

Επίπεδα Γραφήματα

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

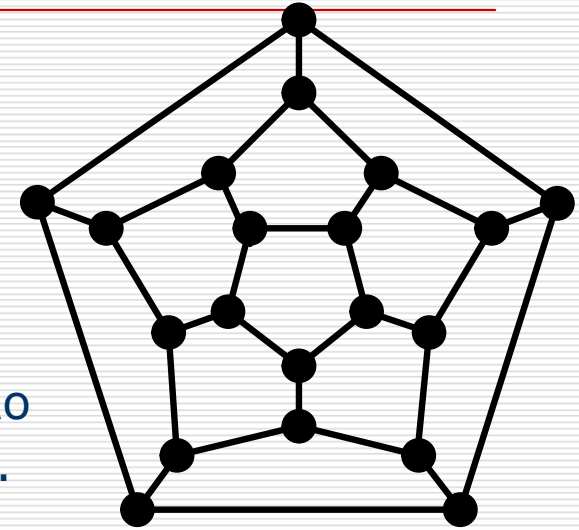
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



Επίπεδα Γραφήματα

- **Επίπεδο** ένα γράφημα που **μπορεί** να ζωγραφιστεί στο επίπεδο χωρίς να τέμνονται οι ακμές του.
- Επίπεδη αποτύπωση ορίζει **όψεις** (faces).
 - Περιοχή επιπέδου που ορίζεται από (απλό) κύκλο και δεν μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερες όψεις.
 - **Εσωτερικές** και **εξωτερική** όψη.
 - $f = \# \text{όψεων επίπεδου γραφήματος.}$
- **Τύπος του Euler** για συνεκτικά επίπεδα γραφ.: $n + f = m + 2$
 - $\# \text{όψεων}$ είναι **αναλλοίωτη ιδιότητα**, δεν εξαρτάται από αποτύπωση!
 - Γενίκευση: $n + f = m + k + 1$, $k = \# \text{συνεκτικών συνιστωσών.}$



Επίπεδα Γραφήματα

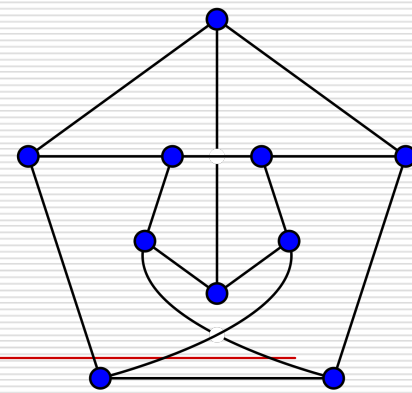
- Μέγιστος αριθμός ακμών απλού επίπεδου γραφήματος.
 - Απλό: κάθε όψη ορίζεται από τουλάχιστον 3 ακμές.
 - Κάθε ακμή «ανήκει» σε μία ή δύο όψεις:
 - Αν ανήκει σε κύκλο: σύνολο δύο όψεων.
 - Διαφορετικά, «ανήκει» σε μία όψη.
 - (Κάθε ακυκλικό γράφημα είναι επίπεδο με μία όψη, την εξωτερική).

$$3f \leq \sum_{f \in \text{όψεις}} \# \text{ακμών}(f) \leq 2m \Rightarrow f \leq 2m/3$$

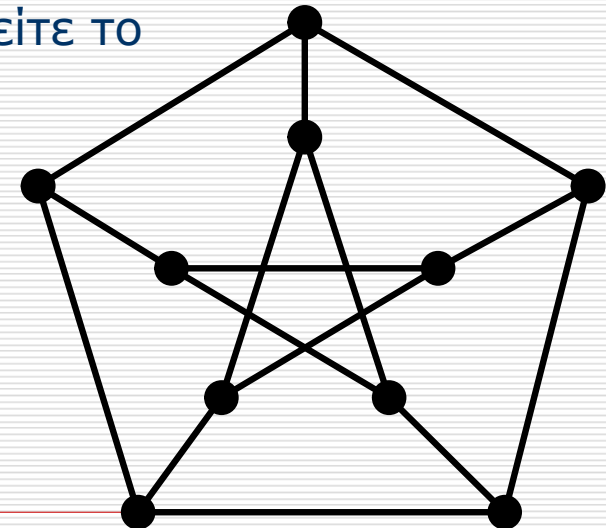
$$m + 2 = n + f \leq n + 2m/3 \Rightarrow m/3 \leq n - 2 \Rightarrow m \leq 3n - 6$$

- Υπάρχει συνεκτικό απλό επίπεδο γράφημα με $m = 3n - 6$.
 - Όλες του οι όψεις είναι τρίγωνα.
- Απλό **διμερές** επίπεδο γράφημα: $m \leq 2n - 4$.

Επίπεδα Γραφήματα

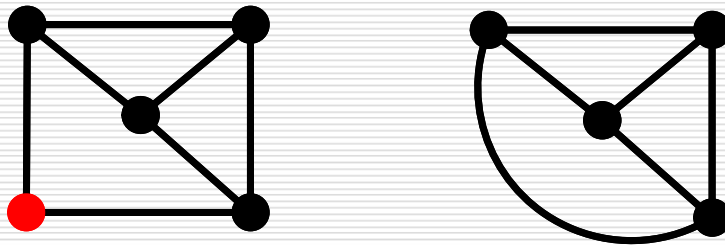


- Άρα αν απλό γράφημα έχει $m > 3n-6$ ($m > 2n-4$ αν διμερές), **δεν** είναι **επίπεδο**.
- Τα K_5 και $K_{3,3}$ **δεν** είναι **επίπεδα**.
- Το **συμπληρωματικό** του γραφ. **Petersen** **δεν** είναι **επίπεδο**.
- Κάθε απλό επίπεδο γράφημα G έχει $\delta(G) \leq 5$.
 - Π.χ. χρησιμοποιείται για να δείξουμε **επαγωγικά** ότι κάθε επίπεδο γράφημα έχει **χρωματικό αριθμό** ≤ 5 .
- Κάθε γράφημα G με $n \geq 11$ κορυφές, είτε το G είτε το **συμπληρωματικό** του **δεν** είναι **επίπεδο**.
- **Crossing number** $cr(G)$: ελάχιστο πλήθος διασταυρώσεων ακμών σε μια επίπεδη αποτύπωση του G .
 - $cr(G) \geq m - 3n + 6$



Ομοιομορφικά Γραφήματα

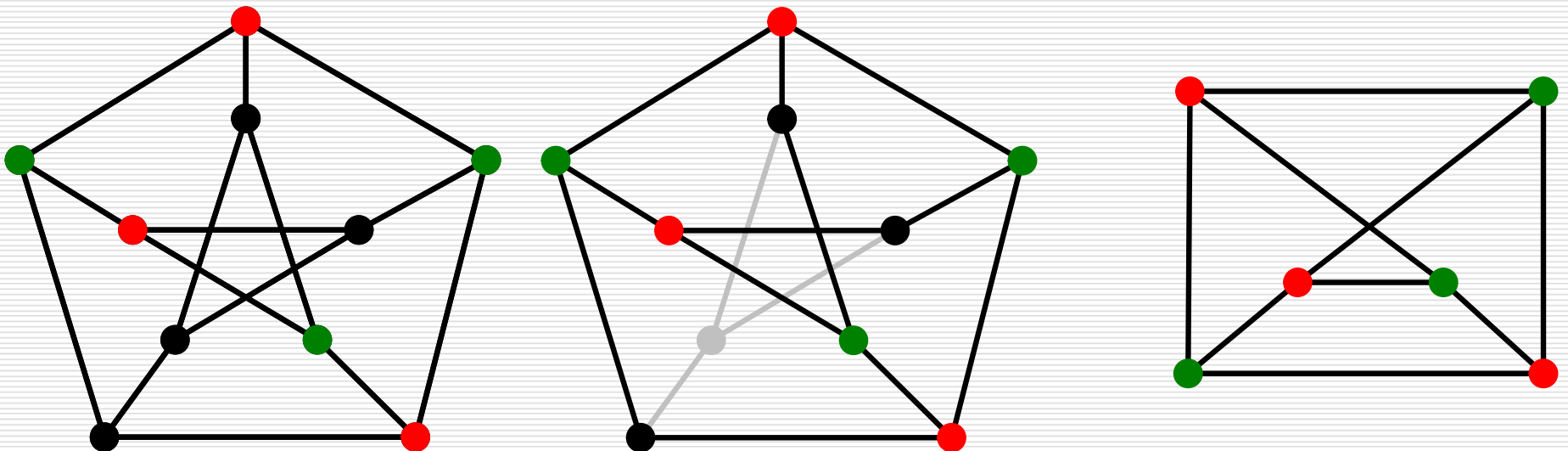
- **Απλοποίηση σειράς:** απαλοιφή κορυφών βαθμού 2 (δεν επηρεάζουν επιπεδότητα).



- Γραφήματα G και H **ομοιομορφικά** αν μπορούν να **καταλήξουν** **ισομορφικά** με διαδοχική εφαρμογή **απλοποιήσεων σειράς**.
 - Ομοιομορφικά μπορεί να «διαφωνούν» σε αναλλοίωτες ιδιότητες, αλλά «συμφωνούν» σε επιπεδότητα.
 - Ομοιομορφικά «συμφωνούν» σε κύκλο Euler και κύκλο Hamilton;

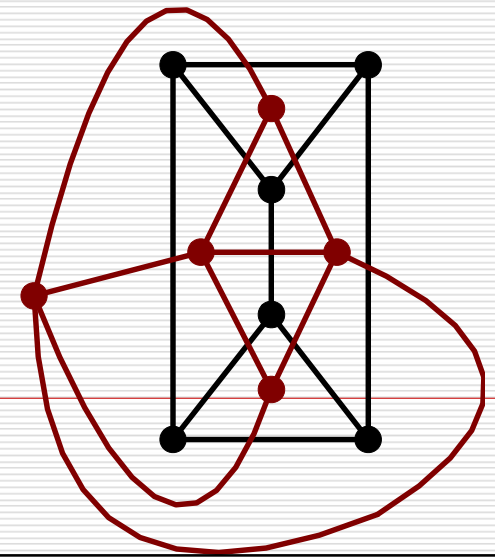
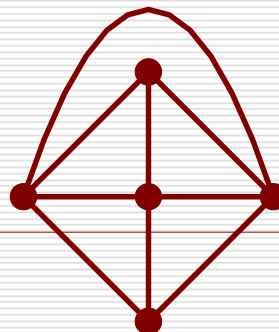
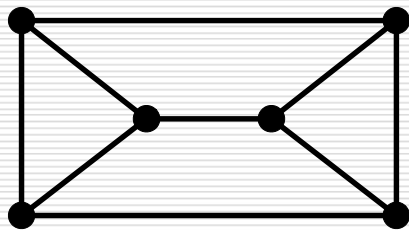
Θεώρημα Kuratowski

- **Θ. Kuratowski:** Γράφημα επίπεδο ανν δεν περιέχει υπογράφημα ομοιομορφικό με K_5 ή $K_{3,3}$.
 - Ένα γράφημα δεν είναι επίπεδο ανν μπορούμε με απλοποιήσεις (διαγραφές κορυφών και ακμών, απλοποιήσεις σειράς) να καταλήξουμε σε K_5 ή $K_{3,3}$.



Δυϊκό Επίπεδο Γραφήματος

- Δυϊκό γράφημα G^* ενός επίπεδου γραφήματος G έχει:
 - Μια κορυφή για κάθε όψη του G .
 - Μια ακμή e^* για κάθε ακμή e του G . Η e^* συνδέει κορυφές που αντιστοιχούν στις όψεις όπου ανήκει η e .
 - Η e^* είναι ανακύκλωση αν η ακμή e είναι γέφυρα.
 - Κάθε όψη του G^* περιλαμβάνει μια κορυφή του G .
 - Το G^* είναι επίπεδο και το δυϊκό του G^* είναι το G .
 - Το G^* μπορεί να μην είναι απλό. Ο βαθμός κάθε κορυφής του G^* είναι ίσος με τον βαθμό της αντίστοιχης όψης του G .
 - Συνεκτικό επίπεδο G είναι διμερές αν G^* έχει κύκλο Euler.



Πλατωνικά Γραφήματα

- **Πλατωνικό** (απλό μη κατευθυνόμενο) γράφημα: **επίπεδο**,
όλες οι **κορυφές βαθμού d** , και όλες οι **όψεις βαθμού h** ($d, h \geq 3$).

