1ο Κεφάλαιο – Πραγματικοί αριθμοί.

Σύνολα – συμβολισμοί:

$A = \{ x : \text{μια ιδιότητα του } x \}$

ή $A = \{ x \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$

ή $A = \{ x \in B \mid \text{μια ιδιότητα του } x \}$

Αυτό σημαίνει ότι το A είναι το σύνολο όλων των x (ή όλων των x που ανήκουν στο B) που έχουν αυτή την ιδιότητα.

Επίσης γράφουμε $A = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \}$

Αυτό σημαίνει ότι το A αποτελείται από τα αντικείμενα $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

$\emptyset$ = το κενό σύνολο $\rightsquigarrow$ δεν περιέχει στοιχεία.

$A \subseteq B \rightarrow$ το A είναι υποσύνολο του B δηλαδή κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B

Ισχύει ότι $A = B \iff A \subseteq B$ και $B \subseteq A$

Δηλαδή δύο σύνολα είναι ίσα αν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Ισχύει $\emptyset \subseteq B$ για κάθε σύνολο B.

Παραδείγματα:

1) $A = \{4, 5, \frac{3}{7}\}$

$B = \{0, -1, 4, 8, 5, \frac{3}{7}\}$

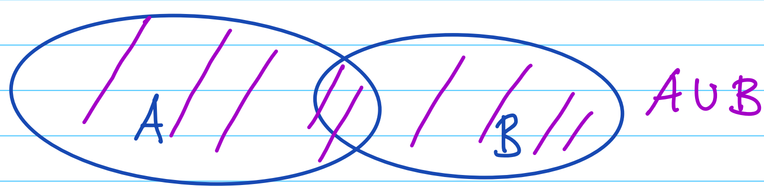
Άρα $A \subseteq B$

2) $A = \{5, \frac{1}{2}\}$ $\quad B = \{5, 8, 9\}$

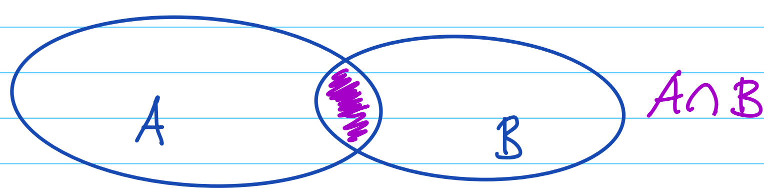
$A \not\subseteq B$ (το A δεν είναι υποσύνολο του B)

Πράξεις με σύνολα:

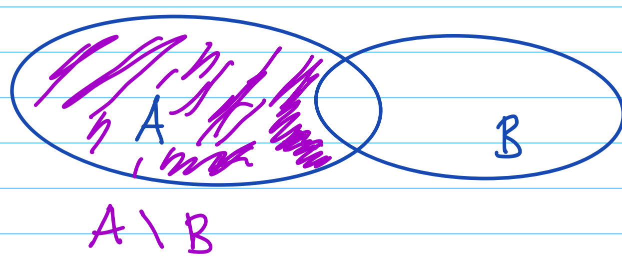
Ένωση: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$



Τομή: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$



Διαφορά: $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$



Μαθηματικά σύμβολα:

$\Rightarrow$ σημαίνει συνεπάγεται

$\Leftrightarrow$ σημαίνει ισοδυναμία

$\forall$ σημαίνει για κάθε

$\exists$ σημαίνει υπάρχει

Το "τέτοιο ώστε" συμβολίζεται με : .

Παραδείγματα:

1) $A = \{0, -1, 8\}$

$B = \{1, 0, 8, 6\}$

$A \cup B = \{0, 1, -1, 8, 6\}$

$A \cap B = \{0, 8\}$

$A \setminus B = \{-1\}$ $\quad B \setminus A = \{1, 6\}$

2) $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \subseteq B$ $\quad A \cup B = B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cap B = A = \{1, 2, 3\}$

$A \setminus B = \emptyset$ $\quad B \setminus A = \{4\}$

Φυσικοί Αριθμοί:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots \}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Ακέραιοι αριθμοί:

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$

Ρητοί αριθμοί:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \neq 0 \right\}$

Παραδείγματα ρητών:

$\frac{1}{2}, \quad -\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad 0 = \frac{0}{1}$

$\frac{23}{10} = 2,3$, όλοι οι δεκαδικοί αριθμοί (με πεπερασμένο πλήθος ψηφίων)

$\frac{1}{3} = 0,3333\dots \qquad k = \frac{k}{1}$

όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί αριθμοί

όλοι οι φυσικοί είναι ρητοί αριθμοί.

όλοι οι φυσικοί είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ισχύει δηλαδή $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

Οι πραγματικοί αριθμοί

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ και πάνω σε αυτό ορίζονται δύο πράξεις:
a) η πρόσθεση $+$
b) ο πολλαπλασιασμός $\cdot$

έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι γνωστές ιδιότητες,
π.χ. η προσεταιριστική ιδιότητα
η επιμεριστική ιδιότητα
η ύπαρξη αντίθετου στοιχείου κ.τ.λ.

Επιπλέον έχουμε και μια σχέση διάταξης $\leq$ με τις συνηθισμένες ιδιότητες:
π.χ. • για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει
$a \leq b$ ή $b \leq a$

• για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$
αν $a \leq b$ και αν $b \leq c$ τότε $a \leq c$

• για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$
αν $a < b$ και αν $0 < c$
τότε $a \cdot c < b \cdot c$.

Επίσης το σύνολο των ρητών αριθμών περιέχεται στο $\mathbb{R}$, επομένως

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

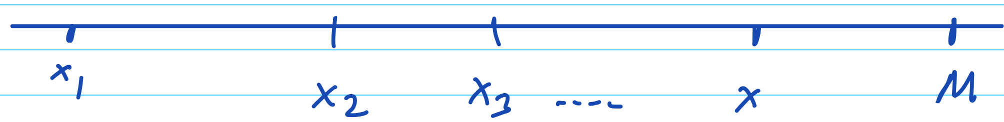
Τέλος στο $\mathbb{R}$ έχουμε την ιδιότητα της "<u>ακολουθιακής πληρότητας</u>" (ανεπίσημη διατύπωση):

Αν επιλέξουμε πραγματικούς αριθμούς $x_1, x_2, x_3, \ldots$ με $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ και αν έχουμε $x_1 < M$, $x_2 < M$, $x_3 < M, \ldots$ όπου $M \in \mathbb{R}$

τότε οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 "προσεγγίζουν" κάποιον αριθμό $x \in \mathbb{R}$.

(Αναγκαστικά θα ισχύει $x \leq M$)

<u>Σχήμα:</u>



<u>Παράδειγμα:</u>

$x_1 = 1$

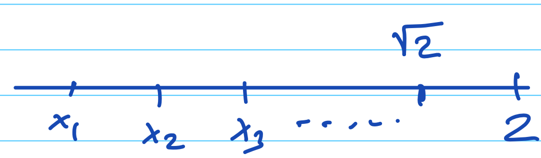
$x_2 = 1,4$

$x_3 = 1,41$

$x_4 = 1,414$

$x_5 = 1,4142$

$x_6 = 1,41421$



(η ακολουθία που προκύπτει από το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\sqrt{2}$)

Μερικά βασικά θεωρήματα:

Θεώρημα: (Η Αρχιμήδεια ιδιότητα του $\mathbb{R}$)

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $x < n$.

π.χ. $8956{,}12358 = x$

$8957 = n$.

- Η Αρχή του Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$:

Ορισμός: Δίνεται ένα $A \subseteq \mathbb{R}$.

Ένα $a \in \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>ελάχιστο του A</u> συμβολικά $a = \min A$ αν ισχύουν τα εξής:

a) $a \leq x$ για κάθε $x \in A$

β) $a \in A$.

Όμοια ορίζεται η έννοια του <u>μέγιστου του A</u>, συμβολικά $a = \max A$.

Τα $\min A$ και $\max A$ μπορεί να μην υπάρχουν πάντα.

Παραδείγματα:

1) $A = \{ \frac{1}{2}, 2, 3 \}$

$\min A = \frac{1}{2}$ $\qquad \max A = 3$

2) $A = \{2022\}$

$\min A = 2022 = \max A$

3) $A = [0, 2]$

$\max A = 2$

Δεν υπάρχει το $\min A$.

Γιατί για κάθε $a \in A$ έχουμε $\frac{a}{2} \in A$ και $\frac{a}{2} < a$.

4) $A = \mathbb{N}$ $\min A = 0$

Δεν υπάρχει το $\max A$.

Γιατί αν $a \in A$ ισχύει $a+1 \in A$ και $a < a+1$.

<u>Θεώρημα:</u> (Αρχή Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$)

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο.

<u>Π.χ.</u> 1) $A = [1, 50] \cap \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$

$\min A = 2$

2) $A = \{2k+9 \mid k \in \mathbb{N}\}$

$= \{9, 11, 13, \ldots\}$

$\min A = 9$ δεν υπάρχει το $\max A$.

Θεώρημα: (Αρχή Επαγωγής)

Θεωρούμε ότι έχουμε μια ιδιότητα P που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:
α) Το 0 έχει την ιδιότητα P.
β) Αν κάποιο $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα P.

Τότε κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P.

Σχόλιο: Τα τρία προηγούμενα Θεωρήματα

αποδεικνύονται με βάση τις ιδιότητες που έχουμε δεχθεί για το $\mathbb{R}$.

Η Αρχή της Επαγωγής και η Αρχή του Ελαχίστου στο $\mathbb{N}$ είναι ισοδύναμες προτάσεις.

Παραδείγματα:

1) Δείξτε ότι $n < 2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Με επαγωγή. (Εδώ "το $n \in \mathbb{N}$ έχει την ιδιότητα P" σημαίνει ότι $n < 2^n$)

Για $n = 0$ $2^0 = 1$, άρα $0 < 2^0$

Υποθέτουμε ότι κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ικανοποιεί $n < 2^n$.

Δείχνουμε ότι $n+1 < 2^{n+1}$. Υπόθεση

Έχουμε
$$\begin{aligned} n+1 &< 2^n + 1 && (n < 2^n) \\ &\leq 2^n + 2^n && (1 \leq 2^n) \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Άρα $n+1 < 2^{n+1}$.

Από Αρχή Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Ορολογία:

- Το βήμα όπου δείχνουμε πως το 0 έχει την ιδιότητα P ονομάζεται <u>βάση της επαγωγής</u>.
- Η μετάβαση από το n στο $n+1$ ονομάζεται <u>επαγωγικό βήμα</u>.
- Η υπόθεση ότι το n έχει την ιδιότητα P ονομάζεται <u>επαγωγική υπόθεση</u>.

Παραδείγματα (Συνέχεια)

2) Δείξτε ότι ο αριθμός $4^{n+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βάση της επαγωγής:

$n = 0$ $\quad 4^{n+1} - 1 = 4^{0+1} - 1 = 4 - 1 = 3$ ✓

Επαγωγικό Βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι ο αριθμός $4^{n+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

(Επαγωγική Υπόθεση)
Ε.Υ.

Πρέπει να δείξουμε ότι ο αριθμός $4^{(n+1)+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

Έχουμε $4^{(n+1)+1} - 1 = 4^{n+2} - 1$

$$= 4 \cdot 4^{n+1} - 1$$

Από Ε.Υ. έχουμε $4^{n+1} - 1 = 3k$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.
$4^{n+1} = 3k+1$

Άρα $4 \cdot 4^{n+1} - 1 = 4 \cdot (3k+1) - 1$

$$= 12k + 4 - 1$$
$$= 12k + 3$$
$$= 3 \cdot (4k+1)$$
$$= 3 \cdot k' \quad \text{όπου } k' = 4k+1 \in \mathbb{N}$$

Επομένως ο $4^{(n+1)+1} - 1$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 3.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

<u>Σχόλιο:</u> Πολλές φορές η βάση της επαγωγής ξεκινάει από το 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ. αντί από το 0.
Τότε στην Επαγωγική Υπόθεση θεωρούμε ότι το n είναι αντίστοιχα $\geq$ 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ.
Το συμπέρασμα είναι ότι η ιδιότητα P ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ που είναι ≥ 1 ή 2 ή 3 κ.ο.κ. αντίστοιχα

Με άλλα λόγια έχουμε το εξής:

Αρχή Επαγωγής (Παραλλαγή)

Θεωρούμε έναν φυσικό αριθμό n_0 και P μια ιδιότητα που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα εξής:

α) Το n_0 έχει την ιδιότητα P.

β) Αν κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ έχει την ιδιότητα P τότε και το $n+1$ έχει την ιδιότητα P.

Τότε κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$ έχει την ιδιότητα P.

<u>Παράδειγμα:</u> n το πλήθος προσθεταίων

Δείξτε ότι $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Το δείχνουμε με επαγωγή.

<u>Βάση:</u> $n = 2$

Άθροισμα $= 1 + 2 = 3$

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot (2+1)}{2} = 3 \quad \checkmark$$

<u>Επαγωγικό Βήμα:</u>

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 2$ ισχύει $1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Ε.Υ.)

Δείχνουμε ότι:

$$1 + \ldots + n + n+1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Έχουμε $1 + \ldots \overset{n}{+} n+1$

$$= (1 + \ldots + n) + n + 1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \quad \text{(Ε.Υ.)}$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Επομένως ισχύει το ζητούμενο
για κάθε $n \geq 2$.

Η ανισότητα Bernoulli:

Για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 1$
και για κάθε $a > -1$ ισχύει

$$\boxed{(1+a)^n \geq 1+na}$$

Απόδειξη:

Για $n=1$: $(1+a)^n = (1+a)^1 = 1+a$

$1+n \cdot a = 1+1 \cdot a = 1+a$

$1+a \geq 1+a$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$
ισχύει $(1+a)^n \geq 1+na$.

Δείχνουμε $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1) \cdot a$.

Έχουμε $(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n$

$\geq (1+a) \cdot (1+na)$

Χρησιμοποιήσαμε την Ε.Υ. και ότι $a > -1$ άρα $1+a > 0$.

$$(1+a)(1+na) = 1 + na + a + na^2$$
$$= 1 + (n+1)a + na^2$$
$$\geq 1 + (n+1)a.$$

Άρα $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$.

Από την Αρχή της Επαγωγής έχουμε το ζητούμενο.

Το διώνυμο του Νεύτωνα

Αν $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$ ορίζουμε

$$n! = \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot n}_{\text{αυξάνουμε κατά } 1}$$

Επίσης ορίζουμε $0! = 1$

Το $n!$ διαβάζεται "νι παραγοντικό".

Παραδείγματα:

$1! = 1$ $\quad$ $2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $\quad$ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$5! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}_{4!} \cdot 5 = 4! \cdot 5 = 24 \cdot 5$$
$$= 120$$

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Τέλος ορίζουμε

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}} \qquad 0 \le k \le n \qquad k, n \in \mathbb{N}$$

Το $\binom{n}{k}$ διαβάζεται «νι ανά κάππα».

Παραδείγματα:

1) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}$

$= \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 2 \cdot 5 = 10$

Πιο απλά: $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 4 \cdot 5}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

2) $\binom{17}{1} = \frac{17!}{1! \cdot 16!} = \frac{\cancel{16!} \cdot 17}{1 \cdot \cancel{16!}} = 17$

3) $\binom{17}{0} = \frac{\cancel{17!}}{0! \cdot \cancel{17!}} = \frac{1}{0!} = 1$

4) $\binom{17}{17} = \frac{\cancel{17!}}{\cancel{17!} \cdot (17-17)!} = \frac{1}{0!} = 1$

Γενικά ισχύει $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

και $\binom{n}{1} = n$.

<u>Θεώρημα:</u> (Διώνυμο Νεύτωνα)

Για κάθε φυσικό $n \geq 1$ και κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a, b \neq 0$ ισχύει

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n}$$

Ισοδύναμη διατύπωση του πιο πάνω τύπου:

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{n} a^n b^0}$$

Παραδείγματα:

$n=2$:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 \cdot b^2$$

$$= 1 \cdot a^2 \cdot 1 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$n=3$:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 +$$

$$+ \binom{3}{2} a^1 \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 \cdot b^0 + 3a^2 b + 3ab^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^3$$

$$= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Εφαρμογές

1) Για $a = b = 1$ τότε για κάθε $n \geq 1$ έχουμε:

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 2^n$$

$$a^k \cdot b^{n-k} = 1^k \cdot 1^{n-k} = 1$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots n$.

Άρα $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

2) Βρείτε ποιος αριθμός είναι ο

$$A = \binom{45}{0} - \binom{45}{1} + \binom{45}{2} - \dots - \binom{45}{45}$$

Λύση:

$$A = \binom{45}{0} 1^{45} \cdot (-1)^0 + \binom{45}{1} 1^{44} \cdot (-1)^1$$

$$+ \binom{45}{2} \cdot 1^{43} \cdot (-1)^2 + \dots + \binom{45}{45} 1^0 \cdot (-1)^{45}$$

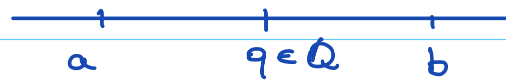
$$= (1 + (-1))^{45}$$

(Διώνυμο Νεύτωνα $a = 1$, $b = -1$, $n = 45$)

$$= 0^{45} = 0.$$

Θεώρημα: (Πυκνότητα ρητών αριθμών)

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $a < q < b$.



Π.χ. $\sqrt{2} \simeq 1,41$ $\quad q = 1,5$

$\sqrt{3} \simeq 1,73$

Πόρισμα: Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ με $a < x < b$.

(Πυκνότητα άρρητων)

Απόδειξη:

Θεωρούμε $a<b$. Τότε $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Από την πυκνότητα των ρητών υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $\dfrac{a}{\sqrt{2}} < q < \dfrac{b}{\sqrt{2}}$.

Επίσης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q \neq 0$.

Άρα $a < \underbrace{\sqrt{2}\cdot q}_{x} < b$. $\quad x = \sqrt{2}\, q$.

Ο $x \in (a,b)$ είναι άρρητος, γιατί αλλιώς θα είχαμε $x \in \mathbb{Q}$, άρα $\dfrac{1}{q}\cdot x \in \mathbb{Q}$

άρα $\dfrac{1}{\cancel{q}}\cdot \sqrt{2}\cdot \cancel{q} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ άτοπο.

Ο συμβολισμός Σ:

Δίνονται $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ όπου $n \geq 1$.

Το άθροισμα $a_0 + \cdots + a_n$ συμβολίζεται με

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{ή} \quad \sum_{j=0}^{n} a_j \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Δηλαδή

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \cdots + a_n}$$

Μπορεί επίσης να έχουμε $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Αυτό σημαίνει το άθροισμα $a_1 + \cdots + a_n$.

Άλλο παράδειγμα: $\sum_{k=2}^{n-1} a_k = a_2 + \cdots + a_{n-1}$
$(n \geq 3)$

Προσοχή: $\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$

ή $\sum_{k=17}^{17} a_k = a_{17}$

Άλλο παράδειγμα:

$$\sum_{k=0}^{5} (1+x)^k = (1+x)^0 + (1+x)^1 + \cdots + (1+x)^5$$

$$= 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^5$$

Προσοχή: Το $\sum_{k=0}^{n} a_k$ γράφεται

επίσης $\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1}$ γιατί:

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} = a_{1-1} + a_{2-1} + \dots + a_{n+1-1}$$
$$= a_0 + a_1 + \dots + a_n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

Ιδιότητες:

1) $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

γιατί

$$a_0 + \dots + a_n + b_0 + \dots + b_n = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)$$

2) $\lambda \cdot \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda \cdot a_k$

γιατί

$$\lambda \cdot (a_0 + \dots + a_n) = \lambda a_0 + \dots + \lambda a_n$$

όπου $\lambda, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Ο τύπος στο Διώνυμο του Νεύτωνα γράφεται και ως εξής:

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k}$$

2º Κεφάλαιο

Συναρτήσεις — Πολυώνυμα Taylor

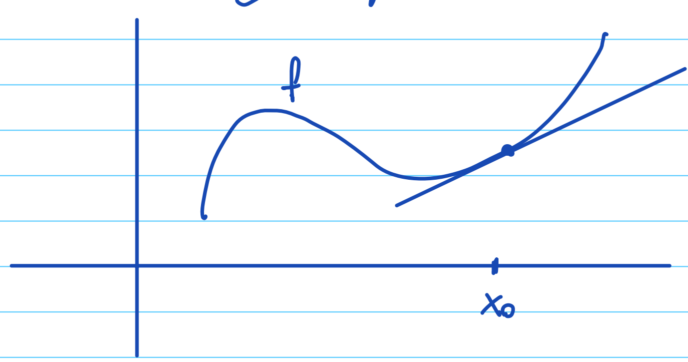
— Να δω την παρουσίαση πάνω στις συναρτήσεις.

Πολυώνυμα Taylor

Υποθέτουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και παίρνουμε $x_0 \in (a, b)$.

Στόχος: να προσεγγίσουμε τις τιμές $f(x)$ για τα x "κοντά" στο x_0.

Αυτή η προσέγγιση θα γίνει με τη βοήθεια πολυωνύμων.



1) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 1.
Μια καλή προσέγγιση είναι να πάρουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Παίρνουμε $p(x) = \underbrace{a + b \cdot (x - x_0)}_{\text{εξίσωση ευθείας}}$
$a, b = ;;$

κλίση = b

Θέλουμε:

(1.1) $p(x_0) = f(x_0)$

(1.2) $p'(x_0) = f'(x_0)$ (δηλαδή η κλίση της ευθείας, που είναι το $b = p'(x_0)$ να είναι ίση με $f'(x_0)$)

$$p(x_0) = a + b\cdot\cancel{(x_0 - x_0)}$$
$$= a$$

Από (1.1) έχουμε $a = f(x_0)$.

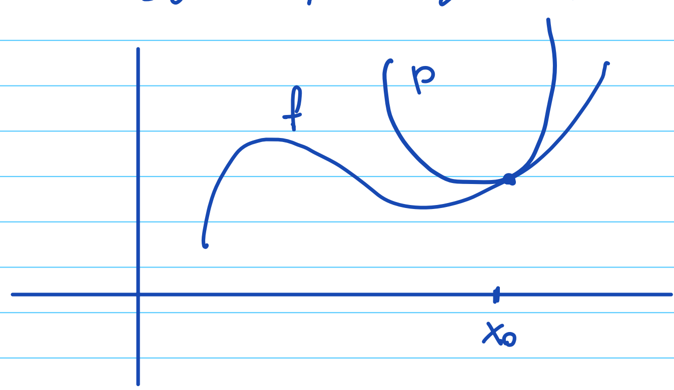
Επιπλέον $p'(x) = 0 + b \cdot 1 = b$

άρα $p'(x_0) = b$

Από (1.2) έχουμε $b = f'(x_0)$

Καταλήγουμε ότι $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 2.



Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2$$

Θέλουμε:

$$p(x_0) = f(x_0) \quad (2.1)$$

$$p'(x_0) = f'(x_0) \quad (2.2)$$

$$p''(x_0) = f''(x_0) \quad (2.3)$$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0)$$

$$p''(x) = 2c$$

$(2.1) \Rightarrow f(x_0) = p(x_0) = a$

$(2.2) \Rightarrow f'(x_0) = p'(x_0) = b + 2c \cdot 0 = b$

$(2.3) \Rightarrow f''(x_0) = p''(x_0) = 2c$

Άρα $a = f(x_0)$, $b = f'(x_0)$, $c = \dfrac{f''(x_0)}{2}$

και $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$.

3) Προσέγγιση με πολυώνυμο βαθμού ≤ 3

Παίρνουμε

$$p(x) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3$$

Θέλουμε: $p(x_0) = f(x_0)$
$p'(x_0) = f'(x_0)$
$p''(x_0) = f''(x_0)$
$p^{(3)}(x_0) = f^{(3)}(x_0)$

$$p'(x) = b + 2c(x-x_0) + 3d(x-x_0)^2$$

$$p''(x) = 2c + 3\cdot 2\cdot d(x-x_0)$$

$$p^{(3)}(x) = 3\cdot 2\cdot d$$

Τελικά βρίσκουμε

$$a = f(x_0) \qquad b = f'(x_0) \qquad c = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$d = \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}$$

Άρα

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$$

Ορισμός (Πολυώνυμα Taylor):

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ και μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ που είναι n-φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$. Δίνεται επίσης ένα $x_0 \in I$.
Το πολυώνυμο Taylor της f στο x_0 τάξης n συμβολίζεται με p_n^{f, x_0} και ορίζεται ως εξής:

$$p_n^{f,x_0}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Με τον συμβολισμό Σ έχουμε:

$$\boxed{p_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

Όταν η f και το x_0 είναι σαφή συμβολίζουμε το p_n^{f,x_0} πιο απλά με P_n.

Παρατηρήσεις: 1) $P_0(x) = f(x_0)$, $x \in \mathbb{R}$ (σταθερό πολυώνυμο)

2) $\text{Βαθμός}(P_n) \leq n$

Παραδείγματα Πολυωνύμων
Taylor για συγκεκριμένες συναρτήσεις

1) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

Ισχύει $f^{(n)}(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

(Αυστηρή απόδειξη με επαγωγή.
$\longrightarrow$ Φυλλάδια Ασκήσεων)

Άρα $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$.

$P_0(x) = f(0) = 1$

$$P_1(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} \cdot x = 1 + x$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3!}x^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

Γενικά ισχύει:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

2) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

$f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$

$f^{(3)} = +\sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$

Στο 0: $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$

$f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$

$f(0) = 1$

Επομένως: $P_0(x) = f(0) = \cos 0 = 1$

$$P_1(x) = P_0(x) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0)^1 = 1 + \frac{0}{1!} \cdot x$$

$$= 1$$

Βλέπουμε ότι $P_1(x) = P_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 + \frac{(-1)}{2!}x^2 = 1 - \frac{x^2}{2!}.$$

$P_3(x) = P_2(x)$ γιατί $f^{(3)}(0) = 0$.

$$= 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot (x-0)^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4!} \cdot x^4$$

Μνημονικός κανόνας:

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots$$

3) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = +\sin x$

Στο 0: $f(0) = 0$

$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0$

$f^{(3)}(0) = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 0$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-0)^1 = x$$

$$P_2(x) = P_1(x) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 = P_1(x) = x$$

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{(-1)}{3!}(x-0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{γιατί } f^{(4)}(0) = 0.$$

$$P_5(x) = P_4(x) + \frac{1}{5!}(x-0)^5$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Μνημονικός κανόνας:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$, $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = +\frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{(1+x)^4}$$

Στο $x = 0$:

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1$$

$$f^{(3)}(0) = 2! \qquad f^{(4)}(0) = -3!$$

$$P_0(x) = f(0) = 0$$

$$P_1(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x = x$$

$$P_2(x) = x + \frac{(-1)}{2!} \cdot x^2 = x - \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{2!}{3!} x^3$$

$$= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(-3!)}{4!} \cdot x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3!}{4!} x^4$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

Μνημονικός κανόνας:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Εκτίμηση της προσέγγισης με πολυώνυμο Taylor

Ορισμός: Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι n - φορές παραγωγίσιμη, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε τη συνάρτηση $R_n^{f,x_0} : I \to \mathbb{R}$

$$\boxed{R_n^{f,x_0}(x) = f(x) - P_n^{f,x_0}(x)}$$

Η R_n^{f,x_0} ονομάζεται <u>υπόλοιπο</u> <u>Taylor της f στο x_0 τάξης n</u>

και συμβολίζεται επίσης πιο απλά με R_n.

Θεώρημα: (Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor)

Δίνεται ένα ανοικτό διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ και $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-φορές παραγωγίσιμη.

Τότε για κάθε $x \in I$ $x \neq x_0$ υπάρχει ξ ανάμεσα στο x_0 και στο x έτσι ώστε

$$\boxed{R_n^{f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

Εφαρμογές:

1) (Σεπτ. 2022)

Να δειχθεί ότι:

$$\left| \sqrt{e} - \left(1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!}$$

Λύση:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Με p_n συμβολίζουμε το πολυώνυμο Taylor της f στο $x_0 = 0$.

Γνωρίζουμε ότι: $p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

και $p_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!} + \frac{1}{2^2\cdot 2!} + \frac{1}{2^3\cdot 3!}$

Επομένως πρέπει να δείξουμε ότι

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - p_3\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4\cdot 4!}$$

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

έτσι ώστε $R_3(\frac{1}{2}) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot (\frac{1}{2} - 0)^4$

όπου R_3 = υπόλοιπο Taylor της f τάξης 3.

Επομένως $|R_3(\frac{1}{2})| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} \cdot \frac{1}{2^4}$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$|f(\tfrac{1}{2}) - p_3(\tfrac{1}{2})| = |R_3(\tfrac{1}{2})| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2^4 \cdot 4!} \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

$f^{(4)}(x) = e^x$ άρα $f^{(4)}(\xi) = e^\xi$

$0 < \xi < \frac{1}{2}$, άρα $e^\xi < e^{1/2} < 3^{1/2}$

$2 < e < 3$

Επομένως

$$|R_3(\tfrac{1}{2})| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{2^4 \cdot 4!} < \frac{3^{1/2}}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}.$$

2) Ισχύει $1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$

Να δειχθεί με τη βοήθεια του 1) ότι το $\frac{79}{48}$ προσεγγίζει το $\sqrt{e}$ με ακρίβεια τουλάχιστον δύο ψηφίων στο δεκαδικό ανάπτυγμα.

Λύση. Παίρνουμε $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε με P_3, R_3 το πολυώνυμο και το υπόλοιπο Taylor αντίστοιχα της f στο $x_0 = 0$. Τότε

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} = \frac{79}{48}$$

Στο 1) είδαμε ότι

$$\left|\sqrt{e} - P_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|R_3\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

δηλαδή ότι

$$\left|\sqrt{e} - \frac{79}{48}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left|\sqrt{e} - \frac{79}{48}\right| < 10^{-2}$$ (προσέγγιση με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων).

Άρα αρκεί να δειχθεί ότι

$$\frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} < 10^{-2}.$$

Πράγματι:

$$\frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} < \frac{3}{16 \cdot 24} = \frac{1}{16 \cdot 8} = \frac{1}{128} < \frac{1}{100} = 10^{-2}.$$

Άρα $\left| \sqrt{e} - \frac{79}{48} \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2^4 \cdot 4!} < 10^{-2}.$

$\square$

Επαλήθευση του 2) με αριθμομηχανή:

$$\frac{79}{48} = \underline{1,6}458333\ldots$$

$$\sqrt{e} \simeq \underline{1,6}48212$$

3) (Ιαν. 2020)

Να δειχθεί ότι

$$\left|\cos(x^2) - \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^{12}}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση:</u>

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| \leq \frac{x^6}{6!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το δείξουμε αυτό τότε αντικαθιστούμε το x με το x^2 και έχουμε το ζητούμενο.

Θεωρούμε το πολυώνυμο Taylor P_5 5ης τάξης στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Τότε $P_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως

$$\left|\cos(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)\right| = |f(x) - P_5(x)|$$

$= |R_5(x)|$

όπου R_5 = το υπόλοιπο Taylor 5ης τάξης της f στο x_0.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$|R_5(x)| \leq \frac{x^6}{6!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε $x \in \mathbb{R}$.

Από τη μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor υπάρχει ξ ανάμεσα στο 0 και στο x με

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-0)^6.$$

Ισχύει $|f^{(6)}(\xi)| \leq 1$

γιατί η f είναι η συνάρτηση συνημίτονο.

Άρα $|R_5(x)| = \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!} \cdot |x^6|$

$$\leq \frac{1}{6!} \cdot x^6$$

που είναι το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 3
Βασικές τεχνικές ολοκλήρωσης

— Να δω την παρουσίαση στα ολοκληρώματα στο helios.

Τεχνικές ολοκλήρωσης ρητών συναρτήσεων

Υπενθυμίζουμε ότι ρητή είναι κάθε συνάρτηση της μορφής $\frac{p}{q}$

όπου τα p, q είναι πολυώνυμα.

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$I(p,q) = \int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$$

για μια μεγάλη κατηγορία πολυωνύμων p και q.

Θα επικεντρωθούμε στις περιπτώσεις όπου

$$\underbrace{\deg p}_{\text{βαθμός } p} < \deg q$$

Όταν $\deg p \geq \deg q$

εκτελούμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{p}{q} = \pi + \frac{r}{q}$$

όπου τα π, r είναι πολυώνυμα και $\deg r < \deg q$.

Τότε το $I(p,q)$ στην ουσία ανάγεται στο $I(r,q)$:

$$\underbrace{\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}_{I(p,q)} = \int \pi(x)\,dx + \underbrace{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx}_{\substack{I(r,q)\\ \deg r < \deg q}}$$

Σημείωση: όταν $\deg p = \deg q$ η διαίρεση είναι απλή.

Π.χ. $$\frac{x^2+5}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+2-3x-2+5}{x^2+3x+2}$$

$$= \underset{\pi(x)}{1} + \frac{\overset{r(x)}{-3x+3}}{x^2+3x+2}$$

Θεμελιώδη Ολοκληρώματα:

i) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \;, \; c \in \mathbb{R}$

γενικότερα:

$$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + c, \; c \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

ii) $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \underbrace{\arctan}_{\text{τόξο εφαπτομένης}} x + c \;, \; c \in \mathbb{R}$

γενικότερα:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c, \; c \in \mathbb{R}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$.

Θα καθορίσουμε το $I(p, q)$ στις εξής περιπτώσεις:

	deg p	deg q / q(x)
1)	0	$q(x) = (ax+b)^n$, $n \geq 1$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$
2)	0	2
3)	1	2

Θα εξετάσουμε επίσης τις εξής περιπτώσεις:

4) $\deg p \leq 2$ και

$$q(x) = (dx+e)(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a, d \neq 0$

5) $\deg p \leq 3$ και

$$q(x) = (dx+e)^2(ax^2+bx+c)$$

όπου $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $a, d \neq 0$

Περίπτωση 1)

$\deg p = 0$ και $q(x) = (ax+b)^n$
$n \geq 1 \quad a \neq 0$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = ax+b}$$

Παραδείγματα:

i) $$I = \int \frac{3}{2x-5}\, dx$$

$u = 2x-5$, $du = 2\, dx$

$$I = \int \frac{3}{u} \cdot \frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{3}{2} \ln|u| + c$$

$$= \frac{3}{2} \ln|2x-5| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ii) $$I = \int \frac{1}{(3x+7)^{10}}\, dx$$

$u = 3x+7$, $du = 3\, dx$

$$I = \int \frac{1}{u^{10}} \cdot \frac{1}{3}\, du$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{10}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{-9}}{-9} + c$$

$$= -\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{(3x+7)^9} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Περίπτωση 2)

$\deg p = 0$ και $\deg q = 2$

$q(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
$a \neq 0$

Θεωρούμε τη διακρίνουσα Δ του q:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Υποπερίπτωση 2a) $\Delta < 0$

Τότε το $q(x)$ έρχεται στη μορφή

$$q(x) = \pm\left[(Ax+B)^2 + \Gamma^2\right]$$

όπου $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$, $A, \Gamma \neq 0$.

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = Ax + B}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της arctan.

Παραδείγματα:

i) $I = \int \frac{2}{x^2+3x+4}\,dx$

$q(x) = x^2+3x+4$

$\Delta = 9-16 = -7<0$

Χρήση ταυτότητας

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$q(x) = x^2 + 2\cdot\frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4$$

$+ \qquad -$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$u = x+\frac{3}{2} \qquad du = dx$

$$I = \int \frac{2}{u^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}\,du$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)} \arctan\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{4}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{7}}\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right) + c$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(2x+3)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

<u>Προσοχή:</u> Αν ο συντελεστής του x^2 στο q είναι < 0, τότε βγάζουμε το -1 κοινό παράγοντα και ασχολούμαστε με το $-q$. Δείτε το επόμενο παράδειγμα.

ii) $$I = \int \frac{1}{-x^2 + x - 1} \, dx \qquad q(x) = -x^2 + x - 1$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

Έχουμε

$$I = -\int \frac{1}{x^2 - x + 1} \, dx$$

Εργαζόμαστε με το $-q(x) = x^2 - x + 1$ όπως προηγουμένως.

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$I = -\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \, dx$$

Αντικατάσταση: $u = x - \frac{1}{2}$

$du = dx$

$$I = -\int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \, du$$

$$= -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left[\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}\right] + c$$

$c \in \mathbb{R}.$

iii) $I = \int \frac{1}{3x^2 - x + 2} \, dx$

$q(x) = 3x^2 - x + 2$

$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0$

$$q(x) = (\sqrt{3}x)^2 - 2 \cdot (\sqrt{3}x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2\sqrt{3})^2} + 2$$

$$= \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}x \cdot 2\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{23}{12}$$

$$= \left(\frac{6x-1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2$$

$$u = \frac{6x-1}{2\sqrt{3}} \qquad du = \frac{6}{2\sqrt{3}}\,dx$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}\,dx = \sqrt{3}\,dx$$

$$I = \int \frac{1}{u^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\,du$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{u^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}\right)^2}\,du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}} \cdot \arctan\left(\frac{u}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{3}}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}\,u}{\sqrt{23}}\right) + c$$

Έχουμε: $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}\cdot u = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \cdot \dfrac{6x-1}{2\sqrt{3}}$

$$= \frac{6x-1}{\sqrt{23}}$$

Άρα

$$I = \frac{2}{\sqrt{23}} \arctan\left(\frac{6x-1}{\sqrt{23}}\right) + c$$

$$= \frac{\sqrt{23}}{23} \cdot 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{23}}{23}(6x-1)\right) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

β΄ τρόπος:

$$q(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

Δουλεύουμε με το $x^2 - \frac{x}{3} + \frac{2}{3} = r(x)$.

Τότε $r(x) = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{3.2} + \frac{1}{6^2}$

$$- \frac{1}{6^2} + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{36} = \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2$$

(Συνεχίζουμε ομοίως)

Υποπερίπτωση 2β) $\Delta = 0$

Τότε $q(x) = a \cdot (x-B)^2$

B = η μοναδική ρίζα του q

a = συντελεστής του x^2 στο q

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$\boxed{u = x - B}$$

Κάποιες φορές είναι πιο βολική η αντικατάσταση

$$\boxed{u = ax - aB}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με βάση το $\int \frac{1}{u^2} du$.

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{5}{4x^2+4x+1} dx$$

$$q(x) = 4x^2+4x+1$$

$$\Delta = 16-16=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$$

Τότε $\quad q(x) = 4 \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$$u = x+\frac{1}{2} \qquad du = dx$$

$$I = \int \frac{5}{4u^2} du = \frac{5}{4} \int \frac{1}{u^2} du$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{5}{4u} + c$$

$$= -\frac{5}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} + c = -\frac{5}{4x+2} + c$$

$$c \in \mathbb{R}.$$

Σχόλιο: Πιο πάνω πήραμε

$$u = x + \frac{1}{2}$$

δηλαδή εφαρμόσαμε την αντικατάσταση $u = x - B$. $B =$ η ρίζα του q

Όπως όμως αναφέραμε κάποιες φορές είναι πιο βολική η αντικατάσταση

$u = ax - aB$. a : ο συντελεστής του x^2 στο q

Στο πιο πάνω παράδειγμα έχουμε

$$q(x) = 4x^2 + 4x + 1 = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left[2\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= (2x+1)^2$$

Εκτελούμε την αντικατάσταση

$$u = 2x + 1. \quad du = 2\,dx$$

(Αυτή είναι η $u = ax - aB$).

Συνεχίζουμε ομοίως.

Υποπερίπτωση 2γ) $\Delta > 0$

Τότε $q(x) = a(x - B_1)(x - B_2)$

$B_1 \neq B_2$ ρίζες του q

$a =$ συντελεστής του x^2 στο q

Αναλύουμε το κλάσμα:

$$\frac{1}{(x-B_1)(x-B_2)} = \frac{d_1}{x-B_1} + \frac{d_2}{x-B_2}$$

όπου $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

Κάποιες φορές είναι πιο βολικό να αναλύσουμε μαζί με τον συντελεστή a:

$$\frac{1}{a(x-B_1)(x-B_2)} = \frac{d_1}{a(x-B_1)} + \frac{d_2}{x-B_2}$$

Τότε το I υπολογίζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης $\ln$.

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{2x^2+x-3}\,dx$$

$$q(x) = 2x^2 + x - 3$$

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)$$

$$= 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$= \begin{cases} \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Άρα

$$q(x) = 2\cdot\left(x + \frac{3}{2}\right)(x-1)$$

$$= (2x+3)(x-1)$$

Αναλύουμε

$$\frac{1}{(2x+3)(x-1)} = \frac{d_1}{2x+3} + \frac{d_2}{x-1}$$

Για ευκολία αναλύουμε το κλάσμα μαζί με τον συντελεστή a.

$$d_1(x-1) + d_2(2x+3) = 1$$

$$(d_1 + 2d_2)x + 3d_2 - d_1 = 1$$

$$d_1 + 2d_2 = 0 \qquad 3d_2 - d_1 = 1$$

Άρα $\quad d_1 = -2d_2$

$$3d_2 - (-2d_2) = 1$$

$$5d_2 = 1$$

$$d_2 = \frac{1}{5} \qquad d_1 = -\frac{2}{5}$$

Άρα

$$\frac{1}{q(x)} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(2x+3)} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-1}$$

και

$$I = -\frac{2}{5}\int \frac{1}{2x+3}\,dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -\frac{1}{5}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + \frac{1}{5}\ln|x-1| + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

(*) Επίσης σωστό:

$$-\frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{2x+3}\,dx = -\frac{2}{5}\cdot\int\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}\,du$$

$(u = 2x+3)$

$$= -\frac{1}{5}\ln|u| = -\frac{1}{5}\ln|2x+3|$$

Περίπτωση 3: $\deg p = 1 \quad \deg q = 2$

$p(x) = Ax + B, \quad A \neq 0$
$q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Μέθοδος: Προσπαθούμε να σχηματίσουμε την παράγωγο $q'(x)$ στον αριθμητή του κλάσματος $\frac{p(x)}{q(x)}$.

Τότε το $I = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του ln και της Περίπτωσης 2.

$q'(x) = 2ax + b$

$$p(x) = Ax + B = \frac{A}{2a}\left(2ax + \frac{2a}{A} \cdot B\right)$$

$$= \frac{A}{2a}\left(2ax + b + \frac{2aB}{A} - b\right)$$

Άρα $$I = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{q(x)} dx + \frac{A}{2a}\int \frac{\frac{2aB}{A} - b}{q(x)} dx$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{q'(x)}{q(x)} dx + \frac{A}{2a}\int \frac{k}{q(x)} dx$$

$$k = \frac{2aB}{A} - b$$

$$= \frac{A}{2a}\ln|q(x)| + \underbrace{\frac{A}{2a}\int \frac{k}{q(x)} dx}_{\text{Περίπτωση 2}}$$

Παραδείγματα:

1) $I = \int \frac{x}{x^2+2x+3} \, dx$

$(x^2+2x+3)' = 2x+2$

$\frac{x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2x+2-2}{x^2+2x+3} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{2x+2}{x^2+2x+3} - \frac{2}{x^2+2x+3} \right)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} - \frac{1}{x^2+2x+3}$

$I = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} \, dx - \int \frac{1}{x^2+2x+3} \, dx$

$= \frac{1}{2} \ln |x^2+2x+3| - J$

Το J υπολογίζεται όπως στην Περίπτωση 2.

$q(x) = x^2+2x+3$, $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$

(άρα $q(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$)

$x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2$
$= (x+1)^2 + (\sqrt{2})^2$

Άρα $J = \int \frac{1}{q(x)} \, dx = \int \frac{1}{(x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \, dx$

$u = x+1\ , \quad du = dx$

$$J = \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{2})^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} - c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) - c$$

Άρα

$$I = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

$c \in \mathbb{R}$.

2) $$I = \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\, dx$$

$(x^2-4x+4)' = 2x-4$

$$\frac{x+2}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x+4}{x^2-4x+4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4+8}{x^2-4x+4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-4}{x^2-4x+4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x^2-4x+4}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2-4x+4)'}{x^2-4x+4} + \frac{4}{x^2-4x+4}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-4x+4)'}{x^2-4x+4}\, dx + 4 \int \frac{1}{x^2-4x+4}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2-4x+4| + 4J$$

$$q(x) = x^2-4x+4 = (x-2)^2$$

$$J = \int \frac{1}{q(x)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

$u = x-2$
$du = dx$

$$J = \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}$$
$$= -\frac{1}{x-2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\ln|(x-2)^2| - \frac{4}{x-2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x-2)^2 - \frac{4}{x-2} + c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

$$= \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

Οι περιπτώσεις 4) και 5) ανάγονται στις προηγούμενες.

Γενική Μέθοδος:

Θεωρούμε το κλάσμα $\frac{p(x)}{q(x)}$ όπου τα p, q είναι πολυώνυμα με $\deg p < \deg q$.

Παραγοντοποιούμε $q(x)$.

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x-a)^n$ αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής:

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

- Σε κάθε παράγοντα της μορφής $(x^2+bx+c)^m$, όπου η διακρίνουσα του x^2+bx+c είναι αρνητική, αντιστοιχεί ένα άθροισμα κλασμάτων της μορφής

$$\frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+bx+c} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{B_mx+\Gamma_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

Παραδείγματα:

1) $$\frac{2x}{(x^2+9)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

2) $$\frac{2x}{(x^2+9)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+9} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+9)^2}$$

Εκτός των περιπτώσεων 4) και 5)

3) $$\frac{2x}{(x^2+9)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+9}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\, dx$$

$$\frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+\Gamma)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

Αριθμητής $= A_1(x^3+x+x^2+1)$

$+ A_2x^2 + A_2 + (Bx+\Gamma)(x^2+2x+1)$

$= A_1x^3 + A_1x^2 + A_1x + A_1 + A_2x^2 + A_2$
$+ Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + \Gamma x^2 + 2\Gamma x + \Gamma$

$= (A_1+B)x^3 + (A_1+A_2+2B+\Gamma)x^2$
$+ (A_1+B+2\Gamma)x + A_1+A_2+\Gamma$
$= x$

$A_1 + B = 0$ (1)
$A_1 + A_2 + 2B + \Gamma = 0$ (2)
$A_1 + B + 2\Gamma = 1$ (3)
$A_1 + A_2 + \Gamma = 0$ (4)

Από (1) και (3) παίρνουμε $2\Gamma = 1 \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{2}$

Από (1) και (4): $(A_1+A_2+\Gamma) + 2B = 0$
$0 + 2B = 0$
$B = 0$

Από (1): $A_1 = -B = 0$

Από (4) : $0 + A_2 + \frac{1}{2} = 0$

$$\Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$$

Άρα $\dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{0}{x+1} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{0 \cdot x + 1/2}{x^2+1}$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

I

Άρα $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$, $u = x+1$, $du = dx$

$$= \int \frac{1}{u^2}\,du = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1}$$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \arctan x + c$$

$$= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2} \cdot \arctan x + C$$

Τριγωνομετρικά Ολοκληρώματα

<u>Πολυώνυμο δύο μεταβλητών</u> είναι μια συνάρτηση $p(x,y)$ όπου τα x, y εμφανίζονται στη μορφή $x^n \cdot y^m$ $n=0,1,\ldots$, $m=0,1,\ldots$ και μάλιστα το $p(x,y)$ είναι πεπερασμένο άθροισμα πολλαπλασίων των $x^n \cdot y^m$.

Π.χ. 1) $p(x,y) = x^2y + 2xy^3 + 1$

2) $p(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 8$

3) $p(x,y) = 1$

4) $p(x,y) = x^3 + y^3 + 5x^4y^5 - y^8 - 1$

<u>Ρητή συνάρτηση</u> δύο μεταβλητών είναι ο λόγος δύο πολυωνύμων δύο μεταβλητών.

<u>Π.χ.</u> 1) $R(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2+y^2+1}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

2) $R(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, $\quad x, y \neq 0$

Η ρητή συνάρτηση ορίζεται ακριβώς εκεί που δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής.

Ασχολούμαστε με ολοκληρώματα της μορφής

$$I_R = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι ρητή συνάρτηση δύο μεταβλητών u, v.

π.χ. 1) $R(u,v) = \dfrac{u^2}{u+v}$

τότε

$$R(\sin x, \cos x) = \underbrace{\frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}}_{\text{η προς ολοκλήρωση συνάρτηση}}$$

2) Δίνεται η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin^3 x}{2 \cos x \sin x}.$$

Τότε παίρνουμε $R(u, v) = \dfrac{v + u^3}{2uv}$

και έχουμε $f(x) = R(\sin x, \cos x)$

Θα μελετήσουμε το I_R στις εξής περιπτώσεις:

(A) Η $R(u,v)$ είναι περιττή ως προς u, δηλαδή

$$R(-u, v) = -R(u, v).$$

(B) Η $R(u,v)$ είναι περιττή ως προς v, δηλαδή
$$R(u,-v) = -R(u,v).$$

(Γ) Η $R(u,v)$ είναι άρτια ως προς το ζεύγος (u,v), δηλαδή
$$R(-u,-v) = R(u,v).$$

Θα δούμε ότι με κατάλληλη αντικατάσταση το I_R σε αυτές τις περιπτώσεις ανάγεται σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης μίας μεταβλητής.

Περίπτωση (Α):

$R(u,v)$ = περιττή ως προς u.	
Αντικατάσταση	$t = \cos x$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\, dx$$

$$R(u,v) = \frac{u^3}{3+v}, \quad \text{ισχύει:}$$

$$R(-u,v) = \frac{(-u)^3}{3+v} = -\frac{u^3}{3+v} = -R(u,v)$$

Άρα η R είναι περιττή ως προς u.

Αντικατάσταση $t = \cos x$.

$dt = -\sin x \, dx$,

$$\frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\, dx = -\frac{\sin^2 x}{3+\cos x} \cdot (-\sin x)\, dx$$

$$= -\frac{1-\cos^2 x}{3+\cos x}(-\sin x)\, dx$$

$$= -\frac{1-t^2}{3+t}\, dt = \frac{t^2-1}{t+3}\, dt$$

Άρα $I = \displaystyle\int \frac{t^2-1}{t+3}\, dt$

⇝ ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης

Βαθμός αριθμητή $= 2 >$ βαθμού παρονομαστή $= 1$

Εκτελούμε τη διαίρεση:

$$\begin{array}{rrr|l} t^2 & +0t & -1 & t+3 \\ \cline{4-4} -t^2 & -3t & & t-3 \\ \cline{1-2} & -3t & -1 & \\ & 3t & +9 & \\ \cline{2-3} & & 8 & \end{array}$$

Άρα $\dfrac{t^2-1}{t+3} = t-3 + \dfrac{8}{t+3}$

$$I = \int t - 3 + \frac{8}{t+3} \, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \cdot \int \frac{1}{t+3} \, dt$$

$$= \frac{t^2}{2} - 3t + 8 \ln|t+3| + c$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - 3\cos x + 8 \ln(\cos x + 3) + c$$

όπου $c \in \mathbb{R}$.

Περίπτωση (Β):

$$\boxed{\begin{array}{l} R(u,v) : \text{περιττή ως προς } v \\ \text{Αντικατάσταση} \quad t = \sin x \end{array}}$$

Παράδειγμα:

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} \, dx$$

$$R(u,v) = \frac{1}{u^2 v},$$

$$R(u,-v) = \frac{1}{u^2 \cdot (-v)} = -\frac{1}{u^2 v} = -R(u,v)$$

Αντικατάσταση $t = \sin x$.

$dt = \cos x \, dx$

$$I = \int \frac{1}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{t^2(1-t^2)} dt \qquad \left(\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2 \right)$$

Αναλύουμε: $\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{1-t^2}$

$\left(w = t^2, \quad \frac{1}{w(1-w)} = \frac{A}{w} + \frac{B}{1-w} \right)$

$$\frac{A}{t^2} + \frac{B}{1-t^2} = \frac{A(1-t^2) + Bt^2}{t^2(1-t^2)}$$

Αριθμητής $= A - At^2 + Bt^2$
$= (-A+B)\, t^2 + A$

Αριθμητής $= 1$

$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} -A+B = 0 \\ A = 1 \end{array} \Bigg| \quad A = B = 1$

Άρα $\frac{1}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2}$

Αναλύουμε το $\frac{1}{1-t^2}$: $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε:

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t}$$

καταλήγουμε ότι:

$$I = \int \frac{1}{t^2(1-t^2)}\,dt = \int \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{-1}{1+s}\,ds + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c$$

$$s=-t$$

$$= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\cdot(-1)\ln|1+s| + \frac{1}{2}\ln|1+t| + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln|1-\sin x| + \frac{1}{2}\ln|1+\sin x| + c$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{2}\ln(1-\sin x) + \frac{1}{2}\ln(1+\sin x) + c$$

$$(\sin x \le 1 \Rightarrow 1-\sin x \ge 0)$$

<u>Περίπτωση Γ:</u>

$R(u,v)$: άρτια ως προς (u,v)
Αντικατάσταση: $t = \tan x$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$I = \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\,dx$$

$$R(u,v) = \frac{1}{u^4 v^2}$$

$$R(-u,-v) = \frac{1}{(-u)^4 (-v)^2} = \frac{1}{u^4 v^2} = R(u,v)$$

Αντικατάσταση $\quad t = \tan x$

$$dt = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Πρέπει να αντικαταστήσουμε το $\frac{1}{\sin^4 x}$ με μια συνάρτηση του t.

$$t = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow t \cdot \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow t^2 \cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow t^2 (1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 - t^2 \sin^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow t^2 = \sin^2 x \,(1 + t^2)$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow \sin^4 x = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^4 x} = \frac{(1+t^2)^2}{t^4} = \left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)^2 = \frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1$$

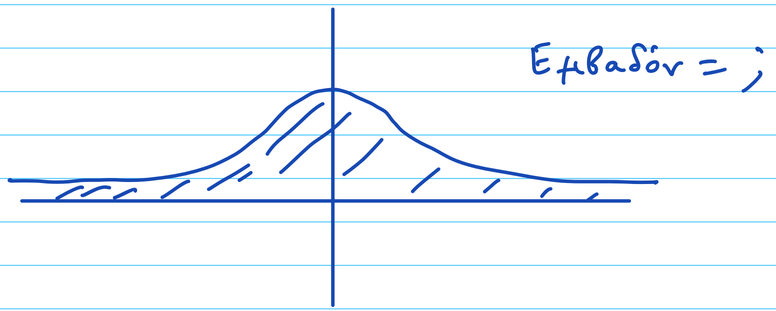
$$I = \int \frac{1}{t^4}\, dt + \int \frac{2}{t^2}\, dt + \int 1\, dt$$

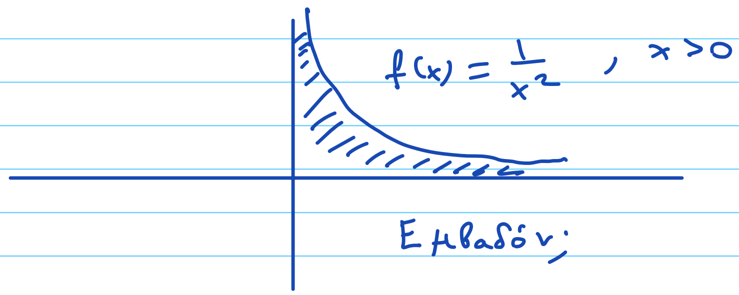
$$= \frac{t^{-3}}{-3} + 2 \cdot \frac{t^{-1}}{-1} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + c$$

$$= -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{2}{\tan x} + \tan x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα



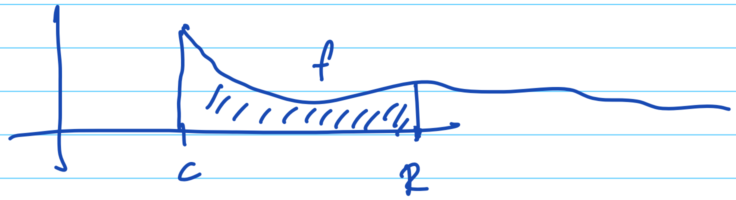


Θέλουμε να επεκτείνουμε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος σε συναρτήσεις που δεν ορίζονται σε κλειστό διάστημα $[a,b]$.

Γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους:

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

$f: [c, +\infty) \to \mathbb{R}$.



Τότε για κάθε $R > c$ ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_c^R f(x)\,dx$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx.$$

σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx}$$

Όμοια αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f: (-\infty, c] \to \mathbb{R}$ και αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx$$

σημαίνει ότι είναι πραγματικός αριθμός

τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\int_{-\infty}^c f(x)\,dx = \lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx}$$

Τέλος θεωρούμε μια συνεχή $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχουν τα όρια

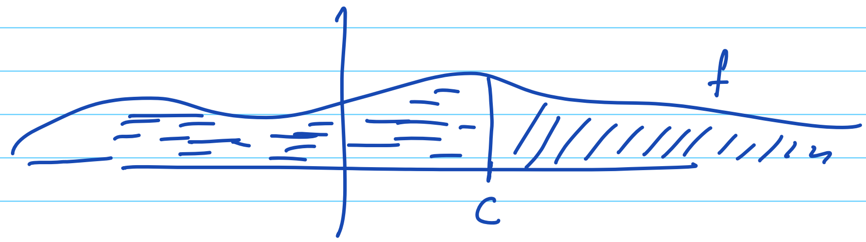
$$\underbrace{\lim_{R \to -\infty} \int_R^c f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{και} \quad \underbrace{\lim_{R \to +\infty} \int_c^R f(x)\,dx}_{\in \mathbb{R}}$$

Δηλαδή υποθέτουμε ότι ορίζονται τα

$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ και $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}$$



Αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c. Δηλαδή αν για κάποιο $c \in \mathbb{R}$ ορίζονται τα $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ και

$\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ τότε για κάθε $d \in \mathbb{R}$

ορίζονται επίσης τα $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ και $\int_{d}^{+\infty} f(x)\,dx$

και μάλιστα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Τα $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$, $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

ονομάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα α' είδους.

Παραδείγματα:

1) $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Θεωρούμε $R > 1$. Τότε

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^R = -\frac{1}{R} + \frac{1}{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 1$$

Άρα $I = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx$

$$= \lim_{R\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \longrightarrow 1$$

2) $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

Θεωρούμε $R > 1$.

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^R = \ln R - \ln 1$$

$$= \ln R \xrightarrow[R\to+\infty]{} +\infty$$

Άρα δεν ορίζεται το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$.

3) $I = \int_{-\infty}^{0} e^{2x} \, dx$.

Θεωρούμε $R < 0$.

$$\int_R^0 e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} \int_{2R}^{0} e^u \, du$$

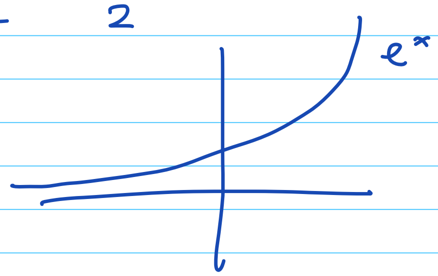
$$\boxed{\begin{array}{ll} & u = 2x \\ x = 0 & u = 0 \\ x = R & u = 2R \\ & du = 2\,dx \end{array}}$$

$$= \frac{1}{2} e^u \Big|_{2R}^{0}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^0 - e^{2R} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot e^{2R}$$

$$e^{2R} \xrightarrow{R \to -\infty} 0$$



Άρα $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \, dx$

$$= \lim_{R \to -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2R} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους:

Θεωρούμε ότι έχουμε μια συνεχή συνάρτηση $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=a$.

[Π.χ. $f:(0,1] \to \mathbb{R}: f(x) = \frac{1}{x}$.]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει το όριο

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx .$$

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to a^+} \int_r^b f(x)\,dx}$$

Η περίπτωση $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=b$ αντιμετωπίζεται ανάλογα:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{r \to b^-} \int_a^r f(x)\,dx}$$

Τέλος θεωρούμε $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ η οποία δεν έχει συνεχή επέκταση στο $x=a$ και στο $x=b$.

[Π.χ. $f:(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}: f(x) = \tan x$]

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c \in (a,b)$

έτσι ώστε να υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{r \to a^+} \int_r^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$ και

$$\lim_{r \to b^-} \int_c^r f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx.$$

Τότε ορίζουμε

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Όπως πριν αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω είναι ανεξάρτητο του c.

Τα $\int_a^b f(x)\,dx$ όπου η f δεν έχει συνεχή επέκταση σε κάποιο/α από τα a, b λέγονται γενικευμένα ολοκληρώματα β' είδους.

Κεφάλαιο 4 Ακολουθίες – Σειρές

Ορισμός: Ακολουθία σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$ είναι μία συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N}^* \to X$
όπου $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Εδώ θα έχουμε $X = \mathbb{R}$, δηλαδή θα μιλάμε για ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

Συμβολισμός: Αντί να γράφουμε $\varphi : \mathbb{N}^* \to X$ γράφουμε $a_n = \varphi(n) =$ η τιμή της φ στο $n \in \mathbb{N}^*$ και συμβολίζουμε τη φ με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Επίσης μπορούμε να συμβολίσουμε μια ακολουθία με $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ κ.τ.λ.

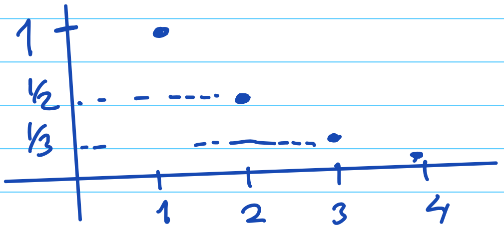
Τέλος όταν ορίζουμε τις ακολουθίες ~~γράφουμε~~ ορίζουμε συνήθως την τιμή a_n.

Δηλαδή γράφουμε $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Όταν θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με σχήμα, δεν κάνουμε τη γραφική της παράσταση αλλά αναπαριστούμε κάποια a_n πάνω σε μια ευθεία γραμμή.

Π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Γραφική παράσταση:



$a_1 = 1$

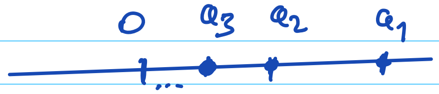
$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

(Αναπαράσταση σε ευθεία γραμμή)

Συνήθως έχουμε:



Το a_n λέγεται όρος της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και ειδικότερα n-οστός όρος.

Τέλος όταν έχουμε το σύμβολο «n» εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά θα εννοούμε φυσικό αριθμό.

Επομένως γράφουμε συνήθως $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Παραδείγματα:

1) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+n+1}$, $n \geq 1$

2) $a_n = (-1)^n \quad , \quad n \geq 1$

3) $a_n = \begin{cases} n^2, & n: \text{άρτιος} \\ 0, & n: \text{περιττός} \end{cases}$

<u>Μονότονες ακολουθίες:</u>

<u>Ορισμός:</u> Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ λέγεται:

α) <u>αύξουσα</u> αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n \leq a_{n+1}$

(που είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $n, m \in \mathbb{N}^*$ αν $n \leq m$ τότε $a_n \leq a_m$)

β) <u>γνησίως</u> ή <u>γνήσια αύξουσα</u> αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n < a_{n+1}$.

γ) <u>φθίνουσα</u> αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $a_n \geq a_{n+1}$

δ) <u>γνησίως</u> ή <u>γνήσια φθίνουσα</u>

αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$a_n > a_{n+1} .$$

<u>Συμβολισμοί</u>: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \uparrow$: αύξουσα

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \underline{\uparrow}$: γνησίως αύξουσα

όμοια χρησιμοποιούμε τα $\downarrow$ και $\overline{\downarrow}$ για τις φθίνουσες και γνησίως φθίνουσες ακολουθίες αντίστοιχα.

<u>Παραδείγματα</u>:

1) $a_n = \sqrt{n^2+1}$, $n \geq 1$

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$n^2 < (n+1)^2$$

άρα $n^2+1 < (n+1)^2 + 1$

άρα $\sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2+1}$

δηλαδή $a_n < a_{n+1}$,

άρα $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \underline{\uparrow}$.

2) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 3$.

(Δηλαδή $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1,2 \\ \frac{1}{n}, & n \geq 3 \end{cases}$)

Ισχύει $a_1 \geq a_2$

και για $n \geq 2$ ισχύει $a_n > a_{n+1}$.

Άρα $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \downarrow$.

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ δεν είναι γνησίως φθίνουσα.

3) $a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Δείχνουμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ δεν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.

- Δεν είναι αύξουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $a_n \not\leq a_{n+1}$ δηλαδή $a_n > a_{n+1}$.

  Εδώ έχουμε $a_{456} = 1 > -1 = a_{457}$

  (πιο απλά $a_2 = 1 > -1 = a_3$)

- Δεν είναι φθίνουσα: βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}^*$ με $a_n \not\geq a_{n+1}$, δηλαδή $a_n < a_{n+1}$.

  Εδώ έχουμε $a_{457} = -1 < a_{458}$.

<u>Μονότονη</u> ακολουθία είναι η ακολουθία

που είναι αύξουσα ή φθίνουσα και

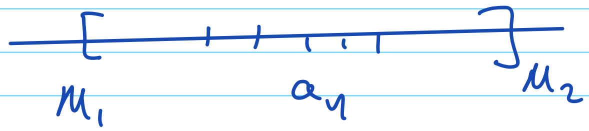
γνησίως μονότονη είναι η ακολουθία που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Φραγμένες ακολουθίες:

Ορισμός: Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ λέγεται:

α) φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει $|a_n| \le M$,

ισοδύναμα: υπάρχουν $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ με $M_1 < M_2$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n \in [M_1, M_2]$.



β) άνω φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n \le M$

γ) κάτω φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει $a_n \ge M$.

Σύγκλιση ακολουθιών:

Ορολογία: Λέμε ότι μια ιδιότητα P που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς ισχύει <u>σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$</u> ή <u>τελικά για όλα τα $n \in \mathbb{N}$</u> αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $P(n)$.

Παραδείγματα:

1) $A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$

Τότε ισχύει $n \in A$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

2) $A = \{2, 5, 7\}$

Αν το A περιείχε σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ θα ήταν άπειρο, αλλά το A είναι πεπερασμένο.

3) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

Το A δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ γιατί για κάθε $n_0 \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq n_0$ που δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή $n \notin A$.

Ένα τέτοιο n είναι το $3n_0 + 1$.

Γενικά ισχύει το εξής:

το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\mathbb{N} \setminus A$ είναι πεπερασμένο.

$$\mathbb{N} \setminus A \Downarrow \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A\}$$

Στα πιο πάνω παραδείγματα:

- αν $A = \{5, 8, 21, 63\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1000\}$

  τότε $\mathbb{N} \setminus A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 20, 22, \ldots, 62, 64, \ldots, 999\}$

  πιο απλά $\mathbb{N} \setminus A \subseteq \{0, \ldots, 999\}$

  άρα $\mathbb{N} \setminus A$: πεπερασμένο
  άρα το A περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

- αν $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

  τότε $\underbrace{\{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}}_{\text{άπειρο}} \subseteq \mathbb{N} \setminus A$

άρα $\mathbb{N} \setminus A$ είναι άπειρο
άρα το A δεν περιέχει σχεδόν όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Διαισθητική περιγραφή του ορίου ακολουθίας

Παίρνουμε $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Θεωρούμε ένα μικρό διάστημα κέντρου 0 π.χ. $I_1 = (-10^{-2}, 10^{-2}) = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$.

Εξετάζουμε για ποια $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_n \in I_1$.

$n = 1 \quad a_1 = 1 \notin I_1$

$n = 2 \quad a_2 = \frac{1}{2} \notin I_1$

$n = 3 \quad a_3 = \frac{1}{3} \notin I_1$

$\vdots$

$n = 99 \quad a_{99} = \frac{1}{99} \notin I_1 = (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100})$

$n = 100 \quad a_{100} = \frac{1}{100} \notin I_1$

$n = 101 \quad a_{101} = \frac{1}{101} \in (-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}) = I_1$

$n = 102 \quad a_{102} = \frac{1}{102} \in I_1$

$n \geq 101 \quad a_n = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow a_n \in I_1$.

Άρα ισχύει $a_n \in I_1$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Αν πάρουμε $I_2 = \left(-\frac{1}{1000}, \frac{1}{1000}\right)$

έχουμε $a_n \in I_2$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ (συγκεκριμένα για όλα τα $n \geq 1001$).

Αυστηρός ορισμός: (Όριο ακολουθίας)

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ πραγματικών αριθμών και $a \in \mathbb{R}$.

Η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο a

ή αλλιώς το a είναι το όριο της ακολουθίας $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, συμβολικά $a_n \to a$

ή $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} a$ ή $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, αν

για κάθε ανοικτό διάστημα I κέντρου a ισχύει $a_n \in I$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

Ορολογία: Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ λέγεται **συγκλίνουσα** αν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Αλλιώς λέγεται **αποκλίνουσα**.

Παράδειγμα:

$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

Ισχυριζόμαστε ότι $a_n \to 0$.

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$.

[Στο πρόχειρο: θέλουμε $|a_n - 0| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Αν $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$

θα έχουμε $n > \frac{1}{\varepsilon}$]

Από την Αρχιμήδεια Ιδιότητα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $n > \frac{1}{\varepsilon}$

και άρα $|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|$

$= \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Θεμελιώδεις ιδιότητες ορίων:

1) Μοναδικότητα ορίου:

αν $a_n \to a$ και $a_n \to b$

τότε $\boxed{a = b}$.

2) Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι σταθερή ακολουθία $a_n = c \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ τότε $a_n \to c$.

3) Απόλυτη τιμή.

Αν $a_n \to a$ τότε $\boxed{|a_n| \to |a|}$.

Ισχύει $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$

Γενικά όμως δεν ισχύει ότι αν $|a_n| \to |a|$ τότε $a_n \to a$.

4) Άθροισμα - Γινόμενο

$a, b \in \mathbb{R}$

Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$

τότε $\boxed{a_n + b_n \to a+b}$

$c \cdot a_n \to c \cdot a$, για κάθε $c \in \mathbb{R}$.

Ειδικότερα $-a_n \to -a$

και άρα $\boxed{a_n - b_n \to a-b}$

Επιπλέον $\boxed{a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b}$

και αν $b \neq 0$ τότε ισχύει
$b_n \neq 0$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

και $\boxed{\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}}$.

5) κ-οστή ρίζα, $k = 2, 3, \ldots$

Αν $a_n \to a$ και $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$
τότε $a \geq 0$ και

$$\boxed{\sqrt[k]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt[k]{a}}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

(Για περιττό k δεν χρειάζεται
να υποθέσουμε ότι $a_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$)

6) Αν $x \leq a_n \leq y$ για κάθε $n \geq 1$
$(x, y \in \mathbb{R})$

και αν $a_n \to a$, τότε

$$\boxed{x \leq a \leq y}.$$

7) Κριτήριο Παρεμβολής

Αν $a_n \leq c_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq 1$

και αν $a_n \to a$, $b_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$

τότε $\boxed{c_n \to a}$.

Παραδείγματα

1) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1 \,, \quad n \geq 1$

$\frac{1}{n} \to 0$, άρα $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 = 0$

όμοια $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Άρα $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 1 \to 0 + 0 + 1 = 1$

2) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n + 1}{6n^2 - 4n + 8} \,, \quad n \geq 1 .$

$$a_n = \frac{n^2 \cdot \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 - \frac{4}{n} + \frac{8}{n^2}}$$

$$\longrightarrow \frac{1 + 3 \cdot 0 + 0}{6 - 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0} = \frac{1}{6} .$$

3) $a_n = \dfrac{\sin n}{n} \,, \quad n \geq 1 .$

Έχουμε $-1 \leq \sin n \leq 1$

άρα $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \,, \quad n \geq 1$

$\frac{1}{n} \to 0 \quad , \quad -\frac{1}{n} \to 0$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής $\frac{\sin n}{n} \to 0$.

4) $a_n = \dfrac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}}$

$\frac{1}{n^2} \to 0 \quad , \quad \frac{1}{n^2}+1 \to 1$

$\sqrt{\frac{1}{n^2}+1} \to \sqrt{1} = 1$

άρα $\dfrac{4}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}} \to \dfrac{4}{1} = 4$

Αξίωμα Μονότονης Φραγμένης Ακολουθίας

Κάθε αύξουσα άνω φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό

- Η Αρχιμήδεια ιδιότητα αποδεικνύεται με βάση το πιο πάνω αξίωμα.

- Το πιο πάνω αξίωμα διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:
  κάθε φθίνουσα κάτω φραγμένη ακολουθία συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Υπακολουθίες

Θεωρούμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Επιλέγουμε άπειρους όρους της ακολουθίας δηλαδή επιλέγουμε άπειρα $n \in \mathbb{N}$ και κάνουμε αυτή την επιλογή με αύξοντα τρόπο στο n.

Π.χ. $2, 5, 10, 17, \ldots, n^2+1, \ldots$

Τότε σχηματίζεται μια καινούργια ακολουθία, η $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ όπου

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_5, \quad b_3 = a_{10}, \quad b_4 = a_{17} \ldots$$

$$\ldots \quad b_n = a_{n^2+1}, \quad \ldots$$

<u>Ορισμός</u>: Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και φυσικοί αριθμοί:

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$$

Θέτουμε $b_n = a_{k_n}$, $n \geq 1$.

Τότε η ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται υπακολουθία της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ και συμβολίζεται πιο απλά με $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα έχουμε

$k_n = n^2+1 \quad , \quad n \geq 1$

Άλλα παραδείγματα υπακολουθιών:

$(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*} \quad , \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \quad , \quad (a_{3n+5})_{n\in\mathbb{N}^*}$

$k_n =$

$(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$

$k_n = n+1$

Για $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ έχουμε

$a_{3n+5} = \frac{1}{3n+5} \quad , \quad n\geq 1$

<u>Πρόταση</u>:

Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο $a\in\mathbb{R}$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει επίσης στο a.

1ο Κριτήριο μη σύγκλισης:

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Αν υπάρχουν δύο υπακολουθίες $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ με:

$$a_{k_n} \to \ell \in \mathbb{R}, \quad a_{m_n} \to \ell' \in \mathbb{R}$$

και $\ell \neq \ell'$ τότε η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι αποκλίνουσα.

Παράδειγμα:

$a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$.

Παίρνουμε τις υπακολουθίες $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \to -1$$

Αφού $1 \neq -1$ έχουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$.

Προσοχή: $\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$ γιατί

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Έχουμε $\frac{1}{n} \to 0$ και $-\frac{1}{n} \to 0$.

Από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0.$$

Πρόταση:

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

2ο Κριτήριο μη σύγκλισης

Αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη τότε είναι αποκλίνουσα.

Π.χ.

$$a_n = \begin{cases} 2^k, & n = 3k \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad n \geq 1$$

Δείχνουμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ δεν είναι φραγμένη.

Θεωρούμε $M \in \mathbb{R}$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n \in \mathbb{N}^*$ με $n > M$.

Τότε

$$|a_{3n}| = 2^n \geq n > M.$$

Άρα η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ δεν είναι φραγμένη και συνεπώς η ακολουθία είναι αποκλίνουσα.

Αξιοσημείωτα όρια:

1) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $|a| < 1$

ισχύει $a^n \longrightarrow 0$.

π.χ. $\dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 0$

$\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0$

2) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$

γενικότερα αν p είναι πολυώνυμο με $p(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 1$

τότε $\sqrt[n]{p(n)} \to 1$.

π.χ. $\sqrt[n]{n^7 + n^6 + n^2} \to 1$

3) Αν $a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a} \to 1$

π.χ. $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$

$\sqrt[n]{42} \to 1$.

4) Ρητές συναρτήσεις $\frac{p(n)}{q(n)}$

Διαιρούμε με τον μεγιστοβάθμιο όρο αριθμητή και παρονομαστή

π.χ. $\frac{n^3 - n^2 + 5}{6n^4 + n^3 + 1} = \frac{\frac{n^3}{n^4} - \frac{n^2}{n^4} + \frac{5}{n^4}}{\frac{6n^4}{n^4} + \frac{n^3}{n^4} + \frac{1}{n^4}}$

$= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^4}}{6 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{0 - 0 + 5 \cdot 0}{6 + 0 + 0}$

$= \frac{0}{6} = 0$

5) $$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq$$

Χρήση μόνο αυτών που έχουμε πει μέχρι τώρα

$$\leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \longrightarrow \sqrt{0} = 0$$

Άρα $0 \leq \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$

Συνεπώς $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \longrightarrow 0$

Κάνοντας δηλαδή πολλαπλασιασμό και διαίρεση με τη συζυγή παράσταση.

6) Αν $a, b > 0$ τότε

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \longrightarrow \max\{a, b\}$$

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $b \geq a$.

Οπότε $\max\{a,b\} = b$

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \geq \sqrt[n]{b^n} = b$$

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \leq \sqrt[n]{b^n+b^n} = \sqrt[n]{2\cdot b^n} = b\sqrt[n]{2}$$

Άρα $b \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le b\sqrt[n]{2}$

$$\begin{array}{ccc} b & & b\sqrt[n]{2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & & b\cdot 1 = b \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε

$$\sqrt[n]{a^n+b^n} \longrightarrow b$$

7) Όρια με μεταβλητό πλήθος όρων

Εδώ χρησιμοποιούμε συνήθως το Κριτήριο Παρεμβολής.

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}, \quad n \ge 1$$

$$1^n+\dots+n^n \le n^n+\dots+n^n$$

$$= n\cdot n^n$$

$$1^n+\dots+n^n \ge n^n$$

Άρα $n^n \le 1^n+\dots+n^n \le n\cdot n^n$

$$n \le \sqrt[n]{1^n+\dots+n^n} \le \sqrt[n]{n}\cdot n$$

$$1 \le \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n} \le \sqrt[n]{n}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & \sqrt[n]{n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $a_n \to 1$.

Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \geq 1$

Αποδεικνύεται ότι:

a) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\uparrow$ και

β) η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι άνω φραγμένη

Άρα η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό.

Ορίζουμε
$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Αποδεικνύεται ότι $e \simeq 2,71$

περίπου ίσο

Ειδικότερα έχουμε:

$$2 < e < 3.$$

Παραδείγματα:

Θεωρούμε την $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

Τότε $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = a_{2n}$

Αφού $a_n \to e$, τότε $a_{2n} \to e$

Επίσης $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2$

$\longrightarrow e^2$

Ακολουθίες ορισμένες αναδρομικά

Μπορούμε να ορίσουμε μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με <u>αναδρομή</u> ως εξής:

Αρχικά ορίζουμε τον όρο a_1.

Έπειτα ορίζουμε τον όρο a_{n+1} με τη βοήθεια του a_n ή γενικότερα με τη βοήθεια των $a_1, \ldots, a_n$.

Αναδρομή = επαγωγή για ορισμούς

Παράδειγμα:

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$

Μερικοί όροι:

$a_2 = 2 \cdot a_1 \quad (n=1)$

$= 2 \cdot 1 = 2$

$a_3 = 3 a_2 \quad (n=2)$

$= 3 \cdot 2 = 6$

$a_4 = 4 \cdot a_3 \quad (n=3)$

$= 4 \cdot 6$

$= 24$

Ισχύει $a_n = n!$, $n = 1, 2, \ldots$

Αυτός είναι ο αυστηρός ορισμός του $n!$

Ο αναδρομικός ορισμός συνδέεται άρρηκτα με την επαγωγική απόδειξη.

Sos Sos Sos

Παράδειγμα:

(Θέμα Φεβρουάριος 2022)

Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1}.$$

$n \geq 1$

i) Δείξτε με επαγωγή ότι

$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Δείξτε ότι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ↑.

iii) Εξηγήστε γιατί η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

Λύση

i) $n=1$ προφανώς $\frac{1}{2} \leq a_1 \leq 1$

$a_1 = \frac{1}{2}$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ και δείχνουμε ότι $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq 1$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \underset{\text{Ε.Υ.}}{\geq} \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{1}{2} - 1}$$

$\frac{1}{2}\sqrt{5x-1} \uparrow$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3/2} > \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \underset{\text{Ε.Υ.}}{\leq} \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 1 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

ii) α' τρόπος

Με επαγωγή δείχνουμε $a_n \leq a_{n+1}$.

$n=1$: $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot\frac{1}{2} - 1}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3/2} > \frac{1}{2} = a_1$$

Θεωρούμε ότι $a_n \leq a_{n+1}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ και δείχνουμε ότι

$a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

$a_n \leq a_{n+1}$

$\Rightarrow 5a_n \leq 5a_{n+1}$

$\Rightarrow \quad 5a_n - 1 \leq 5a_{n+1} - 1$

$\Rightarrow \quad \sqrt{5a_n - 1} \leq \sqrt{5a_{n+1} - 1}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1} \leq \frac{1}{2}\sqrt{5a_{n+1} - 1}$

$\Rightarrow \quad a_{n+1} \leq a_{n+2}$

<u>β' τρόπος:</u> $\quad a_n \leq a_{n+1}$

$\Leftrightarrow \quad a_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{5a_n - 1}$

$\Leftrightarrow \quad 2a_n \leq \sqrt{5a_n - 1}$

$\Leftrightarrow \quad 4a_n^2 \leq 5a_n - 1 \qquad (a_n \geq 0)$

$\Leftrightarrow \quad 4a_n^2 - 5a_n + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \quad p(a_n) \leq 0$

όπου $\quad p(x) = 4x^2 - 5x + 1$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$

x		$1/4$		1	
$p(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Από το i) $a_n \in [\frac{1}{2}, 1] \subseteq [\frac{1}{4}, 1]$

άρα $p(a_n) \leq 0$.

iii) Η ακολουθία συγκλίνει γιατί είναι φραγμένη και μονότονη.

Θέτουμε $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Τότε $a_{n+1} \longrightarrow a$

Παίρνουμε τη σχέση

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{5a_n - 1}$$

και παίρνουμε όριο $n \to +\infty$ στα δύο σκέλη της.

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{5a - 1} \qquad \geq 0$$

$\Leftrightarrow \quad 2a = \sqrt{5a - 1}$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 = 5a - 1$

$\Leftrightarrow \quad 4a^2 - 5a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad p(a) = 0$ όπου p όπως πιο πάνω

Προκύπτουν δύο ρίζες $a = \frac{1}{4}$ και $a = 1$.

Από το i) έχουμε $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$ άρα $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Άρα η $a = \frac{1}{4}$ απορρίπτεται.

Άρα $a = 1$.

Σύγκλιση ακολουθιών στο $\pm\infty$:

Ορισμός:

Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ στο $\mathbb{R}$.

Λέμε ότι η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ συγκλίνει στο $+\infty$, συμβολικά $a_n \longrightarrow +\infty$ ή $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ αν

για κάθε $M > 0$ ισχύει $a_n > M$ σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$,

ισοδύναμα για κάθε $M>0$ υπάρχει
$n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$
να ισχύει $a_n > M$.

Όμοια λέμε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ συγκλίνει
στο $-\infty$, συμβολικά $a_n \longrightarrow -\infty$
ή $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ αν

για κάθε $M>0$ ισχύει $a_n < -M$
σχεδόν για όλα τα $n \in \mathbb{N}^*$,
ισοδύναμα για κάθε $M>0$ υπάρχει
$n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$
να ισχύει $a_n < -M$.

Το $+\infty$ συμβολίζεται πιο απλά
και με ∞.

Πρόταση:

(Ι) Αν $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ και $c_n \to c \in \mathbb{R}$ τότε:

α) $a_n + b_n \to +\infty$

και $a_n + c_n \to +\infty$

β) $c_n \cdot a_n \to +\infty$ αν $c>0$

και $c_n \cdot a_n \to -\infty$ αν $c<0$

γ) $a_n \cdot b_n \to +\infty$

δ) $\dfrac{1}{a_n} \to 0$.

Όμοια:

(ΙΙ) Αν $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$ και $c_n \to c \in \mathbb{R}$ τότε:

ε) $a_n + b_n \to -\infty$

και $a_n + c \to -\infty$

στ) $c_n \cdot a_n \to -\infty$ αν $c>0$

και $c_n \cdot a_n \to +\infty$ αν $c<0$

ζ) $a_n \cdot b_n \to +\infty$

η) $\dfrac{1}{a_n} \to 0$

Επιπλέον :

(III) θ) Αν $a_n \to 0$ και $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τότε

$$\frac{1}{a_n} \to +\infty$$

ι) Αν $a_n \to 0$ και $a_n < 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τότε $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.

ια) Αν $a_n \to +\infty$ ή $a_n \to -\infty$ τότε $|a_n| \to +\infty$

ιβ) Αν $a_n \to +\infty$ και $b_n \to -\infty$ τότε $a_n \cdot b_n \to -\infty$

Η πιο πάνω πρόταση συνοψίζεται στον ακόλουθο πίνακα, ο οποίος έχει την έννοια <u>μνημονικού</u> <u>κανόνα</u> παρά επέκτασης των γνωστών πράξεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

"Πράξεις" με το άπειρο:

$\infty + \infty = \infty$	$-\infty + (-\infty) = -\infty$
$c + \infty = \infty + c = \infty \quad (c \in \mathbb{R})$	$-\infty + c = c - \infty = -\infty \quad (c \in \mathbb{R})$
$c \cdot \infty = \infty \quad (c>0)$	$c \cdot (-\infty) = -\infty \quad (c>0)$
$c \cdot \infty = -\infty \quad (c<0)$	$c \cdot (-\infty) = \infty \quad (c<0)$
$\infty \cdot \infty = \infty$	$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$
$\frac{1}{\infty} = 0$	$\frac{1}{-\infty} = 0$

$$\frac{1}{0^+} = \infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty \; , \qquad |\pm\infty| = \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty$$

Παραδείγματα:

Γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ και $\frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$

(γιατί $0 \le \frac{1}{2^n} \le n$ για κάθε $n \geq 1$).

Επομένως:

$$-\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{και} \quad -n \longrightarrow -\infty \qquad \left(\frac{1}{0^-} = -\infty\right)$$

$$2^n \longrightarrow +\infty \qquad \left(\frac{1}{0^+} = +\infty\right)$$

$$2^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow +\infty \qquad \left(\begin{matrix}\infty \cdot c = \infty \\ c>0\end{matrix}\right)$$

$$n \cdot \left(-1 + \frac{1}{2^n}\right) \longrightarrow -\infty \qquad \left(\begin{matrix}\infty \cdot c = -\infty \\ c<0\end{matrix}\right)$$

$$n \cdot 2^n \longrightarrow +\infty \qquad n \cdot (-2^n) \longrightarrow -\infty$$

$$(\infty \cdot \infty = \infty \quad \text{και} \quad \infty \cdot (-\infty) = -\infty)$$

Σειρές:

Ορισμός: Δίνεται μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ορίζουμε την ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως εξής:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Δηλαδή $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο αριθμό $s \in \mathbb{R}$ αν ισχύει $s_n \to s$.

Σκεφτόμαστε το $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ σαν ένα «άπειρο άθροισμα» $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται ακολουθία των <u>μερικών</u> <u>αθροισμάτων</u> της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Επίσης ταυτίζουμε μια σειρά με το όριό της (εφόσον αυτό υπάρχει) δηλαδή με το s πιο πάνω.

Με αυτή την ταύτιση έχουμε

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k} .$$

Παραδείγματα:

1) Γεωμετρική σειρά.

Δίνεται $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < 1$.

Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Γνωρίζουμε ότι $\underbrace{x + x^2 + \cdots + x^n}_{S_n} = \frac{x(1-x^n)}{1-x}$

(απόδειξη με επαγωγή)

Επειδή $|x| < 1$ έχουμε $x^n \to 0$

άρα $\frac{x(1-x^n)}{1-x} \to \frac{x \cdot (1-0)}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} .$$

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Θεωρούμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1+1+\dots+(-1)^n$, $n \geq 1$.

$s_1 = -1$, $s_2 = -1+1 = 0$

$s_3 = -1+1-1 = -1$, $s_4 = s_3+1 = 0$

Γενικά ισχύει $s_{2n+1} = -1$

$s_{2n} = 0$

Η ακολουθία $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει δύο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς.
Επομένως δεν συγκλίνει.

Δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ αποκλίνει.

Προσοχή: Στις σειρές δεν μπορούμε να κάνουμε αναδιατάξεις ή ομαδοποιήσεις.

3) Η αρμονική σειρά.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται αρμονική σειρά και αποκλίνει. (!)

Απόδειξη: Θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Αν η σειρά συνέκλινε θα υπήρχε $s \in \mathbb{R}$ με $s_n \to s$.

Άρα $s_{2n} \to s$ και

$$s_{2n} - s_n \to s - s = 0$$

Από την άλλη:

$$s_{2n} - s_n = 1 + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n-\text{όροι}}$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Δηλαδή $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq 1$.

Άτοπο γιατί είπαμε $s_{2n} - s_n \to 0$.

Πρόταση:

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $a_n \to 0$.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.
(π.χ. $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$)

Πρόταση:

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου $p \in \mathbb{R}$,

συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(Για $p = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά που αποκλίνει).

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Πρόταση:

Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

συγκλίνουν τότε και οι σειρές

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n)$, όπου $c \in \mathbb{R}$,

συγκλίνουν και ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

συγκλίνει **απολύτως** αν συγκλίνει

η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Πρόταση Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει (κανονικά).
Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

SOS Κριτήρια Σύγκλισης Σειρών SOS

1) **Κριτήριο σύγκρισης**

Αν $|a_n| \leq b_n$, $n \geq 1$ και αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

Π.χ. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin(n^2)}{2^n}$ συγκλίνει απολύτως.

Γιατί: $\left| \frac{(-1)^n \sin n^2}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ συγκλίνει.

SOS 2) **Το κριτήριο λόγου** (D'Alembert)

Θεωρούμε ότι υπάρχει το όριο

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| .$$

α) Αν $\ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

β) Αν $\ell > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Επίσης αν $\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$ τότε πάλι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Για $\ell = 1$ δεν έχουμε συμπέρασμα.

Π.χ. Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει

$$\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1 \right)$$

Π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!}$$

$= 2 \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ άρα η σειρά συγκλίνει.

3) Κριτήριο ρίζας (Cauchy)

1) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως.

2) Αν $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell \in \mathbb{R}$ με $\ell > 1$ ή $\sqrt[n]{|a_n|} \to +\infty$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Π.χ. 1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ συγκλίνει απολύτως.

Έχουμε $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} - 1 \to 1-1=0$

$0 < 1$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ αποκλίνει.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1.$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας.

4) Κριτήριο Leibniz

Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι φθίνουσα και $a_n \to 0$ τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \cdot a_n\right)$$ συγκλίνει.

Π.χ. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Έχουμε $\frac{1}{n} \to 0$, η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ με $a_n = \frac{1}{n}$ είναι φθίνουσα.

Από το κριτήριο του Leibniz η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ δεν συγκλίνει απολύτως. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)$

5) Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Θεωρούμε $a_n, b_n > 0$ $n \in \mathbb{N}^*$.

A) Αν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$ με $\ell > 0$

τότε είτε και οι δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν, είτε και οι δύο αποκλίνουν.

B) Αν $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ και αν

η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η

σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Γ) Αν $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ και αν

η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει τότε και

η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5}$

Θέτουμε $a_n = \dfrac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5}$ και $b_n = \dfrac{n^2}{n^4} =$

$= \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Τότε $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{n^2+5n-1}{4n^4-2n^2+5} \cdot n^2$

$= \dfrac{n^4+5n^3-n^2}{4n^4-2n^2+5} = \dfrac{1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}}$

$\to \dfrac{1}{4} > 0$

Άρα είμαστε στην Περίπτωση Α) του Κριτηρίου.

Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει

άρα συγκλίνει και η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$

Θέτουμε $a_n = \frac{n+1}{n^2+2}$ και $b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$

$n = 1, 2 \ldots$.

Τότε $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n+1}{n^2+2} \cdot n = \frac{n^2+n}{n^2+2}$

$= \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} \rightarrow 1 > 0$

Άρα είμαστε πάλι στην Περίπτωση A).

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 5}{2^n}$

α' τρόπος: $\frac{4^n}{2^n} - \frac{5}{2^n} \longrightarrow +\infty - 0 = +\infty$

Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ με $a_n = \frac{4^n - 5}{2^n}$ δεν

συγκλίνει στο 0, άρα η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

β' τρόπος: Με το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

$$b_n = \frac{4^n}{2^n} = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Τότε $\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{4^n - 5}{2^n} \cdot \dfrac{1}{2^n}$

$= 1 - \dfrac{5}{4^n} \longrightarrow 1 > 0$

Άρα είμαστε στην περίπτωση 4) του κριτηρίου.

Η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ αποκλίνει

άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

6) <u>Ολοκληρωτικό Κριτήριο</u>

Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $f : [m, +\infty) \to (0, +\infty)$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Τότε η σειρά $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_m^{+\infty} f(x)\,dx$ ορίζεται.

Υπενθύμιση:

$$\int_m^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_m^R f(x)\,dx$$

Παράδειγμα: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

Θεωρούμε την $f: [2,+\infty) \to (0,+\infty)$

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ έτσι που

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n).$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

Από το Ολοκληρωτικό Κριτήριο η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ συγκλίνει αν και μόνο αν ορίζεται $\int_2^{\infty} f(x)\,dx$.

Για $R>0$ έχουμε $\int_2^R f(x)\,dx$

$$= \int_2^R \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_2^R \frac{(\ln x)'}{\ln x}\, dx$$

$$= \ln(\ln x)\Big|_2^R = \ln(\ln R) - \ln(\ln 2)$$

$\xrightarrow{R \to +\infty} +\infty$. Άρα δεν ορίζεται

το $\int_2^\infty f(x)\, dx$ και άρα η σειρά

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ αποκλίνει.