



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Διακριτά Μαθηματικά

Διδάσκοντες: Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου

1η Γραπτή Εργασία, Ημ/νια Παράδοσης: 1/4/2025

Θέμα 1 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 0.6+0.6+1.0(+0.8) μον.).

1. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F} = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ όλων των λογικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού τους φυσικούς αριθμούς. Είναι το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
2. Δύο λογικές συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{F}$ είναι *πρακτικά ταυτόσημες*, αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq m$, $f(n) = g(n)$ (δηλ. οι f και g ταυτίζονται από ένα σημείο m και μετά). Να δείξετε ότι η σχέση $E \subseteq \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, με $(f, g) \in E$ αν οι f και g είναι πρακτικά ταυτόσημες, είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{F}$.
3. Ως σχέση ισοδυναμίας, η E διαμερίζει το $\mathcal{F}$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Θεωρούμε ότι για κάθε κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f \subseteq \mathcal{F}$, έχει επιλεγεί μοναδικός αντιπρόσωπος $f \in \mathcal{E}_f$ και η $\mathcal{E}_f$ αποτελείται από τις λογικές συναρτήσεις g που είναι πρακτικά ταυτόσημες με την f . Είναι μια τέτοια κλάση ισοδυναμίας $\mathcal{E}_f$ αριθμήσιμο σύνολο; Είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες η E διαμερίζει το $\mathcal{F}$ αριθμήσιμο σύνολο;
4. **(bonus)** Θεωρούμε μια άπειρη ακολουθία κρατούμενων που έχουν παραταχθεί στην ευθεία των φυσικών αριθμών (με βάση τον μοναδικό αριθμό μητρώου $0, 1, 2, \dots$ του καθενός). Κάθε κρατούμενος φοράει ένα καπέλο, πράσινο ή κόκκινο. Οι κρατούμενοι έχουν παραταχθεί ώστε να μπορούν να βλέπουν το χρώμα του καπέλου όλων των (άπειρων!) κρατούμενων με μεγαλύτερο αριθμό μητρώου, αλλά δεν μπορούν να δουν το χρώμα του δικού τους καπέλου και του καπέλου των κρατούμενων με αριθμό μητρώου μικρότερο από τον δικό τους. Οι κρατούμενοι θα απελευθερωθούν αν όλοι, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος τους, καταφέρουν να μαντέψουν σωστά το χρώμα του καπέλου που φορούν. Κάθε κρατούμενος μπορεί να απομνημονεύσει άπειρη πληροφορία και επιτράπηκε προσενεννόηση μεταξύ τους (πριν οι φύλακες τους φορέσουν τα καπέλα τους). Να διατυπώσετε πρωτόκολλο στο οποίο μπορούν να συμφωνήσουν οι κρατούμενοι και το οποίο εξασφαλίζει την απελευθέρωσή τους. Σχολιάστε τον όγκο πληροφορίας που χρειάζεται να απομνημονεύσουν οι κρατούμενοι στο πρωτόκολλό σας;

Θέμα 2 (Διαδικασίες Απαρίθμησης, 1.8 μον.). Έστω αλφάβητο Σ και πεπερασμένο σύνολο γλωσσών $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_n\}$ στο Σ . Θεωρούμε ότι κάθε γλώσσα $L_i \in \mathcal{L}$ αποτελείται από άπειρες συμβολοσειρές. Για κάθε γλώσσα L_i , δίνεται αλγόριθμος A_i που με είσοδο συμβολοσειρά $x \in \Sigma^*$, απαντάει $A_i(x) = 1$, αν $x \in L_i$, και $A_i(x) = 0$, διαφορετικά. Γνωρίζουμε ακόμη κατά πόσον $L_i \subset L_j$ για κάθε ζευγάρι γλωσσών με $1 \leq i, j \leq n$. Γνωρίζοντας όλα αυτά, η Αλίκη και ο Βασίλης αποφασίζουν να παίξουν το παρακάτω παιχνίδι:

- Η Αλίκη επιλέγει (κρυφά από τον Βασίλη) μια από τις γλώσσες του $\mathcal{L}$. Έστω $L_a \in \mathcal{L}$ η γλώσσα που επιλέγει η Αλίκη. Η Αλίκη υλοποιεί μια αυθαίρετη διαδικασία απαρίθμησης E_a των στοιχείων της L_a .
- Σε κάθε χρονική στιγμή $t = 0, 1, 2, \dots$, η Αλίκη δίνει στο Βασίλη την επόμενη συμβολοσειρά x_t της L_a σύμφωνα με τη διαδικασία απαρίθμησης E_a που έχει υλοποιήσει (και η οποία δεν είναι γνωστή στον Βασίλη).
- Ο Βασίλης, βασιζόμενος στο σύνολο συμβολοσειρών $S_t = \{x_0, \dots, x_t\}$ που έχει λάβει από την Αλίκη μέχρι τη στιγμή t , υπολογίζει μια γλώσσα $L_t \in \mathcal{L}$ και απαντάει στην Αλίκη με οποιαδήποτε συμβολοσειρά $y_t \in L_t \setminus S_t$. Θα λέμε ότι η επιλογή του Βασίλη είναι *επιτυχημένη* αν $y_t \in L_a$, και *αποτυχημένη* διαφορετικά. Η Αλίκη δεν ενημερώνει ποτέ τον Βασίλη για το αν η επιλογή του είναι επιτυχημένη ή αποτυχημένη.
- Ο Βασίλης κερδίζει το παιχνίδι αν και μόνο αν η στρατηγική του μπορεί να εγγραφεί την ℓ -οστή χρονική στιγμή t^* τέτοιας ώστε όλες οι επιλογές του από τη στιγμή t^* και μετά είναι επιτυχημένες¹.

¹ Παρατηρούμε ότι ο Βασίλης μπορεί να μην μάθει ποτέ ποια είναι η στιγμή t^* μετά την οποία έχει μάθει να “μιλάει” σωστά τη γλώσσα που επέλεξε η Αλίκη. Επίσης μπορεί να μην μάθει ποτέ ποια είναι η γλώσσα L_a που επέλεξε η Αλίκη (και έμαθε να “μιλάει” σωστά). Αν όμως ακολουθήσει σωστή στρατηγική, ο Βασίλης μπορεί να είναι σίγουρος (και να αποδείξει στην Αλίκη) ότι κερδίζει το παιχνίδι.

Να διατυπώσετε μια στρατηγική η οποία εγγυάται ότι ο Βασίλης κερδίζει το παιχνίδι (και να αποδείξετε ότι η στρατηγική σας εγγυάται νίκη του Βασίλη). Πως θα μπορούσε να γενικευθεί η στρατηγική σας για αριθμήσιμα άπειρο σύνολο γλωσσών $\mathcal{L}$; Αν είναι εφικτό, να γενικεύσετε τη στρατηγική σας και να εξηγήσετε γιατί εγγυάται νίκη του Βασίλη. Αν όχι, να εξηγήσετε (με τεχνικούς όρους) το σημείο που δυσκολεύει τη γενίκευση.

Θέμα 3 (Κατηγορηματική Λογική, 2.5 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα M και I και διμελή κατηγορηματικά σύμβολα P και L . Ερμηνεύουμε αυτή τη γλώσσα στο σύμπαν που αποτελείται από την ένωση του συνόλου των μουσικών (βλ. π.χ., μαθητές ενός ωδείου) και του συνόλου των μουσικών οργάνων, με το $M(x)$ να δηλώνει ότι “ο x είναι μουσικός”, το $I(x)$ να δηλώνει ότι “το x είναι μουσικό όργανο”, το $P(x, y)$ να δηλώνει ότι “ο (μουσικός) x παίζει το (όργανο) y ”, και το $L(x, y)$ να δηλώνει ότι “ο (μουσικός) x συμπαθεί τον (μουσικό) y ” (για διευκόλυνση, μπορείτε να θεωρήσετε ότι η τελευταία σχέση είναι συμμετρική, δηλ. για κάθε ζευγάρι μουσικών x, y , $L(x, y)$ αν και μόνο αν $L(y, x)$). Σε αυτή την ερμηνεία, να γράψετε τύπους που δηλώνουν ότι:

1. Το ελάχιστο πλήθος οργάνων που παίζει κάποιος μουσικός είναι δύο.
2. Υπάρχουν δύο μουσικοί που δεν συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει όργανο που παίζουν και οι δύο.
3. Αν δύο μουσικοί παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα, τότε συμπαθεί ο ένας τον άλλο.
4. Υπάρχουν δύο μουσικοί που συμπαθεί ο ένας τον άλλο και υπάρχει ένα όργανο που παίζουν και οι δύο, αλλά δεν παίζουν ακριβώς τα ίδια όργανα.
5. Αν ένας μουσικός παίζει όλα τα όργανα, εκτός ίσως από ένα, τότε τον συμπαθούν όλοι οι άλλοι μουσικοί.

Θέμα 4 (Κατηγορηματική Λογική, 1.2+1.3 μον.). (α) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο P . Έστω οι τύποι:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x \exists y (x \neq y \wedge P(x, y)) \\ \varphi_2 &= \forall x \exists y (x \neq y \wedge P(y, x)) \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)) \\ \varphi_4 &= \forall x \forall y (P(x, y) \wedge P(y, x) \rightarrow x = y)\end{aligned}$$

1. Έστω η πρόταση $\psi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \varphi_4$. Να διατυπώσετε μια ερμηνεία στην οποία η πρόταση ψ αληθεύει και μια άλλη ερμηνεία στην οποία η πρόταση ψ δεν αληθεύει. Και για τις δύο ερμηνείες, να θεωρήσετε σύμπαν με τουλάχιστον 6 στοιχεία. (0.5 μον)
2. Να δείξετε ότι η πρόταση $\chi = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \rightarrow \neg \varphi_4$ αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία του P σε πεπερασμένο σύμπαν. (0.7 μον)

(β) Θεωρούμε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q . Έστω οι τύποι:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \forall x Q(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z (Q(x, z) \rightarrow Q(x, y) \vee Q(y, z)) \\ \psi_2 &= \forall x \forall y (Q(x, y) \vee Q(y, x)) \\ \psi_3 &= \exists x \forall y Q(x, y)\end{aligned}$$

1. Να δείξετε ότι ο τύπος $\psi_1 \rightarrow \psi_2$ είναι λογικά έγκυρος. (0.35 μον.)
2. Να δείξετε ότι ο τύπος $\psi_1 \rightarrow \psi_3$ δεν είναι λογικά έγκυρος. (0.35 μον.)
3. Να δείξετε ότι η πρόταση $\psi_1 \rightarrow \psi_3$ αληθεύει για οποιαδήποτε ερμηνεία του Q σε πεπερασμένο σύμπαν. Αν βοηθάει, σκεφθείτε κατευθυνόμενα γραφήματα, όπου το σύμπαν είναι οι κορυφές του γραφήματος και το $Q(x, y)$ δηλώνει την ύπαρξη ακμής από την κορυφή x προς την κορυφή y . (0.7 μον)

Θέμα 5 (Αναδρομικές Σχέσεις, 1.0 μον.). Έστω σύνολο θετικών φυσικών $X = \{w_1, \dots, w_n\}$. Για κάθε σύνολο $S \subseteq X$, συμβολίζουμε με $w(S) = \sum_{w_i \in S} w_i$ το άθροισμα των στοιχείων του S . Θεωρούμε συνάρτηση $C : \{1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, w(X)\} \rightarrow \mathbb{N}$ που ορίζεται ως εξής: για κάθε $k \in \{1, \dots, n\}$ και κάθε $W \in \{0, 1, \dots, w(X)\}$, $C(k, W)$ είναι το πλήθος των υποσυνόλων $S \subseteq \{w_1, \dots, w_k\}$ με άθροισμα στοιχείων $w(S) = W$. Να διατυπώσετε αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό όλων των τιμών $C(k, W)$ της C .

Παράδοση. Οι εργασίες πρέπει να αναρτηθούν στο <https://helios.ntua.gr/course/view.php?id=893> μέχρι τα μεσάνυχτα της Τρίτης 1 Απριλίου.

Καλή Επιτυχία!