

Άσκηση 1: Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{1}{2}x^T A x - b^T x, A \in \mathbb{R}^{2000 \times 2000}, b \in \mathbb{R}^{2000}$

$$\text{με } A = \begin{bmatrix} 2+\epsilon & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+\epsilon & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2+\epsilon \end{bmatrix}, \text{ και } b = \begin{bmatrix} 1+\epsilon \\ \epsilon \\ \vdots \\ \epsilon \\ 1+\epsilon \end{bmatrix}.$$

(α) Να προγραμματίσετε τις μεθόδους των κλίσεων και συζύγων κλίσεων για την προσέγγιση

ελαχίστου της συνάρτησης, χρησιμοποιώντας ως αρχικό διάνυσμα το $x_0 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix}$, και να

συγκρίνετε τα αποτελέσματα για τιμές τις παραμέτρου $\epsilon = 10^{-k}, k = 0, 1, 2$. Τι παρατηρείτε ?

(γ) Να υπολογίσετε το ελάχιστο πλήθος επαναλήψεων k που απαιτούνται ώστε το σφάλμα $\|x^{(k)} - \bar{x}\|_A$ της μεθόδου των κλίσεων να είναι μικρότερο από 10^{-8} . Δίνεται η λύση $\bar{x} = [1, \dots, 1]^T$.

Οδηγίες άσκησης 1: Στα ερωτήματα της άσκησης 1(α) να συμπεριλάβετε στις απαντήσεις σας μόνο τις 5 πρώτες και 5 τελευταίες τιμές του διανύσματος λύσης που υπολογίζει ο αλγόριθμος στο πρώτο και στο τελευταίο βήμα. Επίσης να συμπεριλάβετε το χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση των υπολογισμών για τις διαφορετικές τιμές του $\epsilon = 10^{-k}, k = 0, 1, 2$. Το ερώτημα 1(β) μπορεί να απαντηθεί αναλυτικά.

Άσκηση 2: (α) Να χρησιμοποιήσετε την μέθοδο τύπου Newton-Raphson για την επίλυση του προβλήματος

$$\min_{[x,y]^T \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y}) \text{ όπου } f(x,y) = 10^k(y - x^2)^2 + (1 - x)^2 + 2, k = 0, \text{ και } k = 3.$$

για χρησιμοποιώντας ως αρχικές συνθήκες $x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$. Τι παρατηρείτε ?

(β) Να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο Fletcher - Reeves για τον υπολογισμό προσέγγισης λύσης του προβλήματος της άσκησης 2(α), χρησιμοποιώντας την ίδια αρχική συνθήκη για $k = 3$. Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

Άσκηση 3: (α) Να χρησιμοποιήσετε την μέθοδο τύπου Newton-Raphson με κατάλληλες αρχικές συνθήκες για την επίλυση του προβλήματος $\min_{[x,y]^T \in \mathbb{R}^2} g(x,y) = g(\bar{x}, \bar{y})$ όπου $g(x,y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x^2)^2 + 2$ για να υπολογίσετε το σημείο(α) ολικού ελαχίστου με κατάλληλη επιλογή της αρχικής συνθήκης.

(β) Να προγραμματίσετε την μέθοδο προβεβλημένων κλίσεων με $\gamma = 1$, για το πρόβλημα: $\min_{[x,y]^T \in S} g(x,y) = g(\bar{x}, \bar{y}), S = \{[x,y]^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Χρησιμοποιώντας για αρχική

συνθήκη $x_0 = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ να υπολογίσετε μία προσέγγιση του ελαχίστου μετά από (τουλάχιστον 12 επαναλήψεις) και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα σε σχέση με το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α). Υπάρχει καλύτερη επιλογή της παραμέτρου γ , που να επιτυγχάνει ταχύτερη σύγκλιση;

Οδηγίες για τις ασκήσεις 2 και 3: Για τα ερωτήματα 2(α) και 3(α) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε είτε τη μέθοδο Newton-Raphson είτε μέθοδο Inexact Newton-Raphson (π.χ. Newton-Raphson with a shift), αιτιολογώντας την επιλογή σας.

Για λύση του βήματος 4, του ερωτήματος 3(β) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε υποπρόγραμμα (π.χ. fmin (Matlab) κτλ είτε να προγραμματίσετε τεχνική αναζήτησης Line Search - π.χ. μέσω ισχυρών συνθηκών Wolfe.)

Επισημαίνεται πως η συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση των ερωτημάτων 3(α) και 3(β) είναι διαφορετική από τη συνάρτηση του ερωτήματος 2(α) και 2(β).

Άσκηση 4: Να μελετήσετε ως προς την ύπαρξη και μοναδικότητα τα ακόλουθα προβλήματα βελτιστοποίησης: $\min_{[x,y,z]^T \in S} f(x,y,z) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ όπου:

1. $f(x,y,z) = \sin(\pi(x^2 + y^2 + z^2)) + (x^2 + y^2 + z^2)^2$, $S = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$,
2. $f(x,y,z) = e^{(x^2+y^2+z^2)} - (x^2 + y^2 + z^2)^3 - (x + y + z)$, $S = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 3\}$

Για το πρόβλημα 2 να διατυπώσετε την αναγκαία συνθήκη. Είναι η αναγκαία συνθήκη και ικανή ?

Άσκηση 5: (α) Να μελετήσετε ως προς την ύπαρξη και μοναδικότητα τα ακόλουθα προβλήματα βελτιστοποίησης: $\min_{[x,y,z]^T \in S} f(x,y,z) = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ όπου :

1. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$, $S = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x + y + z \leq 0\}$
2. $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$, $S = \{[x,y,z]^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, x + y = 0\}$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε αναλυτικά τα υποψήφια σημεία ελαχίστου χρησιμοποιώντας το θεώρημα πολλαπλασιαστών KTL.

Σημείωση: Στις υπολογιστικές ασκήσεις μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε υπολογιστικό περιβάλλον.