

Θεωρία Συνόλων

Ασκήσεις

Χειμερινό Εξάμηνο 2024-2025

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



8ο Φυλλάδιο

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Υπενθύμιση. Με $[0, n)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $k \in \mathbb{N}$ με $k < n$. Υπενθυμίζεται ότι ένα σύνολο A είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, n)$. Αποδεικνύεται ότι το προηγούμενο $n \in \mathbb{N}$ είναι μοναδικό, βλ. το (iv) της Άσκησης 3 πιο κάτω.

Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A θέτουμε

$$\#A = \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ με } A =_c [0, n).$$

Άσκηση 1. Δείξτε τα εξής:

- (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \subseteq [0, n)$ το A είναι πεπερασμένο και $\#A \leq n$.
- (ii) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο B και κάθε $A \leq_c B$ το A είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#A \leq \#B$.

Λύση.

(i) Με επαγωγή στο n . Αν $n = 0$ τότε $A \subseteq [0, 0) = \emptyset$ και άρα $A = \emptyset = [0, 0)$. Συνεπώς το A είναι πεπερασμένο και $\#A = 0$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι κάθε $A \subseteq [0, n)$ είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#A \leq n$. Δείχνουμε ότι ισχύει το ίδιο για το S_n στη θέση του n .

Έστω $A \subseteq [0, S_n)$. Αφού $[0, S_n) = [0, n) \cup \{n\}$ (γνωστή άσκηση) έχουμε

$$A = (A \cap [0, n)) \cup (A \cap \{n\}).$$

Το σύνολο $A \cap [0, n)$ είναι υποσύνολο του $[0, n)$. Επομένως από την Επαγωγική Υπόθεση είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#(A \cap [0, n)) \leq n$. Θέτουμε $m = \#(A \cap [0, n)) \leq n$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f : [0, m) \rightarrow A \cap [0, n)$ που είναι ένα-προς-ένα και επί.

Αν $n \notin A$ τότε $A = A \cap [0, n)$, επομένως το A είναι πεπερασμένο και $\#A = \#(A \cap [0, n)) = m \leq n < S_n$.

Αν $n \in A$ τότε ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g : [0, S_m) = [0, m) \cup \{m\} \rightarrow A = (A \cap [0, n)) \cup \{n\} : g(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m), \\ n, & k = m. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια επεκτείνουμε την f στο σύνολο $[0, m) \cup \{m\}$ δίνοντας την τιμή n στο m . Είναι σαφές ότι η g είναι ένα-προς-ένα και επί. Άρα το A είναι πεπερασμένο και $\#A = m + 1 \leq n + 1 = S_n$.

(ii) Το ζητούμενο είναι άμεσο από το (i). Αν $A \leq_c B$ και $B =_c [0, n)$ τότε το A είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο C του $[0, n)$. Τότε το C είναι πεπερασμένο και $\#C \leq n$. Αφού το A είναι ισοπληθικό με το πεπερασμένο σύνολο C είναι άμεσο ότι το A είναι και αυτό πεπερασμένο. Επιπλέον $\#A = \#C \leq n = \#B$.

Άσκηση 2. Θεωρούμε δύο ξένα πεπερασμένα σύνολα A, B και $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$. Δείξτε με επαγωγή στο n ότι $[0, m + n) =_c A \cup B$.

Λύση.

Σταθεροποιούμε τα A , m και δείχνουμε ότι για κάθε B , n με $B =_c [0, n)$ και $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Για $n = 0$, αφού $B =_c [0, n)$ έχουμε $B = \emptyset$. Άρα $[0, m + n) = [0, m)$ και $A \cup B = A$. Αφού $A =_c [0, m)$ προκύπτει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, n)$ και $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A \cup B =_c [0, m + n)$.

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο B με $B =_c [0, Sn)$ και μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση

$$g : [0, Sn) = [0, n) \cup \{n\} \longrightarrow B.$$

Η ιδέα είναι να αφαιρέσουμε ένα στοιχείο από το B και να εφαρμόσουμε την Επαγωγική Υπόθεση.

Ορίζουμε $B' = g[[0, n)]$. Τότε $B' =_c [0, n)$ και άρα από την Επαγωγική Υπόθεση υπάρχει μια ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση

$$f : [0, m + n) \rightarrow A \cup B'.$$

Έχουμε $B = B' \cup \{g(n)\}$, $g(n) \notin B'$ (αφού η g είναι 1-1) και $g(n) \notin A$ (αφού τα A , B είναι ξένα). Επιπλέον

$$[0, m + Sn) = [0, S(m + n)) = [0, m + n) \cup \{m + n\}.$$

Ορίζουμε

$$h : [0, m + Sn) \longrightarrow A \cup B : h(k) = \begin{cases} f(k), & k \in [0, m + n), \\ g(n), & k = m + n. \end{cases}$$

Τότε η h είναι ένα-προς-ένα και επί. Επομένως $A \cup B =_c [0, m + Sn)$.

Άσκηση 3 (Ισοδύναμες Διατυπώσεις της Αρχής του Περιστερεώνα). Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (i) Η Αρχή του Περιστερεώνα: Αν το A είναι πεπερασμένο σύνολο και η συνάρτηση $f : A \rightarrow A$ είναι ένα-προς-ένα τότε $f[A] = A$.
- (ii) Για κάθε φυσικούς αριθμούς $m < n$ δεν υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : [0, n) \rightarrow [0, m)$.
- (iii) Για κάθε δύο πεπερασμένα σύνολα A , B και για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$, αν $m < n$ τότε $A <_c B$.
- (iv) Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A υπάρχει μοναδικό $n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, n)$.

Υπόδειξη. Μπορείτε να αποδείξετε τις ισοδυναμίες κυκλικά (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Στην τελευταία κατεύθυνση θεωρήστε τα ξένα σύνολα $f[A]$ και $A \setminus f[A]$ και εφαρμόστε την Άσκηση 2.

Λύση.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $m < n$ και $f : [0, n) \rightarrow [0, m)$. Τότε $[0, m) \subseteq [0, n)$ και άρα $f : [0, n) \rightarrow [0, n)$. Αν η f ήταν ένα-προς-ένα από την Αρχή του Περιστερεώνα για $A = [0, n)$ η f θα ήταν και επί. Άρα για το $m \in [0, n)$ θα υπήρχε $k \in [0, n)$ με $f(k) = m$. Αλλά τότε θα είχαμε $f(k) = m \notin [0, m)$ που είναι άτοπο αφού $f : [0, n) \rightarrow [0, m)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έχουμε $A =_c [0, m)$ και $B =_c [0, n)$. Υποθέτουμε ότι $m < n$. Επομένως

$$A =_c [0, m) \leq_c [0, n) =_c B$$

και άρα $A \leq_c B$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $A =_c B$. Τότε

$$[0, m) =_c A =_c B =_c [0, n)$$

και ειδικότερα θα υπήρχε μια ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : [0, n) \rightarrow [0, m)$ που αντιτίθεται στην υπόθεση. Άρα $A \neq_c B$ και $A <_c B$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Θεωρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m) =_c [0, n)$. Αν τα m, n ήταν διαφορετικά, εφόσον η διάταξη $\leq$ είναι γραμμική ο ένας φυσικός θα ήταν μικρότερος από τον άλλο. Ας πούμε $m < n$.

Τότε από το (iii) εφαρμοσμένο στα σύνολα $A' = [0, m) =_c [0, m)$ και $B' = [0, n) =_c [0, n)$ προκύπτει $[0, m) <_c [0, n)$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε $[0, m) =_c A =_c [0, n)$.

(iv) $\implies$ (i) Έστω A πεπερασμένο σύνολο, και $f : A \rightarrow A$ ένα-προς-ένα συνάρτηση. Αφού το A είναι πεπερασμένο υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $A =_c [0, m)$. Προφανώς $f[A] =_c A =_c [0, m)$.

Από την Άσκηση 1 - (ii) το σύνολο $A \setminus f[A] \subseteq A$ είναι επίσης πεπερασμένο. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$A \setminus f[A] =_c [0, n).$$

Εφαρμόζουμε την Άσκηση 2 στα ξένα σύνολα $f[A]$ και $A \setminus f[A]$ και έχουμε ότι

$$[0, m+n) =_c f[A] \cup (A \setminus f[A]) = A,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $f[A] \subseteq A$.

Επομένως έχουμε $A =_c [0, m+n)$ και $A =_c [0, m)$. Από την υπόθεση (iv) προκύπτει $m = m+n$ και άρα $n = 0$. Αυτό σημαίνει ότι $A \setminus f[A] = \emptyset$ και εφόσον $f[A] \subseteq A$ έχουμε $f[A] = A$.

Άσκηση 4. Δείξτε ότι η ένωση δύο πεπερασμένων συνόλων A και B είναι πεπερασμένο σύνολο και πως

$$\#(A \cup B) \leq \#A + \#B.$$

Λύση.

Αν τα A, B είναι ξένα πεπερασμένα σύνολα, αφού $A = [0, \#A)$ και $B = [0, \#B)$ έχουμε από την Άσκηση 2 ότι $A \cup B =_c [0, \#A + \#B)$. Επομένως το $A \cup B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.

Αν τα A, B είναι τυχαία σύνολα (δηλαδή όχι απαραίτητα ξένα) τότε

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \leq_c (\{\emptyset\} \times A) \bigcup (\{\{\emptyset\}\} \times B) = A \uplus B.$$

Είναι προφανές ότι $\{\emptyset\} \times A =_c A =_c [0, \#A)$ και επομένως $\#(\{\emptyset\} \times A) = \#A$. Ομοίως $\#(\{\{\emptyset\}\} \times B) = \#B$.

Αφού τα σύνολα $\{\emptyset\} \times A$ και $\{\{\emptyset\}\} \times B$ είναι ξένα έχουμε από πιο πάνω ότι η ξένη ένωση $A \uplus B$ είναι πεπερασμένο σύνολο και

$$\#(A \uplus B) = \#A + \#B.$$

Επιπλέον αφού $A \cup B \leq_c A \uplus B$ προκύπτει από την Άσκηση 1 ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι πεπερασμένο και ότι

$$\#(A \cup B) \leq \#(A \uplus B) = \#A + \#B.$$