



Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας

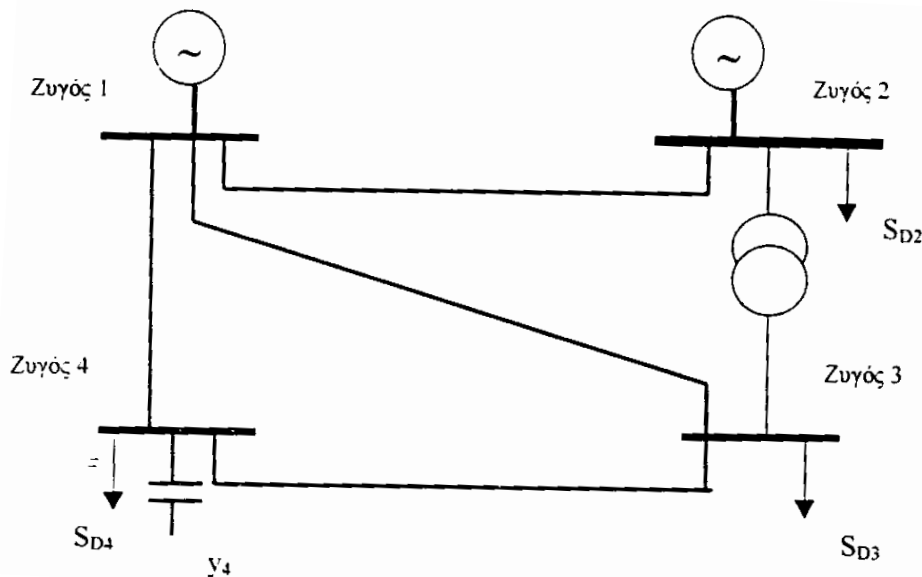
10. Μελέτη ροών φορτίου - Ασκήσεις

Βασίλης Νικολαΐδης
Επίκουρος Καθηγητής



Άσκηση 1 - Εξεταζόμενο ΣΗΕ

Ζυγός ταλάντωσης



Φορτία

$$S_{D2} = 0,1 + j0,05 \text{ αμ}$$

$$S_{D3} = 1,4 + j0,46 \text{ αμ}$$

$$S_{D4} = 1,4 + j0,46 \text{ αμ}$$

Γεννήτριες

$$P_{G2} = 1,56 \text{ αμ}$$

$$V_2 = 1,045 \text{ αμ}$$

$$V_1 = 1,040 \text{ αμ}$$

Γραμμές μεταφοράς

$$y_{12} = 2,0 - j6,0 \text{ αμ}$$

$$y_{s12} = y_{s21} = j0,03 \text{ αμ}$$

$$y_{13} = 2,5 - j7,5 \text{ αμ}$$

$$y_{s13} = y_{s31} = j0,03 \text{ αμ}$$

$$y_{14} = 0,8 - j4,4 \text{ αμ}$$

$$y_{s14} = y_{s41} = j0,04 \text{ αμ}$$

$$y_{34} = 2,0 - j6,0 \text{ αμ}$$

$$y_{s34} = y_{s43} = j0,04 \text{ αμ}$$

Μετασχηματιστής

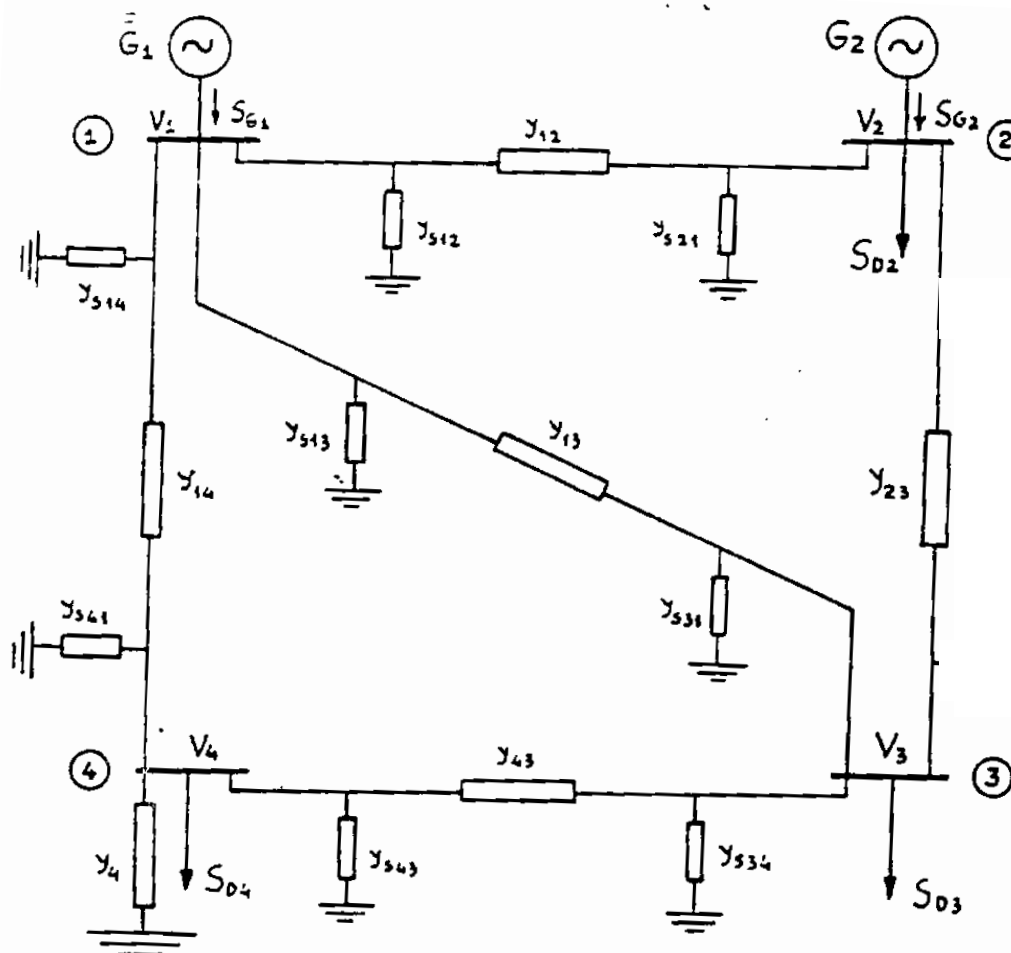
$$y_{23} = -j10,0 \text{ αμ}$$

Πυκνωτής

$$y_4 = j0,2 \text{ αμ}$$



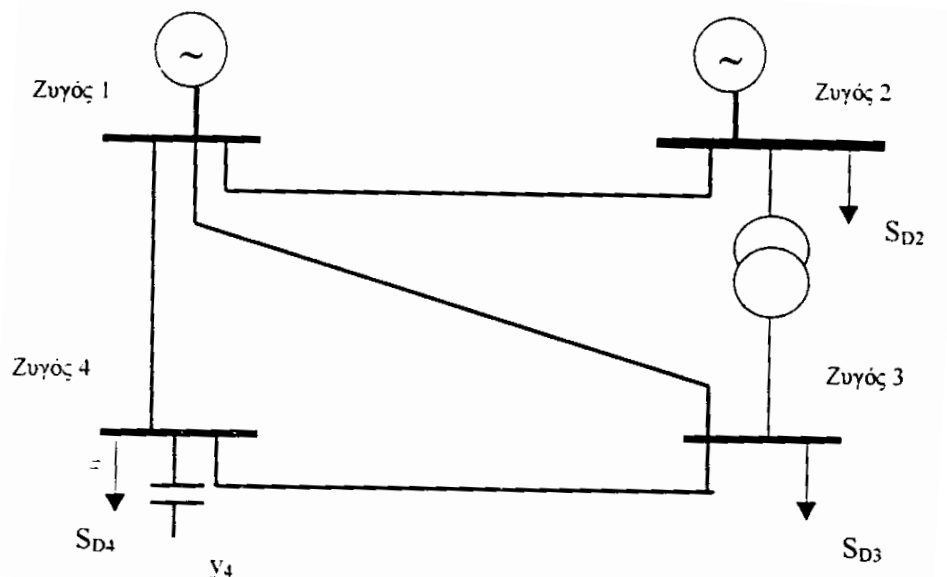
Άσκηση 1 - Ανά μονάδα μονοφασικό ισοδύναμο





Άσκηση 1 - Πίνακας μεταβλητών

Ζυγός ταλάντωσης



Ζυγός	Τύπος	P_G (αμ)	Q_G (αμ)	P_D (αμ)	Q_D (αμ)	V (αμ)	δ (°)
1	Ταλάντωσης	;	;	0	0	1,040	0
2	PV	1,56	;	0,10	0,05	1,045	;
3	PQ	0	0	1,40	0,46	;	;
4	PQ	0	0	1,40	0,46	;	;

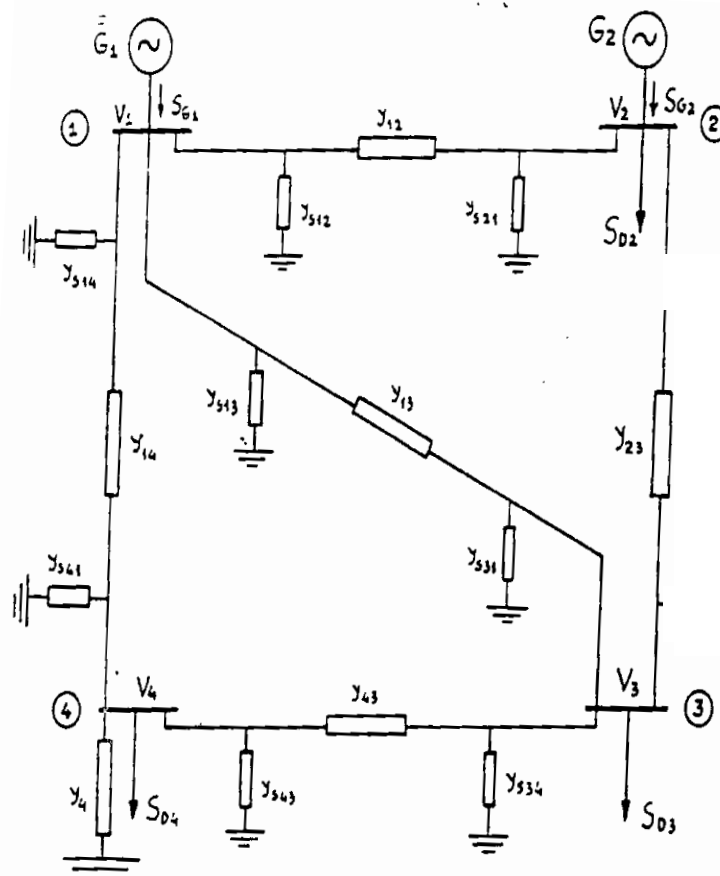


Άσκηση 1 - Σχηματισμός πίνακα αγωγιμοτήτων

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{s12} + Y_{12} + Y_{s13} + Y_{13} + Y_{s14} + Y_{14} & -Y_{12} & -Y_{13} & -Y_{14} \\ -Y_{12} & Y_{23} + Y_{s21} + Y_{12} & -Y_{23} & 0 \\ -Y_{13} & -Y_{23} & Y_{s31} + Y_{13} + Y_{s34} + Y_{43} + Y_{23} & -Y_{43} \\ -Y_{14} & 0 & -Y_{43} & Y_{s41} + Y_{14} + Y_{s43} + Y_{43} + Y_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \quad \text{ή}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5,3 - j17,8 & -2 + j6 & -2,5 + j7,5 & -0,8 + j4,4 \\ -2 + j6 & 2 - j15,97 & j10 & 0 \\ -2,5 + j7,5 & j10 & 4,5 - j23,43 & -2 + j6 \\ -0,8 + j4,4 & 0 & -2 + j6 & 2,8 - j10,12 \end{bmatrix}$$





Άσκηση 1 - Μιγαδικές εξισώσεις ροής φορτίου

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5,3 - j17,8 & -2 + j6 & -2,5 + j7,5 & -0,8 + j4,4 \\ -2 + j6 & 2 - j15,97 & j10 & 0 \\ -2,5 + j7,5 & j10 & 4,5 - j23,43 & -2 + j6 \\ -0,8 + j4,4 & 0 & -2 + j6 & 2,8 - j10,12 \end{bmatrix}$$

$$S_k = S_{Gk} - S_{Dk} = Y_{kk}^* V_k^2 + \hat{V}_k \sum_{m \in A(k)} Y_{km}^* \hat{V}_m^*$$

Ζυγός 1 $S_1 = S_{G1} - S_{D1} = Y_{11}^* V_1^2 + \hat{V}_1 (Y_{12}^* \hat{V}_2^* + Y_{13}^* \hat{V}_3^* + Y_{14}^* \hat{V}_4^*)$

$$S_{G1} = Y_{11}^* V_1^2 + \hat{V}_1 (Y_{12}^* \hat{V}_2^* + Y_{13}^* \hat{V}_3^* + Y_{14}^* \hat{V}_4^*)$$

$$S_{G1} = (5,3 + j17,8)1,04^2 + 1,04[(-2 - j6)\hat{V}_2^* + (-2,5 - j7,5)\hat{V}_3^* + (-0,8 - j4,4)\hat{V}_4^*]$$

$$S_{G1} = (5,73 + j19,25) + [(-2,08 - j6,24)\hat{V}_2^* + (-2,6 - j7,8)\hat{V}_3^* + (-0,83 - j4,58)\hat{V}_4^*]$$



Άσκηση 1 - Μιγαδικές εξισώσεις ροής φορτίου

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5,3 - j17,8 & -2 + j6 & -2,5 + j7,5 & -0,8 + j4,4 \\ -2 + j6 & 2 - j15,97 & j10 & 0 \\ -2,5 + j7,5 & j10 & 4,5 - j23,43 & -2 + j6 \\ -0,8 + j4,4 & 0 & -2 + j6 & 2,8 - j10,12 \end{bmatrix}$$

$$S_k = S_{Gk} - S_{Dk} = Y_{kk}^* V_k^2 + \hat{V}_k \sum_{m \in A(k)} Y_{km}^* \hat{V}_m^*$$

Ζυγός 2 $S_2 = S_{G2} - S_{D2} = Y_{22}^* V_2^2 + \hat{V}_2 (Y_{21}^* \hat{V}_1^* + Y_{23}^* \hat{V}_3^*)$

$$S_{G2} - (0,1 + j0,05) = (2 + j15,97)1,045^2 + \hat{V}_2 [(-2 - j6)1,04 + (-j10)\hat{V}_3^*]$$

$$S_{G2} = (2,284 + j17,49) + \hat{V}_2 [(-2 - j6)1,04 + (-j10)\hat{V}_3^*]$$



Άσκηση 1 - Μιγαδικές εξισώσεις ροής φορτίου

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5,3 - j17,8 & -2 + j6 & -2,5 + j7,5 & -0,8 + j4,4 \\ -2 + j6 & 2 - j15,97 & j10 & 0 \\ -2,5 + j7,5 & j10 & 4,5 - j23,43 & -2 + j6 \\ -0,8 + j4,4 & 0 & -2 + j6 & 2,8 - j10,12 \end{bmatrix}$$

$$S_k = S_{Gk} - S_{Dk} = Y_{kk}^* V_k^2 + \hat{V}_k \sum_{m \in A(k)} Y_{km}^* \hat{V}_m^*$$

Ζυγός 3 $S_3 = S_{G3} - S_{D3} = Y_{33}^* V_3^2 + \hat{V}_3 (Y_{31}^* \hat{V}_1^* + Y_{32}^* \hat{V}_2^* + Y_{34}^* \hat{V}_4^*)$

$$-1,4 - j0,46 = (4,5 + j23,43) V_3^2 + \hat{V}_3 [(-2,5 - j7,5) 1,04 + (-j10) \hat{V}_2^* + (-2 - j6) \hat{V}_4^*]$$

$$-1,4 - j0,46 = (4,5 + j23,43) V_3^2 + \hat{V}_3 [(-2,6 - j7,8) + (-j10) \hat{V}_2^* + (-2 - j6) \hat{V}_4^*]$$



Άσκηση 1 - Μιγαδικές εξισώσεις ροής φορτίου

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 5,3 - j17,8 & -2 + j6 & -2,5 + j7,5 & -0,8 + j4,4 \\ -2 + j6 & 2 - j15,97 & j10 & 0 \\ -2,5 + j7,5 & j10 & 4,5 - j23,43 & -2 + j6 \\ -0,8 + j4,4 & 0 & -2 + j6 & 2,8 - j10,12 \end{bmatrix}$$

$$S_k = S_{Gk} - S_{Dk} = Y_{kk}^* V_k^2 + \hat{V}_k \sum_{m \in A(k)} Y_{km}^* \hat{V}_m^*$$

Ζυγός 4 $S_4 = S_{G4} - S_{D4} = Y_{44}^* V_4^2 + \hat{V}_4 (Y_{41}^* \hat{V}_1^* + Y_{43}^* \hat{V}_3^*)$

$$-1,4 - j0,46 = (2,8 + j10,12)V_4^2 + \hat{V}_4 [(-0,8 - j4,4)1,04 + (-2 - j6)\hat{V}_3^*]$$

$$-1,4 - j0,46 = (2,8 + j10,12)V_4^2 + \hat{V}_4 [(-0,832 - j4,58) + (-2 - j6)\hat{V}_3^*]$$



Άσκηση 1 - Εξισώσεις ροής φορτίου σε υβριδική μορφή

Ζυγός 1

$$\begin{aligned} P_{G1} &= V_1^2 G_{11} - V_1(V_2 a_{12} + V_3 a_{13} + V_4 a_{14}) = \\ &V_1^2 G_{11} - V_1 V_2 a_{12} - V_1 V_3 a_{13} - V_1 V_4 a_{14} = \\ &V_1^2 G_{11} - V_1 V_2 [-G_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2) - B_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2)] \\ &\quad - V_1 V_3 [-G_{13} \cos(\delta_1 - \delta_3) - B_{13} \sin(\delta_1 - \delta_3)] \\ &\quad - V_1 V_4 [-G_{14} \cos(\delta_1 - \delta_4) - B_{14} \sin(\delta_1 - \delta_4)] = \\ &1,04^2 \cdot 5,3 - 1,04 \cdot 1,045 \cdot [2 \cos(-\delta_2) - 6 \sin(-\delta_2)] \\ &\quad - 1,04 V_3 [2,5 \cos(-\delta_3) - 7,5 \sin(-\delta_3)] \\ &\quad - 1,04 V_4 [0,8 \cos(-\delta_4) - 4,4 \sin(-\delta_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{G1} \\ &= 5,73 - 2,18 \cos \delta_2 - 6,54 \sin \delta_2 - 2,6 V_3 \cos \delta_3 - 7,8 V_3 \sin \delta_3 - 0,83 V_4 \cos \delta_4 - 4,58 V_4 \sin \delta_4 \end{aligned}$$

$$\text{ή } b_{P1} = f_{P1}(\mathbf{x}) = f_{P1}(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)$$



Άσκηση 1 - Εξισώσεις ροής φορτίου σε υβριδική μορφή

Ζυγός 1

$$\begin{aligned} Q_{G1} &= -V_1^2 B_{11} - V_1(V_2\beta_{12} + V_3\beta_{13} + V_4\beta_{14}) = \\ &= -V_1^2 B_{11} - V_1 V_2 \beta_{12} - V_1 V_3 \beta_{13} - V_1 V_4 \beta_{14} = \\ &= -V_1^2 B_{11} - V_1 V_2 [-G_{12} \sin(\delta_1 - \delta_2) + B_{12} \cos(\delta_1 - \delta_2)] \\ &\quad - V_1 V_3 [-G_{13} \sin(\delta_1 - \delta_3) + B_{13} \cos(\delta_1 - \delta_3)] \\ &\quad - V_1 V_4 [-G_{14} \sin(\delta_1 - \delta_4) + B_{14} \cos(\delta_1 - \delta_4)] = \\ &= 1,04^2 \cdot 17,8 - 1,04 \cdot 1,045 \cdot [2 \sin(-\delta_2) + 6 \cos(-\delta_2)] \\ &\quad - 1,04 V_3 [2,5 \sin(-\delta_3) + 7,5 \cos(-\delta_3)] \\ &\quad - 1,04 V_4 [0,8 \sin(-\delta_4) + 4,4 \cos(-\delta_4)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{G1} \\ &= 18,89 + 2,18 \sin \delta_2 - 6,54 \cos \delta_2 + 2,6 V_3 \sin \delta_3 - 7,8 V_3 \cos \delta_3 + 0,83 V_4 \sin \delta_4 - 4,58 V_4 \cos \delta_4 \end{aligned}$$

$$\text{ή } b_{Q1} = f_{Q1}(\mathbf{x}) = f_{Q1}(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)$$

Ομοίως για τους υπόλοιπους ζυγούς



Άσκηση 1 - Επίλυση με Newton-Raphson

$$\mathbf{x}^{(l+1)} = \mathbf{x}^{(l)} + \mathbf{J}(\mathbf{x}^{(l)})^{-1} [\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(l)})]$$

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(l)} + \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial V_4} \end{array} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(l)}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_2 - P_2(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(l)} \\ P_3 - P_3(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(l)} \\ P_4 - P_4(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(l)} \\ Q_3 - Q_3(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(l)} \\ Q_4 - Q_4(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(l)} \end{bmatrix}$$



Άσκηση 1 - Επίλυση με Newton-Raphson

Αρχικοποίηση flat start ($l = 0$): $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(0)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P2}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P3}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{P4}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{Q3}}{\partial V_4} \\ \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_2} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_3} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial \delta_4} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial V_3} & \frac{\partial f_{Q4}}{\partial V_4} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(0)}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_2 - P_2(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(0)} \\ P_3 - P_3(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(0)} \\ P_4 - P_4(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(0)} \\ Q_3 - Q_3(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(0)} \\ Q_4 - Q_4(\delta_2, \delta_3, \delta_4, V_3, V_4)^{(0)} \end{bmatrix}$$



Άσκηση 1 - Επίλυση με Newton-Raphson

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{(0)} + \begin{bmatrix} 20,1058 & -13,585 & 0 & 0 & 0 \\ -13,585 & 27,385 & -6 & 4,4 & -2 \\ 0 & -6 & 10,576 & -2 & 2,768 \\ 0 & -4,6 & 2 & 19,475 & -6 \\ 0 & 2 & -2,832 & -6 & 9,664 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1,449 \\ -1,3 \\ 1,368 \\ 3,495 \\ -0,004 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,011 \text{ rad} \\ -0,009 \text{ rad} \\ 0,072 \text{ rad} \\ 1,21 \text{ αμ} \\ 1,17 \text{ αμ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,63^\circ \\ -5,16^\circ \\ 4,12^\circ \\ 1,21 \text{ αμ} \\ 1,17 \text{ αμ} \end{bmatrix}$$

Συνεχίζονται οι ανακυκλώσεις μέχρις ότου
το διάνυσμα σφάλματος αποκτήσει σχεδόν
μηδενική τιμή

$$\mathbf{b} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(l)}) < \varepsilon$$

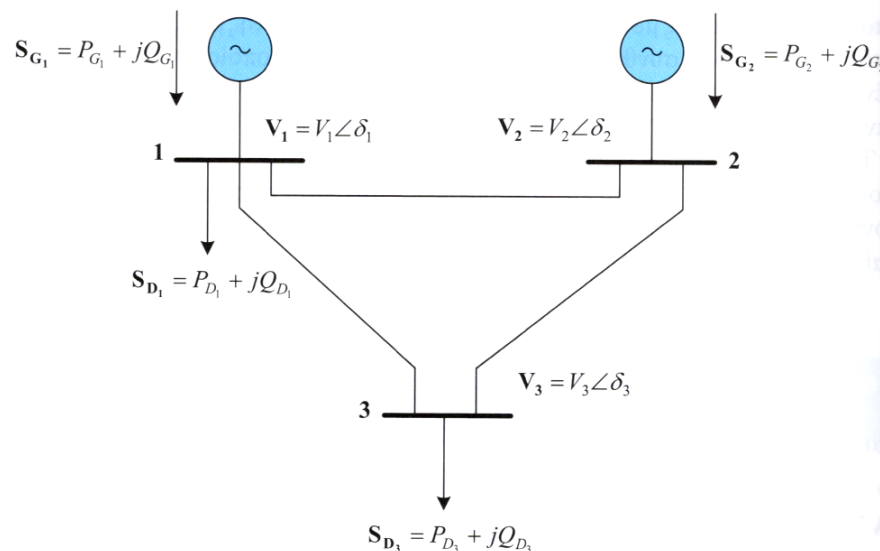


Άσκηση 2

Έστω το ΣΗΕ του σχήματος. Ζητούνται:

1. Να χαρακτηριστούν οι ζυγοί του συστήματος, να υπολογιστεί ο πίνακας αγωγιμοτήτων $\mathbf{Y}$ και να καθοριστούν οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος ροής φορτίου.
2. Να γραφούν οι επαναληπτικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των άγνωστων μεταβλητών.
3. Να υπολογιστούν οι τιμές των άγνωστων μεγεθών με τη μέθοδο Gauss-Seidel, πραγματοποιώντας τρεις επαναλήψεις.
4. Να υπολογιστούν η παραγόμενη άεργος ισχύς σε κάθε ζυγό και οι απώλειες ενεργού και αέργου ισχύος κάθε γραμμής.

Δίνονται: $Z_{12} = j0,1 \text{ αμ}$
 $Z_{23} = j0,12 \text{ αμ}$
 $Z_{13} = j0,09 \text{ αμ}$
 $P_{D1} = 1,1 \text{ αμ}$
 $Q_{D1} = 0,5 \text{ αμ}$
 $P_{D3} = 2,0 \text{ αμ}$
 $Q_{D3} = 1,0 \text{ αμ}$
 $P_{G2} = 1,5 \text{ αμ}$
 $V_1 = 1 \text{ αμ}$
 $V_2 = 1,02 \text{ αμ}$





Χαρακτηρισμός ζυγών

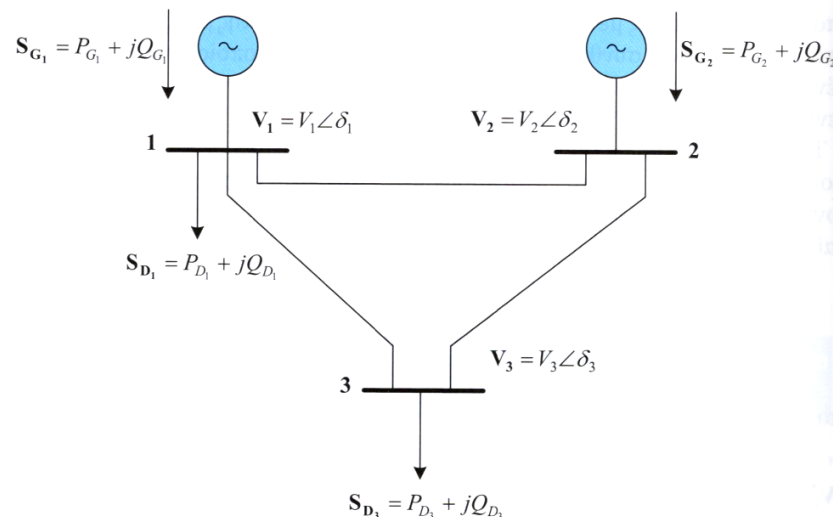
- Ζυγός 1: Ζυγός ταλάντωσης.
- Ζυγός 2 : Ζυγός παραγωγής.
- Ζυγός 3 : Ζυγός φορτίου.



Άσκηση 2 - Σχηματισμός πίνακα αγωγιμοτήτων

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{12} + y_{13} & -y_{12} & -y_{13} \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} & -y_{23} \\ -y_{13} & -y_{23} & y_{13} + y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \text{ αμ}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -j21,11 & j10 & j11,11 \\ j10 & -j18,33 & j8,33 \\ j11,11 & j8,33 & -j19,44 \end{bmatrix} \text{ αμ}$$





Άσκηση 2 - Επίλυση με Gauss-Seidel

$$\hat{V}_2^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2^{(i)}}{[\hat{V}_2^{(i)}]^*} - Y_{21}\hat{V}_1 - Y_{23}\hat{V}_3^{(i)} \right\}$$

$$\hat{V}_3^{(i+1)} = \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{[\hat{V}_3^{(i)}]^*} - Y_{31}\hat{V}_1 - Y_{32}\hat{V}_2^{(i+1)} \right\}$$

όπου: $P_2 = P_{G2} - P_{D2} = 1,5 - 0 = 1,5 \text{ αμ}$

$$P_3 = P_{G3} - P_{D3} = 0 - 2 = -2 \text{ αμ}$$

$$Q_3 = Q_{G3} - Q_{D3} = 0 - 1 = -1 \text{ αμ}$$

$$Q_2^{(i)} = -Im \left(Y_{21}\hat{V}_1\hat{V}_2^{*(i)} + Y_{22}\hat{V}_2^2 + Y_{23}\hat{V}_3\hat{V}_2^{*(i)} \right)$$

$$\text{Αρχικοποίηση: } \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Άσκηση 2 - Επίλυση με Gauss-Seidel (1^η επανάληψη)

$$\begin{aligned} Q_2^{(0)} &= -Im \left(Y_{21} \hat{V}_1 \hat{V}_2^{*(0)} + Y_{22} V_2^2 + Y_{23} \hat{V}_3 \hat{V}_2^{*(0)} \right) \\ &= -Im(j10 \cdot 1\angle 0 \cdot 1,02\angle 0 - j18,33 \cdot 1,02^2 + j8,33 \cdot 1\angle 0 \cdot 1,02\angle 0) = 0,374 \text{ αμ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_2^{(1)} &= \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2^{(0)}}{[\hat{V}_2^{(0)}]^*} - Y_{21} \hat{V}_1 - Y_{23} \hat{V}_3^{(0)} \right\} \\ &= \frac{1}{-j18,33} \left\{ \frac{1,5 - j0,374}{1,02\angle 0} - j10 \cdot 1\angle 0 - j8,33 \cdot 1\angle 0 \right\} = 1,023\angle 4,49^\circ \text{ αμ} \end{aligned}$$

$$\hat{V}_2^{(1)} = 1,02\angle 4,49^\circ \text{ αμ}$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_3^{(1)} &= \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{[\hat{V}_3^{(0)}]^*} - Y_{31} \hat{V}_1 - Y_{32} \hat{V}_2^{(1)} \right\} \\ &= \frac{1}{-j19,44} \left\{ \frac{-2 + j}{1\angle 0} - j11,11 \cdot 1\angle 0 - j8,33 \cdot 1,02\angle 4,49^\circ \right\} = 0,958\angle -4,11^\circ \text{ αμ} \end{aligned}$$



Άσκηση 2 - Επίλυση με Gauss-Seidel (2^η επανάληψη)

$$Q_2^{(1)} = -Im \left(Y_{21} \hat{V}_1 \hat{V}_2^{*(1)} + Y_{22} V_2^2 + Y_{23} \hat{V}_3 \hat{V}_2^{*(1)} \right) = 0,854 \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_2^{(2)} = \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2^{(1)}}{[\hat{V}_2^{(1)}]^*} - Y_{21} \hat{V}_1 - Y_{23} \hat{V}_3^{(1)} \right\} = 1,015 \angle 2,94^\circ \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_2^{(2)} = \mathbf{1,02} \angle 2,94^\circ \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_3^{(2)} = \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{[\hat{V}_3^{(1)}]^*} - Y_{31} \hat{V}_1 - Y_{32} \hat{V}_2^{(2)} \right\} = 0,95 \angle -4,89^\circ \text{ αμ}$$



Άσκηση 2 - Επίλυση με Gauss-Seidel (3^η επανάληψη)

$$Q_2^{(2)} = -Im \left(Y_{21} \hat{V}_1 \hat{V}_2^{*(2)} + Y_{22} V_2^2 + Y_{23} \hat{V}_3 \hat{V}_2^{*(2)} \right) = 0,887 \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_2^{(3)} = \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{P_2 - jQ_2^{(2)}}{[\hat{V}_2^{(2)}]^*} - Y_{21} \hat{V}_1 - Y_{23} \hat{V}_3^{(2)} \right\} = 1,02 \angle 2,57^\circ \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_2^{(3)} = 1,02 \angle 2,57^\circ \text{ αμ}$$

$$\hat{V}_3^{(3)} = \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{P_3 - jQ_3}{[\hat{V}_3^{(2)}]^*} - Y_{31} \hat{V}_1 - Y_{32} \hat{V}_2^{(3)} \right\} = 0,948 \angle -5,06^\circ \text{ αμ}$$



Άσκηση 2 – Ροές ισχύος

$$S_1 = Y_{11}^* V_1^2 + \hat{V}_1 (Y_{12}^* \hat{V}_2^* + Y_{13}^* \hat{V}_3^*) = 0,472 + j0,492 \text{ αμ} = P_1 + jQ_1$$

$$Q_2 = -Im \left(\begin{array}{l} j10 \cdot 1 \angle 0 \cdot 1,02 \angle -2,57 - j18,33 \cdot 1,02^2 \\ + j8,33 \cdot 0,948 \angle -4,89 \cdot 1,02 \angle -2,57 \end{array} \right) = 0,894 \text{ αμ}$$

ΑΠΩΛΕΙΕΣ

$$P_{Lkm} + jQ_{Lkm} = S_{km} + S_{mk} = P_{km} + P_{mk} + j(Q_{km} + Q_{mk})$$