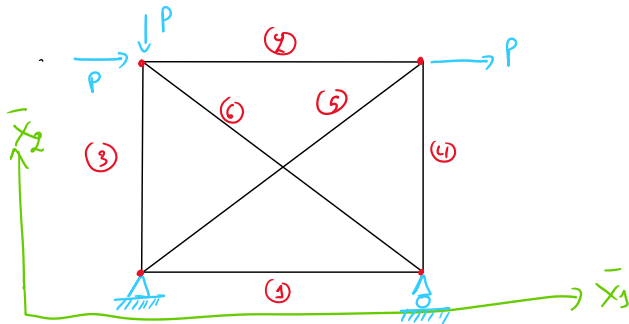


Άσκηση 1

Tuesday, March 9, 2021 9:18 AM

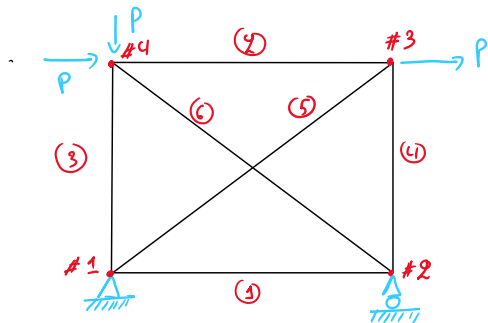
Ζητείται να διατυπωθεί η εξίσωση ισορροπίας του δικτυώματος του Σχήματος και

1. Να προσδιορισθεί το μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής
2. Να προσδιορισθεί το μητρώο αναδιάρθρωσης για την επιβολή των στηρίξεων.
3. Θεωρώντας τις επικόμενες μετατοπίσεις γνωστές να παρουσιαστεί η διαδικασία υπολογισμού των αντιδράσεων στήριξης και των εσωτερικών εντατικών μεγεθών των μελών

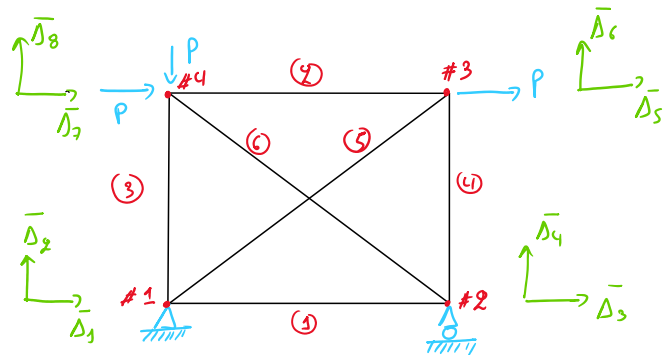


Βήμα 1ο: Ορίζουμε το **καθολικό σύστημα** στο οποίο ζει και αναπνέει η κατασκευή.

Βήμα 2ο: Αρίθμηση κόμβων. Η αρίθμηση είναι θέμα προσωπικής επιλογής. Εγώ επιλέγω να αριθμήσω από κάτω προς τα πάνω, αντίθετα από τη φορά του ρολογιού.



Βήμα 3ο: Βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κατασκευής. Πρόκειται για ένα δικτύωμα στο επίπεδο. Επομένως έχουμε 2 β.ε. ανά κόμβο. Στο καθολικό σύστημα



Προσέξτε πως η αρίθμηση των β.ε. της κατασκευής δεν είναι τυχαία. Έπεται της αρίθμησης των κόμβων έτσι ώστε ο τυχαίος κόμβος N να έχει β.ε.

$$\begin{aligned} \text{Κατά } \bar{x}_1 & \quad \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (N-1) + 1 \\ \text{Κατά } \bar{x}_2 & \quad \left[\begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right] (N-1) + 2 \end{aligned}$$

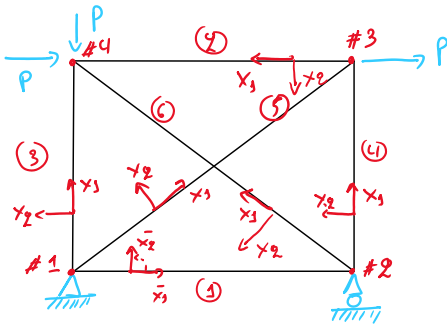
πληθύνει β.ε. ανά κόμβο

Βήμα 4ο: Καθορίζω τα τοπικά συστήματα συντεταγμένων των μελών. Εδώ χρησιμοποιούμε τον κανόνα

"Κόμβος αρχής (**j**) του κάθε μέλους είναι ο κόμβος με τον μικρότερο αριθμό. Κόμβος πέρας (**k**) είναι ο κόμβος με τον μεγαλύτερο."

Ο τοπικός διαμήκης άξονας του στοιχείου φεύγει από τον j και ταξιδεύει προς τον k.

Ο τοπικός εγκάρσιος άξονας προκύπτει πάντα με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Αλλιώς, βάζοντας την παλάμη μας παράλληλα στο μέλος, κάνουμε μια στροφή αντίθετη με τη φορά του ρολογιού και συναντάμε τον εγκάρσιο τοπικό άξονα.



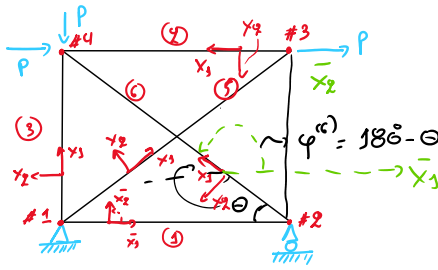
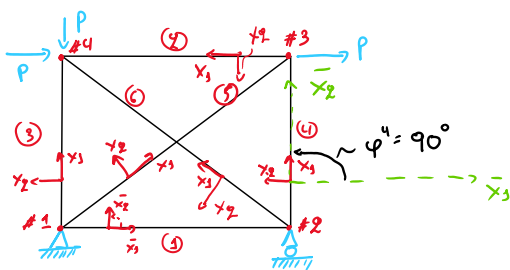
Βήμα 5ο: Για κάθε στοιχείο της κατασκευής, υπολογίζουμε το αντίστοιχο μητρώο μετασχηματισμού

μέλος i

$$[\Lambda_{PT}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi^i & \sin \varphi^i & 0 & 0 \\ -\sin \varphi^i & \cos \varphi^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi^i & \sin \varphi^i \\ 0 & 0 & -\sin \varphi^i & \cos \varphi^i \end{bmatrix}$$

γωνία στροφής μέλους i

Η γωνία στροφής του κάθε μέλους, είναι η γωνία κατά την οποία πρέπει να στρίψει ο καθολικός $\bar{X}_3$ για να συναντήσει τον τοπικό x_3 του μέλους κατά τη θετική φορά των στροφών (δηλαδή αντίθετα των δεικτών του ρολογιού).



Βήμα 6ο: Για κάθε στοιχείο της κατασκευής, υπολογίζουμε μητρώο στιβαρότητάς του στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων του

δύο-δύο στοιχεία

$$[k^{(i)}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L^{(i)}} & 0 & -\frac{EA}{L^{(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L^{(i)}} & 0 & \frac{EA}{L^{(i)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Βήμα 7ο: Για κάθε στοιχείο της κατασκευής, υπολογίζουμε μητρώο στιβαρότητάς του στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων του

$$[\bar{k}^{(i)}] = [\Lambda_{PT}^{(i)}]^T [k^{(i)}] [\Lambda_{PT}^{(i)}] \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Έτσι, το μητρώο στιβαρότητας του κάθε μέλους θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$[\bar{k}^{(i)}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^{(i)} & \bar{k}_{12}^{(i)} & \bar{k}_{13}^{(i)} & \bar{k}_{14}^{(i)} \\ \bar{k}_{21}^{(i)} & \bar{k}_{22}^{(i)} & \bar{k}_{23}^{(i)} & \bar{k}_{24}^{(i)} \\ \bar{k}_{31}^{(i)} & \bar{k}_{32}^{(i)} & \bar{k}_{33}^{(i)} & \bar{k}_{34}^{(i)} \\ \bar{k}_{41}^{(i)} & \bar{k}_{42}^{(i)} & \bar{k}_{43}^{(i)} & \bar{k}_{44}^{(i)} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{31} & \bar{u}_{32} & \bar{u}_{33} & \bar{u}_{34} \\ \bar{u}_{41} & \bar{u}_{42} & \bar{u}_{43} & \bar{u}_{44} \end{bmatrix}$$

Προφανώς, το μητρώο στιβαρότητας του κάθε μέλους θα είναι συμμετρικό (γιατί?).

Υπενθυμίζεται πως τα διαγώνια στοιχεία είναι αυστηρά θετικά (γιατί?). Κατ' εξαίρεση το μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου δικτύωματος (είτε τοπικό είτε καθολικό όταν το μέλος είναι οριζόντιο ή κατακόρυφο) ενδέχεται να έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

Τούτο συμβαίνει γιατί έχουμε αποφασίσει να κουβαλήσουμε τη δύναμη κατά τον τοπικό x2 παρά το γεγονός πως αυτή είναι εξ' ορισμού 0.

Βήμα 8ο: Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας κατασκευής.

Η μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας της κατασκευής πραγματοποιείται στη βάση των δύο ακόλουθων παρατηρήσεων

Παρατήρηση 1η: Οι μετατοπίσεις στα άκρα των μελών είναι ΑΚΡΙΒΩΣ ίδιες με τις μετατοπίσεις των κόμβων της κατασκευής. Αν δεν ήταν, τα μέλη θα αποχωρίζονταν το ένα από το άλλο. Αυτή είναι η αρχή του συμβιβαστού των μετατοπίσεων.

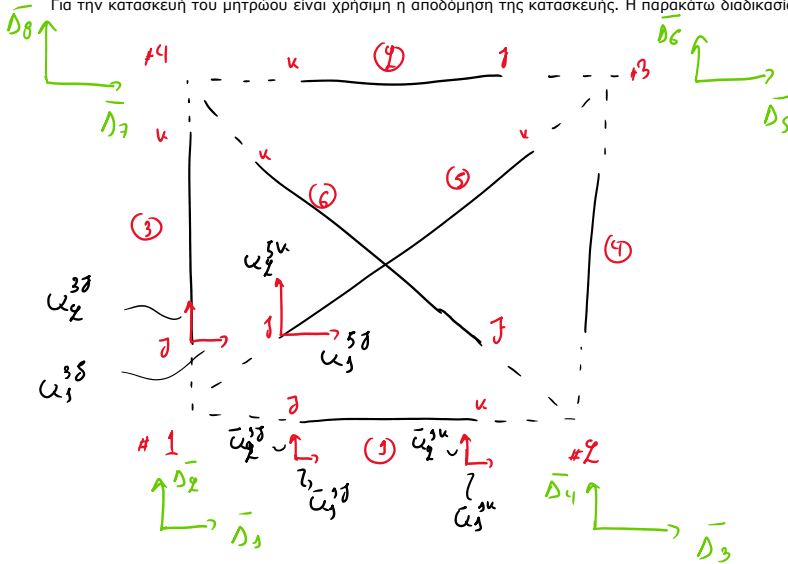
Παρατήρηση 2η: Η συνισταμένη των ακραίων δράσεων στα άκρα των μελών εξισορροπεί τις εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Στη βάση των δύο παραπάνω παρατηρήσεων, το μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής μπορεί να διατυπωθεί με δύο εναλλακτικές μεθόδους.

Η πρώτη (μέθοδος στοιχείο προς στοιχείο) είναι γενική. Η δεύτερη (μέθοδος κόμβου προς κόμβο) είναι γρηγορότερη, αλλά μπορούμε να την εφαρμόσουμε μόνο όταν όλοι οι κόμβοι έχουν τον ίδιο αριθμό β.ε. Αυτό δεν ισχύει πάντα όπως θα δούμε στη συνέχεια του μαθήματος.

Σημείωση

Για την κατασκευή του μητρώου είναι χρήσιμη η αποδόμηση της κατασκευής. Η παρακάτω διαδικασία έχει καθαρά διδακτικό χαρακτήρα.



Για παράδειγμα, από το παραπάνω σχήμα φαίνεται πέρα από κάθε αμφιβολία πως λόγω του συμβιβαστού θα ισχύει στον κόμβο 1 πως

$$\begin{aligned} \bar{D}_3 &= \bar{u}_1^{1J} = \bar{u}_1^{3J} = \bar{u}_1^{5J} \\ \bar{D}_2 &= \bar{u}_2^{1J} = \bar{u}_2^{3J} = \bar{u}_2^{5J} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, λόγω ισορροπίας θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \bar{F}_{0,1} &= \bar{F}_1^{1J} + \bar{F}_1^{3J} + \bar{F}_1^{5J} \\ \bar{F}_{0,2} &= \bar{F}_2^{1J} + \bar{F}_2^{3J} + \bar{F}_2^{5J} \end{aligned}$$

Για εξαγωγή αφεύκτου εία να
εξετάσετε πως διατηνείται η
ισορροπία να το συμβιβασμό σε όλα
τα κόμβους.

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε τα καθολικά μητρώα στιβαρότητας των μελών σημειώνοντας σε κάθε γραμμή και στήλη την αντιστοίχια μεταξύ ακραίων μετατοπίσεων των μελών και β.ε. της κατασκευής.

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_3 & \bar{D}_2 & \bar{D}_3 & \bar{D}_4 \\ \bar{u}_1^{1J} & \bar{u}_2^{1J} & \bar{u}_1^{3J} & \bar{u}_2^{3J} \\ \bar{u}_1^{3J} & \bar{u}_2^{3J} & \bar{u}_1^{5J} & \bar{u}_2^{5J} \\ \bar{u}_1^{5J} & \bar{u}_2^{5J} & \bar{u}_1^{1J} & \bar{u}_2^{1J} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{-1}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-1} & \bar{K}_{12}^{-1} & \bar{K}_{13}^{-1} & \bar{K}_{14}^{-1} \\ \bar{K}_{21}^{-1} & \bar{K}_{22}^{-1} & \bar{K}_{23}^{-1} & \bar{K}_{24}^{-1} \\ \bar{K}_{31}^{-1} & \bar{K}_{32}^{-1} & \bar{K}_{33}^{-1} & \bar{K}_{34}^{-1} \\ \bar{K}_{41}^{-1} & \bar{K}_{42}^{-1} & \bar{K}_{43}^{-1} & \bar{K}_{44}^{-1} \end{bmatrix}$$

β.ε. σίγουρα γέλασε

$$[\bar{K}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-1} & \bar{K}_{12}^{-1} & \bar{K}_{13}^{-1} & \bar{K}_{14}^{-1} \\ \bar{K}_{21}^{-1} & \bar{K}_{22}^{-1} & \bar{K}_{23}^{-1} & \bar{K}_{24}^{-1} \\ \bar{K}_{31}^{-1} & \bar{K}_{32}^{-1} & \bar{K}_{33}^{-1} & \bar{K}_{34}^{-1} \\ \bar{K}_{41}^{-1} & \bar{K}_{42}^{-1} & \bar{K}_{43}^{-1} & \bar{K}_{44}^{-1} \end{bmatrix}$$

υόφοι

$$[\bar{K}^{(2)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-2} & \bar{K}_{12}^{-2} & \bar{K}_{13}^{-2} & \bar{K}_{14}^{-2} \\ \bar{K}_{21}^{-2} & \bar{K}_{22}^{-2} & \bar{K}_{23}^{-2} & \bar{K}_{24}^{-2} \\ \bar{K}_{31}^{-2} & \bar{K}_{32}^{-2} & \bar{K}_{33}^{-2} & \bar{K}_{34}^{-2} \\ \bar{K}_{41}^{-2} & \bar{K}_{42}^{-2} & \bar{K}_{43}^{-2} & \bar{K}_{44}^{-2} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{(3)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-3} & \bar{K}_{12}^{-3} & \bar{K}_{13}^{-3} & \bar{K}_{14}^{-3} \\ \bar{K}_{21}^{-3} & \bar{K}_{22}^{-3} & \bar{K}_{23}^{-3} & \bar{K}_{24}^{-3} \\ \bar{K}_{31}^{-3} & \bar{K}_{32}^{-3} & \bar{K}_{33}^{-3} & \bar{K}_{34}^{-3} \\ \bar{K}_{41}^{-3} & \bar{K}_{42}^{-3} & \bar{K}_{43}^{-3} & \bar{K}_{44}^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{(4)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-4} & \bar{K}_{12}^{-4} & \bar{K}_{13}^{-4} & \bar{K}_{14}^{-4} \\ \bar{K}_{21}^{-4} & \bar{K}_{22}^{-4} & \bar{K}_{23}^{-4} & \bar{K}_{24}^{-4} \\ \bar{K}_{31}^{-4} & \bar{K}_{32}^{-4} & \bar{K}_{33}^{-4} & \bar{K}_{34}^{-4} \\ \bar{K}_{41}^{-4} & \bar{K}_{42}^{-4} & \bar{K}_{43}^{-4} & \bar{K}_{44}^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{(5)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-5} & \bar{K}_{12}^{-5} & \bar{K}_{13}^{-5} & \bar{K}_{14}^{-5} \\ \bar{K}_{21}^{-5} & \bar{K}_{22}^{-5} & \bar{K}_{23}^{-5} & \bar{K}_{24}^{-5} \\ \bar{K}_{31}^{-5} & \bar{K}_{32}^{-5} & \bar{K}_{33}^{-5} & \bar{K}_{34}^{-5} \\ \bar{K}_{41}^{-5} & \bar{K}_{42}^{-5} & \bar{K}_{43}^{-5} & \bar{K}_{44}^{-5} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{K}^{(6)}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11}^{-6} & \bar{K}_{12}^{-6} & \bar{K}_{13}^{-6} & \bar{K}_{14}^{-6} \\ \bar{K}_{21}^{-6} & \bar{K}_{22}^{-6} & \bar{K}_{23}^{-6} & \bar{K}_{24}^{-6} \\ \bar{K}_{31}^{-6} & \bar{K}_{32}^{-6} & \bar{K}_{33}^{-6} & \bar{K}_{34}^{-6} \\ \bar{K}_{41}^{-6} & \bar{K}_{42}^{-6} & \bar{K}_{43}^{-6} & \bar{K}_{44}^{-6} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής θα είναι ένα μητρώο 8x8 η γενική μορφή του οποίου είναι η ακόλουθη. Παρακαλώ προσέξτε την αντιστοιχία γραμμών και στηλών με τους β.ε. της κατασκευής.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \bar{K}_{13} & \bar{K}_{14} & \bar{K}_{15} & \bar{K}_{16} & \bar{K}_{17} & \bar{K}_{18} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \bar{K}_{23} & \bar{K}_{24} & \bar{K}_{25} & \bar{K}_{26} & \bar{K}_{27} & \bar{K}_{28} \\ \bar{K}_{31} & \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33} & \bar{K}_{34} & \bar{K}_{35} & \bar{K}_{36} & \bar{K}_{37} & \bar{K}_{38} \\ \bar{K}_{41} & \bar{K}_{42} & \bar{K}_{43} & \bar{K}_{44} & \bar{K}_{45} & \bar{K}_{46} & \bar{K}_{47} & \bar{K}_{48} \\ \bar{K}_{51} & \bar{K}_{52} & \bar{K}_{53} & \bar{K}_{54} & \bar{K}_{55} & \bar{K}_{56} & \bar{K}_{57} & \bar{K}_{58} \\ \bar{K}_{61} & \bar{K}_{62} & \bar{K}_{63} & \bar{K}_{64} & \bar{K}_{65} & \bar{K}_{66} & \bar{K}_{67} & \bar{K}_{68} \\ \bar{K}_{71} & \bar{K}_{72} & \bar{K}_{73} & \bar{K}_{74} & \bar{K}_{75} & \bar{K}_{76} & \bar{K}_{77} & \bar{K}_{78} \\ \bar{K}_{81} & \bar{K}_{82} & \bar{K}_{83} & \bar{K}_{84} & \bar{K}_{85} & \bar{K}_{86} & \bar{K}_{87} & \bar{K}_{88} \end{bmatrix}$$

SYM

Γνωρίζουμε πλέον πως ο συντελεστής στιβαρότητας $\bar{K}_{11}$ είναι

$$\bar{K}_{11} = \text{Δρόσην κατά τη διεύθυνση } \bar{\Delta}_1 \text{ για μον. υπεραστική μετατόπιση}$$

↑

$$\bar{K}_{11} = \text{Δράση κατά τη διείσδυση } \bar{\Delta}_1 \text{ για μον. μοναδική μετατόπιση}$$

$\Delta_1 = 1$ ανήκει στον κόμβο 1

Μα, η δράση αυτή δε θα έρθει από τον ουρανό. Θα προκύψει από τις δράσεις των μελών, οι οποίες αναπτύσσονται λόγω της ίδιας μοναδιαίας και μοναδικής μετατόπισης.

Σύμφωνα με την

Όλων των μελών? Όχι, εκείνων που έχουν κοινό κόμβο τον κόμβο 1 στον οποίο και ανήκει ο β.ε. $\bar{\Delta}_1$

$$\text{Επομένως: } \bar{K}_{11} = \bar{K}_{11}^{(1)} + \bar{K}_{11}^{(3)} + \bar{K}_{11}^{(5)}$$

Γιατί $\bar{K}_{11}$ από τα μέλη 1, 3, 5?

Γιατί τα μέλη αυτά έχουν κοινό κόμβο τον κόμβο 1.

Γιατί $\bar{K}_{11}$ και όχι $\bar{K}_{33}$?

Γιατί για τα μέλη 1, 3, 5 ο κόμβος 1 είναι κόμβος αρχής και ο β.ε. $\bar{\Delta}_1$ της κατασκευής αντιστοιχεί στον οριζόντιο β.ε. του κόμβου αρχής του κάθε μέλους.

Ας κάνουμε το $\bar{K}_{21}$

$$\bar{K}_{21} = \text{Δράση κατά τη διείσδυση } \bar{\Delta}_2 \text{ για μον. μοναδική μετατόπιση}$$

$\Delta_1 = 1$ ανήκει στον κόμβο 1

$$\text{Άρα } \bar{K}_{21} = \bar{K}_{21}^{(1)} + \bar{K}_{21}^{(3)} + \bar{K}_{21}^{(5)}$$

Γιατί $\bar{K}_{21}$ από τα μέλη 1, 3, 5?

Γιατί τα μέλη αυτά έχουν κοινό κόμβο τον κόμβο 1 στον οποίο ανήκουν και ο Δ_1 και ο Δ_2 .

Γιατί $\bar{K}_{21}$ και όχι $\bar{K}_{42}$?

Γιατί για τα μέλη 1, 3, 5 ο κόμβος 1 είναι κόμβος αρχής

ο β.ε. Δ_1 της κατασκευής αντιστοιχεί στον οριζόντιο β.ε. του κόμβου αρχής του κάθε μέλους (1ος κατά σειρά)

ο βαθμός ελευθερίας Δ_2 αντιστοιχεί στον κατακόρυφο β.ε. του κόμβου αρχής του κάθε μέλους (2ος κατά σειρά).

Ας κάνουμε το $\bar{K}_{31}$

$$\bar{K}_{31} = \text{Δράση κατά τη διείσδυση } \bar{\Delta}_3 \text{ για μον. μοναδική μετατόπιση}$$

$\Delta_1 = 1$ ανήκει στον κόμβο 1

Μα, αν μετακινηθεί ο κόμβος 1 κατά $\Delta_1=1$ με όλους τους υπόλοιπους β.ε. παγιωμένους **TOTE** όλα τα μέλη είναι άτονα εκτός από το μέλος 1 που συνδέει τον κόμβο 1 με τον κόμβο 2.

Επομένως

$$\bar{K}_{31} = \bar{K}_{31}^{(c)}$$

Όροια, θα προκύψουν:

$$\bar{K}_{41} = \bar{K}_{41}^{(c)}$$

$$\bar{K}_{51} = \bar{K}_{31}^{(c)}$$

$$\bar{K}_{61} = \bar{K}_{41}^{(c)}$$

$$\bar{K}_{71} = \bar{K}_{31}^{(c)}$$

$$\bar{K}_{81} = \bar{K}_{41}^{(c)}$$

Ποιοτικό κριτήριο

Προσέξτε πως στην πρώτη στήλη του μητρώου στιβαρότητας (δηλαδή τη στήλη που αντιστοιχεί στην Δ1) έχουμε συνεισφορές μόνο από τα μέλη 1, 3, 5 που συντρέχουν στον κόμβο 1 (στον οποίο και ανήκει η Δ1)

Παρακαλώ προσπαθήστε να απαντήσετε και αν υπάρχει οποιαδήποτε δυσκολία επικοινωνήστε στο savtri@mail.ntua.gr

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για όλες τις στήλες του μητρώου στιβαρότητας τελικά προκύπτει η ακόλουθη διατύπωση

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} + \bar{K}_{11}^{(c)} + \bar{K}_{11}^{(c)} & \bar{K}_{12} + \bar{K}_{12}^{(c)} + \bar{K}_{12}^{(c)} & \bar{K}_{13} + \bar{K}_{13}^{(c)} + \bar{K}_{13}^{(c)} & \bar{K}_{14} + \bar{K}_{14}^{(c)} + \bar{K}_{14}^{(c)} & \bar{K}_{15} + \bar{K}_{15}^{(c)} + \bar{K}_{15}^{(c)} & \bar{K}_{16} + \bar{K}_{16}^{(c)} + \bar{K}_{16}^{(c)} & \bar{K}_{17} + \bar{K}_{17}^{(c)} + \bar{K}_{17}^{(c)} & \bar{K}_{18} + \bar{K}_{18}^{(c)} + \bar{K}_{18}^{(c)} \\ \bar{K}_{21} + \bar{K}_{21}^{(c)} + \bar{K}_{21}^{(c)} & \bar{K}_{22} + \bar{K}_{22}^{(c)} + \bar{K}_{22}^{(c)} & \bar{K}_{23} + \bar{K}_{23}^{(c)} + \bar{K}_{23}^{(c)} & \bar{K}_{24} + \bar{K}_{24}^{(c)} + \bar{K}_{24}^{(c)} & \bar{K}_{25} + \bar{K}_{25}^{(c)} + \bar{K}_{25}^{(c)} & \bar{K}_{26} + \bar{K}_{26}^{(c)} + \bar{K}_{26}^{(c)} & \bar{K}_{27} + \bar{K}_{27}^{(c)} + \bar{K}_{27}^{(c)} & \bar{K}_{28} + \bar{K}_{28}^{(c)} + \bar{K}_{28}^{(c)} \\ \bar{K}_{31} + \bar{K}_{31}^{(c)} + \bar{K}_{31}^{(c)} & \bar{K}_{32} + \bar{K}_{32}^{(c)} + \bar{K}_{32}^{(c)} & \bar{K}_{33} + \bar{K}_{33}^{(c)} + \bar{K}_{33}^{(c)} & \bar{K}_{34} + \bar{K}_{34}^{(c)} + \bar{K}_{34}^{(c)} & \bar{K}_{35} + \bar{K}_{35}^{(c)} + \bar{K}_{35}^{(c)} & \bar{K}_{36} + \bar{K}_{36}^{(c)} + \bar{K}_{36}^{(c)} & \bar{K}_{37} + \bar{K}_{37}^{(c)} + \bar{K}_{37}^{(c)} & \bar{K}_{38} + \bar{K}_{38}^{(c)} + \bar{K}_{38}^{(c)} \\ \bar{K}_{41} + \bar{K}_{41}^{(c)} + \bar{K}_{41}^{(c)} & \bar{K}_{42} + \bar{K}_{42}^{(c)} + \bar{K}_{42}^{(c)} & \bar{K}_{43} + \bar{K}_{43}^{(c)} + \bar{K}_{43}^{(c)} & \bar{K}_{44} + \bar{K}_{44}^{(c)} + \bar{K}_{44}^{(c)} & \bar{K}_{45} + \bar{K}_{45}^{(c)} + \bar{K}_{45}^{(c)} & \bar{K}_{46} + \bar{K}_{46}^{(c)} + \bar{K}_{46}^{(c)} & \bar{K}_{47} + \bar{K}_{47}^{(c)} + \bar{K}_{47}^{(c)} & \bar{K}_{48} + \bar{K}_{48}^{(c)} + \bar{K}_{48}^{(c)} \\ \bar{K}_{51} + \bar{K}_{51}^{(c)} + \bar{K}_{51}^{(c)} & \bar{K}_{52} + \bar{K}_{52}^{(c)} + \bar{K}_{52}^{(c)} & \bar{K}_{53} + \bar{K}_{53}^{(c)} + \bar{K}_{53}^{(c)} & \bar{K}_{54} + \bar{K}_{54}^{(c)} + \bar{K}_{54}^{(c)} & \bar{K}_{55} + \bar{K}_{55}^{(c)} + \bar{K}_{55}^{(c)} & \bar{K}_{56} + \bar{K}_{56}^{(c)} + \bar{K}_{56}^{(c)} & \bar{K}_{57} + \bar{K}_{57}^{(c)} + \bar{K}_{57}^{(c)} & \bar{K}_{58} + \bar{K}_{58}^{(c)} + \bar{K}_{58}^{(c)} \\ \bar{K}_{61} + \bar{K}_{61}^{(c)} + \bar{K}_{61}^{(c)} & \bar{K}_{62} + \bar{K}_{62}^{(c)} + \bar{K}_{62}^{(c)} & \bar{K}_{63} + \bar{K}_{63}^{(c)} + \bar{K}_{63}^{(c)} & \bar{K}_{64} + \bar{K}_{64}^{(c)} + \bar{K}_{64}^{(c)} & \bar{K}_{65} + \bar{K}_{65}^{(c)} + \bar{K}_{65}^{(c)} & \bar{K}_{66} + \bar{K}_{66}^{(c)} + \bar{K}_{66}^{(c)} & \bar{K}_{67} + \bar{K}_{67}^{(c)} + \bar{K}_{67}^{(c)} & \bar{K}_{68} + \bar{K}_{68}^{(c)} + \bar{K}_{68}^{(c)} \\ \bar{K}_{71} + \bar{K}_{71}^{(c)} + \bar{K}_{71}^{(c)} & \bar{K}_{72} + \bar{K}_{72}^{(c)} + \bar{K}_{72}^{(c)} & \bar{K}_{73} + \bar{K}_{73}^{(c)} + \bar{K}_{73}^{(c)} & \bar{K}_{74} + \bar{K}_{74}^{(c)} + \bar{K}_{74}^{(c)} & \bar{K}_{75} + \bar{K}_{75}^{(c)} + \bar{K}_{75}^{(c)} & \bar{K}_{76} + \bar{K}_{76}^{(c)} + \bar{K}_{76}^{(c)} & \bar{K}_{77} + \bar{K}_{77}^{(c)} + \bar{K}_{77}^{(c)} & \bar{K}_{78} + \bar{K}_{78}^{(c)} + \bar{K}_{78}^{(c)} \\ \bar{K}_{81} + \bar{K}_{81}^{(c)} + \bar{K}_{81}^{(c)} & \bar{K}_{82} + \bar{K}_{82}^{(c)} + \bar{K}_{82}^{(c)} & \bar{K}_{83} + \bar{K}_{83}^{(c)} + \bar{K}_{83}^{(c)} & \bar{K}_{84} + \bar{K}_{84}^{(c)} + \bar{K}_{84}^{(c)} & \bar{K}_{85} + \bar{K}_{85}^{(c)} + \bar{K}_{85}^{(c)} & \bar{K}_{86} + \bar{K}_{86}^{(c)} + \bar{K}_{86}^{(c)} & \bar{K}_{87} + \bar{K}_{87}^{(c)} + \bar{K}_{87}^{(c)} & \bar{K}_{88} + \bar{K}_{88}^{(c)} + \bar{K}_{88}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{bmatrix}$$

Για να λυθεί η παραπάνω εξίσωση πρέπει να επιβάλλουμε συνοριακές συνθήκες, ήτοι φορτίσεις και κινηματικούς περιορισμούς.

Με βάση την εκφώνηση, το διάνυσμα των επικόμβιων φορτίσεων είναι

$$\{ \bar{P} \} = \{ \underbrace{\bar{R}_1}_{\#1} \underbrace{\bar{R}_2}_{\#2} \mid \underbrace{0}_{\#3} \underbrace{\bar{R}_4}_{\#4} \mid \underbrace{P}_{\#5} \underbrace{0}_{\#6} \mid \underbrace{P}_{\#7} \underbrace{-P}_{\#8} \}^T$$

όπου $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_4$ οι άγνωστες ανεξάρτητες σιγίξες

Αντίστοιχα, το διάνυσμα των επικόμβιων μετακινήσεων γράφεται

$$\{ \bar{\Delta} \} = \{ \underbrace{0}_{\text{εξορθωση}} \underbrace{0}_{\text{εξορθωση}} \mid \underbrace{\bar{\Delta}_3}_{\text{εξορθωση}} \underbrace{0}_{\text{εξορθωση}} \mid \bar{\Delta}_5 \bar{\Delta}_6 \mid \bar{\Delta}_7 \bar{\Delta}_8 \}^T$$

Για την επίλυση, αναδιατάσσουμε το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων ούτως ώστε όλες οι άγνωστες μετατοπίσεις να έρθουν πάνω

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \{\bar{\Delta}_f\} \\ \downarrow \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_1(\in 0) \\ \bar{\Delta}_2(\in 0) \\ \bar{\Delta}_4(\in 0) \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{array} \right\}$$

Μητρώο αναδιάταξης V

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = [V] \{\bar{\Delta}\}$$

Το διάνυσμα επιδόσεων φορτίσεων αναδιατάσσεται επίσης

$$\{\bar{P}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = [V] \{\bar{P}\}$$

και επομένως

$$\{\bar{P}_m\} = \left\{ \underbrace{0 \quad P \quad 0 \quad P \quad -P}_{\{\bar{P}_f\}^T} \mid \underbrace{\bar{R}_1 \quad \bar{R}_2 \quad \bar{R}_4}_{\{\bar{P}_s\}^T} \right\}^T$$

Επομένως, η εξίσωση ισορροπίας τεμάχιο διατάσσεται στη μορφή:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fs}] \\ [K_{sf}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix}$$

ή

$$\underbrace{\{\bar{P}_f\}}_{\text{γνωστό}} = \underbrace{[K_{ff}]}_{\text{γνωστό}} \underbrace{\{\bar{\Delta}_f\}}_{\text{άγνωστο}} + \underbrace{[K_{fs}]}_{\text{γνωστό}} \underbrace{\{\bar{\Delta}_s\}}_{\text{άγνωστο}} \Rightarrow \{\bar{\Delta}_f\} = \dots$$

$$\underbrace{\{P_f\}}_{\text{γνωσώ}} = [K_{ff}] \underbrace{\{\Delta_f\}}_{\text{αυτεαδισιώ}} + [K_{fs}] \{\Delta_s\} \Rightarrow \{\Delta_f\} = \dots$$

$$\{P_s\} = [K_{sf}] \{\Delta_f\} + [K_{ss}] \{\Delta_s\}$$

↳ βρίσκω τις αντιδράσεις στιγίφης

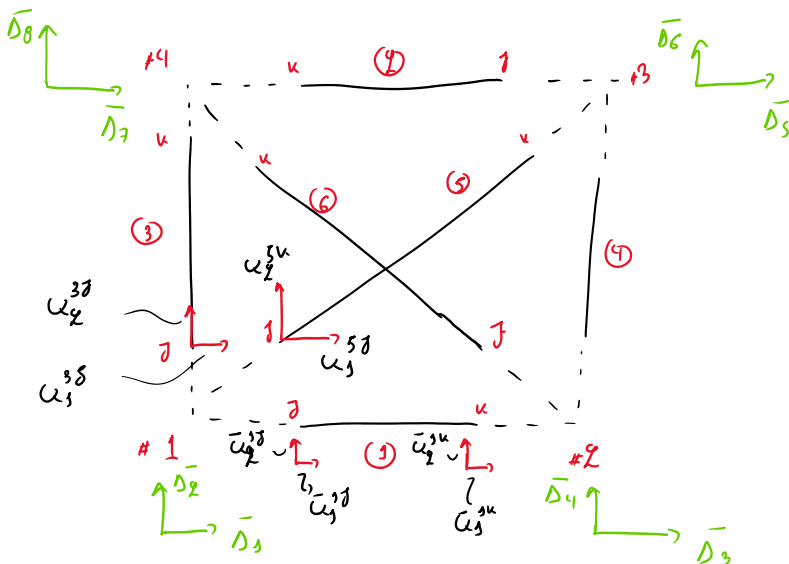
Προσδιορισμός εσωτερικών ατακτών μεγεθών

Έχοντας λύσει ως προς τα $\{\Delta_f\}$ το δίκτυομα $\{\Delta_m\}$ είναι πλέον γνωσώ οπότε να μπορέσω να γράψω

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 (=0) \\ \bar{\Delta}_2 (=0) \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 (=0) \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = [V]^T \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_4 \end{Bmatrix}$$

$\uparrow$ $\{\Delta_f\}$
 $\downarrow$
 $\uparrow$ $\{\Delta_s\}$
 $\downarrow$

Πλέον γνωρίζουμε τις μετακινήσεις στους κόμβους (καθολικό σύστημα) και άρα κατ' αντιστοιχία (συμβιβαστό μετατοπίσεων) τις μετακινήσεις στα άκρα κάθε μέλους (καθολικό σύστημα)



$$\begin{aligned}
 \{\bar{D}^1\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \end{Bmatrix} & \{\bar{D}^2\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} & \{\bar{D}^3\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} \\
 \{\bar{D}^4\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} & \{\bar{D}^5\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \end{Bmatrix} & \{\bar{D}^6\} &= \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Έχουμε πετύχει!!!!

Για κάθε γύρος $c = 1, \dots, 6$ οι μετασχηματισμοί στο τοπικό σύστημα είναι:

$$\{\bar{D}^c\} = [A_{PT}^c] \{\bar{D}^c\}$$

ωστούτως οι δυνάμεις

$$\{A^c\} = [K^c] \{\bar{D}^c\} = [K^c] [A_{PT}^c] \{\bar{D}^c\}$$

↑
τοπικό
σύστημα

↓
τοπικό
σύστημα.

ΠΟΛΥ_ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ_ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

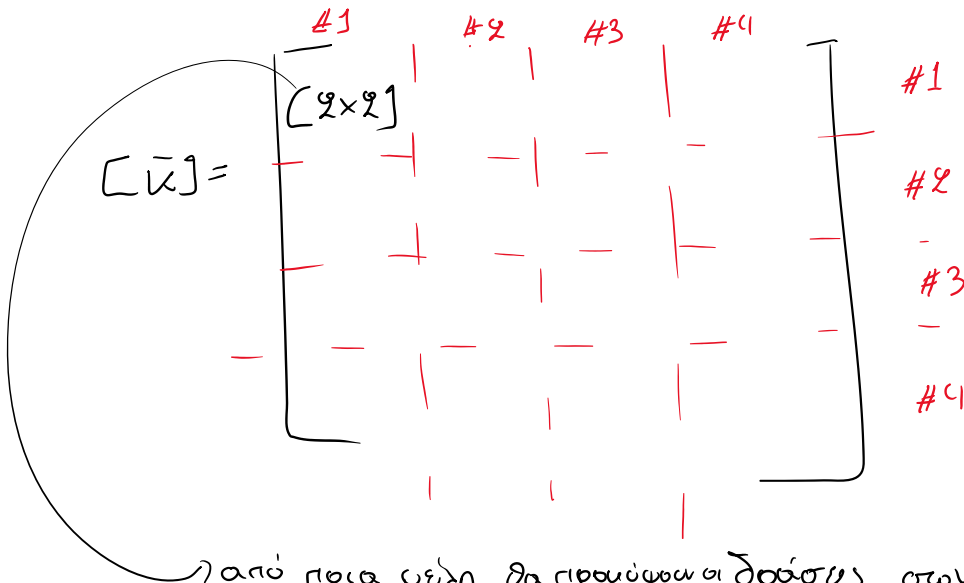
Η μέθοδος "κόμβος προς κόμβο" για τον προσδιορισμό του μητρώου στιβαρότητας είναι γρήγορη και απλή, υπό την προϋπόθεση πως στους κόμβους ενώνονται στοιχεία με τον ίδιο αριθμό βαθμών ελευθερίας. Σε αυτήν την περίπτωση, εκμεταλλευόμαστε το γεγονός πως το μητρώο στιβαρότητας του κάθε μέλους συμπυκνώνει την πληροφορία του πως αλληλεπιδρά ο κάθε κόμβος με τον εαυτό του και τον απέναντί του ως εξής

$$\begin{aligned}
 & \text{κόμβος προς κόμβο} \\
 & \text{\#J} \quad \text{\#K} \\
 & [K^{(1)}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{\#J} \\ - \\ \text{\#K} \end{matrix} = \begin{matrix} 2 \times 2 \\ (\\ \begin{bmatrix} [K'_{JJ}] & [K'_{JK}] \\ [K'_{JS}] & [K'_{KK}] \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

και αντίστοιχα για όλα τα μέλη

$$[\bar{K}^{\omega}] = \begin{bmatrix} [K_{js}^i] & [K_{jk}^i] \\ [K_{ks}^i] & [K_{kk}^i] \end{bmatrix}$$

Κατ' επέκταση μπορούμε να επιμερίσουμε και το ολικό μητρώο στιβαρότητας της κατασκευής σε 2x2 υπομητρώα



από ποια μέλη θα προκύψουν δράσεις στον κόμβο 1 για μοναδιαία και φανταστικά σετ μετατοπίσεων στον ίδιο κόμβο;

Απάντηση: Από τα μέλη 1, 3, 5 → ο κόμβος 1 ελα αρχή $[K_{js}^5]$

ο κόμβος 1 ελα αρχή $[K_{js}^1]$

ο κόμβος 1 ελα αρχή $[K_{js}^3]$

Επομένως, κοιτώντας το παρακάτω σχήμα και με λίγη προσοχή μπορούμε τελικά να μορφώσουμε όλο το μητρώο στιβαρότητας, υπομητρώ ο προς υπομητρώ.

