambda = L(\theta)i$

□ Η ενέργεια ίση με τη συνενέργεια:
$$W_{\pi} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} = \frac{1}{2} L(x) i^2 = \frac{1}{2} \mathcal{R}(x) \varphi^2 = W'_{\pi}$$

□ Αναπτυσσόμενη δύναμη ή ροπή:
$$F_{\pi} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)^2} \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dx}$$



$$T_{\pi} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta} = \frac{1}{2} \varphi^2 \frac{d\mathcal{R}}{d\theta}$$



Γενικές παρατηρήσεις

- ❑ Με σταθερή μαγνητική ροή, η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να ελαττώσει την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο.
- ❑ Με σταθερό ρεύμα, η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να αυξήσει τη συνενέργεια του μαγνητικού πεδίου.
- ❑ Η αναπτυσσόμενη δύναμη (ή ροπή) έχει την τάση να ελαττώσει τη μαγνητική αντίσταση και συνεπώς να αυξήσει την αυτεπαγωγή του τυλίγματος διέγερσης.



Εξίσωση τάσης

□ Στη γενική περίπτωση ενός συστήματος H/M μετατροπής, ισχύει: $\lambda = \lambda(i, x)$

□ Νόμος Faraday:
$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial i} \frac{di}{dt}}_{\text{Τάση M/Σ}} + \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt}}_{\text{Τάση ταχύτητας}}$$

□ Σε γραμμικά υλικά: $\lambda = L(x)i$

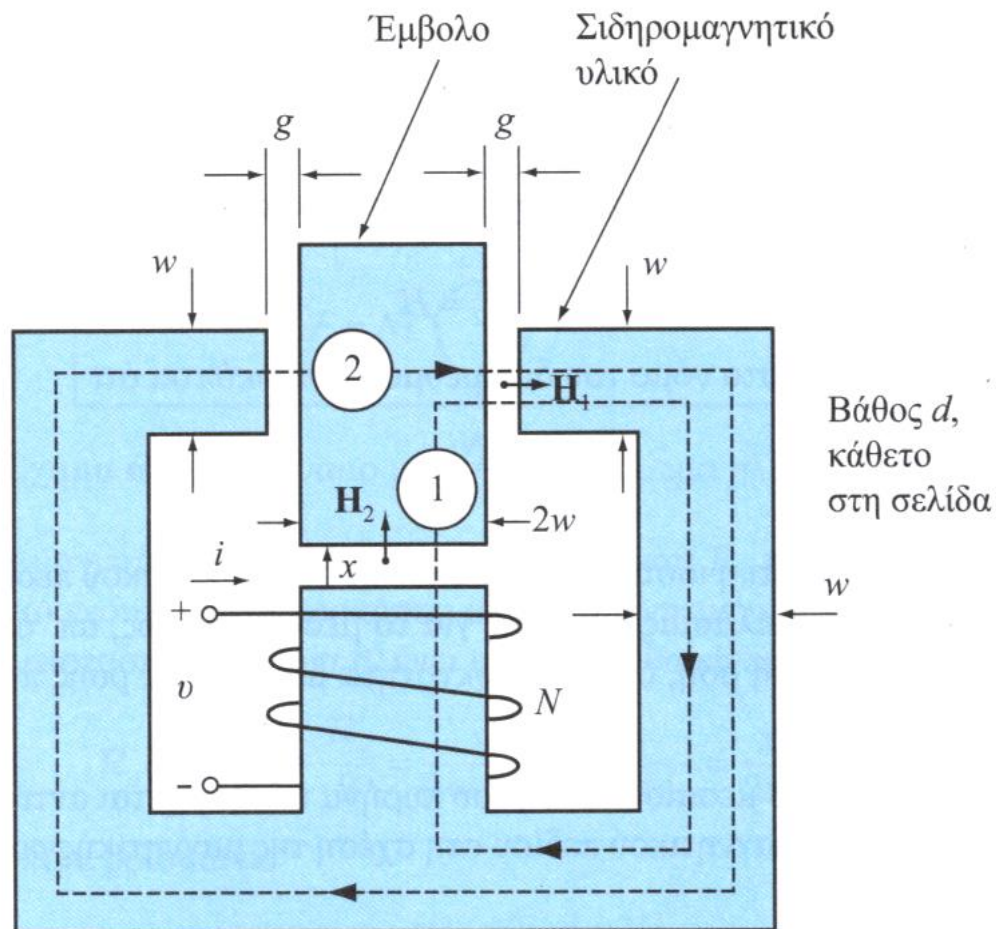


$$e = \frac{d\lambda}{dt} = L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt}$$

Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος

Ζητούμενα:

- 1) $\lambda = \lambda(i, x)$
- 2) v για δεδομένα i, x
- 3) F_π



Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος

Νόμος Gauss:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_x = \varphi_g + \varphi_g$$

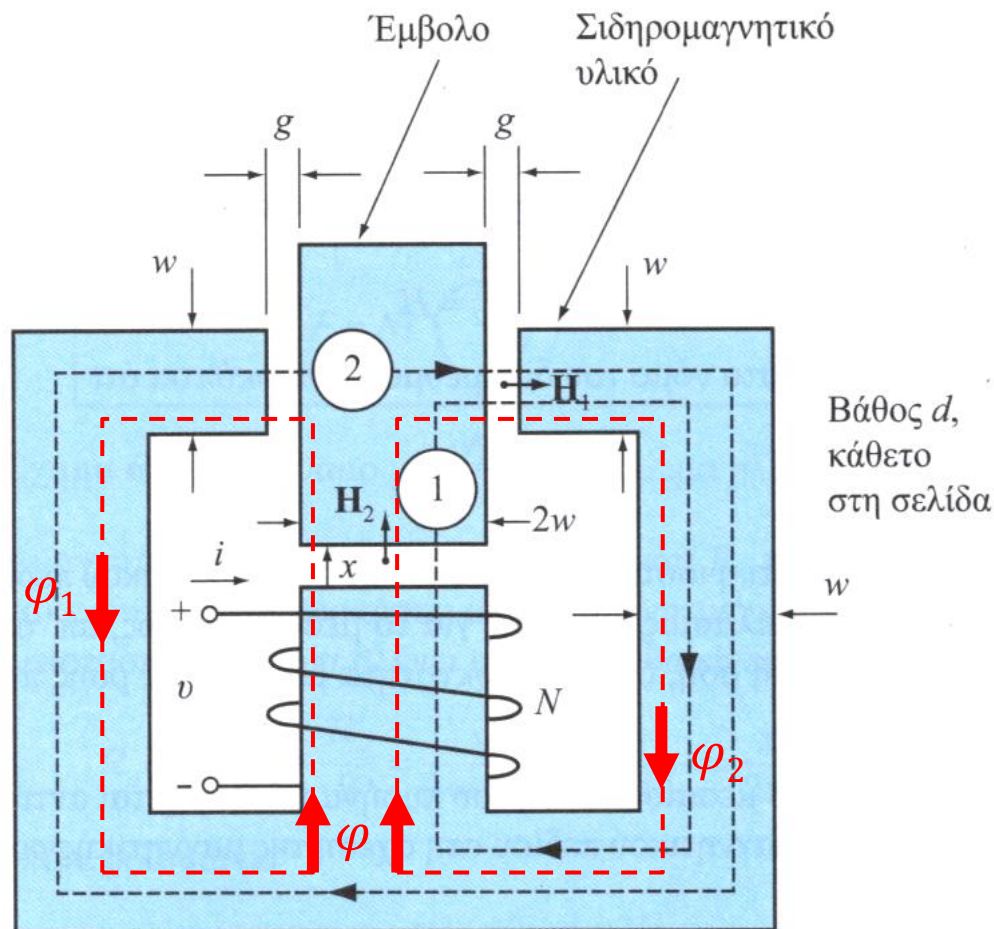
$$\mu_0 H_2 (2w)d = \mu_0 H_1 w d + \mu_0 H_1 w d$$

$$H_1 = H_2 = H$$

Νόμος διαρρεύματος ① :

$$H_1 g + H_2 x = Ni$$

$$H = \frac{Ni}{g + x}$$



Παράδειγμα 1: Ηλεκτρονόμος

Νόμος Faraday:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial i} \frac{di}{dt} + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

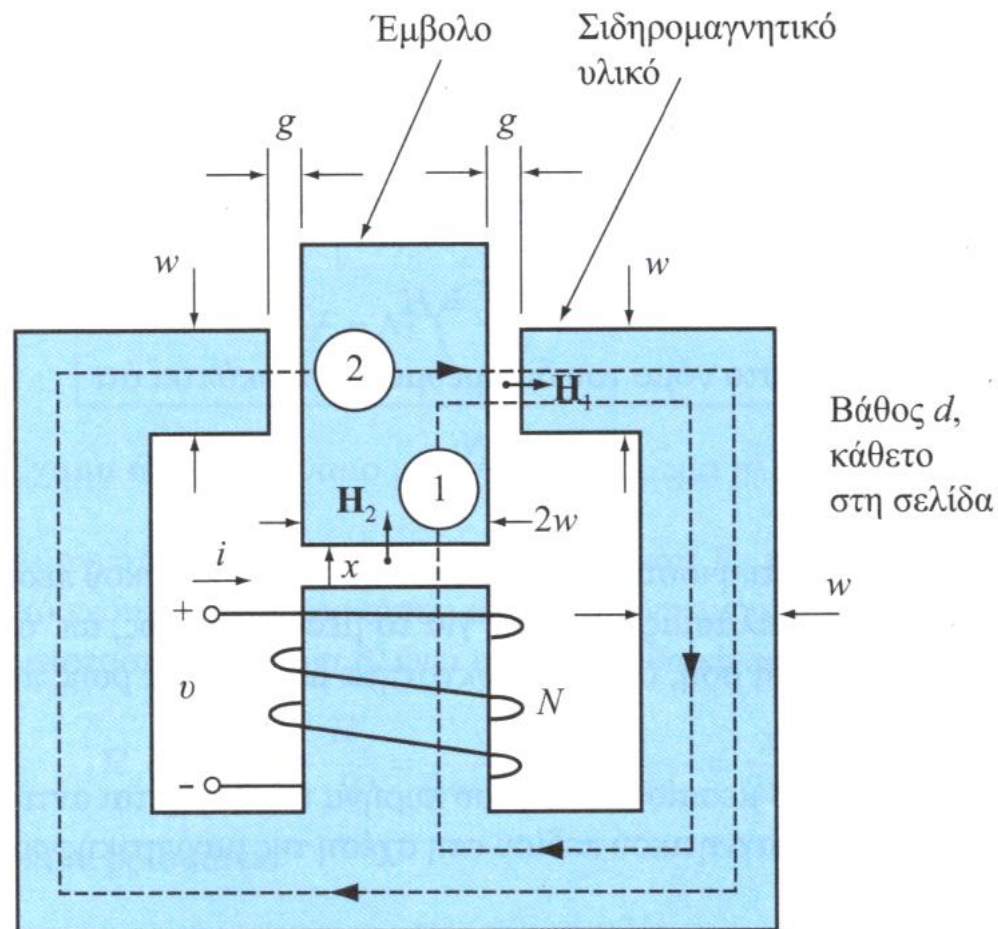
$$e = \frac{2wd\mu_0 N^2}{g+x} \frac{di}{dt} - \frac{2wd\mu_0 N^2 i}{(g+x)^2} \frac{dx}{dt}$$

Τάση ακροδεκτών:

$$v = e + ir$$

Αναπτυσσόμενη δύναμη:

$$F_\pi = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = - \frac{wd\mu_0 N^2 i^2}{(g+x)^2}$$



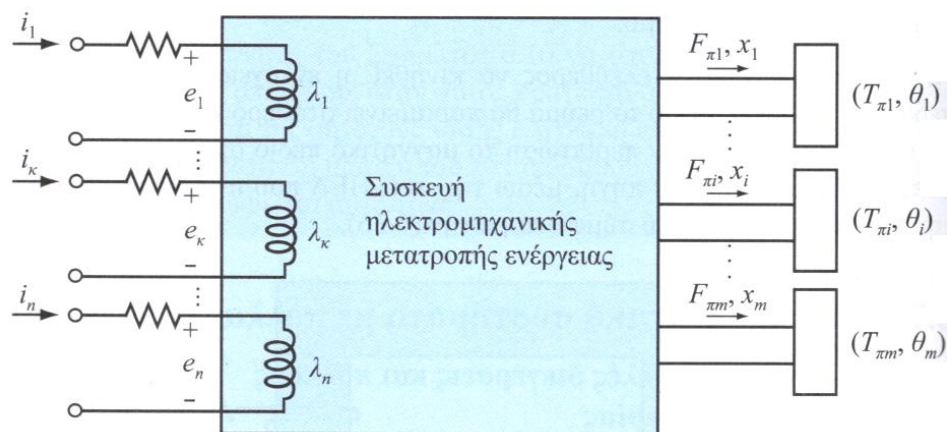
Η/Μ σύστημα με n διεγέρσεις και m βαθμούς ελευθερίας

- Πεπλεγμένη ροή τυλίγματος κ :

$$\lambda_{\kappa} = \lambda_{\kappa}(i_1, \dots, i_n, x_1, \dots, x_n)$$

- ΗΕΔ στο τύλιγμα κ :

$$e_{\kappa} = \frac{d\lambda_{\kappa}}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_{\kappa}}{\partial i_j} \frac{di_j}{dt}}_{\text{Τάσεις Μ/Σ}} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\partial \lambda_{\kappa}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}}_{\text{Τάσεις ταχύτητας}}$$





Η/Μ σύστημα με n διεγέρσεις και m βαθμούς ελευθερίας

- Στοιχειώδης καθαρή ηλεκτρική ενέργεια:

$$dW_e = \sum_{\kappa=1}^n i_{\kappa} d\lambda_{\kappa}$$

- Συνολικά παραγόμενη στοιχειώδης μηχανική ενέργεια:

$$dW_m = \sum_{i=1}^m F_{\pi i} dx_i$$

- Συνολικά παραγόμενη στοιχειώδης μηχανική ενέργεια:

$$dW_{\pi} = dW_e - dW_m = \sum_{\kappa=1}^n i_{\kappa} d\lambda_{\kappa} - \sum_{i=1}^m F_{\pi i} dx_i$$

$$F_{\pi i} = - \frac{\partial W_{\pi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x_1, \dots, x_m)}{\partial x_i}$$

$$T_{\pi i} = - \frac{\partial W_{\pi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_i}$$



Η/Μ σύστημα με n διεγέρσεις και m βαθμούς ελευθερίας

- Συνενέργεια:

$$W'_\pi = \sum_{\kappa=1}^n i_\kappa \lambda_\kappa - W_\pi$$

- Στοιχειώδης μεταβολή συνενέργειας:

$$dW'_\pi = \sum_{\kappa=1}^n \lambda_\kappa di_\kappa + \sum_{i=1}^m F_{\pi i} dx_i$$

- Ηλεκτρομαγνητική δύναμη ή ροπή:

$$F_{\pi i} = \frac{\partial W'_\pi(i_1, \dots, i_n, x_1, \dots, x_m)}{\partial x_i}$$

$$T_{\pi i} = \frac{\partial W'_\pi(i_1, \dots, i_n, \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial \theta_i}$$



Γραμμικό Η/Μ σύστημα με **2** διεγέρσεις και **1** βαθμό ελευθερίας

- Πεπλεγμένη ροή στα δύο τυλίγματα:

$$\lambda_1 = L_{11}(x)i_1 + L_{12}(x)i_2$$

$$\lambda_2 = L_{12}(x)i_1 + L_{22}(x)i_2$$

- Συνενέργεια:

$$\text{Αρχικά } i_1 = i_2 = 0$$

$$W_\pi = W'_\pi = 0$$

$$F_\pi = 0$$

$$x = 0$$

$$\downarrow (dx = 0)$$

$$dW'_\pi = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2$$

$$dW'_\pi = L_{11}(x)i_1 di_1 + L_{12}(x)i_2 di_1 + L_{12}(x)i_1 di_2 + L_{22}(x)i_2 di_2$$

$$\downarrow i_2 = 0, di_2 = 0$$

$$\downarrow i_1 = 0, di_1 = 0$$

$$W'_\pi(i_1, i_2, x) = \int_0^{i_1} L_{11}(x)idi + \int_0^{i_2} [L_{12}(x)i_1 + L_{22}(x)i]di$$

$$W'_\pi = \frac{1}{2}L_{11}(x)i_1^2 + L_{12}(x)i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}(x)i_2^2 = W_\pi$$



Γραμμικό Η/Μ σύστημα με **2** διεγέρσεις και **1** βαθμό ελευθερίας

□ Δύναμη:

$$\left. \begin{aligned} F_{\pi i} &= \frac{\partial W_{\pi}'(i_1, i_2, x_1)}{\partial x_1} \\ W_{\pi}' &= \frac{1}{2} L_{11}(x) i_1^2 + L_{12}(x) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22}(x) i_2^2 = W_{\pi} \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$F_{\pi} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{dx} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{dx} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{dx}$$

□ Ροπή:

$$T_{\pi} = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_{11}}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_{22}}{d\theta}$$

Μηχανή δύο τυλιγμάτων

Θεωρούμε τη συσκευή ηλεκτρομηχανικής μετατροπής ενέργειας του Σχήματος 6.13. Η συσκευή είναι κυλινδρική με αξονικό μήκος ℓ κάθετο στη σελίδα. Ο εξωτερικός κοίλος κύλινδρος ονομάζεται *στάτης* και είναι ακίνητος, ενώ ο εσωτερικός συμπαγής κύλινδρος ονομάζεται *δρομέας* και μπορεί να κινηθεί σχηματίζοντας ως προς το στάτη μεταβλητή γωνία $\theta(t)$. Υποθέτουμε ότι οι αυτεπαγωγές των τυλιγμάτων στάτη και δρομέα είναι σταθερές (ανεξάρτητες της γωνίας θ)

$$L_{ss}(\theta) = L_s$$

$$L_{rr}(\theta) = L_r$$

ενώ η αλληλεπαγωγή τους δίνεται από την ημιτονοειδή σχέση

$$L_{sr} = M \cos \theta.$$

Πράγματι, παρατηρούμε στο Σχήμα 6.13 ότι για $\theta = 0$ οι άξονες και οι φορές περιέλιξης των δύο τυλιγμάτων συμπίπτουν, οπότε έχουμε τη μέγιστη θετική αλληλεπαγωγή. Αντίθετα, για $\theta = 90^\circ$, οι άξονες των τυλιγμάτων είναι κάθετοι και έχουμε μηδενική αλληλεπαγωγή, ενώ όταν $\theta = 180^\circ$ η αλληλεπαγωγή έχει αρνητικό μέγιστο.

Υποθέτουμε ότι τα ρεύματα και η μηχανική κίνηση είναι της μορφής

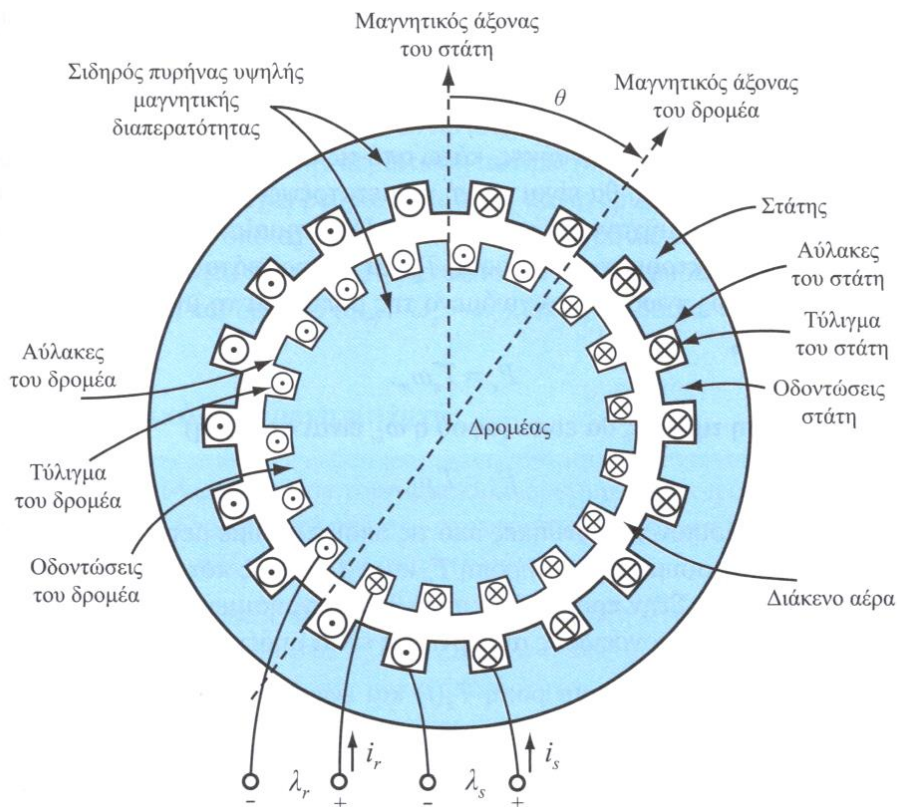
$$i_s = \sqrt{2} I_s \sin \omega_s t$$

$$i_r = \sqrt{2} I_r \sin(\omega_r t + \varphi)$$

$$\theta = \omega_m t + \delta,$$

όπου $I_s, I_r, \omega_s, \omega_r, \delta$ είναι σταθερές. Θεωρούμε δηλαδή ότι τα ρεύματα στάτη και δρομέα είναι ημιτονοειδή με διαφορά φάσης φ , στην αρχή του χρόνου, ενώ ο δρομέας περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα και η αρχική τιμή της γωνίας είναι δ . Να υπολογιστούν:

- Η στιγμιαία ηλεκτρομαγνητική ροπή που ασκείται στο δρομέα.
- Κάτω από ποιες συνθήκες το ηλεκτρομηχανικό σύστημα του σχήματος μπορεί να μετατρέψει μέση ισχύ μεταξύ του ηλεκτρικού και του μηχανικού συστήματος.





Μηχανή δύο τυλιγμάτων

Λύση (α):

$$T_{\pi} = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_{ss}}{d\theta} + i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_{rr}}{d\theta}$$



$$\left(\frac{dL_{ss}}{d\theta} = \frac{dL_{rr}}{d\theta} = 0 \right)$$

$$T_{\pi} = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta} = -M i_s i_r \sin\theta$$



$$\left[\begin{array}{l} i_s = \sqrt{2} I_s \sin(\omega_s t) \\ i_r = \sqrt{2} I_r \sin(\omega_r t + \varphi) \\ \theta = \omega_m t + \delta \end{array} \right]$$

$$T_{\pi}(t) = -2 I_s I_r M \sin(\omega_s t) \sin(\omega_r t + \varphi) \sin(\omega_m t + \delta)$$



Μηχανή δύο τυλιγμάτων

Λύση (β):

$$P_e = T_\pi \omega_m \quad (\text{στιγμιαία ηλεκτρική ισχύς})$$

$$P_\mu = T_\mu \omega_m \quad (\text{μέση τιμή για } \omega_m \text{ σταθερή})$$

$$T_\pi(t) = -2I_s I_r M \sin(\omega_s t) \sin(\omega_r t + \varphi) \sin(\omega_m t + \delta)$$

↓ (ταυτότητα: γινόμενα σε αθροίσματα)

$$\begin{aligned} T_\pi(t) &= -\frac{1}{2} I_s I_r M \{ \sin[(\omega_s - \omega_r + \omega_m)t + \delta - \varphi] + \sin[(-\omega_s + \omega_r + \omega_m)t + \delta + \varphi] \\ &\quad - \sin[(\omega_s + \omega_r + \omega_m)t + \delta + \varphi] - \sin[(-\omega_s - \omega_r + \omega_m)t + \delta - \varphi] \} \end{aligned}$$

↓ (ένας από τους συντελεστές του t στα ορίσματα ίσος με 0)

$$\omega_m = \pm \omega_s \pm \omega_r$$



Μηχανή δύο τυλιγμάτων

Λύση (β):

$$\text{Αν } \omega_m = \omega_s - \omega_r$$

$$P_\mu = -\frac{1}{2} I_s I_r M \omega_m \sin(\delta + \varphi)$$

$$\text{Αν } \omega_m = \omega_s + \omega_r$$

$$P_\mu = -\frac{1}{2} I_s I_r M \omega_m \sin(\delta - \varphi)$$

Διφασική σύγχρονη μηχανή

Στο Σχήμα 6.14 φαίνεται σε τομή μία κυλινδρική μηχανή, η οποία έχει ένα τύλιγμα f στο δρομέα (δηλαδή στο στρεφόμενο μέλος) και δύο τυλίγματα a και b στο στάτη (δηλαδή στο ακίνητο μέλος).

Η αυτεπαγωγή καθενός από τα τυλίγματα του στάτη είναι $L_{aa} = L_{bb} = L$ και του τυλίγματος του δρομέα L_{ff} . Το διάκενο αέρος θεωρείται ομοιόμορφο και συνεπώς οι αυτεπαγωγές είναι ανεξάρτητες της γωνιακής θέσης του δρομέα. Τα τυλίγματα του στάτη είναι κάθετα μεταξύ τους, συνεπώς η αλληλεπαγωγή τους είναι μηδενική ($L_{ab} = 0$). Η αλληλεπαγωγή μεταξύ κάθε τυλίγματος του στάτη και του τυλίγματος του δρομέα εξαρτάται από τη γωνιακή θέση θ του δρομέα και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ημιτονοειδής

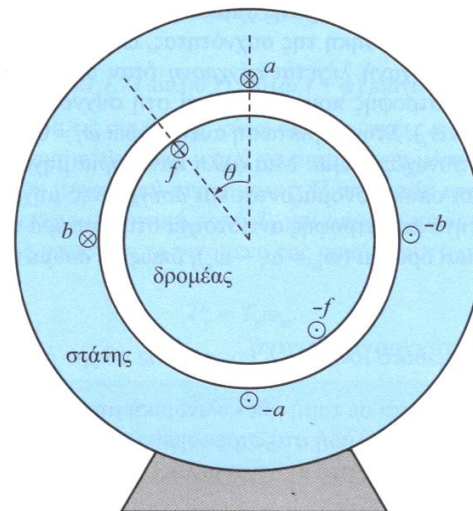
$$L_{af} = M \cos \theta \quad L_{bf} = M \sin \theta,$$

όπου M είναι η μέγιστη τιμή της αλληλεπαγωγής. Η ωμική αντίσταση κάθε τυλίγματος του στάτη είναι r_a . Ζητούνται:

- Να βρεθεί μια γενική έκφραση για τη ροπή συναρτήσει της γωνίας θ , των συντελεστών L , L_{ff} , M και των στιγμιαίων ρευμάτων i_a , i_b και i_f .
- Υποθέστε ότι ο δρομέας είναι ακίνητος και συνεχή ρεύματα $i_a = I$, $i_b = I$, $i_f = I_f$ διαρρέουν τα τυλίγματα κατά τις φορές που φαίνονται στο σχήμα. Αν ο δρομέας επιτραπεί να κινηθεί, θα στρέφεται συνέχεια ή θα τείνει να σταματήσει; Αν συμβεί το δεύτερο, σε ποια τιμή του θ θα ισορροπήσει;
- Το τύλιγμα του δρομέα θεωρείται ότι διαρρέεται από συνεχές ρεύμα I_f και τα τυλίγματα του στάτη από εναλλασσόμενα διφασικά ρεύματα

$$i_a = \sqrt{2} I \cos \omega t$$

$$i_b = \sqrt{2} I \sin \omega t.$$



Σχήμα 6.14: Διφασική σύγχρονη μηχανή

Ο δρομέας περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω ίση με την κυκλική συχνότητα των ρευμάτων του στάτη, έτσι ώστε η θέση του να δίνεται από τη σχέση $\theta = \omega t + \delta_{sr}$, όπου δ_{sr} είναι μια γωνία που περιγράφει τη θέση του δρομέα σε σχέση με τον άξονα της φάσης a , όταν το ρεύμα στη φάση αυτή έχει μέγιστο. Να βρεθεί έκφραση για τη μέση ροπή, όταν ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες. Τι είδους μηχανή έχουμε και γιατί;

- Με τις προϋποθέσεις της ερώτησης (γ), να βρεθεί μια έκφραση για τις στιγμιαίες τάσεις ακροδεκτών των φάσεων a και b του στάτη.



Διφασική σύγχρονη μηχανή

Λύση (α):

$$\begin{aligned} W'_\pi &= W_\pi \\ &= \frac{1}{2}L_{aa}(x)i_a^2 + \frac{1}{2}L_{bb}(x)i_b^2 + \frac{1}{2}L_{ff}(x)i_f^2 + L_{ab}(x)i_a i_b + L_{af}(x)i_a i_f + L_{bf}(x)i_b i_f \end{aligned}$$

$$(L_{ab} = 0, \frac{dL_{aa}}{d\theta}, \frac{dL_{bb}}{d\theta}, \frac{dL_{ff}}{d\theta})$$

$$T_\pi(t) = i_a i_f \frac{dL_{af}}{d\theta} + i_b i_f \frac{dL_{bf}}{d\theta}$$

$$(L_{af} = M\cos\theta, L_{bf} = M\sin\theta)$$

$$T_\pi(t) = M i_f (i_b \cos\theta - i_a \sin\theta) \quad (\text{στιγμιαία ροπή για στρεφόμενο ή ακίνητο δρομέα})$$



Διφασική σύγχρονη μηχανή

Λύση (β):

Για συνεχή ρεύματα $i_a = i_b = I, i_f = If$:

$$T_\pi = II_f M(\cos\theta - \sin\theta)$$

Θέσεις ισορροπίας δρομέα ($T_\pi = 0$):

$$\cos\theta - \sin\theta = 0 \rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ \text{ και } 225^\circ$$

Ευστάθεια σημείων ισορροπίας δρομέα:

$$\frac{dT_\pi}{d\theta} = -II_f M(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 45^\circ \rightarrow \frac{dT_\pi}{d\theta} = -II_f M\sqrt{2} < 0 & \text{(ευσταθής θέση)} \\ \theta = 225^\circ \rightarrow \frac{dT_\pi}{d\theta} = II_f M\sqrt{2} > 0 & \text{(ασταθής θέση)} \end{array} \right.$$



Διφασική σύγχρονη μηχανή

Λύση (γ):

Για ρεύματα $i_a = \sqrt{2}I \cos \omega t$, $i_b = \sqrt{2}I \sin \omega t$, $i_f = I_f$:

$$T_\pi(t) = M\sqrt{2}II_f [\sin \omega t \cdot \cos(\omega t + \delta_{sr}) - \cos \omega t \cdot \sin(\omega t + \delta_{sr})]$$



$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$T_\pi(t) = -M\sqrt{2}II_f \sin \delta_{sr}$$

- Χρονικά σταθερή ροπή
- Εξαρτάται μόνο από τη δ_{sr} για $t = 0$



Διφασική σύγχρονη μηχανή

Λύση (δ):

$$\left. \begin{aligned} v_a &= i_a r_a + \frac{d}{dt} (L_{aa} i_a + L_{af} i_f) \\ v_b &= i_b r_a + \frac{d}{dt} (L_{bb} i_b + L_{bf} i_f) \end{aligned} \right\}$$



Με αντικατάσταση ρευμάτων
και αλληλεπαγωγών

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \sqrt{2} I r_a \cos \omega t - \sqrt{2} I \omega L \sin \omega t - I_f \omega M \sin(\omega t + \delta_{sr}) \\ v_b &= \sqrt{2} I r_a \sin \omega t + \sqrt{2} I \omega L \cos \omega t + I_f \omega M \cos(\omega t + \delta_{sr}) \end{aligned} \right\}$$