



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

3η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 12/6/2025

Θέμα 1 (Συνδυαστική, 1.6 μον.). (α) Θεωρούμε 500 φιλάθλους, 200 Έλληνες, 150 Τούρκους, 100 Ισπανούς και 50 Γάλλους που ταξιδεύουν από το Λονδίνο (όπου ζουν μόνιμα) στο Abu Dhabi για το Final-4 με 5 διαφορετικές πτήσεις (δεν θα υπάρχουν άλλοι επιβάτες σε αυτές τις πτήσεις). Υποθέτουμε ότι κάθε πτήση έχει 150 αριθμημένες θέσεις. Πόσοι είναι οι διαφορετικοί τρόποι να:

1. ταξιδέψουν οι φιλάθλοι, οι φιλάθλοι είναι διακεκριμένοι και δεν επιτρέπεται να έχουμε φιλάθλους από διαφορετικές χώρες στην ίδια πτήση;
2. μοιράσουμε στους φιλάθλους 400 εισιτήρια για τους ημιτελικούς και 400 εισιτήρια για τους τελικούς, ώστε κάθε φιλάθλος να πάρει το πολύ 1 εισιτήριο για κάθε ημέρα, όλοι οι Έλληνες και όλοι οι Ισπανοί να πάρουν εισιτήρια για τους τελικούς, και όλοι οι Τούρκοι και όλοι οι Γάλλοι να πάρουν εισιτήρια για τους ημιτελικούς; Εδώ θεωρούμε ότι όλοι οι φιλάθλοι είναι διακεκριμένοι και ότι τα εισιτήρια για κάθε ημέρα αφορούν σε αντίστοιχες θέσεις και δεν διακρίνονται μεταξύ τους.

Θέμα 2 (Συνδυαστική, 2.2 μον.). Έστω n θετικός ακέραιος. Σχηματίζουμε τυχαίες πεντάδες (i, j, k, ℓ, m) , με $1 \leq i \leq j \leq k \leq \ell \leq m \leq n$, ως εξής: επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα 5 φυσικούς στο σύνολο $\{1, \dots, n\}$ και τους ταξινομούμε για να σχηματίσουμε μια τυχαία πεντάδα στην επιθυμητή μορφή (π.χ. σκεφτείτε ότι ρίχνουμε τυχαίες “ζαριές” για ένα παιχνίδι που παίζεται με 5 ίδια ζάρια και κάθε ζάρι έχει n πιθανά αποτελέσματα).

1. Πόσες διαφορετικές τέτοιες πεντάδες μπορούμε να σχηματίσουμε;
2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει έναν μόνο φυσικό (δηλ. να είναι της μορφής (i, i, i, i, i) , για κάποιο $i \in \{1, \dots, n\}$).
3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα μια τυχαία πεντάδα να περιέχει (ακριβώς) δύο διαφορετικούς φυσικούς. Εδώ υποθέτουμε ότι $n \geq 2$.

Θέμα 3 (Συνδυαστική, Γεννήτριες Συναρτήσεις, 2.4 μον.). Θεωρούμε μια σχολή ΗΜΜΥ με 200 εγγεγραμμένους φοιτητές σε καθένα από τα 5 έτη σπουδών (άρα έχουμε 1000 φοιτητές συνολικά). Στα πλαίσια μιας διαφημιστικής εκστρατείας, έχουμε 300 (ίδια) κόκκινα και 700 (ίδια) πράσινα μπλουζάκια, τα οποία θα μοιράσουμε στους φοιτητές, ώστε κάθε φοιτητής να πάρει ένα μπλουζάκι.

(α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε τα μπλουζάκια αν θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους;

(β) Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει τους διαφορετικούς τρόπους να μοιράσουμε τα μπλουζάκια, αν σε κάθε έτος πρέπει να μοιράσουμε τουλάχιστον δύο και συνολικά άρτιο πλήθος από κόκκινα και από πράσινα μπλουζάκια, και:

1. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές δεν είναι διακεκριμένοι και το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι πόσα κόκκινα και πόσα πράσινα μπλουζάκια μοιράστηκαν στους φοιτητές κάθε έτους.
2. θεωρήσουμε ότι οι φοιτητές είναι διακεκριμένοι.

Θέμα 4 (Γεννήτριες Συναρτήσεις, 1.8 μον.). (α) Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων να εκφράσουμε δεδομένο φυσικό $n \geq 1$ ως άθροισμα διαφορετικών θετικών φυσικών (π.χ., το 7 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα διαφορετικών θετικών φυσικών με 5 τρόπους: $7, 1+6, 2+5, 3+4$ και $1+2+4$). Να διατυπώσετε την αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο.

(β) Έχουμε 400 γιατρούς που πρόκειται να τοποθετηθούν σε 18 διαφορετικές μονάδες υγείας, ώστε κάθε γιατρός να τοποθετηθεί σε μία μονάδα υγείας. Να διατυπώσετε τη γεννήτρια συνάρτηση και να προσδιορίσετε τον όρο του οποίου ο συντελεστής δίνει το ζητούμενο, αν θεωρήσουμε ότι κάθε μονάδα υγείας πρέπει να πάρει τουλάχιστον έναν και το πολύ 40 γιατρούς, οι γιατροί θεωρούνται διακεκριμένοι και μας ενδιαφέρει πόσους και ποιους γιατρούς θα πάρει κάθε μονάδα υγείας.

Θέμα 5 (Εγκλεισμός - Αποκλεισμός, 2.0 μον.). Η συνάρτηση Euler $\phi(n)$ δίνει το πλήθος των θετικών φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ενός θετικού φυσικού n και είναι σχετικά πρώτοι με το n . Θα χρησιμοποιήσουμε εγκλεισμό-αποκλεισμό για να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ που αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$,

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \quad (1)$$

1. Έστω n θετικός φυσικός που αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, και έστω A_i το σύνολο των θετικών φυσικών μικρότερων του n που είναι πολλαπλάσια του p_i . Να δείξετε ότι

$$\phi(n) = n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

2. Να δείξετε την (1) για κάθε θετικό φυσικό n_2 (αντίστοιχα, n_3) που αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ως $n_2 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ (αντίστοιχα, $n_3 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$).
3. Να γενικεύσετε την απάντησή σας, αποδεικνύοντας την (1) για κάθε φυσικό $n \geq 1$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=24410 μέχρι τα μεσάνυχτα της Πέμπτης 12/6.

Καλή Επιτυχία!