



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιος

2η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 6/5/2025

Θέμα 1 (Αρχή του Περιστερώνα, 1.0 μον.). Θεωρούμε μια ακολουθία N θετικών ακεραίων η οποία περιέχει ακριβώς n διαφορετικούς αριθμούς. Να δείξετε ότι αν $N \geq 2^n$, υπάρχουν τουλάχιστον δύο ή περισσότερες διαδοχικές θέσεις της ακολουθίας τέτοιες ώστε το γινόμενο των αντίστοιχων αριθμών να είναι ένα τέλειο τετράγωνο. Π.χ., στην ακολουθία 7, 5, 3, 5, 7, 5, 3, 7, όπου $n = 3$ και $N = 2^3$, το γινόμενο των έξι τελευταίων διαδοχικών θέσεων είναι τέλειο τετράγωνο.

Θέμα 2 (Γραφήματα - Βασικές Έννοιες, 3.0(+0.6) μον.). Έστω $\mathcal{G}$ η κλάση των απλών μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων $G(V, E)$ που οι βαθμοί των κορυφών τους παίρνουν όλες τις τιμές στο σύνολο $\{1, \dots, |V| - 1\}$. Τυπικά, η κλάση $\mathcal{G}$ ορίζεται ως εξής:

Ένα απλό συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$ με $|V| \geq 2$ κορυφές ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$ αν και μόνο αν έχει δύο μόνο κορυφές $u, u' \in V$ με ίδιο βαθμό $\deg_G(u) = \deg_G(u')$ (για $|V| \geq 3$, όλες οι υπόλοιπες κορυφές του G πρέπει να έχουν βαθμό διαφορετικό από τις u και u' και διαφορετικό μεταξύ τους).

1. Να δείξετε ότι κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$ με $|V| \geq 4$ κορυφές έχει μία μόνο κορυφή βαθμού 1 και μία μόνο κορυφή βαθμού $|V| - 1$. Με βάση αυτό, να διερευνήσετε αν υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$.
2. Να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$ με $|V| \geq 4$ κορυφές, το γράφημα G' που προκύπτει από το G με αφαίρεση των κορυφών βαθμού 1 και $|V| - 1$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{G}$.
3. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι κάθε γράφημα $G \in \mathcal{G}$ έχει μονοπάτι Hamilton (δηλ. απλό μονοπάτι που διέρχεται μία φορά από κάθε κορυφή του γραφήματος).
4. Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών, να δείξετε ότι για κάθε γράφημα $G(V, E) \in \mathcal{G}$, ο κοινός βαθμός των δύο κορυφών $u, u' \in V$ είναι $\deg_G(u) = \deg_G(u') = \lfloor |V|/2 \rfloor$.
5. Να υπολογίσετε το πλήθος κορυφών (ως συνάρτηση του $|V|$) του μεγαλύτερου πλήρους υπογραφήματος και του μεγαλύτερου ανεξάρτητου συνόλου ενός γραφήματος $G(V, E) \in \mathcal{G}$, αν (i) το $|V|$ είναι άρτιος, και (ii) το $|V|$ είναι περιττός. Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.
6. Να περιγράψετε τη μορφή που έχουν τα γραφήματα της κλάσης $\mathcal{G}$ για άρτιο και περιττό αριθμό κορυφών. Π.χ., μπορείτε να περιγράψετε τη μορφή των γραφημάτων της κλάσης $\mathcal{G}$ με 100 και με 101 κορυφές. Να προσδιορίσετε ακόμη τον χρωματικό αριθμό (ως συνάρτηση του $|V|$) κάθε $G(V, E) \in \mathcal{G}$.

Θέμα 3 (Διμερή Γραφήματα, Δέντρα, 1.7 μον.). (α) Να δείξετε ότι για κάθε (απλό μη κατευθυνόμενο) συνεκτικό διμερές γράφημα $G(V, E)$, υπάρχει μια μοναδική διαμέριση των κορυφών του V σε δύο ανεξάρτητα σύνολα. Πόσες διαφορετικές διαμερίσεις υπάρχουν αν το G έχει $k \geq 2$ συνεκτικές συνιστώσες;

(β) Έστω $n \geq 2$ θετικοί ακέραιοι $d_1, \dots, d_n$. Να δείξετε ότι $d_1 + \dots + d_n = 2(n - 1)$ αν και μόνο αν υπάρχει δέντρο T με n κορυφές και βαθμούς κορυφών $d_1, \dots, d_n$.

Θέμα 4 (Κύκλωμα Euler, Κύκλος Hamilton, 1.8 μον.). (α) Έστω μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα G το οποίο έχει $k \geq 2$ κορυφές περιττού βαθμού. Να δείξετε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να διαμεριστεί σε $k/2$ μονοκονδυλίες που δεν έχουν κοινές ακμές μεταξύ τους.

(β) Ποιο είναι το μέγιστο πλήθος ακμών $m(n)$ που μπορεί να έχει ένα απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές, αν το G έχει κύκλωμα Euler; Να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.

(γ) Να βρείτε απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$ με $|V| \geq 3$ κορυφές που δεν έχει κύκλο Hamilton και στο οποίο κάθε ζευγάρι κορυφών $u, v \in V$ έχει άθροισμα βαθμών $\deg(u) + \deg(v) \geq |V| - 1$.

Θέμα 5 (Επιπεδότητα, Χρωματικός Αριθμός, 2.5 μον.). (α) Έστω $k \geq 3$ φυσικός αριθμός. Θεωρούμε απλό επίπεδο γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές και m ακμές το οποίο δεν έχει κύκλους με μήκος μικρότερο ή ίσο του $k - 1$ (δηλ. αν το G έχει κύκλους, τότε το μήκος κάθε κύκλου στο G είναι μεγαλύτερο ή ίσο του k). Να δείξετε ότι κάθε τέτοιο απλό επίπεδο γράφημα G έχει πλήθος ακμών $m \leq \frac{k}{k-2}(n - 2)$.

(β) Για κάθε φυσικό $n \geq 2$, ορίζουμε το απλό μη-κατευθυνόμενο γράφημα H_n με σύνολο κορυφών $V_n = \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$ και σύνολο ακμών

$$E_n = \{ \{i, i + 1\} : i \in \{0, 1, \dots, 2n - 2\} \} \cup \{ \{2n - 1, 0\} \} \cup \{ \{i, i + n\} : i \in \{0, 1, \dots, n - 1\} \}$$

(i) Να δείξετε ότι το H_n είναι επίπεδο αν και μόνο αν $n = 2$. (ii) Να προσδιορίσετε τον χρωματικό αριθμό των γραφημάτων H_3 , H_4 και H_5 .

(γ) Να δείξετε ότι για τον χρωματικό αριθμό του καρτεσιανού γινομένου κάθε γραφήματος G με το πλήρες γράφημα K_q ισχύει ότι $\chi(G \times K_q) = \max\{\chi(G), q\}$.

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο helios.ntua.gr/mod/assign/view.php?id=23366 μέχρι τα μεσάνυχτα της Τρίτης 6/5.

Καλή Επιτυχία!