

# Αρχή του Περιστερώνα

---

Διδάσκοντες: **Δ. Φωτάκης, Δ. Σούλιου**  
Επιμέλεια διαφανειών: **Δ. Φωτάκης**

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο



# Συναρτήσεις

---

- **Συνάρτηση**: διμελής σχέση  $R \subseteq A \times B$  όπου για κάθε  $a \in A$ , υπάρχει μοναδικό  $\beta \in B$  τ.ω.  $(a, \beta) \in R$ .
  - $A$ : πεδίο ορισμού.  $B$ : πεδίο τιμών.  $R(a) = \beta$ :  $\beta$  εικόνα  $a$  (ως προς  $R$ ).
- $f$  **συνάρτηση 1-1**:  $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ .
  - Δεν υπάρχουν δύο στοιχεία με ίδια εικόνα.
- $f$  **συνάρτηση επί**: για κάθε  $\beta \in B$ , υπάρχει  $a \in A$  με  $f(a) = \beta$ .
  - Κάθε στοιχείο του  $B$  είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του  $A$ .
- $f$  **αμφιμονοσήμαντη**: 1-1 και επί.
  - $f$  αντιστοιχία μεταξύ στοιχείων  $A$  και  $B$ .
  - Αντίστροφη  $f^{-1}$  είναι συνάρτηση ανν  $f$  αμφιμονοσήμαντη.

# Αρχή Περιστερών

- Αν  $|A| > |B|$ , **δεν** υπάρχει 1-1 συνάρτηση από A στο B.
  - Για κάθε συνάρτηση  $f$ , υπάρχουν  $a_1, a_2 \in A$  τ.ω.  $f(a_1) = f(a_2)$ .
  - Αν  $n$  περιστέρια σε  $m$  φωλιές και  $n > m$ ,  $\exists$  φωλιά με  $\geq 2$  περιστέρια.
- Για κάθε συνάρτηση  $f$  από A στο B, υπάρχουν  $\geq k = \lceil |A|/|B| \rceil$   $a_1, a_2, \dots, a_k \in A$  με  $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$ .
  - Αν  $n$  περιστέρια σε  $m$  φωλιές,  $\exists$  φωλιά με  $\geq \lceil n/m \rceil$  περιστέρια.
- Τετριμμένα παραδείγματα:
  - Σε κάθε σύνολο 13 ανθρώπων, υπάρχουν  $\geq 2$  γεννημένοι ίδιο μήνα.
  - Στον κόσμο ζουν  $\geq 2$  άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο δευτερόλεπτο.
  - Στην Ελλάδα ζουν  $\geq 2$  άνθρωποι γεννημένοι το ίδιο πεντάλεπτο.
  - Σε κάθε πάρτυ, υπάρχουν δύο καλεσμένοι με τον ίδιο αριθμό **φίλων** στο πάρτυ (υποθ: σχέση φίλος συμμετρική, όχι ανακλαστική).

# Παραδείγματα

---

- $\forall$  σύνολο 1000 διαφ. φυσικών, υπάρχουν  $x \neq y$ :  $573 \mid (x - y)$ .
  - Ποσότητες που αντιστοιχούν σε «περιστέρια» και «φωλιές»;
  - «Περιστέρια»: 1000 φυσικοί.
  - «Φωλιές»: 573 διαφορετικές τιμές για  $n \bmod 573$ .
- Αν επιλέξουμε  $n+1$  διαφορετικούς φυσικούς υπάρχουν δύο που η διαφορά τους διαιρείται από το  $n$ .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  υπόλοιπα διαίρεσης με  $n$  ( $\{0, 1, \dots, n-1\}$ ).
  - Δύο αριθμοί σε ίδια «φωλιά»: διαφορά τους διαιρείται από  $n$ .

# Παραδείγματα

---

- Για κάθε σύνολο **10** (διαφορετικών) **φυσικών**  $< 100$ , υπάρχουν **δύο** διαφορετικά **υποσύνολα** με **ίδιο άθροισμα**.
  - «Περιστέρια»:  $2^{10} - 1 = 1023$  διαφορετικά **μη κενά υποσύνολα**.
  - «Φωλιές»: Πιθανές **τιμές** για **αθροίσματα υποσυνόλων** ( $\leq 946$ ).
- Αν θεωρήσουμε **26 διαφορετικά υποσύνολα** του  $\{1, \dots, 9\}$  με **3 στοιχεία** το πολύ, **δύο** από αυτά έχουν το **ίδιο άθροισμα**.
  - «Περιστέρια»: **26 διαφορετικά υποσύνολα**.
  - «Φωλιές»: Πιθανές **τιμές** για **αθροίσματα υποσυνόλων** ( $\leq 25$ ).

# Παραδείγματα

---

- Αν 7 διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το  $\{1, 2, \dots, 11\}$ , 2 από αυτούς αθροίζονται στο 12.
  - «Περιστέρια»: 7 επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»: 6 «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο 12.
    - $\{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}$ .
    - $\{6\}$  «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το 6).
    - Επιλέγουμε και τους δύο αριθμούς κάποιου άλλου ζευγαριού.
- Αν  $n+1$  διαφορετικοί αριθμοί επιλεγούν από το  $\{1, \dots, 2n-1\}$ , 2 από αυτούς αθροίζονται στο  $2n$ .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  «ζευγάρια» αριθμών που αθροίζονται στο  $2n$ .
    - $\{n\}$  «δέχεται» έναν αριθμό το πολύ (μόνο το  $n$ ).

# Παραδείγματα

- Αν επιλέξουμε  $n+1$  διαφορετικούς φυσικούς από  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , υπάρχουν δύο που είναι **σχετικά πρώτοι** ( $\mu\kappa\delta = 1$ ).
  - Αρκεί νδο υπάρχουν δύο αριθμοί  $\alpha, \beta$ :  $\beta = \alpha + 1$ .
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  ζεύγη «διαδοχικών» αριθμών στο  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .
    - $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$ .
- Αν επιλέξουμε  $n+1$  φυσικούς από  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ , υπάρχουν δύο που **ο ένας διαιρεί τον άλλο**.
  - «Περιστέρια»:  $n+1$  επιλεγμένοι αριθμοί.
  - «Φωλιές»:  $n$  **περιττοί** αριθμοί στο  $\{1, 2, \dots, 2n\}$ .
    - Αριθμός  $x$  στη «φωλιά»  $m$  ανν  $m$  μεγαλύτερος περιττός διαιρέτης του  $x$  ( $x = 2^k m$ , για κάποιο  $k \geq 0$ ).
    - Αριθμοί  $x$  και  $y$  στην ίδια «φωλιά»:  $x = 2^k m$  και  $y = 2^s m$ , άρα είτε  $x \mid y$  είτε  $y \mid x$ .

# Παραδείγματα

- Σε κάθε ακολουθία  $n^2+1$  διαφορετικών αριθμών, είτε αύξουσα υπακολουθία μήκους  $n+1$  είτε φθίνουσα υπακολ. μήκους  $n+1$ .
  - Υπακολουθία προκύπτει με διαγραφή κάποιων αριθμών.
  - **0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15, 16**
- Αντιστοιχούμε αριθμό  $a_k$  στο  $(i_k, d_k)$ .
  - $i_k(d_k)$ : μήκους μεγαλύτερης αύξουσας (φθίνουσας) υπακολουθίας που τελειώνει στη θέση  $k$ .
- Αν όλα  $i_k \leq n$  και όλα  $d_k \leq n$ ,  $\# \text{ζευγών} \leq n^2$ .
  - Αρχή περιστέρων: υπάρχουν δύο αριθμοί  $a_k$  και  $a_s$  ( $k < s$ ) που αντιστοιχούνται στο ίδιο ζεύγος  $(x, y)$ .
  - Άτοπο: αν  $a_k < a_s$ , τότε  $i_k < i_s$ , ενώ αν  $a_k > a_s$ , τότε  $d_k < d_s$ .
  - Για κάθε στοιχείο  $a_k$  και ζεύγος  $(i_k, d_k)$ : είτε  $i_{k+1} > i_k$ , είτε  $d_{k+1} > d_k$
- Διαφορετικά: Αύξουσα υπακολουθία αντιστοιχεί σε αλυσίδα και φθίνουσα υπακολουθία σε αντιαλυσίδα, για μερική διάταξη  $\leq$  που λαμβάνει υπόψη σειρά εμφάνισης στην ακολουθία.