

# Θεωρία Γραφημάτων: Ορολογία και Βασικές Έννοιες

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

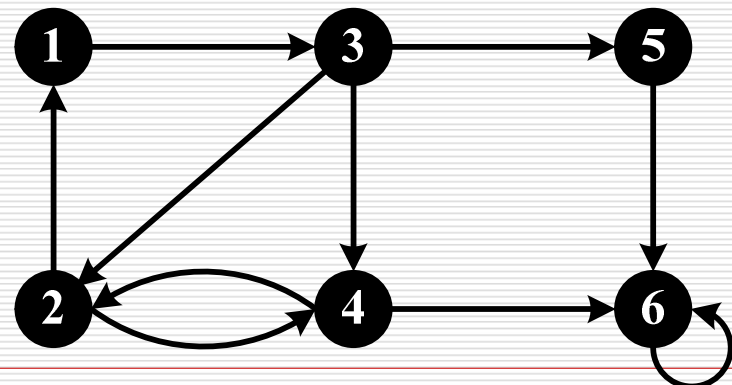
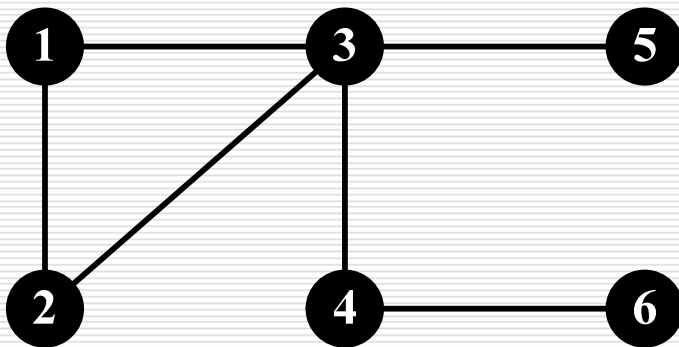
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



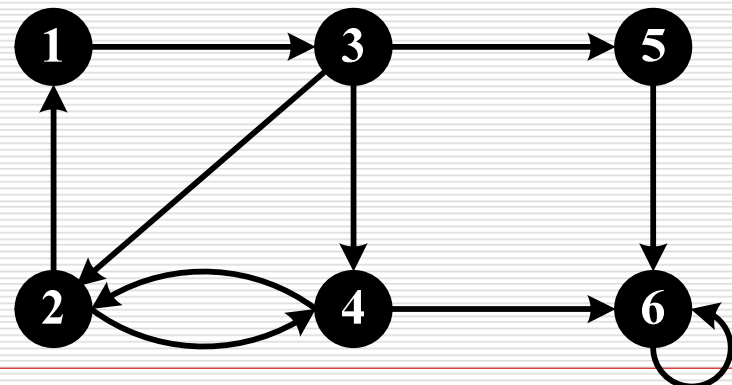
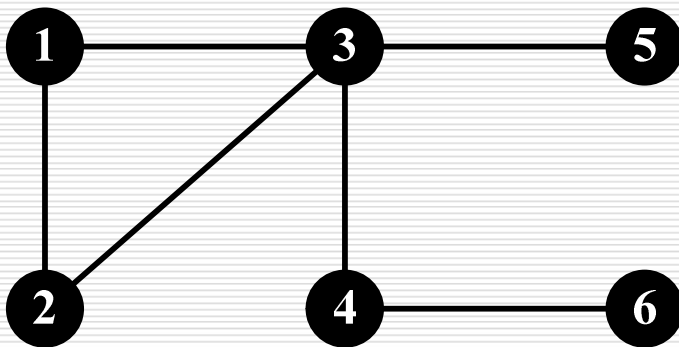
# Γραφήματα

- Μοντελοποίηση πολλών σημαντικών προβλημάτων (π.χ. τηλεπικοινωνιακά, οδικά, ηλεκτρικά, κοινωνικά δίκτυα – συνεκτικότητα, διαδρομές, δρομολόγηση, ανάθεση πόρων, layouts, ...).
- Γράφημα  $G(V, E)$ :  $V$  κορυφές  
 $E$  ακμές (ζεύγη σχετιζόμενων κορυφών)
  - Τάξη  $|V| = |V(G)| = n$  και μέγεθος  $|E| = |E(G)| = m$ .
  - Κατευθυνόμενα και μη-κατευθυνόμενα γραφήματα.
  - Βάρη (μήκη) στις ακμές  $G(V, E, w)$ ,  $w : E \mapsto \mathbb{R}$



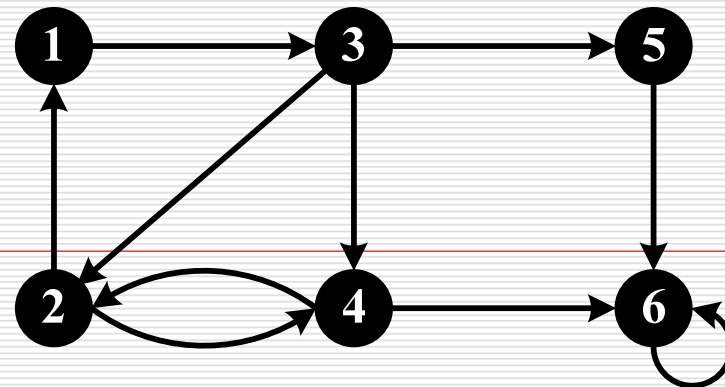
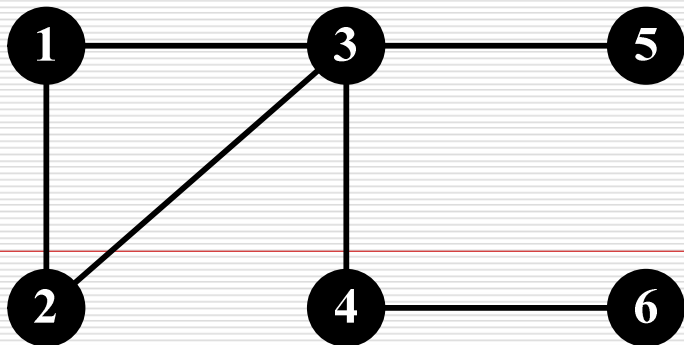
# Γραφήματα

- Δεδομένου γραφήματος  $G(V, E)$ :
  - Γειτονιά κορυφής  $v$ :  $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$ 
    - Επεκταμένη γειτονιά κορυφής  $v$ :  $N^+(v) = N(v) + v$
  - Γειτονιά συνόλου κορυφών  $X$ :  
 $N(X) = \{u \in V \setminus X : \{v, u\} \in E \text{ για κάποια κορυφή } v \in X\}$
- Απλό γράφημα: χωρίς ανακυκλώσεις ή παράλληλες ακμές.
  - Θεωρούμε απλά μη κατευθυνόμενα γραφήματα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.



# Βαθμός Κορυφής

- Βαθμός κορυφής  $v$ :  $\text{deg}(v) = |N(v)|$   
(#ακμών που προσπίπτουν στη  $v$ ).
  - Κατευθυνόμενα: έσω-βαθμός και έξω-βαθμός.
  - Μη-κατευθυνόμενο  $G(V, E)$ :  $\sum_{v \in V} \text{deg}(v) = 2|E|$
  - Κάθε γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.
  - $\delta(G) / \Delta(G)$ : ελάχιστος (μέγιστος) βαθμός κορυφής στο  $G$ .
  - $k$ -κανονικό γράφημα: όλες οι κορυφές βαθμού  $k$ .
- Νδο σε κάθε απλό γράφημα, δύο κορυφές έχουν ίδιο βαθμό.
  - Έχουμε  $n$  κορυφές και  $n-1$  πιθανές τιμές βαθμού για κάθε κορυφή.
  - Πιθανές τιμές είτε  $\{0, 1, \dots, n-2\}$  είτε  $\{1, 2, \dots, n-1\}$ .



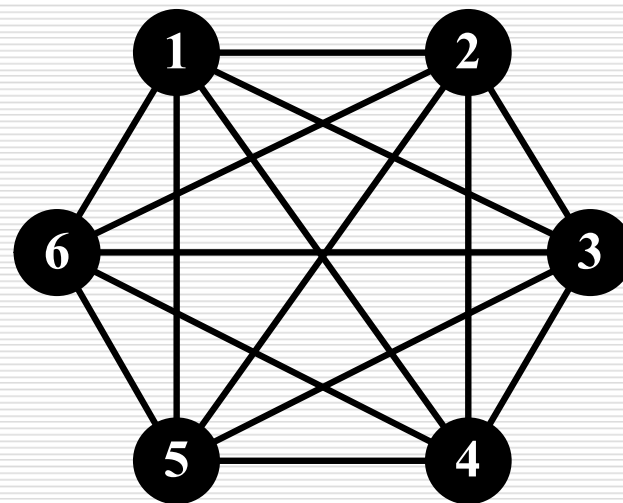
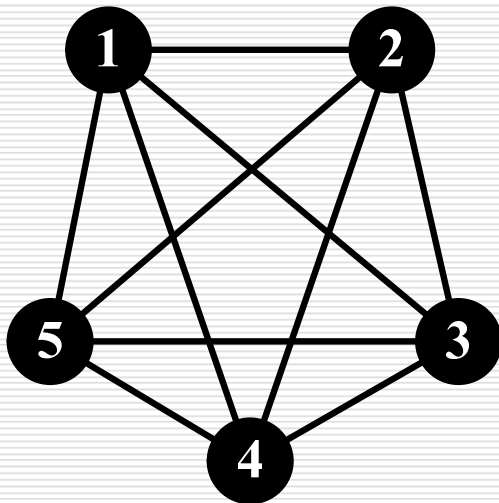
# Παραδείγματα

---

- Υπάρχει(;) απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με:
  - 8 κορυφές: 1 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 4 βαθμού 4, και 1 βαθμού 5.
    - Όχι, άθροισμα βαθμών περιττός (ή ισοδύναμα, περιττό πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό).
  - 6 κορυφές: 2 βαθμού 2, 2 βαθμού 3, 1 βαθμού 4, και 1 βαθμού 6.
    - Όχι, σε κάθε απλό γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές,  $\Delta(G) \leq n - 1$ .
  - 5 κορυφές: 1 βαθμού 2 και 4 βαθμού 4.
    - Όχι, αφού οι 4 κορυφές με βαθμό 4 συνδέονται με όλες τις άλλες, ο ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 4.
  - 9 κορυφές: 1 βαθμού 1, 2 βαθμού 3, 2 βαθμού 4, 1 βαθμού 5, 1 βαθμού 6, και 2 βαθμού 8.
    - Όχι, αφού οι 2 κορυφές με βαθμό 8 συνδέονται με όλες τις άλλες, ελάχιστος βαθμός κορυφής πρέπει να είναι 2.

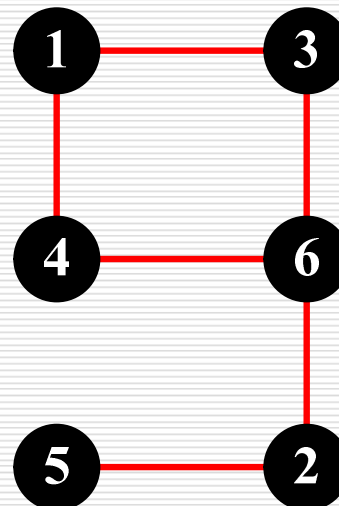
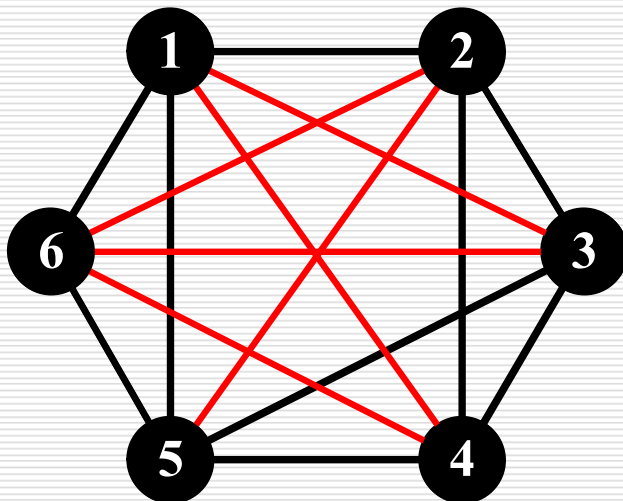
# Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα  $n$  κορυφών:  $K_n$ 
  - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή:  $n(n-1)/2$  ακμές.



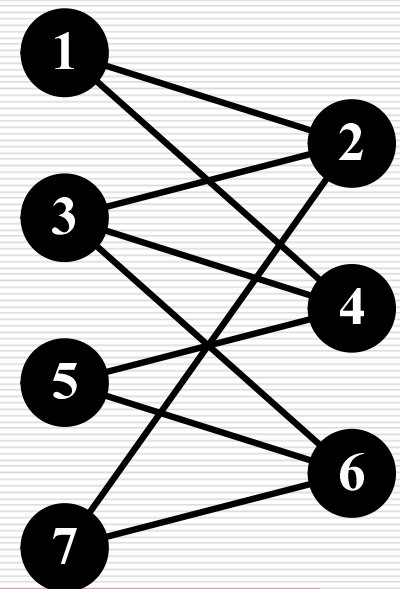
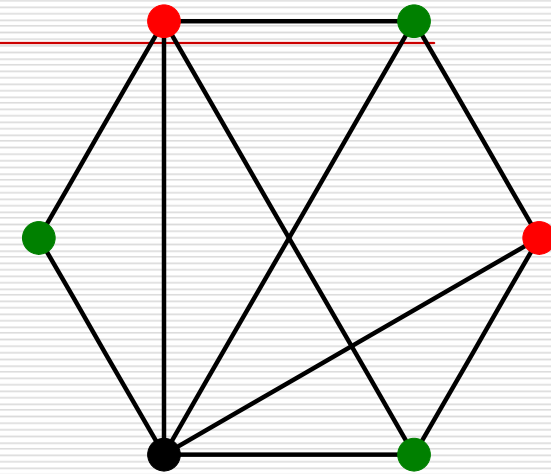
# Πλήρες και Συμπληρωματικό Γράφημα

- Πλήρες γράφημα  $n$  κορυφών:  $K_n$ 
  - Όλα τα ζεύγη κορυφών συνδέονται με ακμή:  $n(n-1)/2$  ακμές.
- Συμπληρωματικό γράφημα  $\bar{G}$  γραφήματος  $G$ .
  - Ίδιο σύνολο κορυφών. Ακμές: όσες δεν υπάρχουν στο  $G$ .
  - Συμπληρωματικό του  $\bar{G}$ : αρχικό γράφημα  $G$ .



# Διμερές Γράφημα

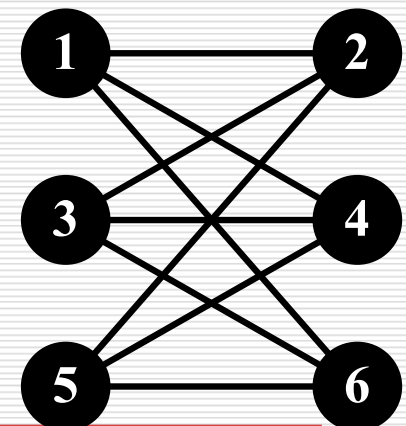
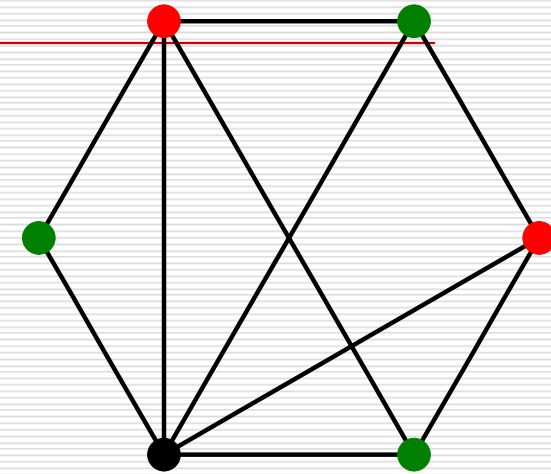
- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε **δύο ανεξάρτητα σύνολα**.
  - $G(X, Y, E)$ :  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών  $X$  και  $Y$ .
  - $G$  διμερές αν **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
  - Κύκλος  $n$  κορυφών  $C_n$ : διμερές αν  **$n$  άρτιος**.





# Διμερές Γράφημα

- **Ανεξάρτητο σύνολο:** σύνολο κορυφών που δεν συνδέονται με ακμή.
- Διμερές γράφημα: υπάρχει διαμέριση κορυφών σε **δύο ανεξάρτητα σύνολα**.
  - $G(X, Y, E)$ :  $X$  και  $Y$  ανεξάρτητα σύνολα, ακμές μόνο μεταξύ κορυφών  $X$  και  $Y$ .
  - $G$  διμερές αν **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
  - Κύκλος  $n$  κορυφών  $C_n$ : διμερές αν  **$n$  άρτιος**.
- Πλήρες διμερές γράφημα  $K_{n,m}$ :
  - Δύο ανεξάρτητα σύνολα με  $n$  και  $m$  κορυφές.
  - Όλες οι  **$n \cdot m$  ακμές** μεταξύ τους.
  - Π.χ.  $K_{3,3}$  έχει 9 ακμές.



# Χαρακτηρισμός Διμερών Γραφημάτων

- Γράφημα  $G(V, E)$  είναι διμερές αν το  $G$  **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
  - Αν  $G$  διμερές με ανεξάρτητα σύνολα  $X$  και  $Y$ , κάθε κύκλος  $C$  έχει τόσες κορυφές του  $X$  όσες και του  $Y$ : άρα  $C$  άρτιου μήκους.
  - Αντίστροφο: έστω ότι  $G$  **δεν έχει κύκλους περιττού μήκους**.
  - Αυθαίρετη κορυφή  $s$  και αποστάσεις  $d(s, u)$  προς κάθε κορυφή  $u$ .
  - $X = \{ u : d(s, u) \text{ άρτιος} \}$  και  $Y = \{ u : d(s, u) \text{ περιττός} \}$
  - Έστω ότι δύο κορυφές  $x, y$  στο  $X$  συνδέονται με ακμή.
  - Έστω  $w$  πρώτη κοινή κορυφή συντομότερων  $x - s$  και  $y - s$  μονοπατιών (υπάρχει πάντα, αφού μονοπάτια καταλήγουν στην  $s$ ).
  - Αμφότερα συντομότερα μονοπάτια: τμήματα  $w - s$  μήκους  $d(s, w)$ .
  - Άρα  $d(w, x) + d(w, y)$  είναι άρτιος και  $(w, \dots, x, y, \dots, w)$  είναι κύκλος περιττού μήκους – άτοπο!
- Κατασκευαστική απόδειξη με «πιστοποιητικό ορθότητας»!

# Παραδείγματα

---

□ Έστω διμερές γράφημα  $G(X, Y, E)$  με  $n$  κορυφές. Νδο:

■  $\sum_{v \in X} \deg(v) = \sum_{v \in Y} \deg(v) = |E|$

□ Κάθε ακμή έχει το ένα άκρο της στο  $X$  και το άλλο στο  $Y$ .

■  $\Delta(G) + \delta(G) \leq n$ .

□ Υποθέτουμε ότι  $|X| \leq |Y|$ .

□ Τότε  $\Delta(G) \leq |Y|$ .

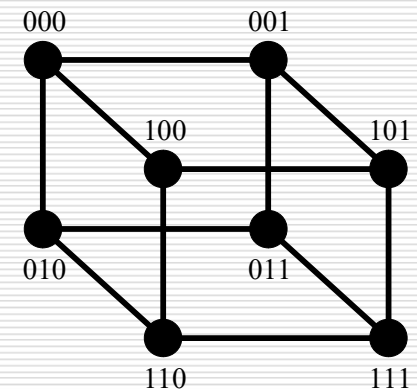
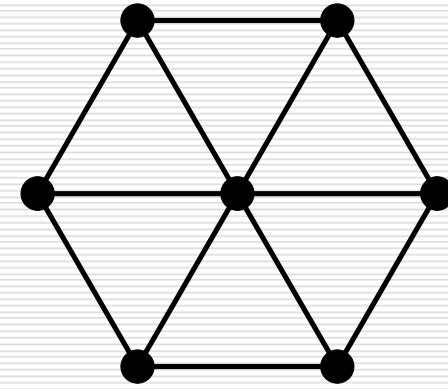
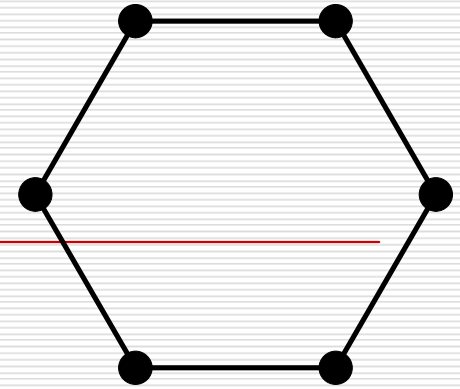
□ Έστω κορυφή  $u \in Y$ . Τότε  $\delta(G) \leq \deg(u) \leq |X|$ .

□ Να δείξετε (με γραφοθεωρητικά επιχειρήματα) ότι:

$$\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + mn$$

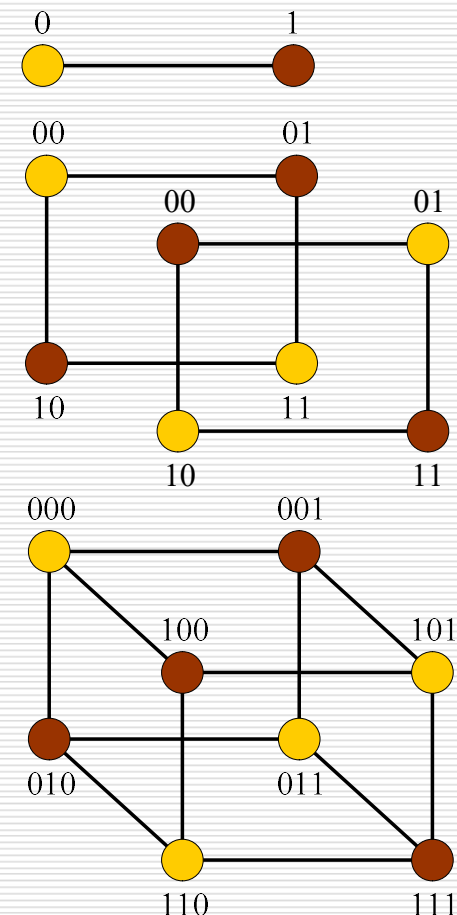
# Ειδικά Γραφήματα

- Πλήρες γράφημα  $n$  κορυφών:  $K_n$
- Πλήρες διμερές γράφημα με  $n$  και  $m$  κορυφές:  $K_{n,m}$ 
  - Αστέρας:  $K_{1,n}$
- Απλό μονοπάτι με  $n$  κορυφές:  $P_n$
- Απλός κύκλος με  $n$  κορυφές:  $C_n$
- Τροχός τάξης  $n$  ( $n+1$  κορυφές):  $W_n$
- Υπερκύβος διάστασης  $n$  ( $2^n$  κορυφές):  $Q_n$  (ή  $Q(n)$ )
  - Μια κορυφή για κάθε δυαδική συμβολοσειρά μήκους  $n$
  - Κορυφές συνδέονται μεταξύ τους αν αντίστοιχες δυαδικές συμβ/ρες διαφέρουν μόνο σε ένα bit
  - Ιδιότητες: κανονικό, διμερές, διάμετρος, ...
  - Αναδρομικός ορισμός (για απόδειξη ιδιοτήτων με επαγωγή).



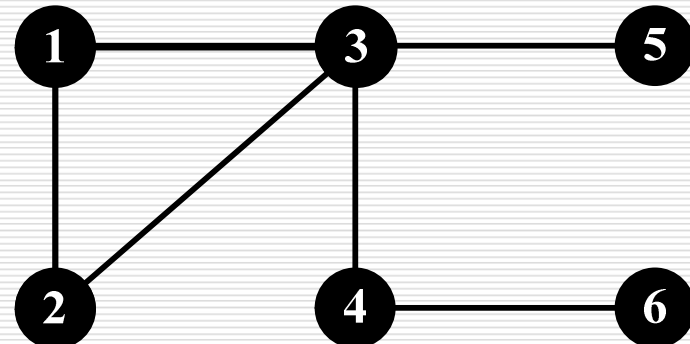
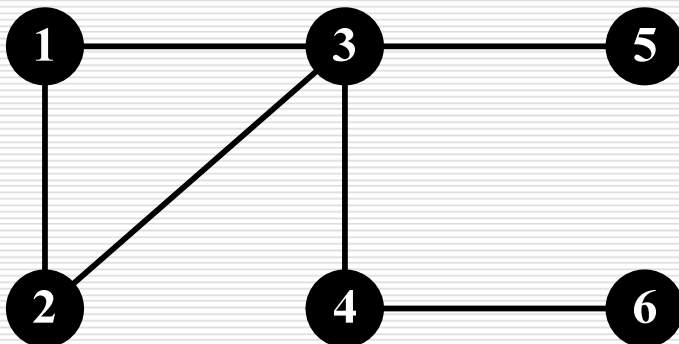
# (Απλή) Άσκηση

- Να δείξετε (με επαγωγή) ότι για κάθε  $n \geq 1$ , ο υπερκύβος  $Q(n)$  διάστασης  $n$  είναι **διμερές** γράφημα.
  - **Βάση:**  $Q(1)$  έχει δύο κορυφές, **διμερές** γράφημα.
  - **Επαγ. Υπόθεση:** Για αυθαίρετο  $n \geq 1$ , υποθέτουμε ότι  $Q(n)$  **διμερές** γράφημα.
  - **Επαγ. Βήμα:** Θδο  $Q(n+1)$  είναι **διμερές** γράφημα.
    - Θεωρούμε δύο **αντίγραφα**  $Q_0(n)$  και  $Q_1(n)$  του υπερκύβου διάστασης  $n$ .
    - Επαγ. υπόθεση:  $Q_0(n)$  και  $Q_1(n)$  **διμερή** γραφήματα.
    - $A_0$  και  $B_0$  **διαμέριση** κορυφών του  $Q_0(n)$ .
    - $A_1$  και  $B_1$  **αντίστοιχη** διαμέριση κορυφών του  $Q_1(n)$ .
    - Από αναδρ. ορισμό,  $Q(n+1)$  προκύπτει **συνδέοντας** **αντίστοιχες** κορυφές (και μόνο) των  $Q_0(n)$  και  $Q_1(n)$ .
    - Άρα  $A_0 \cup B_1$  και  $B_0 \cup A_1$  **ανεξάρτητα** σύνολα, και  $Q(n+1)$  είναι **διμερές** γράφημα.



# Υπο-Γραφήματα

- Υπογράφημα  $G'(V', E')$  του  $G(V, E)$  όταν  $V' \subseteq V$  και  $E' \subseteq E$ .
  - **Επικαλύπτον** (spanning) όταν  $V' = V$ , δηλ. έχει **όλες τις κορυφές** του αρχικού γραφήματος, επιλέγουμε τις **ακμές** που τις συνδέουν.
  - **Επαγόμενο** (induced) όταν  $E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}$  δηλ. έχει **όλες τις ακμές** του αρχικού μεταξύ των επιλεγμένων **κορυφών**.



# Διμερή Υπογραφήματα

- Κάθε γράφημα  $G(V, E)$  με  $m$  ακμές περιέχει διμερές υπογράφημα  $G'(X, Y, E')$  με τουλάχιστον  $m/2$  ακμές.
  - Βλ. και πρόβλημα **MAX CUT**. Ισχύει και για πολυγραφήματα χωρίς ανακυκλώσεις.
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
  - Κάθε κορυφή στο  $X$  με πιθανότητα  $1/2$ , διαφορετικά στο  $Y$ .
  - $\forall$  ακμή  $\{u, v\}$ ,  $\text{Prob}[\{u, v\} \text{ μεταξύ } X \text{ και } Y] = 1/2$ .
  - Γραμμικότητα μέσης τιμής:  $\text{Exp}[\# \text{ακμών μεταξύ } X \text{ και } Y] = m/2$
  - Άρα υπάρχει διαμέριση  $(X, Y)$  ώστε  $\# \text{ακμών μεταξύ } X \text{ και } Y \geq m/2$
- Κατασκευαστική απόδειξη:
  - Εξετάζουμε κορυφές μία-μία με τη σειρά. Κορυφή  $u$  στο  $X$  αν έχει πιο πολλούς γείτονες στο  $Y$  από ότι στο  $X$ , διαφορετικά στο  $Y$ .
  - «Κρατάμε» μεταξύ  $X$  και  $Y$  τουλάχιστον τόσες ακμές όσες «διώχνουμε». Τυπική απόδειξη με επαγωγή στον  $\#$  κορυφών.

# Μεγάλα Ανεξάρτητα Σύνολα

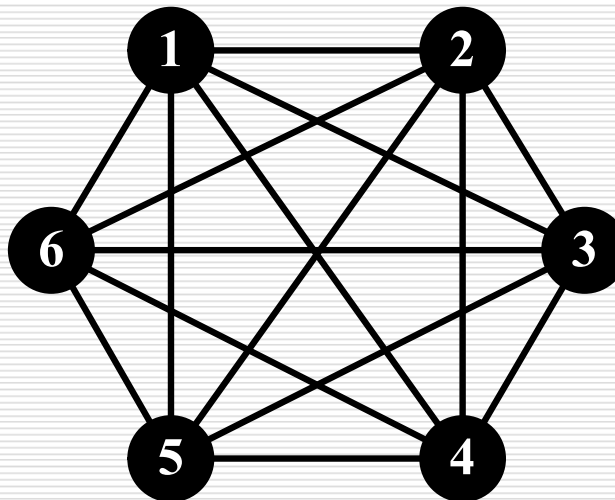
- Κάθε γράφημα  $G(V, E)$  με  $n$  κορυφές και  $m = nd/2$  ακμές, για κάποιο  $d \geq 1$ , έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους  $\geq n/(2d)$
- Απόδειξη με πιθανοτική μέθοδο:
  - Τυχαίο υποσύνολο  $V_1 \subseteq V$ : κάθε κορυφή  $u$  στο  $V_1$  με πιθανότητα  $p$ .
  - $\text{Exp}[|V_1|] = np$  και  $\text{Exp}[|E(G[V_1])|] = mp^2 = ndp^2/2$ .
  - $G[V_1]$  (πιθανότατα) **δεν** είναι ανεξάρτητο σύνολο.
  - Αλλά αφαιρώντας αναμενόμενο  $\#$ κορυφών  $\leq ndp^2/2$  από  $V_1$  (το ένα άκρο κάθε ακμής στο  $G[V_1]$ ) παίρνουμε **ανεξάρτητο σύνολο**.
  - $\text{Exp}[\# \text{κορυφών που μένουν}] \geq np - ndp^2/2 = np(1 - dp/2)$ .
  - Αυτό μεγιστοποιείται για  $p = 1/d$ , και έχουμε  $\text{Exp}[\# \text{κορυφών που απομένουν σε ανεξάρτητο σύνολο}] \geq n/(2d)$
  - Άρα υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο με  $\geq n/(2d)$  κορυφές.



# Αριθμοί Ramsey



- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο  $K_6$  με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό  $K_3$ .
  - Ισοδύναμα, κάθε γράφημα 6 κορυφών έχει είτε τρίγωνο είτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3.
  - **Δεν** ισχύει για το  $K_5$  (κύκλος  $C_5$  δεν έχει ούτε τρίγωνο ούτε ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους 3).



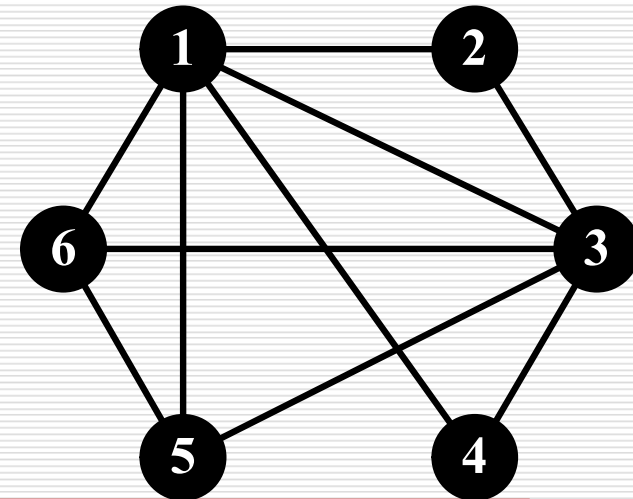
# Αριθμοί Ramsey



- Σε κάθε σύνολο 6 ανθρώπων, είτε 3 φίλοι είτε 3 άγνωστοι.
  - Για κάθε χρωματισμό ακμών στο  $K_6$  με μπλε και κόκκινο, υπάρχει μονοχρωματικό  $K_3$ .
- Υπάρχει άνθρωπος  $a$  που έχει είτε 3 φίλους είτε 3 αγνώστους.
  - Χβτγ. υποθέτουμε ότι  $a$  έχει 3 φίλους:  $\beta, \gamma, \delta$ .
  - Αν στους  $\beta, \gamma, \delta$  δύο φίλοι (π.χ.  $\beta, \gamma$ ): έχουμε 3 φίλους ( $a, \beta, \gamma$ ).
  - Αν στους  $\beta, \gamma, \delta$  όλοι άγνωστοι: έχουμε 3 αγνώστους ( $a, \beta, \gamma$ ).
- $R(m, s) =$  ελάχιστο  $n$  τ.ω για κάθε χρωματισμό ακμών του  $K_n$  με μπλε και κόκκινο, υπάρχει είτε μπλε  $K_m$  είτε κόκκινο  $K_s$ .
  - $R(m, s) = R(s, m)$  και  $R(m, s) \leq R(m - 1, s) + R(m, s - 1)$ .
  - Αντίστοιχα για περισσότερα από 2 χρώματα.
  - $\forall$  χρωματισμό ακμών ενός μεγάλου πλήρους γραφήματος, υπάρχει μονοχρωματικό πλήρες υπογράφημα επιθυμητού μεγέθους.

# Διαδρομές, Μονοπάτια, και Κύκλοι

- Διαδρομή – Μονοκονδυλιά – Μονοπάτι - Κύκλος
  - **Διαδρομή:** ακολουθία «διαδοχικών» ακμών.
    - Π.χ.  $\{2, 1\}, \{1, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{1, 5\}, \{5, 3\}, \{3, 6\}$ .
  - **Μονοκονδυλιά:** διαδρομή χωρίς επανάληψη ακμών.
  - **(Απλό) μονοπάτι:** διαδρομή χωρίς επανάληψη κορυφών (και ακμών).
  - Υπάρχει διαδρομή  $u - v$  αν υπάρχει **μονοπάτι  $u - v$** .
  - **Απόσταση  $d(u, v)$**  (χωρίς και με βάρη): μήκος συντομότερου  $u - v$  μονοπατιού.
  - **Διάμετρος  $D(G)$ :** μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο κορυφών του  $G$ .
  - **Κλειστή διαδρομή** όταν άκρα της ταυτίζονται.
  - Κλειστή μονοκονδυλιά ή **κύκλωμα**.
  - **(Απλός) κύκλος:** μονοπάτι που άκρα του ταυτίζονται («κλειστό» μονοπάτι).



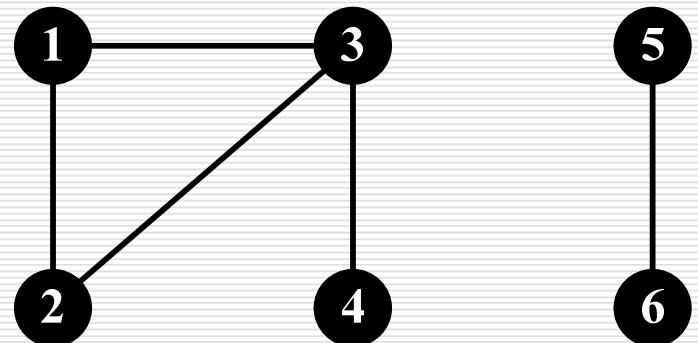
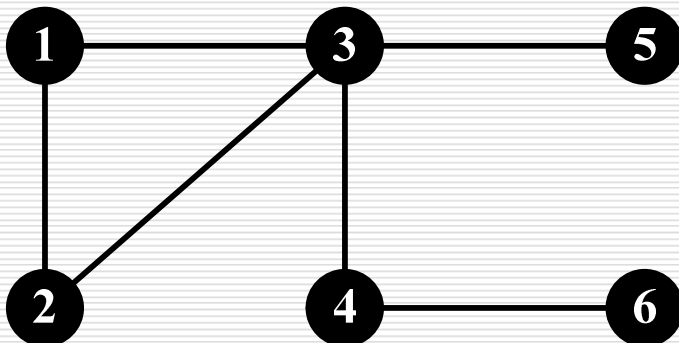
# Παρατηρήσεις και Ιδιότητες

---

- (Απλό) γράφημα  $G$  έχει **μονοπάτι μήκους  $\geq \delta(G)$** .
  - Ξεκινώντας από μια κορυφή, ακολουθούμε **ακμή προς κορυφή που δεν έχουμε επισκεφθεί** ήδη.
  - Τουλάχιστον  $\delta(G)+1$  κορυφές: **μονοπάτι μήκους  $\geq \delta(G)$** .
- Αν  $G$  απλό και  $\delta(G) \geq 2$ , τότε έχει **κύκλο μήκους  $\geq \delta(G)+1$** .
  - Αντίστοιχα με μονοπάτι, αλλά **επιστρέφουμε σε «πιο απομακρυσμένη» κορυφή** που έχουμε ήδη επισκεφθεί.
- Αποστάσεις (με ή χωρίς βάρη) ικανοποιούν την **τριγωνική ανισότητα**:  $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ , για κάθε  $u, v, w$ .
  - $d(u, v)$ : μήκος **συντομότερου  $u - v$  μονοπατιού** (από όλα).
  - $d(u, w) + d(w, v)$ : μήκος **συντομότερου  $u - v$  μονοπατιού που διέρχεται από  $w$** .

# ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα  $G(V, E)$  **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών  $u, v \in V$ , υπάρχει  $u - v$  μονοπάτι.
  - Μη-συνεκτικό γράφημα αποτελείται από **συνεκτικές συνιστώσες**: μέγιστοτικά συνεκτικά υπογραφήματα.
  - **Γέφυρα** (ακμή τομής): ακμή που αν αφαιρεθεί, έχουμε **αύξηση** στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.
    - Ακμή γέφυρα αν δεν ανήκει σε κύκλο.
  - **Σημείο κοπής** (σημείο άρθρωσης): κορυφή που αν αφαιρεθεί, έχουμε **αύξηση** στο πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών.



# (Απλή) Άσκηση

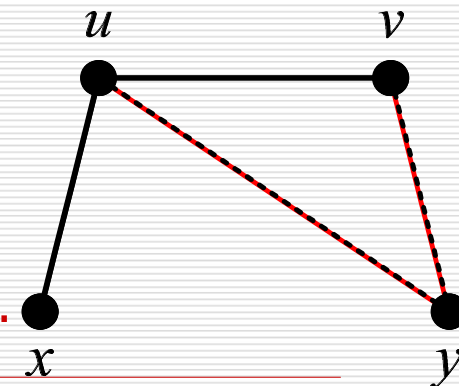
- Κάθε απλό γράφημα  $G$  με  $n$  κορυφές και  $\delta(G) \geq (n - 1)/2$  είναι **συνεκτικό** (και έχει διάμετρο  $\leq 2$ ).
  - Έστω  $u, v$  κορυφές που δεν συνδέονται με ακμή. Θδο  $u, v$  έχουν κοινό γείτονα (άρα συνδέονται με μονοπάτι μήκους 2).
  - Έστω ότι  $u, v$  **δεν** έχουν καμία γειτονική κορυφή κοινή:
    - $u$  έχει τουλ.  $(n - 1)/2$  γείτονες, και
    - $v$  έχει τουλ.  $(n - 1)/2$  γείτονες, όλοι διαφορετικοί.
  - Άρα έχουμε συνολικά:
    - 2 κορυφές (οι  $u$  και  $v$ ) +
    - $(n - 1)/2$  κορυφές (οι γείτονες του  $u$ ) +
    - $(n - 1)/2$  κορυφές (οι γείτονες του  $v$ ) =
  - ... =  $n+1$  κορυφές, **άτοπο!**

# (Απλή) Άσκηση

- Κάθε απλό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές και  $\delta(G) \geq (n+1)/2$  περιέχει τρίγωνο.
  - Έστω  $u, v$  κορυφές που συνδέονται με ακμή (υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή στο γράφημα).
  - Ήδη  $u, v$  έχουν κοινό γείτονα  $w$  (άρα τρίγωνο  $u - w - v$ ).
  - Έστω ότι  $u, v$  **δεν** έχουν καμία κοινή γειτονική κορυφή:
    - $u$  έχει τουλ.  $(n+1)/2$  γείτονες, και
    - $v$  έχει τουλ.  $(n+1)/2$  γείτονες, όλοι διαφορετικοί.
  - Άρα έχουμε συνολικά:
    - 2 κορυφές (οι  $u$  και  $v$ ) +
    - $(n+1)/2 - 1$  κορυφές (οι γείτονες του  $u$  εκτός της  $v$ ) +
    - $(n+1)/2 - 1$  κορυφές (οι γείτονες του  $v$  εκτός της  $u$ ) =
  - ... =  $n+1$  κορυφές, **άτοπο!**

# Άσκηση

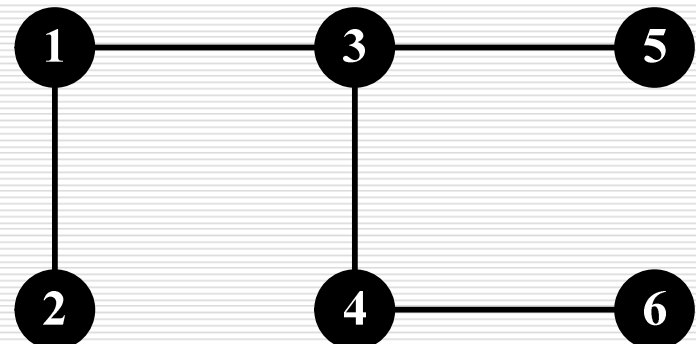
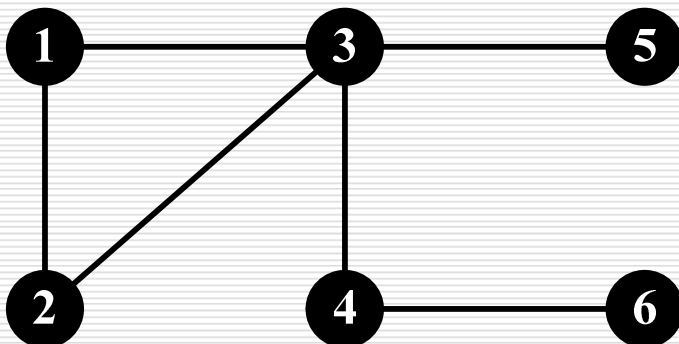
- $G$  μη συνεκτικό γράφημα. Στο συμπληρωματικό του  $G$ , κάθε ζεύγος κορυφών  $u, v$  συνδέεται μονοπάτι μήκους  $\leq 2$ .
  - Αν  $u$  και  $v$  σε διαφορετική συνεκτική συνιστώσα του  $G$ , συνδέονται με ακμή στο συμπληρωματικό.
  - Αν  $u$  και  $v$  σε ίδια συνεκτική συνιστώσα, έστω κορυφή  $w$  σε άλλη συνιστώσα. Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές  $\{u, w\}, \{w, v\}$ .
- $G$  γράφημα με κορυφές  $x, y$  μεταξύ των οποίων το συντομότερο μονοπάτι έχει μήκος τουλάχιστον 4. Στο συμπληρωματικό του  $G$ , κάθε ζεύγος κορυφών  $u, v$  συνδέεται με μονοπάτι μήκους  $\leq 2$ .
  - Έστω  $u, v$  συνδέονται με ακμή στο  $G$  και κάποια, έστω  $u$ , συνδέεται με ακμή με κάποια από τις  $x, y$ , έστω με την  $x$  (διαφορετικά;).
  - Τότε ακμές  $\{u, y\}$  και  $\{v, y\}$  δεν υπάρχουν στο  $G$ . Διαφορετικά  $x - y$  μονοπάτι μήκους  $\leq 3$  στο  $G$ .
  - Στο συμπληρωματικό, υπάρχουν ακμές  $\{u, y\}, \{y, v\}$ .





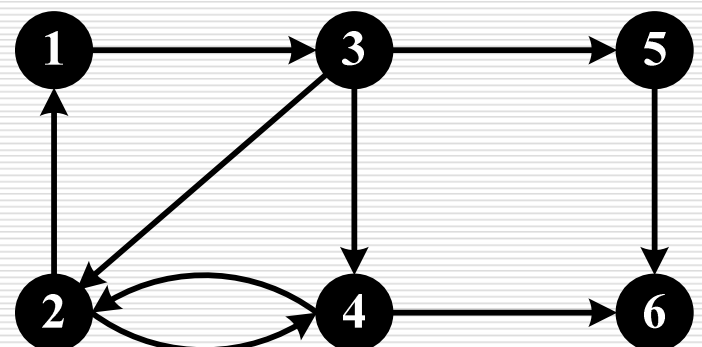
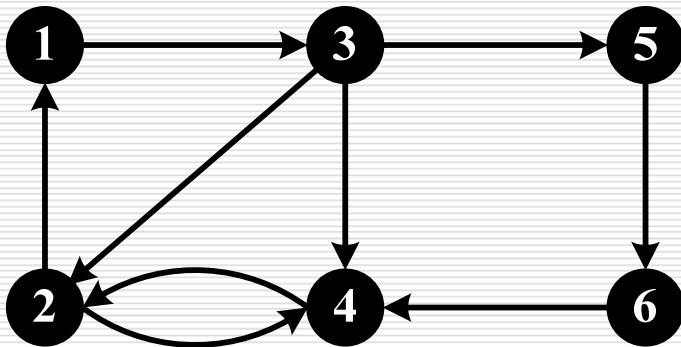
# ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Μη-κατευθυνόμενο) γράφημα  $G(V, E)$  **συνεκτικό** αν για κάθε ζευγάρι κορυφών  $u, v \in V$ , υπάρχει  $u - v$  μονοπάτι.
- Γράφημα  $G$  **συνεκτικό** αν έχει επικαλύπτον υπογράφημα που είναι δέντρο (spanning tree, **συνδετικό δέντρο**).
  - **Δέντρο**: συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους.
- Γράφημα  $G(V, E)$  **συνεκτικό** αν για κάθε μη κενό  $S \subset V$ , υπάρχει **ακμή** που συνδέει **κορυφή του  $S$**  με **κορυφή του  $V \setminus S$** .



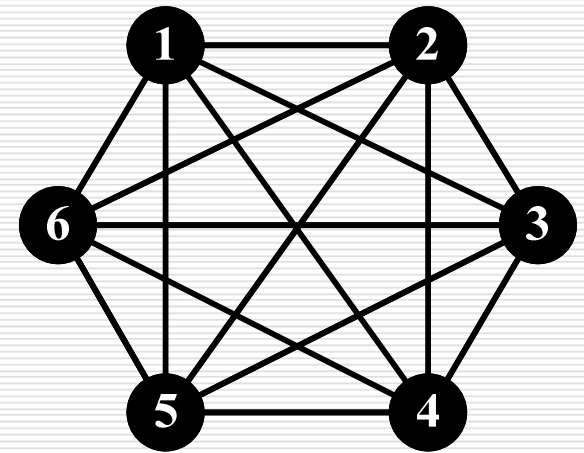
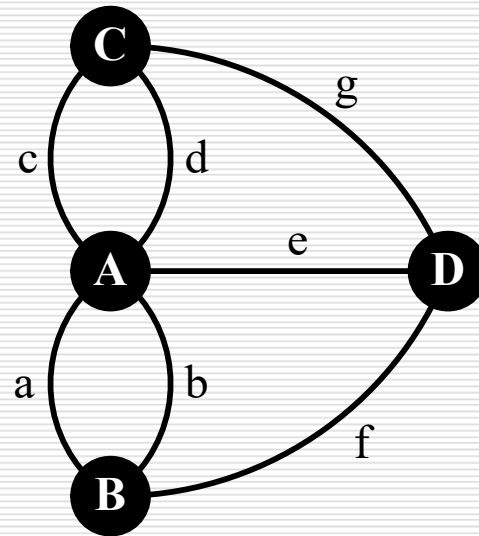
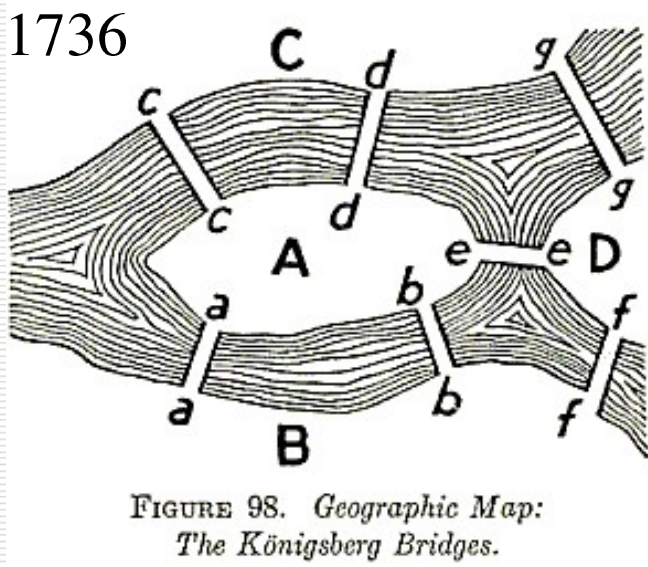
# ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

- (Κατευθυνόμενο) γράφημα  $G(V, E)$  **ισχυρά συνεκτικό** αν  $\forall u, v \in V$ , υπάρχουν  $u - v$  και  $v - u$  μονοπάτια.
  - Για κάθε ζευγάρι κορυφών ισχυρά συνεκτικού γραφήματος, υπάρχει κυκλική διαδρομή που τις περιλαμβάνει.
  - Αν ένα κατευθυνόμενο γράφημα δεν είναι ισχυρά συνεκτικό, διαμερίζεται σε ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες:
    - Μεγιστοτικά ισχυρά συνεκτικά υπογραφήματα.



# Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

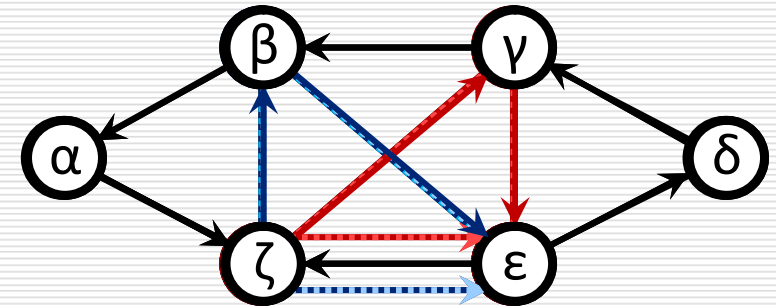
- Κλειστή μονοκονδυλιά που διέρχεται:
  - από κάθε ακμή 1 φορά, και
  - από κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler (Eulerian γράφημα) ανν όλες οι κορυφές άρτιου βαθμού.



# Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι **κορυφές άρτιου βαθμού**.

- Τα πλήρη γραφήματα  $K_n$  έχουν κύκλωμα Euler ανν  $n$  περιττός
- Τα πλήρη διμερή γραφήματα  $K_{p,q}$  έχουν κύκλωμα Euler ανν  $p$  και  $q$  άρτιοι



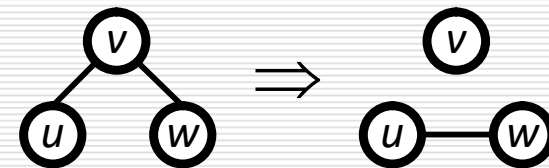
- Απόδειξη **άρτιος βαθμός  $\Rightarrow$  Eulerian** με επαγωγή σε #ακμών  $m$ .

- Κατασκευαστική απόδειξη  $\Rightarrow$  υπολογισμός του κυκλώματος Euler

- Εφαρμογή ακόλουθης πράξης:

- Έστω  $u, v, w : \{u,v\} \in E(G)$  και  $\{v,w\} \in E(G)$

- «Αντικατάσταση» των  $\{u,v\}, \{v,w\}$  από  $\{u,w\}$



- Από κύκλωμα Euler στο νέο γράφημα κατασκευάζουμε αρχικό:

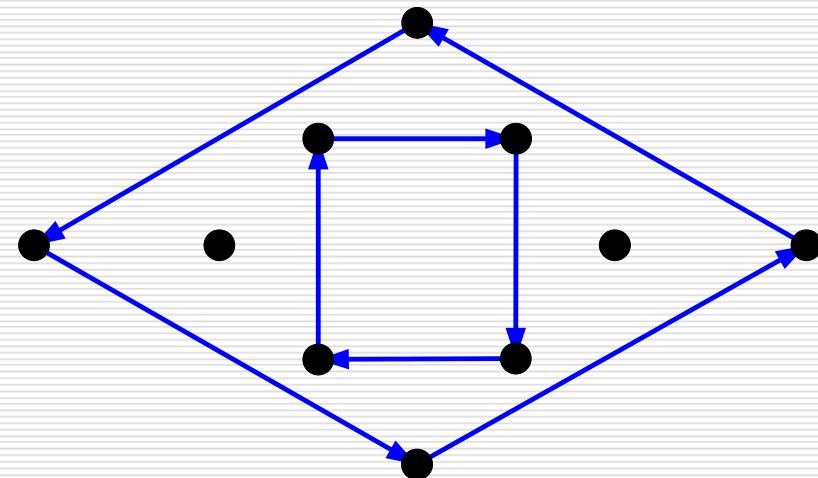
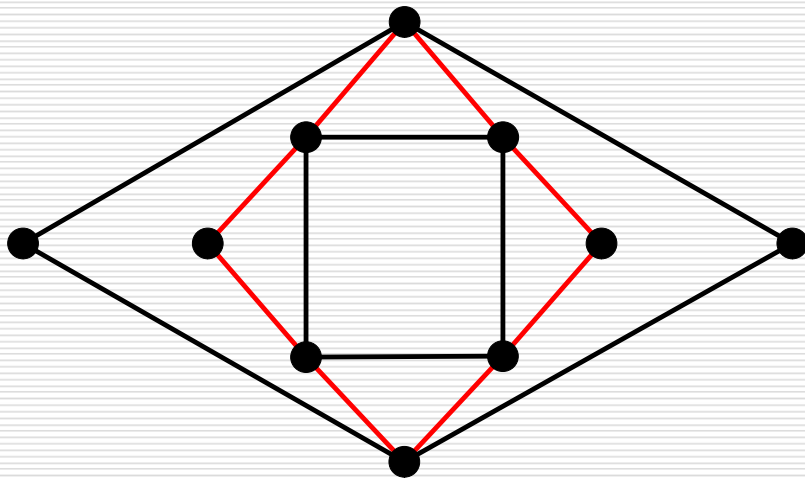
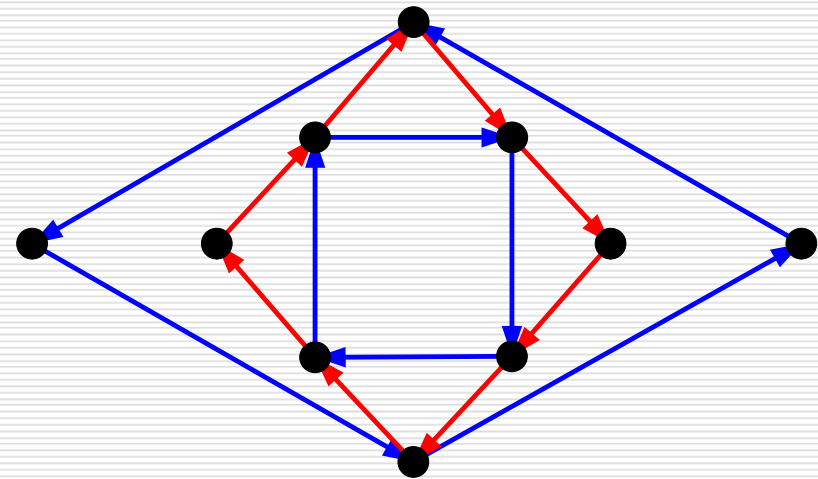
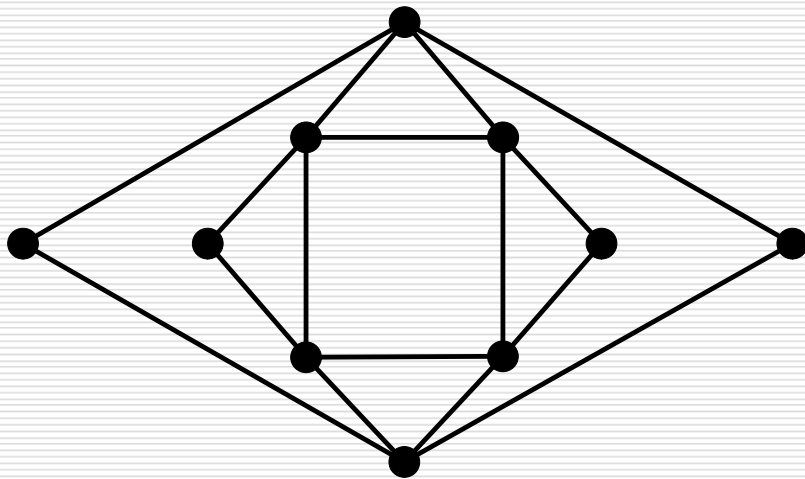
- Αντίστροφη «αντικατάσταση» της  $\{u,w\}$  από  $\{u,v\}, \{v,w\}$

# Κύκλωμα (Κύκλος) Euler

- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει κύκλωμα Euler ανν όλες οι **κορυφές άρτιου βαθμού**.
  - Κύκλος Euler  $C \Rightarrow$  άρτιος βαθμός κορυφών: **συνεκτικότητα** (περνά από όλες τις κορυφές).  $C$  «επισκέπτεται» κορυφή  $v$ : με **νέα ακμή «φτάνει»** στη  $v$  και με **άλλη ακμή «φεύγει»** από  $v$ .
  - $G$  **συνεκτικό** (μπορεί **όχι απλό**) και όλες οι κορυφές **άρτιου βαθμού**. Βρίσκουμε κύκλο Euler με **επαγωγή σε #ακμών**.
    - **Βάση**: ισχύει όταν γράφημα ανακύκλωση ή απλός κύκλος.
    - **Βήμα**:  $G$  έχει ακμές και άρτιος βαθμός, άρα  $\delta(G) \geq 2$  και **κύκλος**.
    - «**Αφαιρούμε**» έναν οποιοδήποτε **κύκλο  $C$**  του  $G$  (διαγράφουμε τις ακμές του  $C$  και αγνοούμε όσες κορυφές μένουν απομονωμένες).
    - **Κορυφές που μένουν** (αν υπάρχουν) έχουν **άρτιο βαθμό**: κάθε **συνεκτική συνιστώσα έχει κύκλο Euler**, λόγω επαγ. υπόθεσης.
    - **Κύκλος  $C$  συνδέει επιμέρους κύκλους Euler σε κύκλο Euler για  $G$** .

# Κύκλωμα Euler: Παράδειγμα

---



# Μονοπάτι (Ίχνος) Euler

---

- Μονοκονδυλιά (με διαφορετικά άκρα) που διέρχεται:
  - από κάθε ακμή 1 φορά, και
  - περιλαμβάνει κάθε κορυφή τουλάχιστον 1 φορά.
- Συνεκτικό (μη-κατευθ.) γράφημα έχει μονοπάτι Euler (semi-Eulerian γράφημα) ανν δύο κορυφές έχουν περιττό βαθμό και όλες οι υπόλοιπες άρτιο.
  - Συνεκτικό γράφημα  $G$  με κορυφές  $u$  και  $v$  περιττού βαθμού.
  - $G$  είναι semi-Eulerian ανν  $G + \{u, v\}$  είναι Eulerian.
- Κύκλος Euler σε κατευθυνόμενα γραφήματα:
  - Ισχυρά συνεκτικό γράφημα έχει κύκλο Euler ανν ...
  - ... για κάθε κορυφή  $v$ , έσω-βαθμός( $v$ ) = έξω-βαθμός( $v$ ).

# Κύκλος Euler

---

- Υπάρχει γράφημα  $G$  που **όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό και έχει γέφυρα;**
  - **Όχι**, τέτοιο γράφημα  $G$  έχει **κύκλο Euler**, άρα όλες οι ακμές του ανήκουν σε κύκλο.
- Αν σε γράφημα που **έχει κύκλο Euler προσθέσουμε ακμές**, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Euler;
  - **Όχι κατ' ανάγκη**. Μπορεί προσθήκη ακμών να κάνει τον βαθμό κάποιων κορυφών περιττό.
- (Γιατί) σε κάθε συνεκτικό (μη κατευθ.) γράφημα, υπάρχει **κλειστή διαδρομή** που διέρχεται από **κάθε ακμή (ακριβώς) 2 φορές;**
  - «Διπλασιασμός» ακμών οδηγεί σε γράφημα με κύκλο Euler (συνεκτικό και όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό).
  - Δείτε το **Κινέζικο Πρόβλημα του Ταχυδρόμου** (Chinese Postman Problem ή Route Inspection Problem).



# Κύκλος Euler

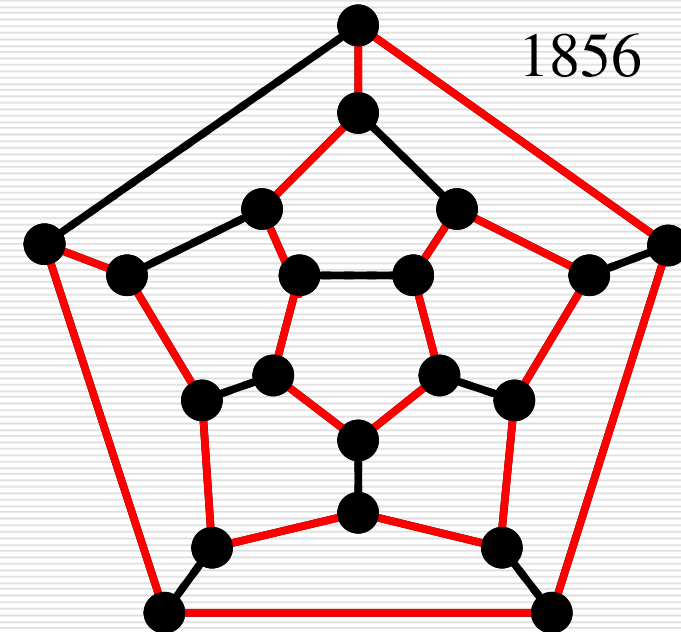
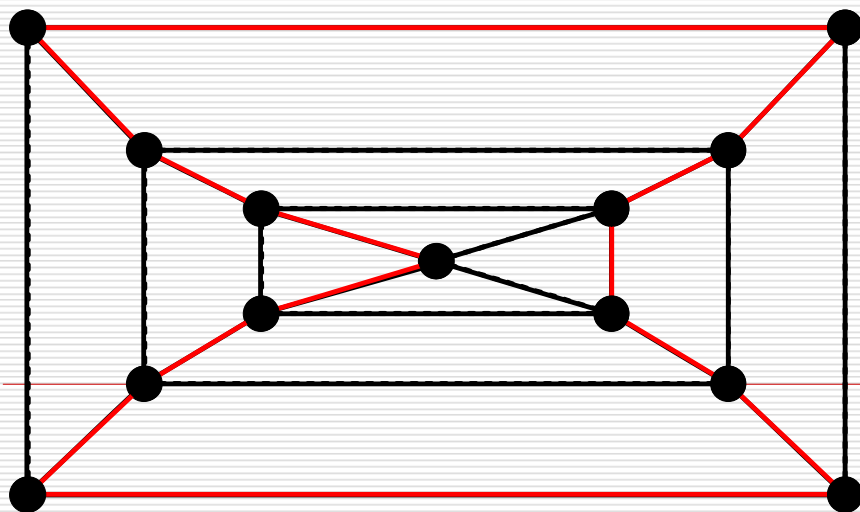
---

- Ποιος είναι ο **μέγιστος #ακμών** που μπορεί να έχει **απλό** γράφημα με  $n$  κορυφές και **κύκλο Euler**;
  - Αν  $n$  **περιττός**,  $n-1$  άρτιος:  $K_n$  έχει κύκλο Euler και  $n(n-1)/2$  ακμές.
  - Αν  $n$  **άρτιος**, αφαιρούμε  $n/2$  ακμές (χωρίς κοινά άκρα) από  $K_n$ . Προκύπτει γράφημα με κύκλο Euler και  $n(n-2)/2$  ακμές.
  - (Απλό) γράφημα με  $> n(n-2)/2$  ακμές, έχει **κορυφή (περιττού) βαθμού  $n-1$** .
- Κύκλος Euler σε **κατευθυνόμενα γραφήματα**:
  - **Ισχυρά συνεκτικό** γράφημα έχει κύκλο Euler ανν ...
  - ... για κάθε κορυφή  $v$ , **έσω-βαθμός( $v$ ) = έξω-βαθμός( $v$ )**.

# Κύκλος Hamilton

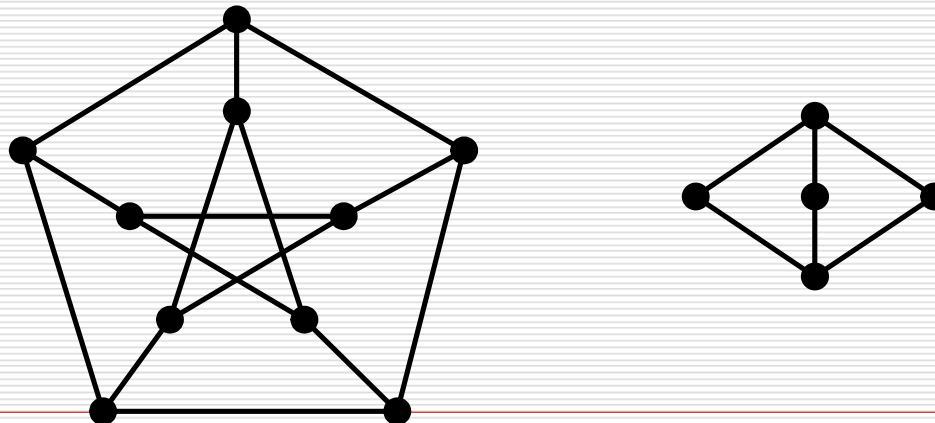


- (Απλός) κύκλος που διέρχεται από όλες τις κορυφές.
  - Διέρχεται από κάθε κορυφή 1 φορά.
  - Μπορεί να μην διέρχεται από κάποιες ακμές.
- Δεν είναι γνωστή **ικανή και αναγκαία** συνθήκη!
- **Ικανές συνθήκες** ώστε  $G(V, E)$  έχει κύκλο Hamilton:
  - $\forall v \in V, \deg(v) \geq |V|/2$  (Θ. Dirac).
  - $\forall u, v \in V, \deg(u) + \deg(v) \geq |V|$  (Θ. Ore).



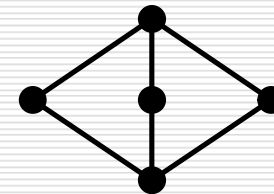
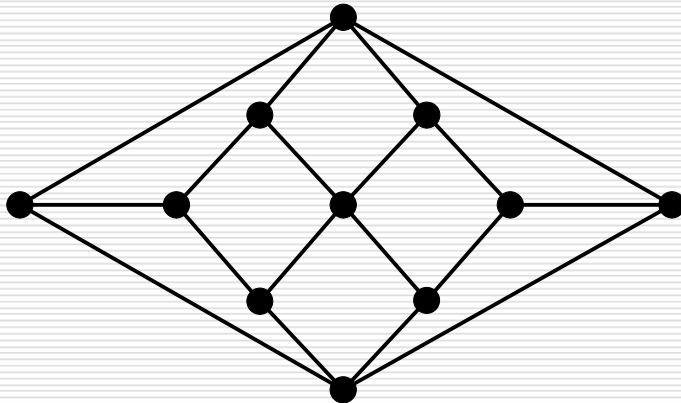
# Κύκλος Hamilton

- **Αναγκαίες συνθήκες** για ύπαρξη κύκλου Hamilton σε γράφημα  $G$ :
  - $G$  δεν έχει γέφυρα ή σημείο κοπής.
    - Αν  $G$  έχει **γέφυρα**, δεν έχει κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton.
  - Κάθε κορυφή του  $G$  ανήκει σε κάποιο κύκλο.
  - Αν  $G$  διμερές, τότε η διαμέριση (μοναδική λόγω συνεκτικότητας) του  $G$  σε δύο ανεξάρτητα σύνολα  $X$  και  $Y$  πρέπει να έχει  $|X| = |Y|$ .
- **Μονοπάτι Hamilton**: (απλό) μονοπάτι που περιλαμβάνει όλες τις κορυφές.



# Κύκλος Hamilton

- Για να δείξουμε ότι γράφημα  $G$  **έχει** κύκλο Hamilton, είτε κατασκευάζουμε **κύκλο Hamilton** (αν  $G$  έχει συγκεκριμένη δομή) είτε δείχνουμε ότι  $G$  ικανοποιεί κάποια **ικανή συνθήκη**.
  - Π.χ., **υπερκύβος**  $Q(n)$  έχει κύκλο Hamilton για κάθε  $n \geq 2$ .
- Για να δείξουμε ότι γράφημα  $G$  **δεν έχει** κύκλο Hamilton, δείχνουμε ότι  $G$  **παραβιάζει** κάποια **αναγκαία συνθήκη**.
  - Π.χ., γιατί τα παρακάτω γραφήματα δεν έχουν κύκλο Hamilton;



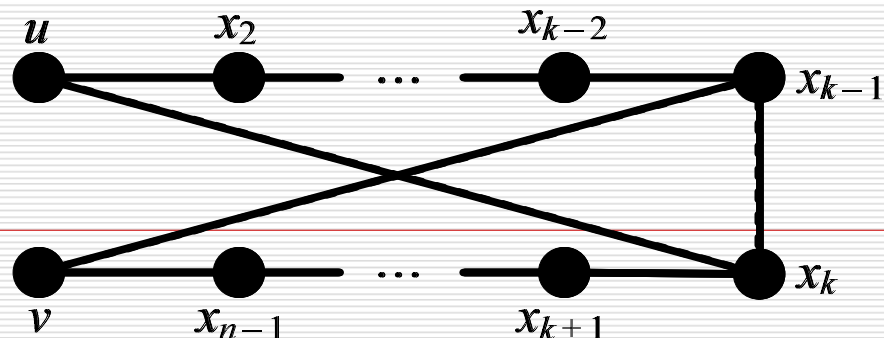
# Κύκλος Hamilton

---

- Αν σε γράφημα που έχει κύκλο Hamilton προσθέσουμε ακμές, το γράφημα που προκύπτει έχει κύκλο Hamilton;
- Νδο κάθε απλό γράφημα με 21 κορυφές και 208 ακμές έχει κύκλο Hamilton και δεν έχει κύκλο Euler.
  - Πρόκειται για  $K_{21}$  από το οποίο έχουν αφαιρεθεί 2 ακμές.
  - Ικανοποιεί  $\Theta$ . Dirac. Άρα έχει κύκλο Hamilton.
  - Όπως και αν αφαιρεθούν ακμές, προκύπτουν τουλ. 2 κορυφές με βαθμό 19. Άρα δεν έχει κύκλο Euler.

# Κύκλος Hamilton

- Απλό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές και  $u, v$  μη γειτονικές κορυφές με  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ . Το  $G$  έχει κύκλο Hamilton ανν το  $G + \{u, v\}$  έχει κύκλο Hamilton.
  - Αν  $G$  Hamiltonian, προφανώς  $G + \{u, v\}$  Hamiltonian.
  - $G + \{u, v\}$  Hamiltonian: βρίσκουμε HamCycle στο  $G$  χωρίς  $\{u, v\}$ .
  - $G$  έχει μονοπάτι Hamilton  $P = (u, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{n-1}, v)$ .
  - Υπάρχουν διαδοχικές κορυφές  $x_{k-1}, x_k$  στο  $P$  τ.ω.  $v$  συνδέεται με  $x_{k-1}$  και  $u$  συνδέεται με  $x_k$ .
    - Διαφορετικά: για κάθε  $\{u, x_k\}$ , δεν υπάρχει  $\{v, x_{k-1}\}$ .
    - Άρα  $\deg(v) \leq (n - 1) - \deg(u)$ , άτοπο.
  - Κύκλος Hamilton  $C = (u, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, v, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_2, u)$ .



# Κύκλος Hamilton

---

- Απλό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές και  $u, v$  μη γειτονικές κορυφές με  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ . Το  $G$  έχει κύκλο Hamilton ανν το  $G + \{u, v\}$  έχει κύκλο Hamilton.
- Απλό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές. Αν κάθε δύο μη γειτονικές κορυφές  $u, v$  έχουν  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ ,  $G$  έχει κύκλο Hamilton.
  - Οποτεδήποτε μη γειτονικές κορυφές  $u, v$  έχουν  $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ , τις συνδέω απευθείας.
  - Νέο γράφημα Hamiltonian ανν το αρχικό ήταν Hamiltonian.
  - Αν γίνεται για όλες τις μη γειτονικές κορυφές, καταλήγουμε σε  $K_n$
- Απλό γράφημα  $G$  με  $n \geq 3$  κορυφές. Αν κάθε κορυφή  $u$  έχει  $\deg(u) \geq n/2$ ,  $G$  έχει κύκλο Hamilton.

# Ασκήσεις

---

- **Τουρνουά (tournament):** πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα.
  - Για κάθε ζευγάρι  $u, v$ , υπάρχει μία (ακριβώς) από τις ακμές  $(u, v)$  και  $(v, u)$ .
- Σε ένα **τουρνουά με  $n+1$**  κορυφές, έστω  $u$  κορυφή και  $v_1, \dots, v_n$  μια αρίθμηση των υπόλοιπων  $n$  κορυφών. Ισχύει τουλ. ένα από τα:
  1. Η  $u$  συνδέεται με την  $v_1$ .
  2. Η  $v_n$  συνδέεται με την  $u$ .
  3. Υπάρχει δείκτης  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ , ώστε η  $v_k$  **συνδέεται με την  $u$**  και η  $u$  **συνδέεται με την  $v_{k+1}$** .
- Έστω ότι δεν ισχύουν τα (1) και (2). Θδο ισχύει το (3).
  - Έστω  $v_{k+1}$  η πρώτη κορυφή τ.ω. η  $u$  συνδέεται με την  $v_{k+1}$ .
  - Ισχύει ότι  $k+1 \leq n$ , γιατί η  $u$  συνδέεται με την  $v_n$  (δεν ισχύει το (2)).
  - Ισχύει ότι  $2 \leq k+1$ , γιατί η  $v_1$  συνδέεται με την  $u$  (δεν ισχύει το (1)).
  - Ισχύει ότι  $v_k$  **συνδέεται με την  $u$** , γιατί  $v_{k+1}$  η πρώτη που δεν συνδέεται με  $u$ .



# Ασκήσεις

---

- Κάθε τουρνουά με  $n \geq 1$  κορυφές έχει **μονοπάτι Hamilton**.
  - Επαγωγή με **χρήση προηγούμενου** στο επαγωγικό βήμα.
  - **Βάση**: Ισχύει τετριμμένα για τουρνουά με 1 κορυφή.
  - **Επαγ. υπόθεση**: Κάθε τουρνουά με  $n \geq 1$  κορυφές έχει **μον. Hamilton**.
  - **Επαγ. βήμα**: Θδο αυθαίρετο τουρνουά  $G(V, E)$  με  $n+1$  κορυφές έχει **μονοπάτι Hamilton**.
    - Έστω  $G'$  τουρνουά που προκύπτει **από  $G$  με αφαίρεση κορυφής  $u$** .
    - Θεωρούμε αρίθμηση  $v_1, \dots, v_n$  των  $n$  κορυφών του  $G'$  σύμφωνα με **μονοπάτι Hamilton στο  $G'$**  (υπάρχει λόγω επαγ. υπόθεσης).
    - $u$  **ενσωματώνεται στο μονοπάτι Hamilton  $v_1, \dots, v_n$  με βάση το προηγούμενο**.