

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ -ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
20/06/2025
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 Ω

ΘΕΜΑ 1: (1,5 μ.) Έστω $U \subseteq \mathbb{C}$ πεδίο και $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση, τέτοια ώστε οι $f^3, \overline{f}^2$ να είναι ολόμορφες. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 2: (1 μ.) Να υπολογίσετε το $\max_{|z| \leq 1} |z^2 + 3z - 1|$, καθώς και τα σημεία στα οποία το παραπάνω μέγιστο λαμβάνεται.

ΘΕΜΑ 3: (2 μ.) Να αναπτύξετε σε σειρά Laurent γύρω από το σημείο $z_0 = 1$ τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \sin\left(\frac{z}{z-1}\right),$$

στον ανοικτό δακτύλιο $1 < |z - 1| < \rho$, όπου $\rho > 1$.

ΘΕΜΑ 4: (4 μ.) Εάν $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, να δείξετε ότι

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^2(1 - \cos z)} dz = -\frac{\pi i}{3} \quad (1,5 \mu.), \quad \int_{\gamma} \cos z e^{1/z} dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!} \quad (0,5 \mu.),$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad (a > b > 0) \quad (1 \mu.), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx = \pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (1 \mu.).$$

$$[\text{ Δίνεται ότι } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1 .]$$

ΘΕΜΑ 5: (1,5 μ.) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη τέτοια ώστε

$$|f(z)| \leq \ln(1 + |z|), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Να δείξετε ότι $f'(z_0) = 0$, για τυχαίο $z_0 \in \mathbb{C}$.]

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ.

ΘΕΜΑ 1: Έχουμε

$$f^6 = (f^3)^2 \in \mathcal{H}(U), \quad \overline{f^6} = (\overline{f^3})^2 \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow f^6 = \text{σταθερή} = c$$

$$\Rightarrow |f|^6 = |f^6| = |c| \Rightarrow |f| = |c|^{1/6} = \text{σταθερή}.$$

Έπεται ότι $|f^3| = |f|^3 = \text{σταθερή}$, $|\overline{f^3}| = |f|^3 = \text{σταθερή}$ κι επειδή $f^3, \overline{f^3} \in \mathcal{H}(U)$, παίρνουμε ότι $f^3 = \text{σταθερή} = c_1$, $\overline{f^3} = \text{σταθερή} \Rightarrow f^2 = \overline{f^2} = \text{σταθερή} = c_2$.

- Εάν $c_2 = 0$, τότε $f(z) = 0$, $\forall z \in U$ και άρα $f = \text{σταθερή}$.
- Εάν $c_2 \neq 0$, έχουμε

$$c_2 f(z) = f(z)^3 = c_1^3 \Rightarrow f(z) = c_1^3 / c_2, \quad \forall z \in U$$

και άρα $f = \text{σταθερή}$.

ΘΕΜΑ 2: Από την Αρχή Μεγίστου προκύπτει ότι

$$\max_{|z| \leq 1} |z^2 + 3z - 1| = \max_{|z|=1} |z^2 + 3z - 1|.$$

Για $|z| = 1$, έχουμε $z = e^{i\varphi}$ για κάποιο $\varphi \in (-\pi, \pi]$ και $\bar{z} = 1/z$ κι επιπλέον

$$\begin{aligned} |z^2 + 3z - 1| &= \left| z \left(z + 3 - \frac{1}{z} \right) \right| = |z + 3 - \bar{z}| = |3 + 2i \operatorname{Im} z| = |3 + 2i \sin \varphi| \\ &= \sqrt{9 + 4 \sin^2 \varphi} \leq \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία ισχύει όταν $\sin^2 \varphi = 1$, δηλ. για $\varphi = \pm \pi/2$ ή για $z = \pm i$.

Άρα, $\max_{|z| \leq 1} |z^2 + 3z - 1| = \sqrt{13}$ και το μέγιστο λαμβάνεται για $z = \pm i$.

ΘΕΜΑ 3:

- Ανάπτυγμα για την $\frac{1}{z^2}$: Θέτουμε $w = \frac{1}{z-1}$ κι έχουμε

$$\begin{aligned} |w| < 1, \quad z = 1 + \frac{1}{w} = \frac{1+w}{w} \Rightarrow \frac{1}{z^2} &= w^2 \cdot \frac{1}{(1+w)^2} = -w^2 \left(\frac{1}{1+w} \right)' = \\ &= -w^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \right]' = -w^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} w^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{(z-1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

- Ανάπτυγμα για την $\sin \left(\frac{z}{z-1} \right)$: Θέτουμε $w = z-1$ κι έχουμε

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{z}{z-1} \right) &= \sin \left(\frac{1+w}{w} \right) = \sin \left(1 + \frac{1}{w} \right) = \sin 1 \cos \left(\frac{1}{w} \right) + \cos 1 \sin \left(\frac{1}{w} \right) \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{w} \right)^{2n} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{w} \right)^{2n+1} \\ &= \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4:

- Θέτουμε $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(1 - \cos z)}$. Ανώμαλα σημεία της $f : 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Από αυτά, μόνο το 0 περιέχεται στο εσωτερικό της γ κι επομένως $\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$.

Έχουμε

$$\sin z = zA(z), \quad A(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$z^2(1 - \cos z) = z^4B(z), \quad \text{όπου} \quad B(z) = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Προφανώς A, B ολόμορφες στο $\mathbb{C}$ (ως δυναμοσειρές που συγκλίνουν για κάθε $z \in \mathbb{C}$) και

$$A(0) = 1, \quad A'(0) = 0, \quad \frac{A''(0)}{2!} = -\frac{1}{3!} \Rightarrow A''(0) = -\frac{1}{3},$$

$$B(0) = \frac{1}{2!}, \quad B'(0) = 0, \quad \frac{B''(0)}{2!} = -\frac{1}{4!} \Rightarrow B''(0) = -\frac{1}{12}.$$

Επειδή $B(0) \neq 0$, υπάρχει ανοικτός δίσκος D κέντρου 0 ώστε η A/B να είναι ολόμορφη στον D και

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{A(z)}{B(z)}, \quad \forall z \in D \setminus \{0\}.$$

Έπεται ότι το 0 είναι πόλος της f τάξης 3 και

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} [z^3 f(z)]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{A(z)}{B(z)} \right]''.$$

Αλλά, $\forall z \in D$,

$$\left[\frac{A(z)}{B(z)} \right]' = \frac{\varphi(z)}{B(z)^2}, \quad \varphi(z) = A'(z)B(z) - A(z)B'(z), \quad \varphi'(z) = A''(z)B(z) - A(z)B''(z),$$

$$\varphi'(0) = A''(0)B(0) - A(0)B''(0) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = -\frac{1}{12},$$

$$\left[\frac{A(z)}{B(z)} \right]'' = \frac{\varphi'(z)B(z)^2 - 2\varphi(z)B(z)B'(z)}{B(z)^4},$$

οπότε

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{\frac{1}{2} \varphi'(0)B(0)^2 - 2\varphi(0)B(0)B'(0)}{B(0)^4} = \frac{\frac{1}{2} \varphi'(0)}{2B(0)^2} = \frac{1}{2} \frac{-1/12}{1/4} = -\frac{1}{6}.$$

Άρα, το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται

$$-2\pi i \frac{1}{6} = -\frac{\pi i}{3}.$$

- Θέτουμε $g(z) = \cos z \cdot e^{1/z}$. Ανώμαλο σημείο της $g : 0 \in \text{int}\gamma^*$. Επομένως $\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \text{Res}(g, 0)$.

Για $|z| > 0$, έχουμε

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{k!} z^{2n-k}.$$

Για $2n - k = -1$, $n \geq 0$ παίρνουμε $k = 2n + 1$ οπότε ο συντελεστής του $1/z$ στο παραπάνω ανάπτυγμα ισούται με

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}.$$

$$\text{Συνεπώς, } \int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}.$$

- Εάν $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, έχουμε

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{a + b \frac{z^2 + 1}{2z}} = \frac{2}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}.$$

Ρίζες του $bz^2 + 2az + b$:

$$\rho_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad \rho_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

ή

$$\rho_1 = -c + \sqrt{c^2 - 1}, \quad \rho_2 = -c - \sqrt{c^2 - 1}, \quad c = a/b > 1.$$

Έχουμε

$$|\rho_1| = \frac{1}{|\rho_2|} = \frac{1}{c + \sqrt{c^2 - 1}} < 1 \Rightarrow |\rho_1| < 1 < |\rho_2|$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b} = 2\pi i \text{Res}(f(z), \rho_1), \quad f(z) = \frac{1}{bz^2 + 2az + b} = \frac{1}{b(z - \rho_1)(z - \rho_2)}.$$

Αλλά

$$\text{Res}(f(z), \rho_1) = \lim_{z \rightarrow \rho_1} (z - \rho_1) f(z) = \frac{1}{b(\rho_1 - \rho_2)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}},$$

οπότε

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b} = 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{2}{i} \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

- Το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\operatorname{Im} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx \right], \quad h(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{z^4 + 1}.$$

Θέτουμε $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$. Τότε, $a^4 = -1$ κι επομένως, οι ρίζες του πολυωνύμου $z^4 + 1$ είναι οι $\pm a, \pm \bar{a}$.

Από αυτές, μόνο οι $a, -\bar{a}$, έχουν θετικό φανταστικό μέρος.

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = 2\pi i [Res(h, a) + Res(h, -\bar{a})].$$

$\forall \rho \in \{a, -\bar{a}\}$, έχουμε

$$Res(h, \rho) = \frac{z^3 e^{iz}}{4z^3} \Big|_{z=\rho} = \frac{e^{i\rho}}{4}.$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = \frac{2\pi i}{4} (e^{ia} + e^{-i\bar{a}}) = \pi i \operatorname{Re}(e^{ia}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx = \pi \operatorname{Re}(e^{ia}).$$

Αλλά,

$$e^{ia} = \exp\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = e^{-1/\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 1} dx = \pi e^{-1/\sqrt{2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

ΘΕΜΑ 5: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$.

Επιλέγουμε $R > 0$ και θεωρούμε τον κύκλο $\gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Εφαρμόζοντας τον Ο.Τ. του Cauchy για παραγώγους έχουμε

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Για κάθε $z \in \gamma^*$, $|z| \leq |z - z_0| + |z_0| = R + |z_0|$ και

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \right| = \frac{|f(z)|}{R^2} \leq \frac{\ln(1 + |z|)}{R^2} \leq \frac{\ln(1 + |z_0| + R)}{R^2}.$$

Η $M - L$ ανισότητα σε συνδυασμό με την τελευταία ανισότητα δίνει

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{\ln(1 + |z_0| + R)}{R^2} = \frac{\ln(1 + |z_0| + R)}{R}.$$

Επειδή

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + |z_0| + R)}{R} = 0,$$

έπεται ότι $f'(z_0) = 0$.

Άρα, $f' = 0$ στο $\mathbb{C}$ και συνεπώς, f σταθερή.