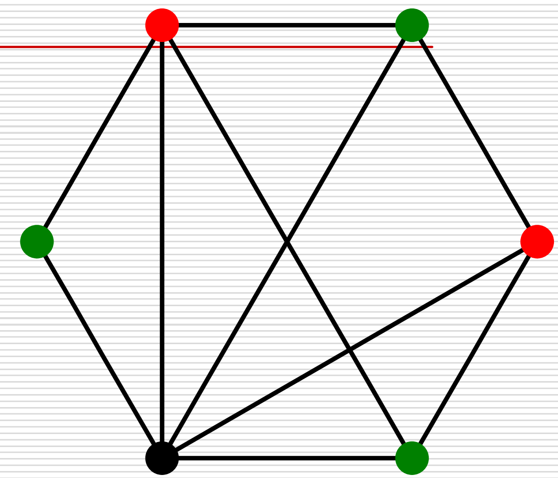
Διμερή Γραφήματα και Ταιριάσματα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

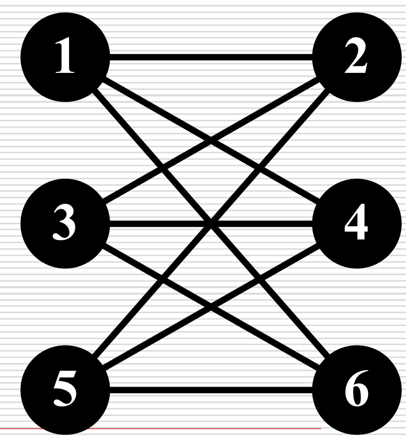
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Διμερές Γράφημα



- Ανεξάρτητο σύνολο: σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε δύο ανεξάρτητα σύνολα.
  - $G(X, Y, E)$: X και Y ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών X και Y.
  - G διμερές ανν δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Κύκλος n κορυφών C_n: διμερές ανν n άρτιος.
  - Μέγιστος #ακμών σε απλό διμερές γράφημα με n κορυφές;
- Πλήρες διμερές γράφημα $K_{n,m}$:
  - Δύο ανεξάρτητα σύνολα με n και m κορυφές.
  - Όλες οι $n \cdot m$ ακμές μεταξύ τους.
  - Π.χ. $K_{3,3}$ έχει 9 ακμές.



Χαρακτηρισμός Διμερών Γραφημάτων

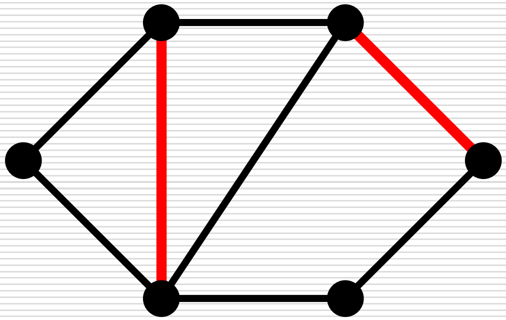
- Γράφημα G(V, E) είναι διμερές ανν το G δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Αν G διμερές με ανεξάρτητα σύνολα X και Y, κάθε κύκλος C έχει τόσες κορυφές του X όσες και του Y: άρα C άρτιου μήκους.
  - Αντίστροφο: έστω ότι G δεν έχει κύκλους περιττού μήκους.
  - Αυθαίρετη κορυφή s και αποστάσεις d(s, u) προς κάθε κορυφή u.
  - X = { u : d(s, u) άρτιος } και Y = { u : d(s, v) περιττός }
  - Έστω ότι δύο κορυφές x, y στο X συνδέονται με ακμή.
  - Έστω w πρώτη κοινή κορυφή συντομότερων x – s και y – s μονοπατιών (υπάρχει πάντα, αφού μονοπάτια καταλήγουν στην s).
  - Αμφότερα συντομότερα μονοπάτια: τμήματα w – s μήκους d(s, w).
  - Άρα d(w, x)+d(w, y) είναι άρτιος και (w, …, x, y, …, w) είναι κύκλος περιττού μήκους – άτοπο!
- Κατασκευαστική απόδειξη με «πιστοποιητικό ορθότητας»!

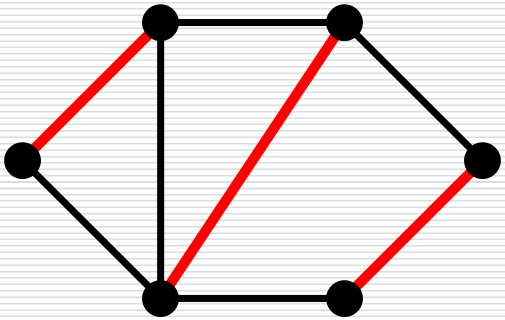
Διμερή Υπογραφήματα

- Κάθε γράφημα G(V, E) με m ακμές περιέχει διμερές υπογράφημα G′(X, Y, E′) με τουλάχιστον m/2 ακμές.
  - Βλ. και πρόβλημα MAX CUT. Ισχύει και για πολυγραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις.
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
  - Κάθε κορυφή στο X με πιθανότητα 1/2, διαφορετικά στο Y.
  - ∀ακμή {u, v}, Prob[{u, v} μεταξύ X και Y] = 1/2.
  - Γραμμικότητα μέσης τιμής: Exp[#ακμών μεταξύ X και Y] = m/2
  - Άρα υπάρχει διαμέριση (X, Y) ώστε #ακμών μεταξύ X και Y ≥ m/2
- Κατασκευαστική απόδειξη:
  - Εξετάζουμε κορυφές μία-μία με τη σειρά. Κορυφή u στο X αν έχει πιο πολλούς γείτονες στο Y από ότι στο X, διαφορετικά στο Y.
  - «Κρατάμε» μεταξύ X και Y τουλάχιστον τόσες ακμές όσες «διώχνουμε». Τυπική απόδειξη με επαγωγή στον #κορυφών.

Ταιριάσματα (Matchings)

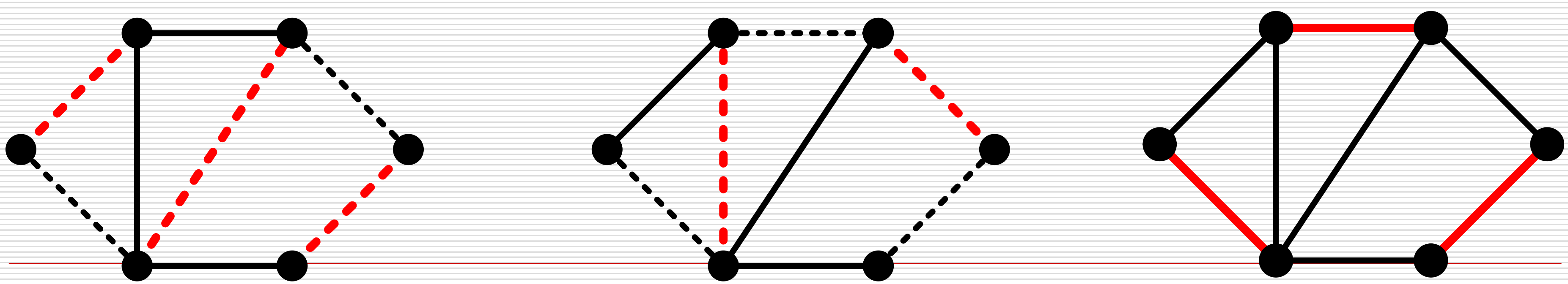
- Ταίριασμα σε γράφημα G(V, E): σύνολο ακμών $M \subseteq E$ χωρίς κοινά άκρα.
  - Κορυφή βαθμού 1 στο M: ταιριασμένη. Διαφορετικά ελεύθερη.
  - M τέλειο ταίριασμα αν όλες οι κορυφές του G ταιριασμένες.
  - M μέγιστο ταίριασμα αν για κάθε ταίριασμα M′, $|M| \geq |M'|$.
  - M μεγιστοτικό (maximal) αν καμία ακμή στο E δεν έχει δύο ελεύθερα άκρα.
  - M μεγιστοτικό ανν ελεύθερες κορυφές αποτελούν ανεξάρτητο σύνολο.





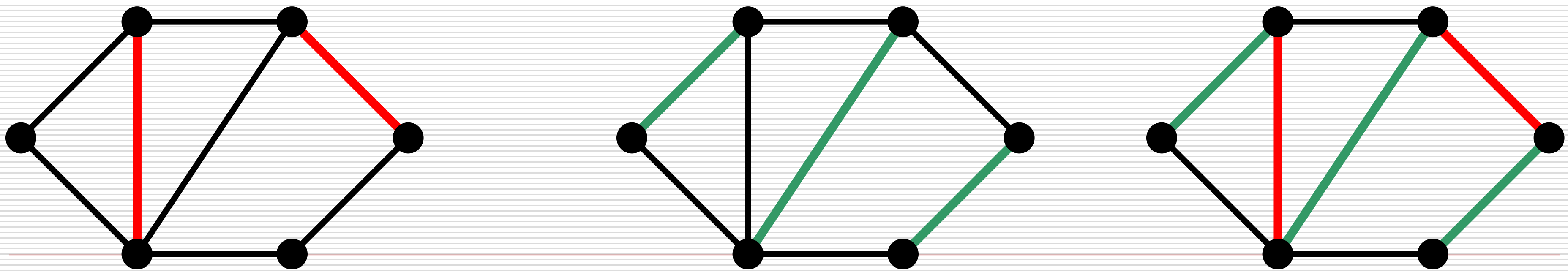
Εναλλακτικά και Επαυξητικά Μονοπάτια

- Έστω ταίριασμα M σε γράφημα G(V, E).
  - Μονοπάτι p στο G είναι εναλλακτικό (alternating) για M αν οι ακμές του εναλλάσσονται εντός και εκτός M.
    - Συμμετρική διαφορά $M \oplus p$ αποτελεί (ή οδηγεί εύκολα σε) ταίριασμα.
  - Μονοπάτι p στο G είναι επαυξητικό (augmenting) για M αν είναι εναλλακτικό και τα άκρα του είναι ελεύθερες κορυφές.
    - $M \oplus p$ αποτελεί ταίριασμα με $|M \oplus p| = |M|+1$.
    - Ταίριασμα M με επαυξητικό μονοπάτι δεν είναι μέγιστο.



Μέγιστα Ταιριάσματα – Θεώρημα Berge

- Ταίριασμα M μέγιστο ανν δεν έχει επαυξητικό μονοπάτι.
  - Έστω M όχι μέγιστο και M′ μέγιστο ταίριασμα, |M′| > |M|.
  - G′(V, M ⊕ M′) έχει ως συνεκτικές συνιστώσες κύκλους άρτιου μήκους (με εναλλάξ ακμές) και εναλλακτικά μονοπάτια για M.
  - Αφού |M′| > |M|, υπάρχει μονοπάτι / συνιστώσα p στο G′ όπου ακμές του M′ είναι περισσότερες από ακμές του M.
  - Το p αρχίζει και τελειώνει με ακμές του M′.
    Άρα άκρα του p είναι ελεύθερα στο M.
  - Μονοπάτι p είναι επαυξητικό για M.



Τέλεια Ταιριάσματα σε Διμερή Γραφήματα – Θεώρημα Hall

- Διμερές γράφημα $G(X, Y, E)$, με $|X| = |Y|$, έχει τέλειο ταίριασμα ανν για κάθε $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ (1).
  - Αν M τέλειο ταίριασμα, $|N(S)| \geq |M(S)| = |S|$, για κάθε $S \subseteq X$.
    - $M(S)$ σύνολο κορυφών ταιριασμένων στο M με κορυφές S.
  - Έστω ότι ισχύει η (1) και M όχι τέλειο ταίριασμα.
    Θα βρούμε επαυξητικό μονοπάτι p για M με βοήθεια της (1).

Τέλεια Ταιριάσματα σε Διμερή Γραφήματα – Θεώρημα Hall

- Διμερές γράφημα G(X, Y, E), με $|X| = |Y|$, έχει τέλειο ταίριασμα ανν για κάθε $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ (1).
  - Έστω x μια ελεύθερη κορυφή στο X ($S_0 = \{x\}$).
  - Αν N(x) έχει ελεύθερη κορυφή y, (x, y) επαυξητικό μονοπάτι.
  - Διαφορετικά, $S_1 = \{x\} \cup M(N(S_0))$, $|S_1| \geq 1+|S_0|$.
  - Αν $N(S_k)$, $k \geq 1$, έχει ελεύθερη κορυφή, σταματάμε.
  - Διαφορετικά, $S_{k+1} = \{x\} \cup M(N(S_k))$ και συνεχίζουμε.
  - Φτιάχνουμε δέντρο εναλλακτικών μονοπατιών με ρίζα τη x.
    - Αν έχει ελεύθερη κορυφή ως φύλλο, **επαυξητικό μονοπάτι**!
  - Όσο συνεχίζουμε, $|S_{k+1}| \geq 1+ |N(S_k)| \geq 1+ |S_k|$, λόγω (1).
    - Διαδικασία πρέπει να ολοκληρωθεί με επαυξητικό μονοπάτι!
  - Κατασκευαστική απόδειξη: τέλειο ταίριασμα ή $S \subseteq X$ με $N(S) < |S|$.

Τέλεια Ταιριάσματα σε Διμερή Γραφήματα

- Αν $G(X, Y, E)$ k-κανονικό διμερές γράφημα, τότε $|X| = |Y|$.
  - $|E| = k|X|$ και $|E| = k|Y|$, άρα $|X| = |Y|$.
- Έστω $G(X, Y, E)$ k-κανονικό διμερές γράφημα με $k \geq 1$. Τότε G έχει τέλειο ταίριασμα.
  - Έχουμε $|X| = |Y|$.
  - Θεωρούμε κάποιο $S \subseteq X$ και τη γειτονιά του $T = N(S) \subseteq Y$.
  - Ακμές που προσπίπτουν στο T τουλάχιστον όσες οι ακμές που προσπίπτουν στο S, ή $|E(T)| \geq |E(S)|$.
  - Άρα $|E(T)| = k|T| \geq |E(S)| = k|S|$, οπότε $|T| \geq |S|$.
  - Δηλαδή, για κάθε $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$.
  - Άρα G έχει τέλειο ταίριασμα λόγω Θ. Hall.