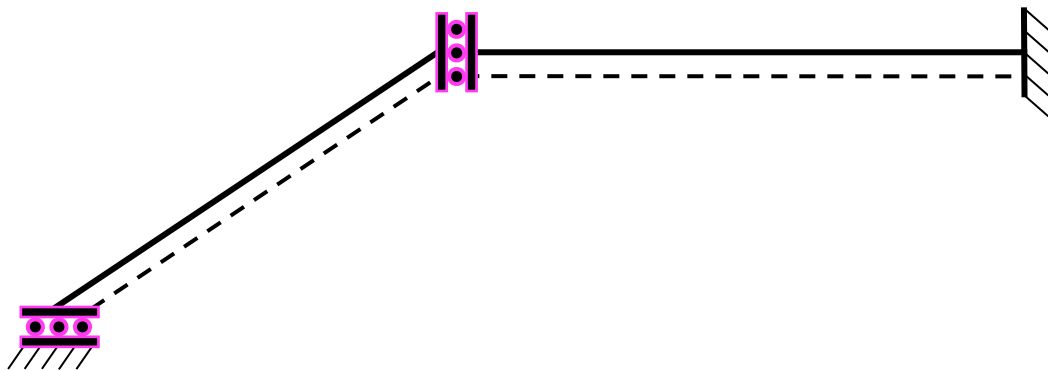


Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης Πλαισίου με εφαρμογή Στατικής Συμπύκνωσης

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ &
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ
ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ

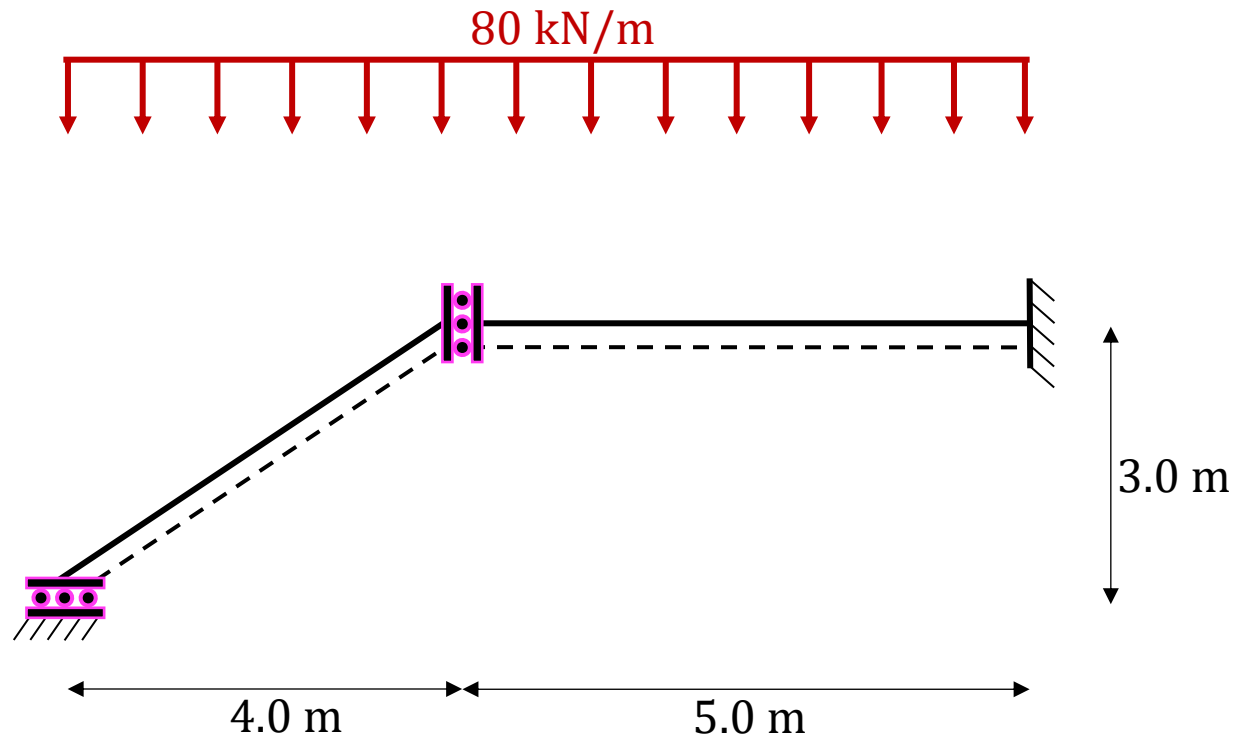
#7

ΗΜ/ΝΙΑ

06/06/2024

ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ

Εξεταζόμενο Πλαίσιο



Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

Δεδομένα:

- $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0.30 \times 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$
- $I = 0.3 \times \frac{0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$
- $q = 80 \text{ kN/m}$

Παρατηρώ:

- Ενδιάμεσα φορτία
- Εσωτερική ελευθέρωση

Τρόποι που θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε τον φορέα:

1. Μέθοδος Συνδυασμένου Κόμβου.
2. Μέθοδος Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας για ένα από τα δύο μέλη.
3. Μέθοδος Τροποποιημένου Μητρώου Στιβαρότητας και για τα δύο μέλη.
4. Στατική Συμπύκνωση όλου του κόμβου και θεώρηση ενός υπερστοιχείου.

Στατική Συμπύκνωση

- Στατική συμπύκνωση ονομάζεται η διαδικασία απαλοιφής ορισμένων συνιστωσών των επικόμβιων μετακινήσεων.
- Η στατική συμπύκνωση παρέχει σημαντικά υπολογιστικά πλεονεκτήματα, τόσο ως προς τον χρόνο εκτέλεσης της επίλυσης των εξισώσεων ισορροπίας, όσο και ως προς την απαιτούμενη μνήμη για την αποθήκευση των παραγόμενων μητρώων.
- Μετά την απαλοιφή των επιλεγμένων β.ε., προκύπτει η συμπυκνωμένη εξίσωση ισορροπίας, μετά την επίλυση της οποίας υπολογίζονται μόνο οι παραμένουσες (condensed) μετακινήσεις του φορέα.
- Οι παραμένουσες μετακινήσεις του αρχικού και του συμπυκνωμένου φορέα TAYTIZONTAI. Αυτό σημαίνει πως οι φορείς είναι ισοδύναμοι ως προς τη στατική τους συμπεριφορά.

Στατική Συμπύκνωση – Ορισμένες σχέσεις μαζεμένες

Αναδιατεταγμένη μητρική εξίσωση ισορροπίας (e: eliminated)(c: condensed).

$$\begin{Bmatrix} \{P_e\} \\ \{P_{cc}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_e\} \\ \{\Delta_c\} \end{Bmatrix}$$

Η μητρική αυτή εξίσωση μπορεί να αναπτυχθεί σε δύο επιμέρους μητρικές εξισώσεις.

$$\{P_e\} = [K_{ee}]\{\Delta_e\} + [K_{ec}]\{\Delta_c\}$$

$$\{P_{cc}\} = [K_{ce}]\{\Delta_e\} + [K_{cc}]\{\Delta_c\}$$

Επιλύοντας την πρώτη ως προς $\{\Delta_e\}$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη προκύπτουν τα εξής:

$$\underbrace{\{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\}}_{\{P_c\}} = \underbrace{([K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}])}_{[K_c]}\{\Delta_c\}$$

Η τελευταία αποτελεί την τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας, με $\{P_c\}$ το τροποποιημένο διάνυσμα ακραίων δράσεων και $[K_c]$ το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας.

Επομένως για τον συμπυκνωμένο φορέα συνοπτικά έχουμε:

Τροποποιημένη εξίσωση ισορροπίας:

$$\{P_c\} = [K_c]\{\Delta_c\}$$

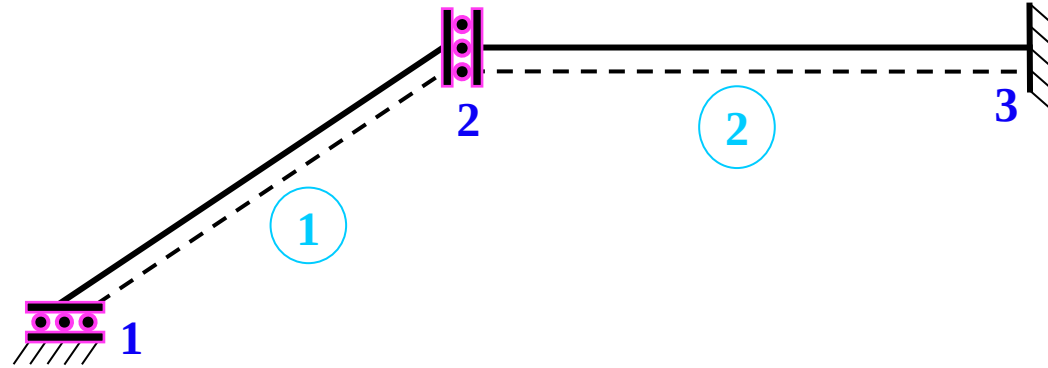
Τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας:

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}]$$

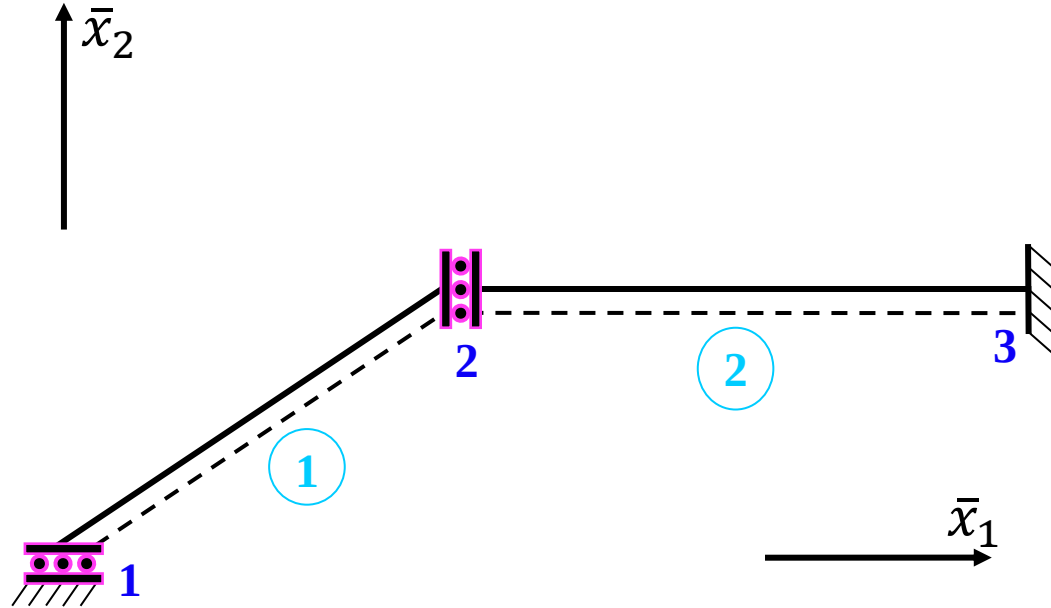
Τροποποιημένο διάνυσμα ακραίων δράσεων:

$$\{P_c\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\}$$

ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών

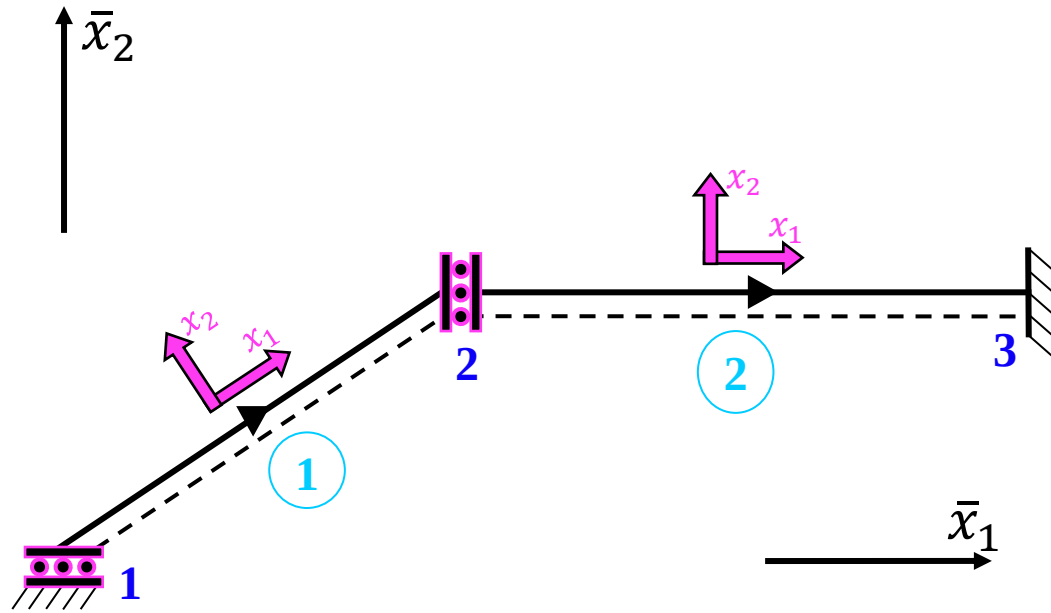


ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$



- Η «λογική» επιλογή καθολικού συστήματος αξόνων, στην παρούσα περίπτωση επιτρέπει την εύκολη έκφραση των κοινών μετακινησιακών μεγεθών στην εσωτερική ελευθέρωση.

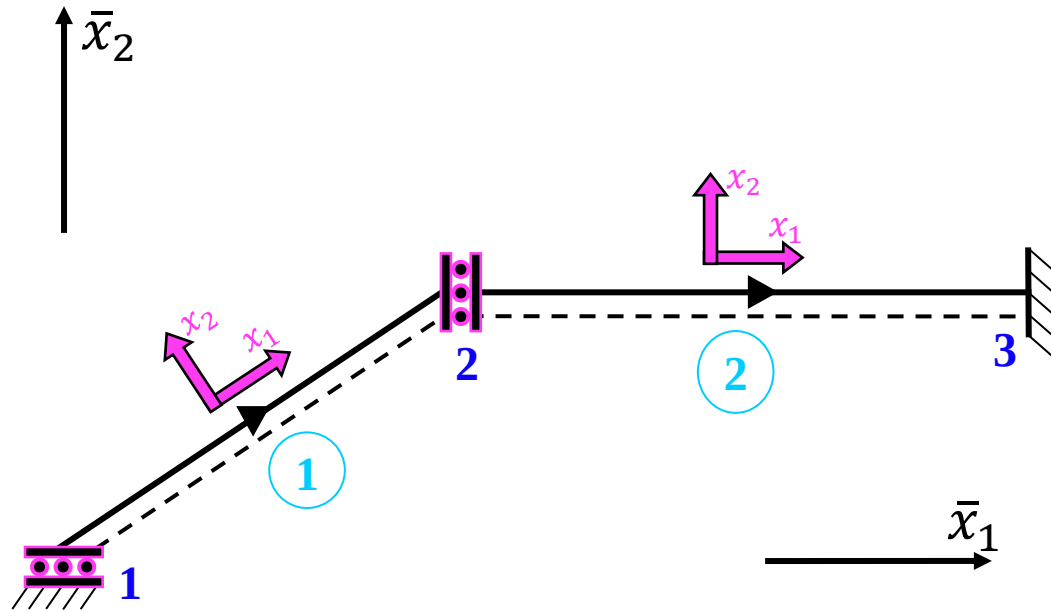
ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό).
- Ός προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

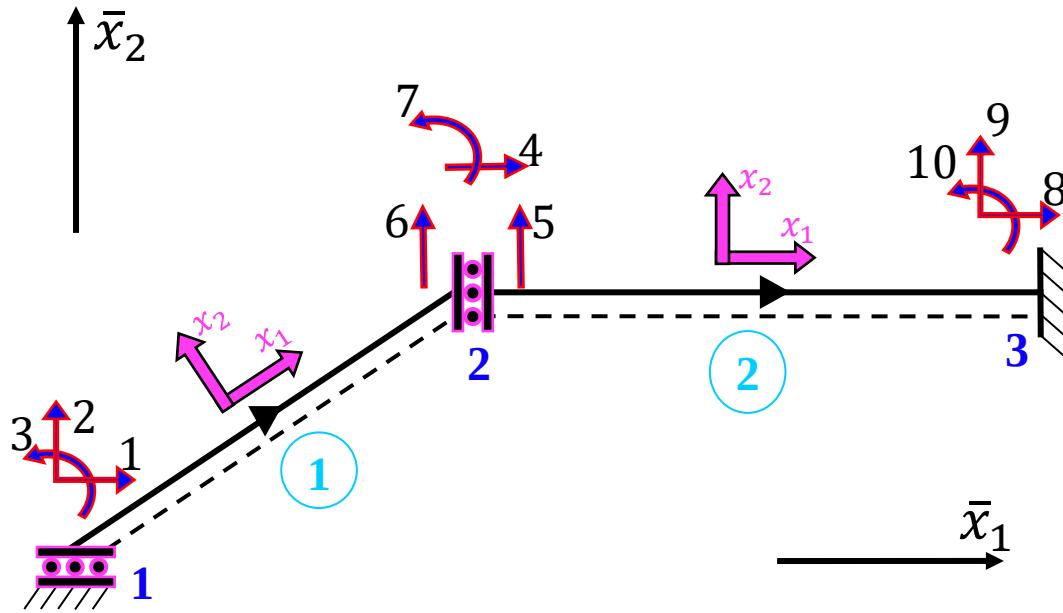
Τα φορτία παραλείπονται χάριν απλότητας του σχήματος.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



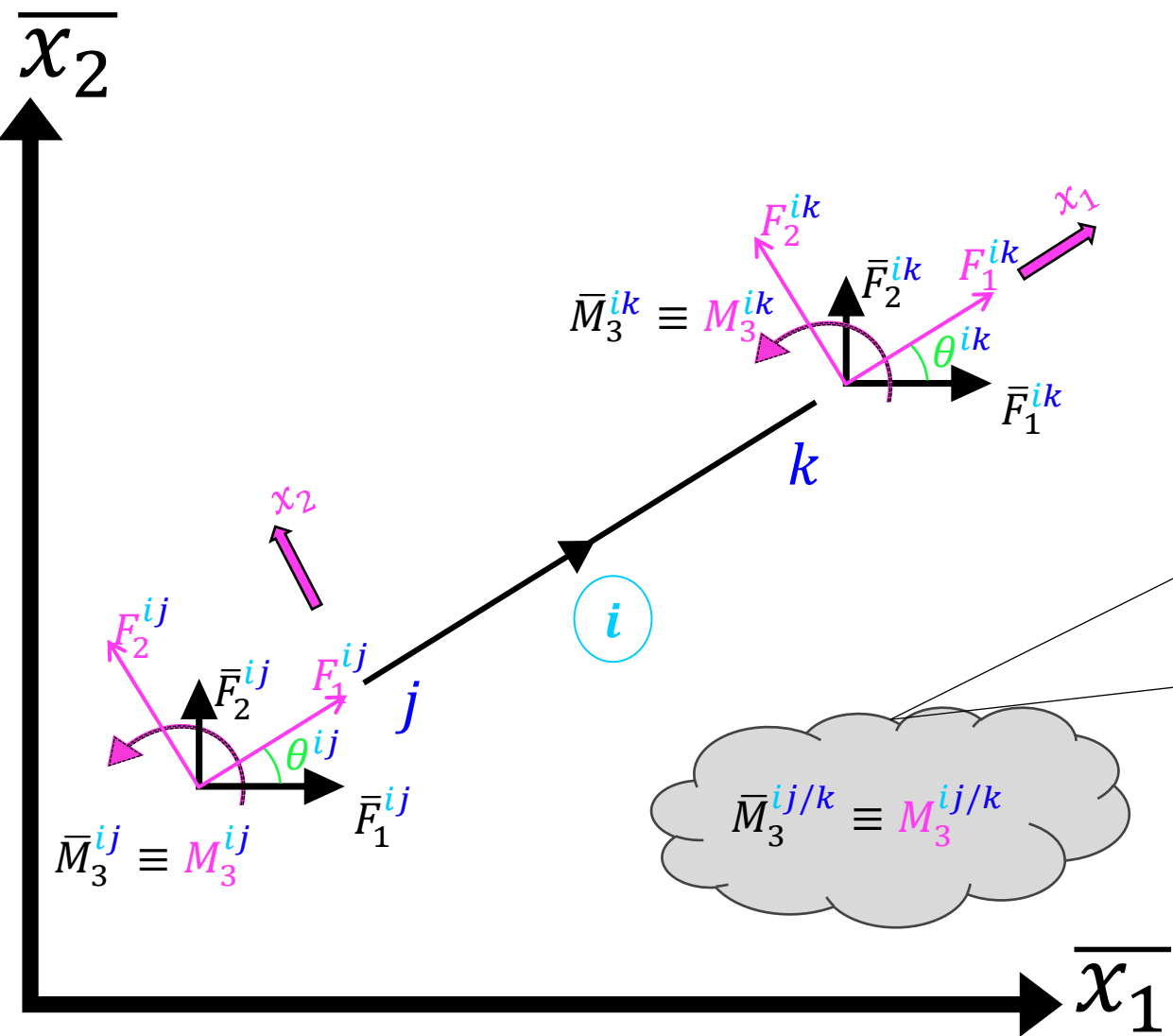
- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- ΠΡΟΣΟΧΗ!
Έχω μια εσωτερική ελευθέρωση στον κόμβο 2. Αυτή η «κυλιόμενη πάκτωση» (διατμητική ελευθέρωση) επιτρέπει:
 1. Την ανεξάρτητη μετατόπιση των μελών που συντρέχουν στον κόμβο κατά τη διεύθυνση της κύλισης.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- ΠΡΟΣΟΧΗ!
Έχω μια εσωτερική ελευθέρωση στον κόμβο 2. Αυτή η «κυλιόμενη πάκτωση» (διατμητική ελευθέρωση) επιτρέπει:
 1. Την ανεξάρτητη μετατόπιση των μελών που συντρέχουν στον κόμβο κατά τη διεύθυνση της κύλισης.

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

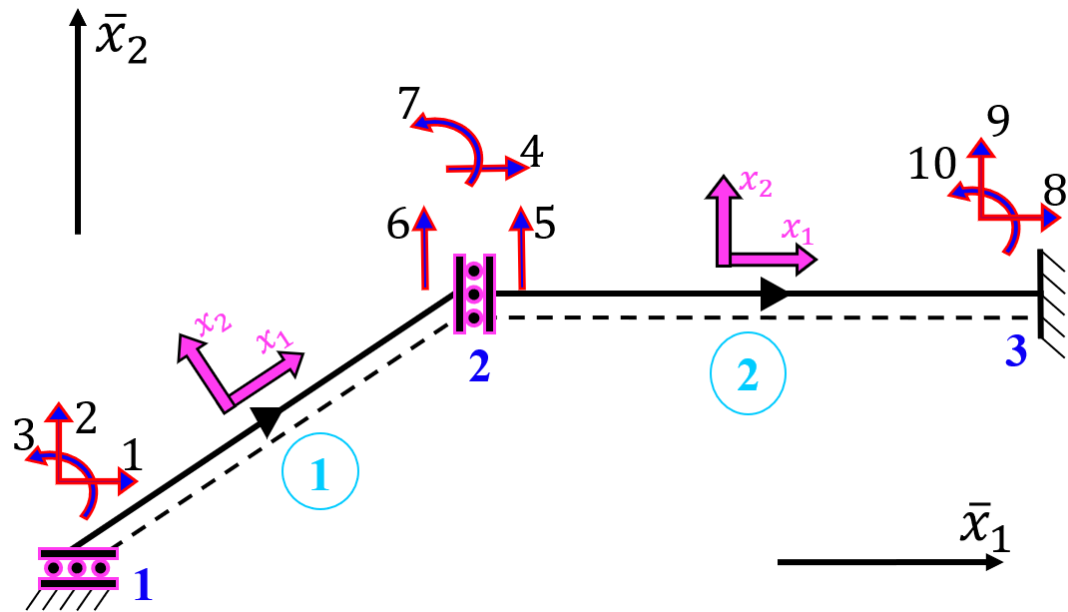


$$[\Lambda_{PF}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει : $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_{PF}^i]^{-1} = [\Lambda_{PF}^i]^T$
- Ο καθολικός $\bar{x}_1$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



$$[\Lambda^1] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & [0]_{3 \times 3} \\ \hline [0]_{3 \times 3} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

$$[\Lambda^2] = [I]_{3 \times 3}$$

Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos \theta^i$	$\sin \theta^i$
1	36.87	0.8	0.6
2	0	1	0

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$[k^i] = \left[\begin{array}{c|c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array} \right]$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/3)

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Χωρικό Πλαίσιο

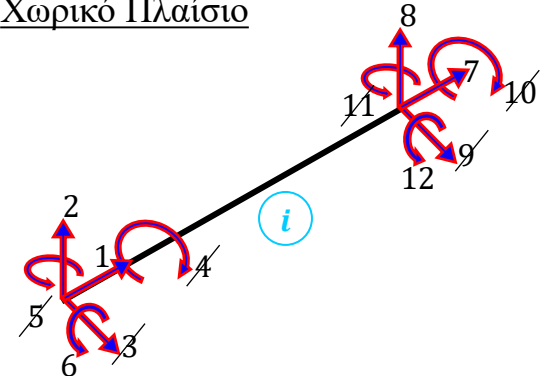
Επίπεδο Πλαίσιο

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

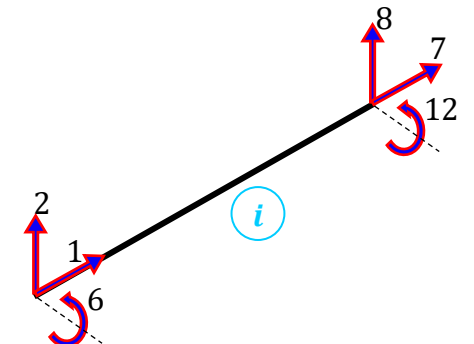
$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GA^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GA^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)

Μέλος <i>i</i>	<i>Eⁱ</i> [kN/m ²]	<i>Aⁱ</i> [m ²]	<i>Iⁱ</i> [m ⁴]	<i>Lⁱ</i> [m]
1	2.1 × 10 ⁷	0.18	0.0054	5.0
2	2.1 × 10 ⁷	0.18	0.0054	5.0

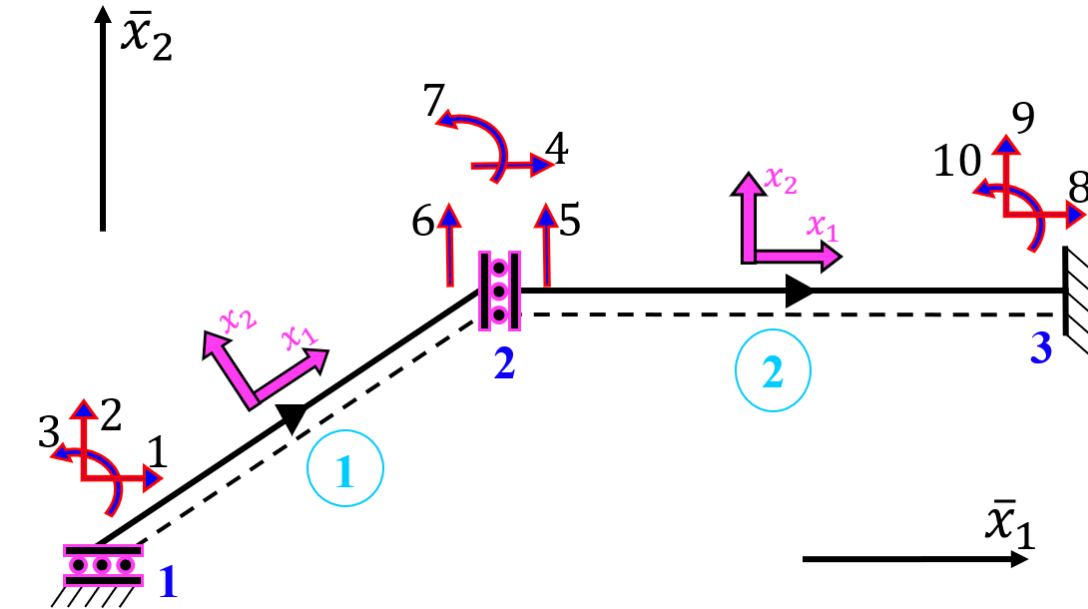
Μέλος <i>i</i>	<i>Eⁱ</i> [kN/m ²]	<i>Aⁱ</i> [m ²]	<i>Iⁱ</i> [m ⁴]	<i>Lⁱ</i> [m]
1	2.1 × 10 ⁷	0.18	0.0054	5.0
2	2.1 × 10 ⁷	0.18	0.0054	5.0

$[k^1] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{bmatrix} \times 10^5$

$[k^2] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{bmatrix} \times 10^5$

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/2)

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε μέλους υπολογίζεται από τη σχέση: $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PF}^i]$



$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ \hline -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{array}$$

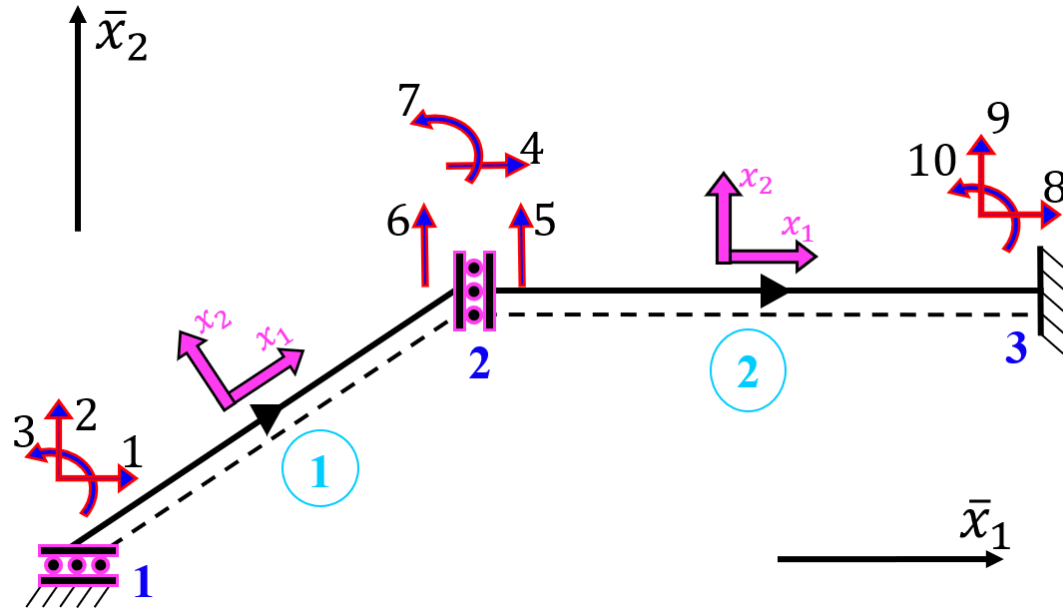
$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/2)



-  Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι συμμετρικό. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).
-  Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα θετικά (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$. Κατ'εξάιρεση, το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν και το αντίστοιχο καθολικό να εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις, αλλά αυτό γίνεται καθώς έχουμε θεωρήσει τέμνουσα δύναμη (που δεν ορίζεται), για να έχουμε «όμορφα και τετράγωνα» μητρώα.
-  Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετακινήσεις



Αγνοώ προσωρινά:

- τα ενδιάμεσα φορτία

$$\{\bar{p}^{nodal}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{M}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{M}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_8 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \end{matrix}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \end{matrix}$$

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα ^(1/3)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος να κατασκευαστεί το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με τη βοήθεια της σχέσης: $[\bar{K}]$

με τη μορφή:
$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix}$$
, επιμεριζόμενα, δηλαδή το μητρώο αυτό

σε 4 **υπομητρώα** διαστάσεως 3×3 .

2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους εισάγεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλους τους **μέγθοι** να δοθεί **για όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι τα υπομητρώα εισάγονται στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αν υπάρχουν μέλη που συνδέονται με τον ίδιο κόμβο.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/3)

- Μέχρι τώρα, η σύνθεση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα γινόταν με επαλληλία των ανά κόμβο υπομητρώων των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών.
- Στην παρούσα περίπτωση όπου έχουμε εσωτερική/ες ελευθερώσεις, δεν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ αυτών των υπομητρώων.
- Δηλαδή, η ύπαρξη εσωτερικών ελευθερώσεων καθιστά την σύνθεση μέσω υπομητρώων δυσχερή.
- Επομένως επιλέγουμε να κάνουμε τη σύνθεση στοιχείο-στοιχείο (δηλ. β.ε. – β.ε.).

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 & \textcolor{red}{1} \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 & \textcolor{red}{2} \\ 0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 & \textcolor{red}{3} \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 & \textcolor{red}{4} \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 & \textcolor{red}{6} \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & \textcolor{red}{7} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & \textcolor{red}{7} \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^6 \times \begin{array}{c|cccccccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline \textcolor{red}{?} & 0.3577 & -0.0163 & -0.4878 & -0.3577 & 0 & -0.0163 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0.3577 & 0.2791 & 0.0218 & -0.3577 & -0.2791 & 0 & 0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0907 & 0.0163 & -0.0218 & 0 & 0.0454 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{3} \\ -0.4878 & -0.3577 & 0.0163 & \textcolor{red}{?} & 0.3577 & 0 & 0.0163 & -0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ -0.3577 & -0.2791 & -0.0218 & 0.3577 & 0.2791 & 0 & -0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0.0272 & 0 & -0.0109 & 0.0272 & \textcolor{red}{6} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0454 & 0.0163 & -0.0218 & 0.0272 & \textcolor{red}{?} & 0 & -0.0272 & 0.0454 & \textcolor{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -0.7560 & 0 & 0 & 0 & 0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0109 & -0.0272 & 0 & 0.0109 & -0.0272 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0272 & 0.0454 & 0 & -0.0272 & 0.0907 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$



Μέχρι εδώ η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι ίδια με αυτή της θεώρησης συνδυασμένου κόμβου.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 & \textcolor{red}{1} \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 & \textcolor{red}{2} \\ 0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 & \textcolor{red}{3} \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 & \textcolor{red}{4} \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 & \textcolor{red}{6} \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & \textcolor{red}{7} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & \textcolor{red}{7} \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^6 \times \begin{array}{c|cccccccccc|c} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \\ \hline 0.4878 & 0.3577 & -0.0163 & -0.4878 & -0.3577 & 0 & -0.0163 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0.3577 & 0.2791 & 0.0218 & -0.3577 & -0.2791 & 0 & 0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0907 & 0.0163 & -0.0218 & 0 & 0.0454 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{3} \\ -0.4878 & -0.3577 & 0.0163 & ? & 0.3577 & 0 & 0.0163 & -0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ -0.3577 & -0.2791 & -0.0218 & 0.3577 & 0.2791 & 0 & -0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0.0272 & 0 & -0.0109 & 0.0272 & \textcolor{red}{6} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0454 & 0.0163 & -0.0218 & 0.0272 & ? & 0 & -0.0272 & 0.0454 & \textcolor{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -0.7560 & 0 & 0 & 0 & 0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0109 & -0.0272 & 0 & 0.0109 & -0.0272 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0272 & 0.0454 & 0 & -0.0272 & 0.0907 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$



Μέχρι εδώ η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι ίδια με αυτή της θεώρησης συνδυασμένου κόμβου.

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \\ \hline \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \\ \hline \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^6 \times \begin{array}{c|cccccccccc|c} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \\ \hline 0.4878 & 0.3577 & -0.0163 & -0.4878 & -0.3577 & 0 & -0.0163 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0.3577 & 0.2791 & 0.0218 & -0.3577 & -0.2791 & 0 & 0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0907 & 0.0163 & -0.0218 & 0 & 0.0454 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{3} \\ -0.4878 & -0.3577 & 0.0163 & 1.2438 & 0.3577 & 0 & 0.0163 & -0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ -0.3577 & -0.2791 & -0.0218 & 0.3577 & 0.2791 & 0 & -0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0.0272 & 0 & -0.0109 & 0.0272 & \textcolor{red}{6} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0454 & 0.0163 & -0.0218 & 0.0272 & ? & 0 & -0.0272 & 0.0454 & \textcolor{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -0.7560 & 0 & 0 & 0 & 0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0109 & -0.0272 & 0 & 0.0109 & -0.0272 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0272 & 0.0454 & 0 & -0.0272 & 0.0907 & \textcolor{red}{10} \\ \hline \end{array}$$



Μέχρι εδώ η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι ίδια με αυτή της θεώρησης συνδυασμένου κόμβου.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 & \textcolor{red}{1} \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 & \textcolor{red}{2} \\ 0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 & \textcolor{red}{3} \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 & \textcolor{red}{4} \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 & \textcolor{red}{6} \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & \textcolor{red}{7} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & \textcolor{red}{7} \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^6 \times \begin{array}{c|cccccccccc|c} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \\ \hline 0.4878 & 0.3577 & -0.0163 & -0.4878 & -0.3577 & 0 & -0.0163 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ 0.3577 & 0.2791 & 0.0218 & -0.3577 & -0.2791 & 0 & 0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{2} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0907 & 0.0163 & -0.0218 & 0 & 0.0454 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{3} \\ -0.4878 & -0.3577 & 0.0163 & 1.2438 & 0.3577 & 0 & 0.0163 & -0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{4} \\ -0.3577 & -0.2791 & -0.0218 & 0.3577 & 0.2791 & 0 & -0.0218 & 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0109 & 0.0272 & 0 & -0.0109 & 0.0272 & \textcolor{red}{6} \\ -0.0163 & 0.0218 & 0.0454 & 0.0163 & -0.0218 & 0.0272 & 0.1814 & 0 & -0.0272 & 0.0454 & \textcolor{red}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -0.7560 & 0 & 0 & 0 & 0.7560 & 0 & 0 & \textcolor{red}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0109 & -0.0272 & 0 & 0.0109 & -0.0272 & \textcolor{red}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0272 & 0.0454 & 0 & -0.0272 & 0.0907 & \textcolor{red}{10} \end{array}$$



Μέχρι εδώ η διαδικασία που ακολουθήσαμε είναι ίδια με αυτή της θεώρησης συνδυασμένου κόμβου.

ΒΗΜΑ 9*: Στατική Συμπύκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Θα εφαρμόσουμε στατική συμπύκνωση όλων των β.ε. του κόμβου [2](#).

ΒΗΜΑ 9*: Στατική Συμπύκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Θα εφαρμόσουμε στατική συμπύκνωση όλων των β.ε. του κόμβου 2.

1. Μητρώο αναδιάταξης $[V_c]$ ώστε να έρθουν πρώτοι οι προς απαλοιφή β.ε..
2. Αναδιάταξη μητρώου δυσκαμψίας κατασκευής καθώς και των διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων.

$[V_c] =$

					1	2	3	4		5	6	7	8	9	10
Προς απαλοιφή Eliminated	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Συμπυκνωμένοι Condensed	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$$[V_c][\bar{K}][V_c]^T = 10^6 \times$$

	4	5	6	7		1	2	3	8	9	10	
4	1.2438	0.3577	0	0.0163	-0.4878	-0.3577	0.0163	-0.7560	0	0	0	
5	0.3577	0.2791	0	-0.0218	-0.3577	-0.2791	-0.0218	0	0	0	0	
6	0	0	0.0109	0.0272	0	0	0	0	-0.0109	0.0272	0	
7	0.0163	-0.0218	0.0272	0.1814	-0.0163	0.0218	0.0454	0	-0.0272	0.0454	0	
1	-0.4878	-0.3577	0	-0.0163	0.4878	0.3577	-0.0163	0	0	0	0	
2	-0.3577	-0.2791	0	0.0218	0.3577	0.2791	0.0218	0	0	0	0	
3	0.0163	-0.0218	0	0.0454	-0.0163	0.0218	0.0907	0	0	0	0	
8	-0.7560	0	0	0	0	0	0	0.7560	0	0	0	
9	0	0	-0.0109	-0.0272	0	0	0	0	0.0109	-0.0272	0	
10	0	0	0.0272	0.0454	0	0	0	0	-0.0272	0.0907	0	

ΒΗΜΑ 9*: Στατική Συμπύκνωση και θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Θα εφαρμόσουμε στατική συμπύκνωση όλων των β.ε. του κόμβου 2.

1. Μητρώο αναδιάταξης $[V_c]$ ώστε να έρθουν πρώτοι οι προς απαλοιφή β.ε..
2. Αναδιάταξη μητρώου δυσκαμψίας κατασκευής καθώς και των διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων.

$[V_c] =$

					1	2	3	4		5	6	7	8	9	10
Προς απαλοιφή Eliminated	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Συμπυκνωμένοι Condensed	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$$[V_c][\bar{K}][V_c]^T = 10^6 \times$$

	4	5	6	7		1	2	3	8	9	10	
	1.2438	0.3577	0	0.0163	-0.4878	-0.3577	0.0163	-0.7560	0	0	0	4
	0.3577	0.2791	0	0.0218	-0.3577	-0.2791	0.0218	0	0	0	0	5
			$[\bar{K}_{ee}]$					$[\bar{K}_{ec}]$		0.0109	0.0272	6
	0.0163	-0.0218	0.0272	0.1814	-0.0163	0.0218	0.0454	0	-0.0272	0.0454	0	7
	-0.4878	-0.3577	0	-0.0163	-0.4878	0.3577	-0.0163	0	0	0	0	1
	-0.3577	-0.2791	0	0.0218	-0.3577	0.2791	0.0218	0	0	0	0	2
	0.01			0.0454	-0.0163	0.0218				0	0	3
	-0.75			0	0	0	0			0	0	8
	0	0	-0.0109	-0.0272	0	0	0	0	0	0.0109	-0.0272	9
	0	0	0.0272	0.0454	0	0	0	0	0	-0.0272	0.0907	10
								$[\bar{K}_{cc}]$				

ΒΗΜΑ 9*: Στατική Συμπύκνωση και Θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Θα εφαρμόσουμε στατική συμπύκνωση όλων των β.ε. του κόμβου 2.

1. Μητρώο αναδιάταξης $[V_c]$ ώστε να έρθουν πρώτοι οι προς απαλοιφή β.ε..
2. Αναδιάταξη μητρώου δυσκαμψίας κατασκευής καθώς και των διανυσμάτων επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων.
3. Εφαρμογή των σχέσεων της στατικής συμπύκνωσης

Τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας:

$$[K_c] = [K_{cc}] - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}[K_{ec}]$$

Τροποποιημένο διάνυσμα ακραίων δράσεων:

$$\{P_c\} = \{P_{cc}\} - [K_{ce}][K_{ee}]^{-1}\{P_e\}$$

$[V_c] =$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Προς απαλοιφή Eliminated	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Συμπυκνωμένοι Condensed	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$[V_c][\bar{K}][V_c]^T = 10^6 \times$$

	4	5	6	7	1	2	3	8	9	10	
	1.2438	0.3577	0	0.0163	-0.4878	-0.3577	0.0163	-0.7560	0	0	4
	0.3577	0.2791	0	0.0218	-0.3577	-0.2791	0.0218	0	0	0	5
			$[\bar{K}_{ee}]$	0.0272	0		$[\bar{K}_{ec}]$	0.0109	0.0272		6
	0.0163	-0.0218	0.0272	0.1814	-0.0163	0.0218	0.0454	0	-0.0272	0.0454	7
	-0.4878	-0.3577	0	-0.0163	-0.4878	0.3577	-0.0163	0	0	0	1
	-0.3577	-0.2791	0	0.0218	0.3577	-0.2791	0.0218	0	0	0	2
	0.01		$[\bar{K}_{ce}]$	0.0454	-0.0163	0.0218	$[\bar{K}_{cc}]$	0	0	0	3
	-0.75			0	0	0		0	0	0	8
	0	0	-0.0109	-0.0272	0	0	0	0	0.0109	-0.0272	9
	0	0	0.0272	0.0454	0	0	0	0	-0.0272	0.0907	10

ΒΗΜΑ 9*: Στατική Συμπύκνωση και Θεώρηση ενός υπερστοιχείου

Επομένως, το συμπυκνωμένο μητρώο στιβαρότητας του φορέα προκύπτει:

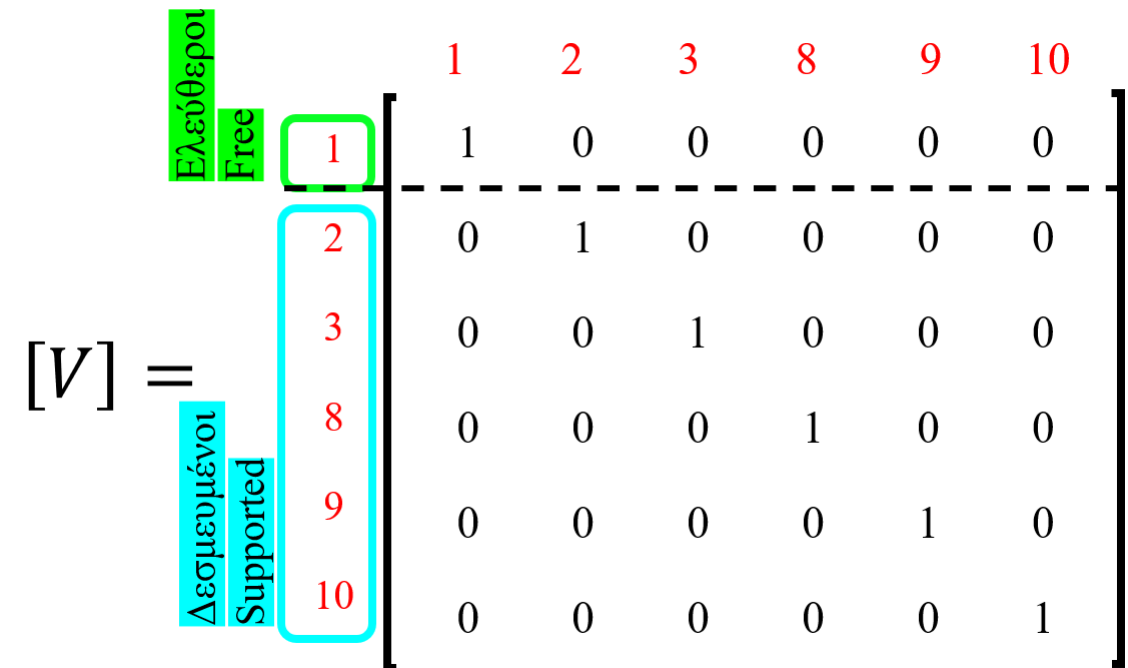
$$[\bar{K}_c] = 10^4 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1.1787 & 0 & -2.6520 & -1.1787 & 0 & -0.8840 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.6520 & 0 & 7.1010 & 2.6520 & 0 & 0.8550 \\ -1.1787 & 0 & 2.6520 & 1.1787 & 0 & 0.8840 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8840 & 0 & 0.8550 & 0.8840 & 0 & 1.7970 \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \end{array}$$

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

- i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης
- ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης
- iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης
- iv) Τροποποίηση μετακινήσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Τα γλιτώσαμε όλα αυτά 😁

(1/4)



ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/4)

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων :

$$\{\bar{P}_{nodal,m}\} = [V]\{\bar{P}_{nodal,c}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{M}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_8 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \end{pmatrix} \quad \{\bar{\Delta}_m\} = [V]\{\bar{\Delta}_c\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Διανύσματα του
συμπυκνωμένου
φορέα.

Αυτά παρουσιάζονται ενδεικτικά.
Την διαδικασία αυτή θα την
κάνουμε μια και καλή στον
ισοδύναμο φορέα

BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/4)

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}_c][V]^T = 10^4 \times$$

	1	2	3	8	9	10	
1	1.1787	0	-2.6520	-1.1787	0	-0.8840	1
2	0	0	0	0	0	0	2
3	-2.6520	0	7.1010	2.6520	0	0.8550	3
8	-1.1787	0	2.6520	1.1787	0	0.8840	8
9	0	0	0	0	0	0	9
10	-0.8840	0	0.8550	0.8840	0	1.7970	10

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

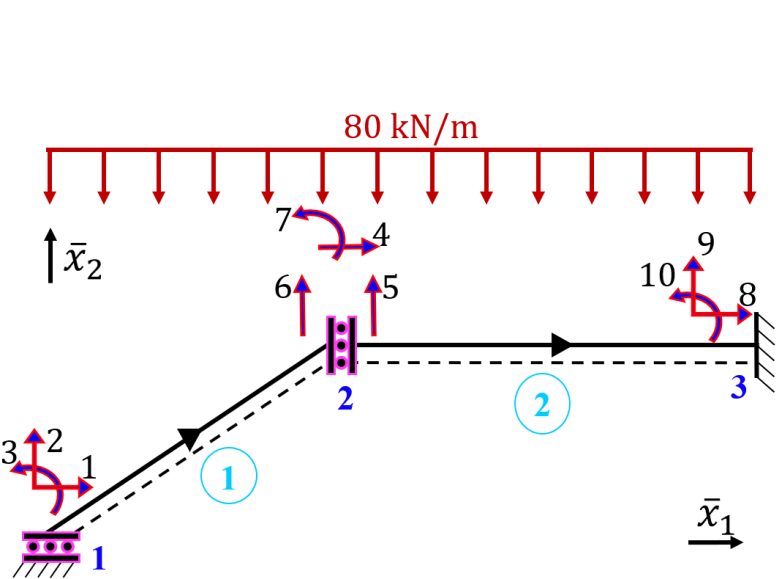
(4/4)

Εάν είχα μόνο επικόμβια φορτία, σε αυτό το στάδιο θα μπορούσα πλέον να επιλύσω εξίσωση ισορροπίας (σχέση στιβαρότητας) και να υπολογίσω τα άγνωστα μεγέθη:

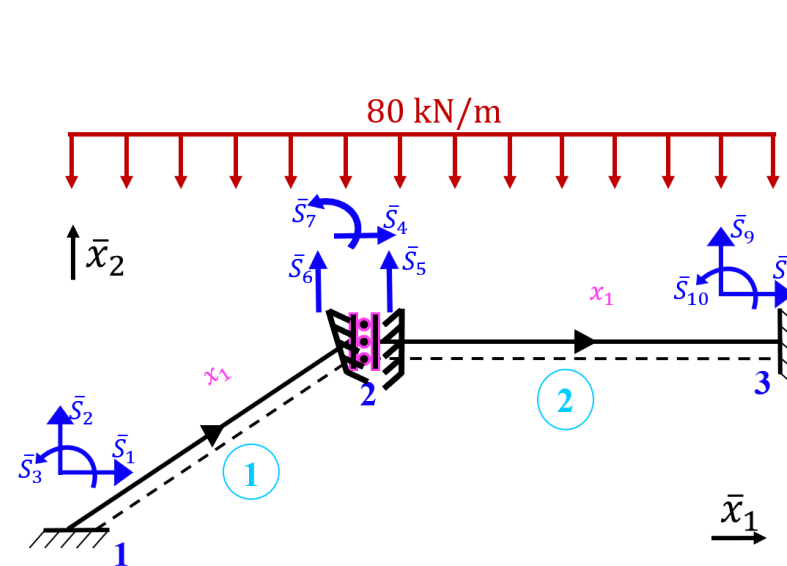
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.} \\ \bar{\Delta}_f = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) \\ 2. \text{ Επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε.} \\ \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} \end{array} \right.$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ι) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα

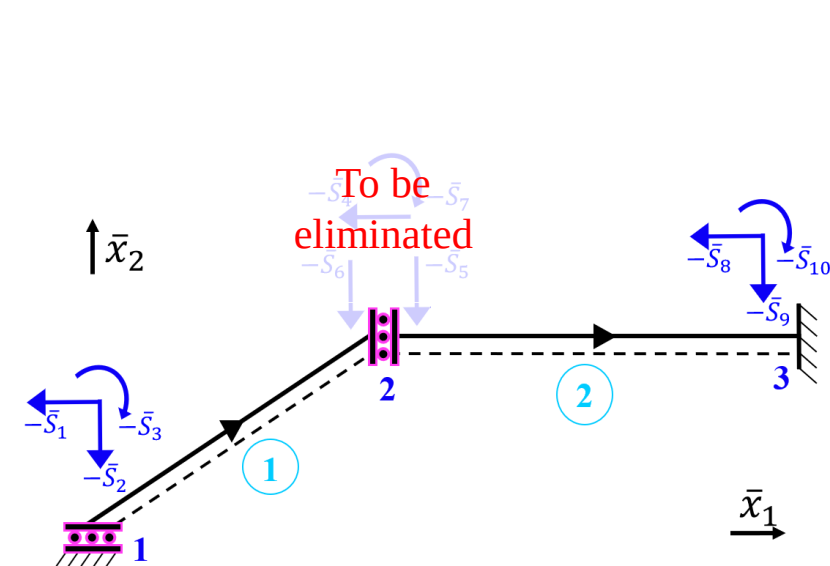


ΑΡΧΙΚΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ



ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία

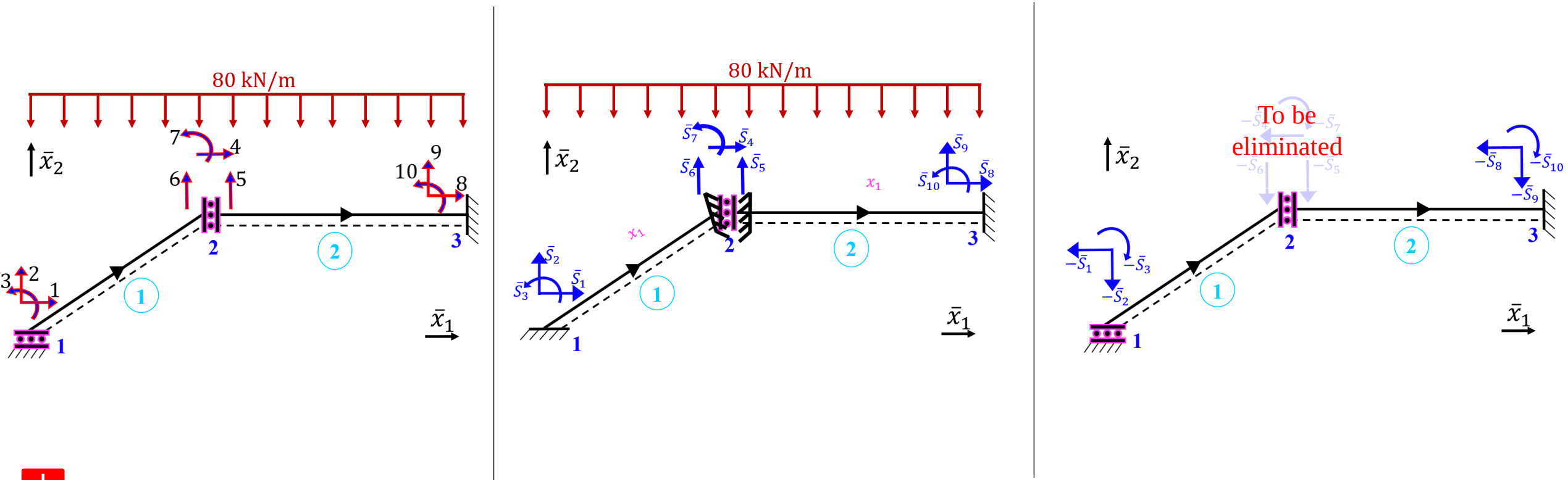


ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις $\rightarrow$ ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

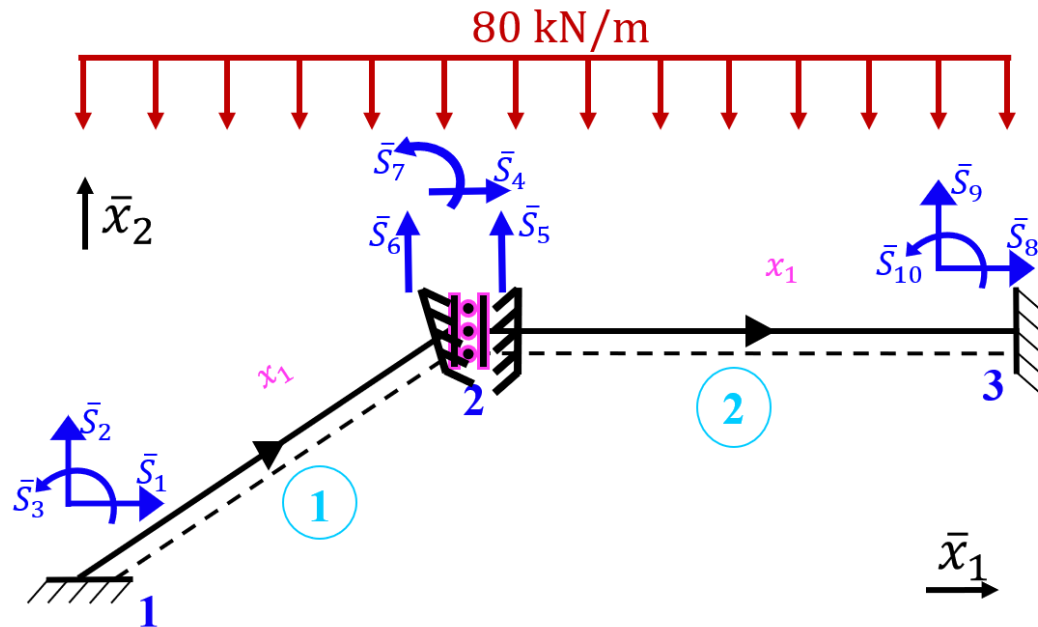
ι) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα



- Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων



Μέλος \ Φόρτιση	1	2
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

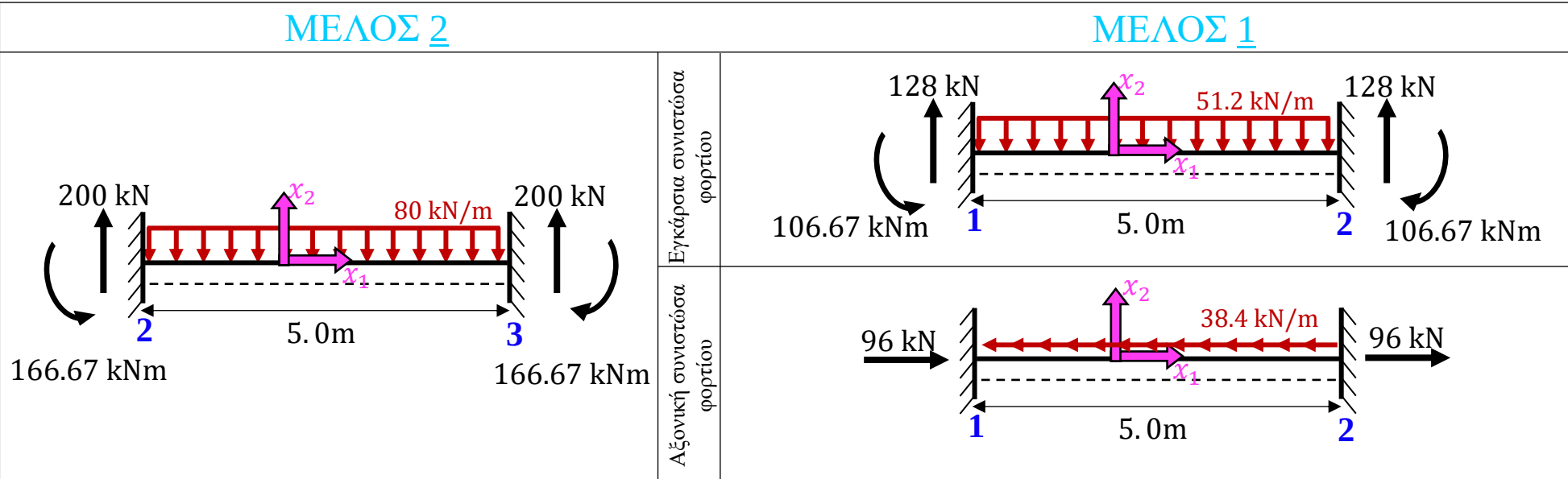
ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:

α) *ενδιάμεσων φορτίων*



Δες παράρτημα για υπενθύμιση ανάλυσης κεκλιμένου φορτίου.

Ενδιάμεσο Φορτίο



Προσοχή στα πρόσημα που είναι με βάση τους τοπικούς άξονες του εκάστοτε μέλους

Μέλος \ Φόρτιση	1	2
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗

$$\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 166.67 \\ 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 96 \\ 128 \\ 106.67 \\ 96 \\ 128 \\ -106.67 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

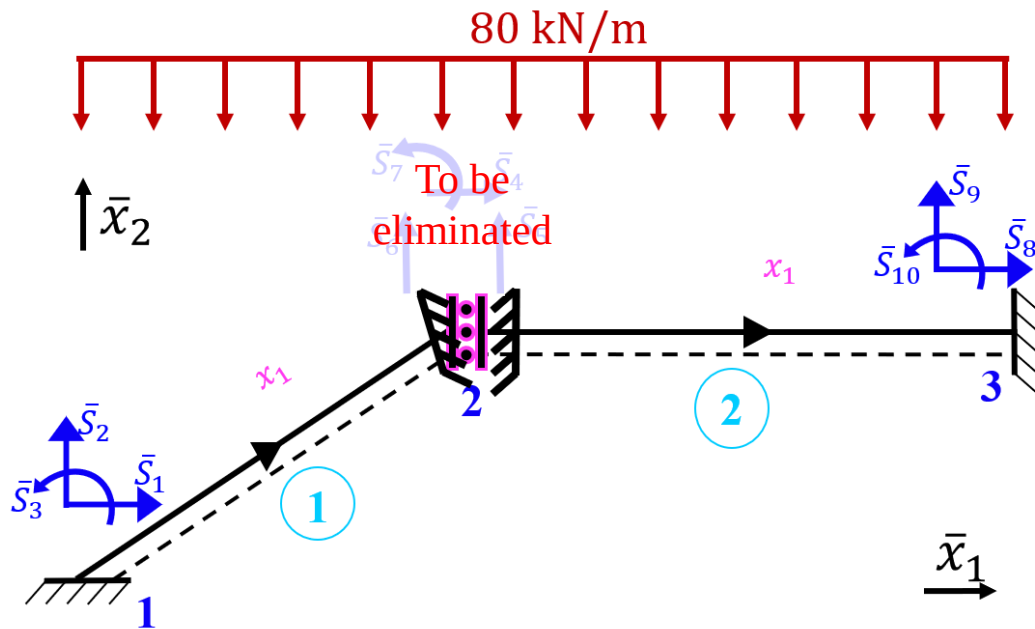
iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα

$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{PF}^1]^T \{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 160 \\ 106.67 \\ 0 \\ 160 \\ -106.67 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^2\} = [\Lambda_{PF}^2]^T \{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ 166.67 \\ 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix}$$

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 160 \\ 106.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{S}^{(2)}\} &= \{\{\bar{A}_r^{1}\}_{[4]} \quad \{\bar{A}_r^{1}\}_{[5]} \quad 0 \quad \{\bar{A}_r^{1}\}_{[6]}\}^T \\ &+ \{\{\bar{A}_r^{2}\}_{[1]} \quad 0 \quad \{\bar{A}_r^{2}\}_{[2]} \quad \{\bar{A}_r^{2}\}_{[3]}\}^T = \begin{Bmatrix} 155.9 \\ 160 \\ 200 \\ 60 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2}\}_{[4:6]} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

Οι δείκτες της μορφής [ν] στα πάνω διανύσματα σημαίνουν «το ν-ιοστό στοιχείο του διανύσματος.»
Αντίστοιχα δείκτες της μορφής [ν:μ] σημαίνουν «από το ν-ιοστό στο μ-ιοστό στοιχείο του διανύσματος.»

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέσση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης

Δεν έχουμε λοξή στήριξη 😊

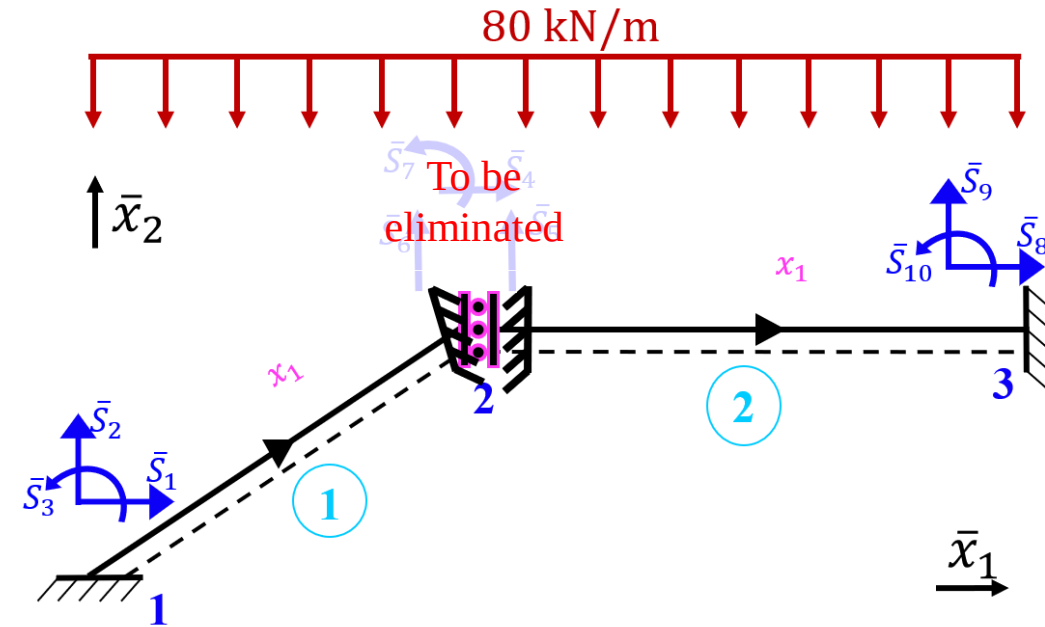
BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (1/2)

Το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα δίδεται ως:

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^{nodal}\} - \{\bar{S}\}$$

$$\{\bar{P}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_8 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 160 \\ 106.67 \\ 155.9 \\ 160 \\ 200 \\ 60 \\ 0 \\ 200 \\ -166.67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 - 160 \\ \bar{R}_3 - 106.67 \\ -155.9 \\ -160 \\ -200 \\ -60 \\ \bar{R}_8 - 0 \\ \bar{R}_9 - 200 \\ \bar{R}_{10} + 166.67 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$



Σε αυτό το σημείο, θα συμπυκνώσω τους β.ε. τους κόμβου 2 μέσω της σχέσης:

$$\{\bar{P}_c\} = \{\bar{P}_{cc}\} - [\bar{K}_{ce}][\bar{K}_{ee}]^{-1}\{\bar{P}_e\}$$

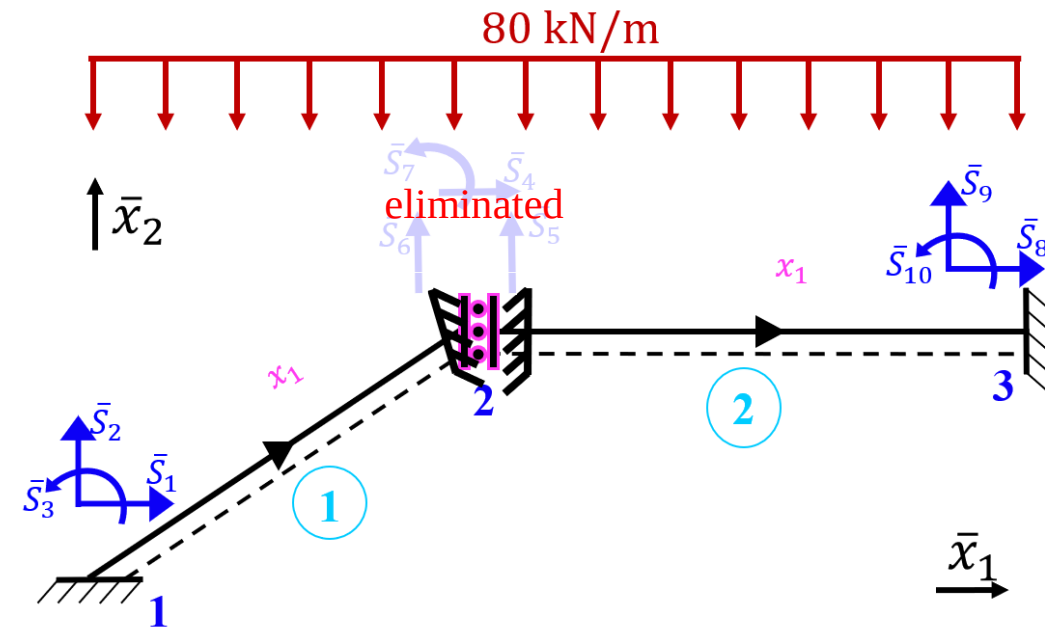
Οι όροι της άνω σχέσης θα προκύψουν έπειτα από αναδιάταξη του $\{\bar{P}\}$ με το $[V_c]$.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (1/2)

Το συμπυκνωμένο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα προκύπτει ως:

$$\{\bar{P}_c\} = \begin{pmatrix} -35.2 \\ \bar{R}_2 - 320 \\ \bar{R}_3 - 287.5 \\ \bar{R}_8 + 35.2 \\ \bar{R}_9 - 400 \\ \bar{R}_{10} + 753.1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$



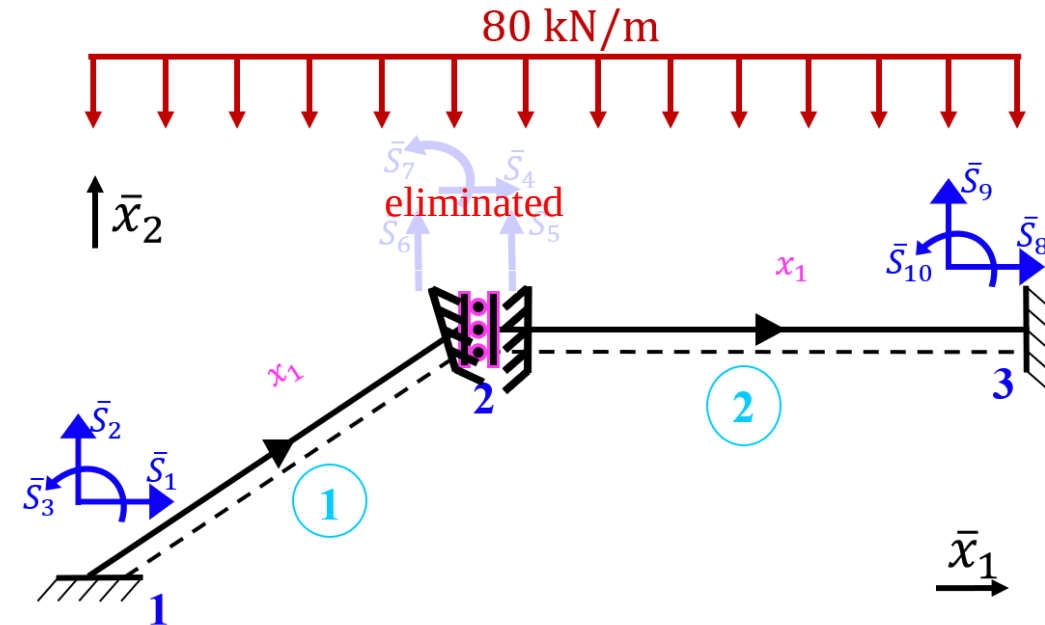
Εφόσον το μητρώο αναδιάταξης είναι το μοναδιαίο μητρώο, το άνω διάνυσμα ταυτίζεται και με το αναδιατεταγμένο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (2/2)

Το διάνυσμα των συμπυκνωμένων επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα είναι:

$$\{\bar{\Delta}_c\} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$



Εφόσον το μητρώο αναδιάταξης είναι το μοναδιαίο μητρώο, το άνω διάνυσμα ταυτίζεται και με το αναδιατεταγμένο διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα.

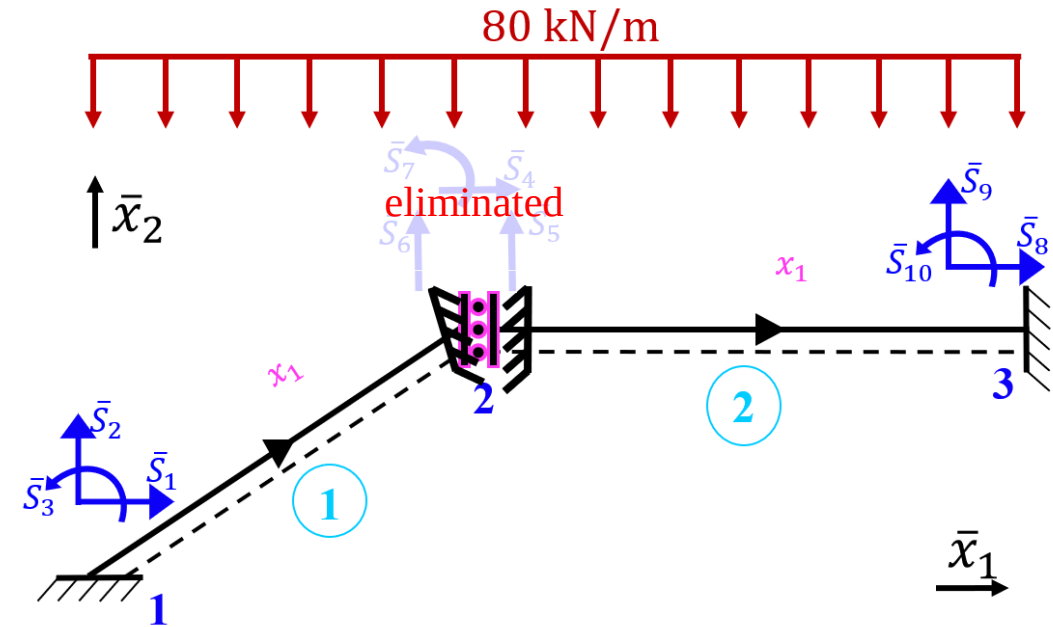
BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1}(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) = \{\bar{\Delta}_1\} = \{-29.85\} \times 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_2 - 320 \\ \bar{R}_3 - 287.5 \\ \bar{R}_8 + 35.2 \\ \bar{R}_9 - 400 \\ \bar{R}_{10} + 753.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 79.17 \\ -35.2 \\ 0 \\ 26.43 \end{Bmatrix}$$

Αντιδράσεις: $\begin{Bmatrix} \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_8 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 320 \\ 366.67 \\ 0 \\ 400 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$



ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων

Μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.:

$$\{\bar{\Delta}_{\mathbf{1}}\} = \{-29.85\} \times 10^{-4}$$

Δεν ξεχνάω να υπολογίσω τις μετακινήσεις κατά τους eliminated β.ε.:

$$\{\bar{\Delta}_e\} = [\bar{K}_{ee}]^{-1}(\{\bar{P}_e\} - [\bar{K}_{ec}]\{\bar{\Delta}_c\})$$

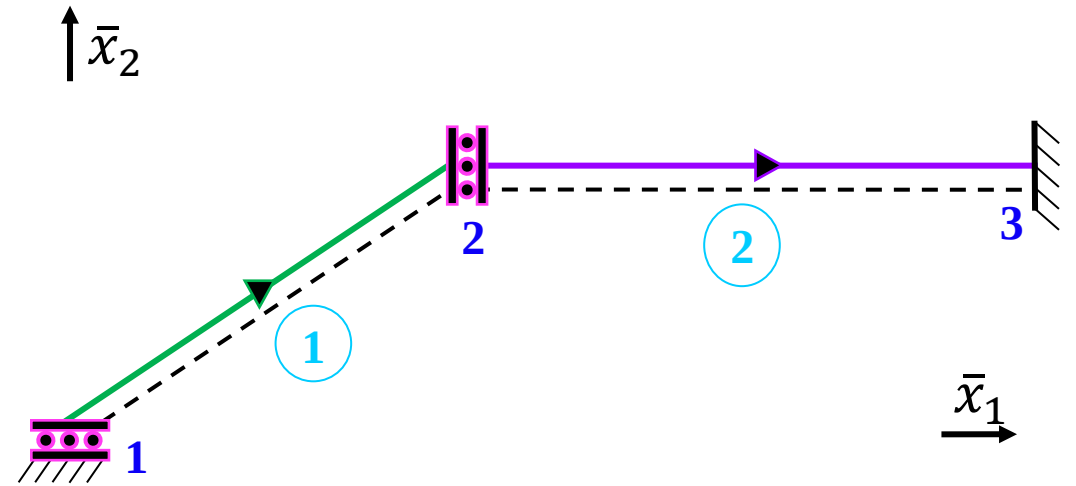
Αντιδράσεις στηρίξεων:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_{\mathbf{2}} \\ \bar{R}_{\mathbf{3}} \\ \bar{R}_{\mathbf{8}} \\ \bar{R}_{\mathbf{9}} \\ \bar{R}_{\mathbf{10}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 320 \\ 366.67 \\ 0 \\ 400 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -41.91 \\ -249.85 \\ 26.46 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

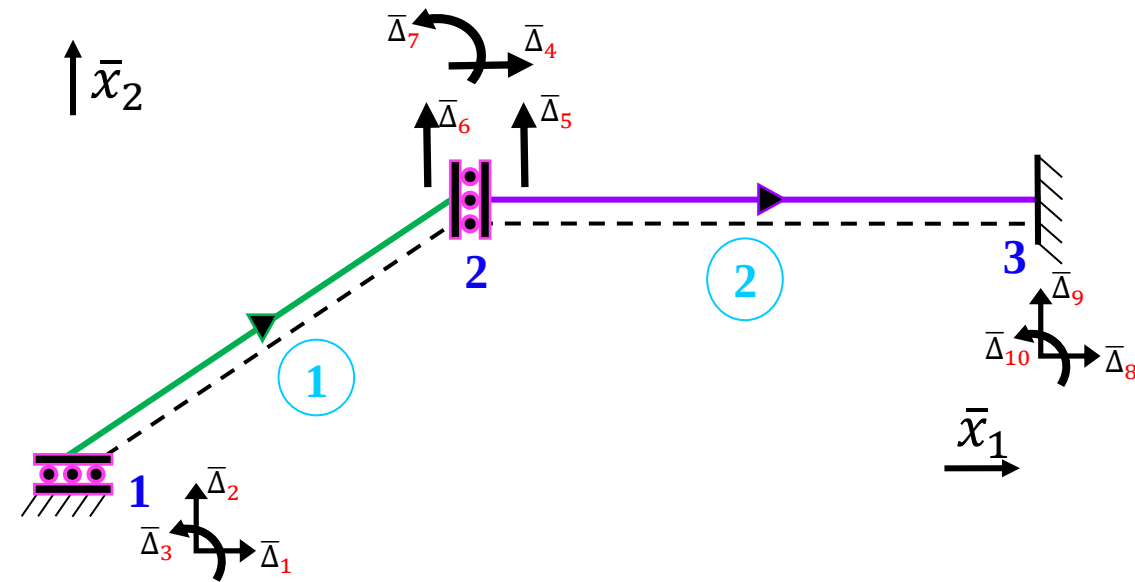
Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

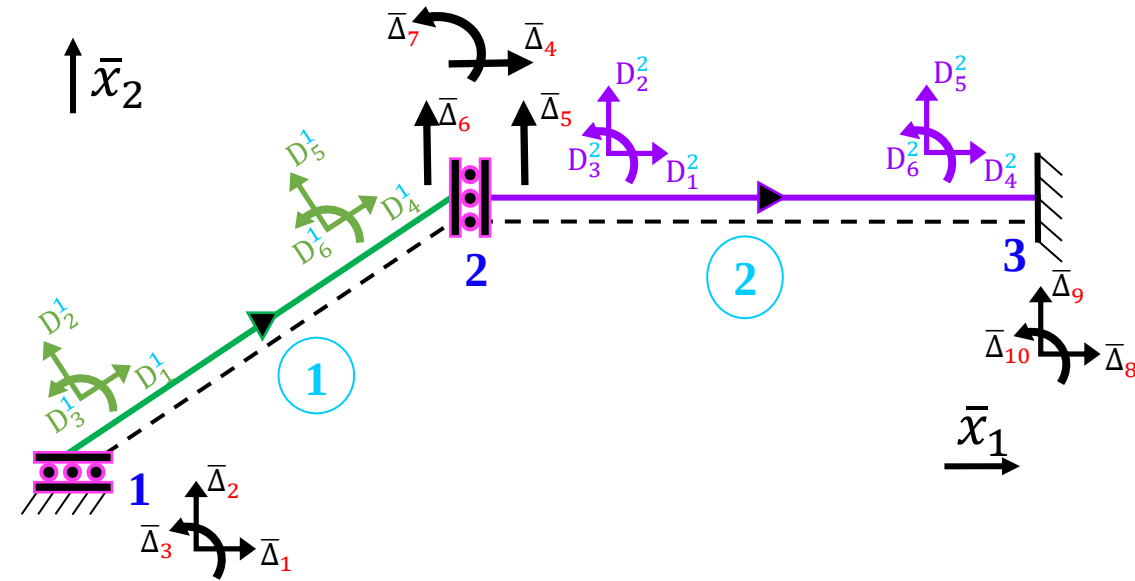
- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.



BHMA 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i]\{\bar{D}^i\}$.

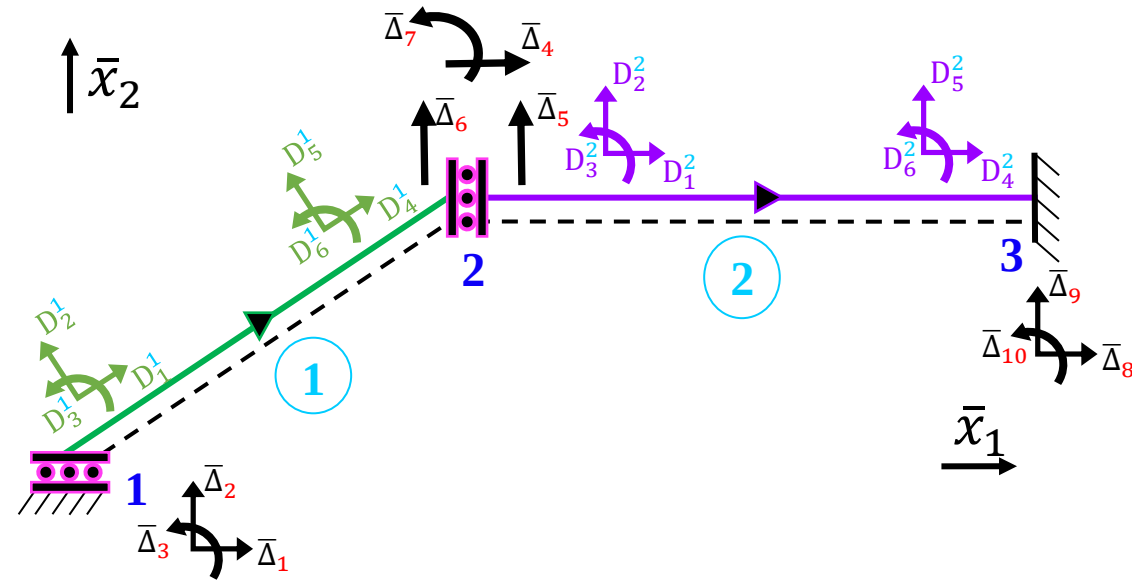


ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{D}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i]\{\bar{D}^i\}$.
- Υπολογίζω τις τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους i με επαλληλία του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα:

$$\{A^i\} = \underbrace{\{A_r\}}_{\text{παγιωμένος}} + \underbrace{[k^i]\{D^i\}}_{\text{ισοδύναμος}}$$

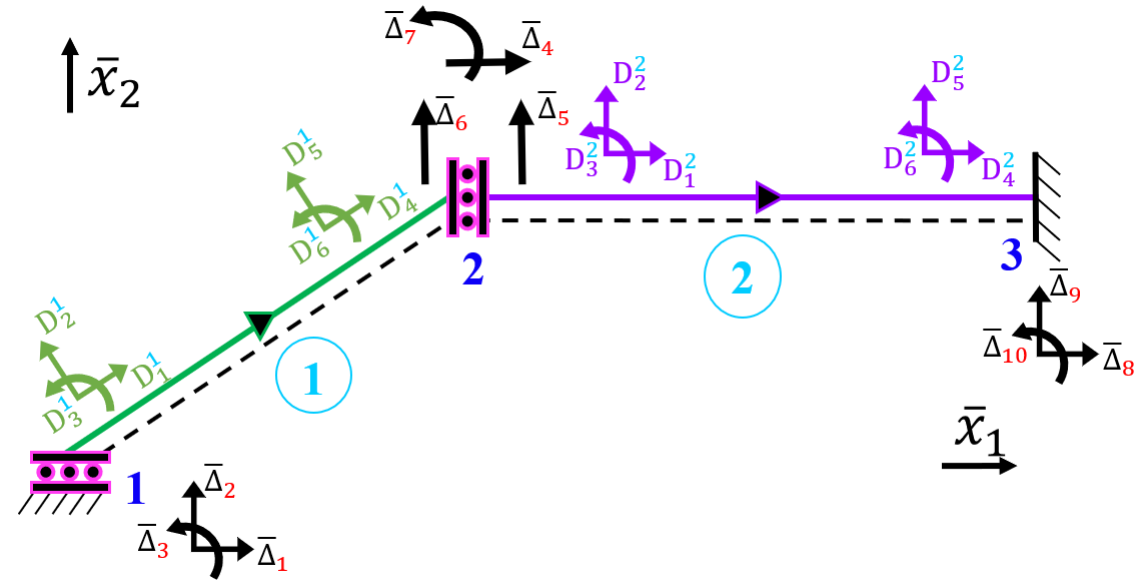


ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Τοπικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων μέλους i :

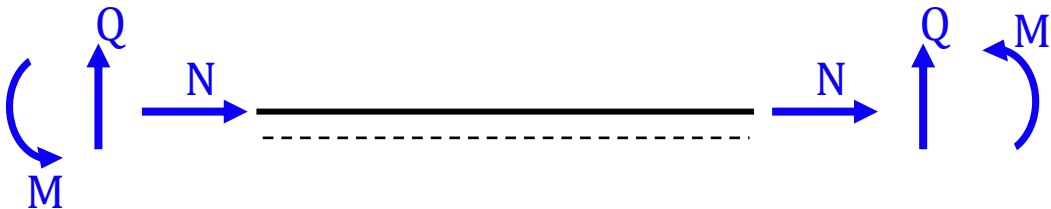
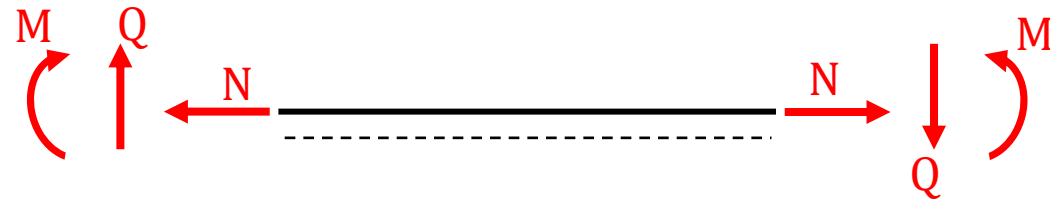
$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 192 \\ 256 \\ 366.67 \\ 0 \\ 0 \\ 273.33 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -273.33 \\ 0 \\ 400 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$



BHMA 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Τώρα μένει να χαράξω τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών.
Πρώτα θα πρέπει να θυμηθώ τη κλασική σύμβαση της στατικής για τα εντατικά μεγέθη (η οποία διαφέρει από τη σύμβαση που θεωρούμε στη μητρική στατική για τους βαθμούς ελευθερίας).

Σύμβαση Μητρικής Στατικής	Κλασική Σύμβαση Στατικής
Θετικές φορές	Θετικές φορές
	

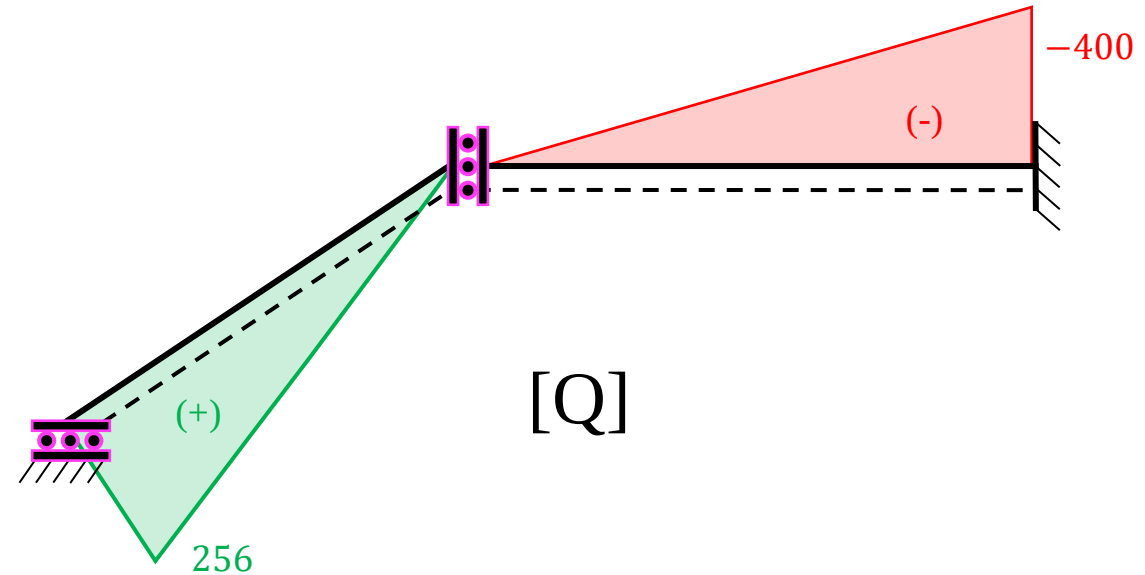
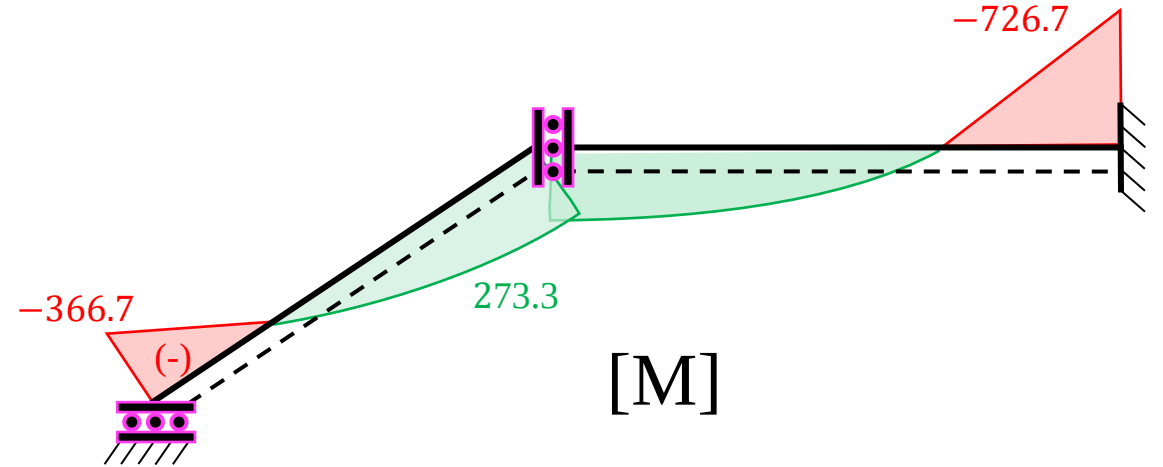
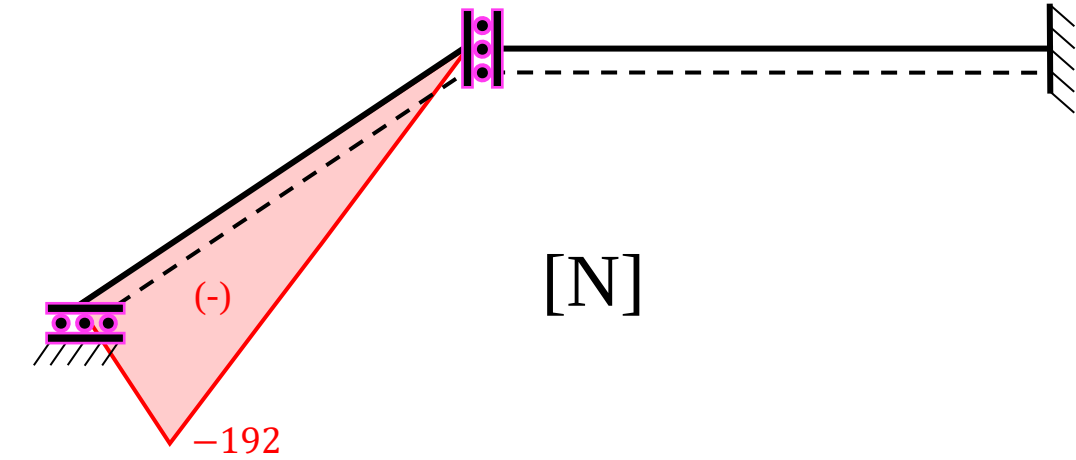
Επομένως ένα διάνυσμα τοπικών ακραίων δράσεων μέλους που έχει αυτή τη μορφή:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix}$$

Με τη κλασική σύμβαση της στατικής αποκτά αυτά τα πρόσημα:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$

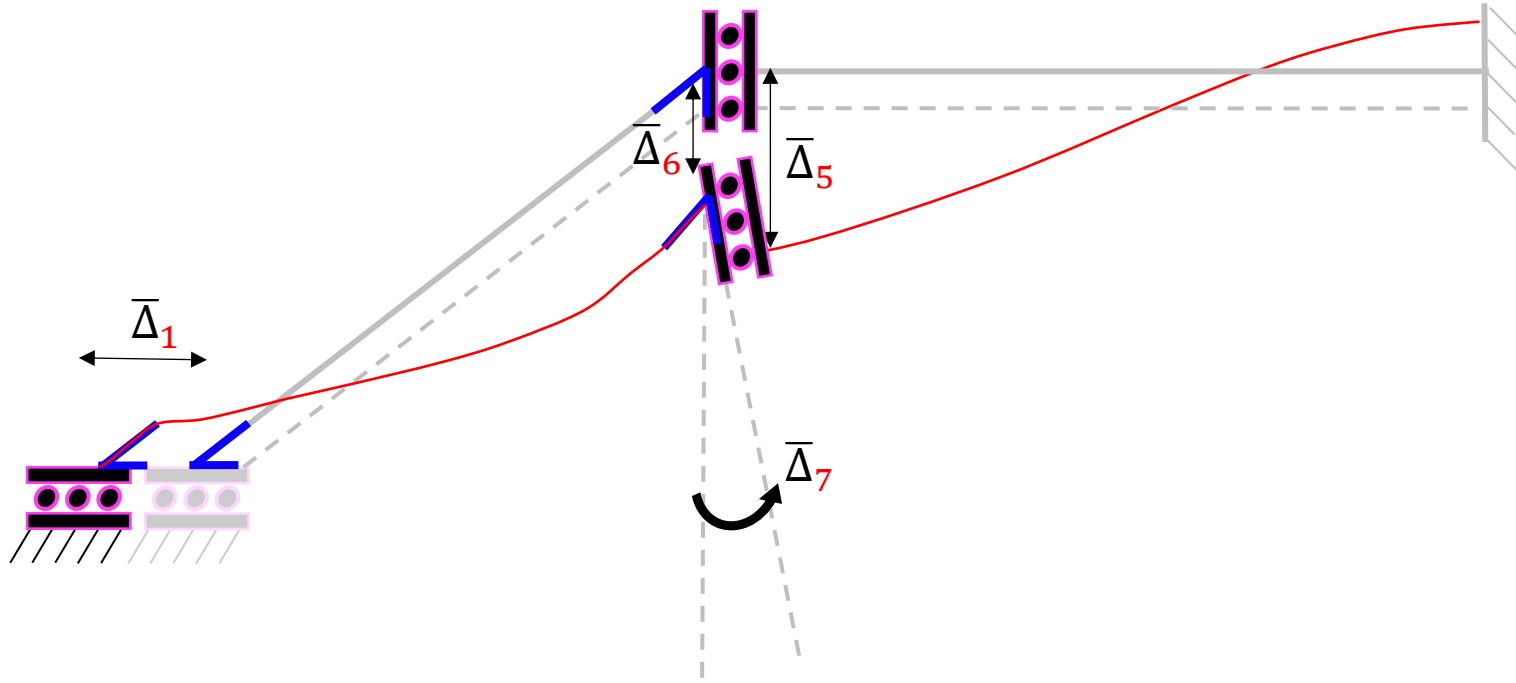
ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών



$$\{A^{1 \text{ ή } 2}\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 192 \\ 256 \\ 366.67 \\ 0 \\ 0 \\ 273.33 \end{Bmatrix} \quad \{A^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -273.33 \\ 0 \\ 400 \\ -726.67 \end{Bmatrix}$$

Παραμορφωμένη Εικόνα Φορέα

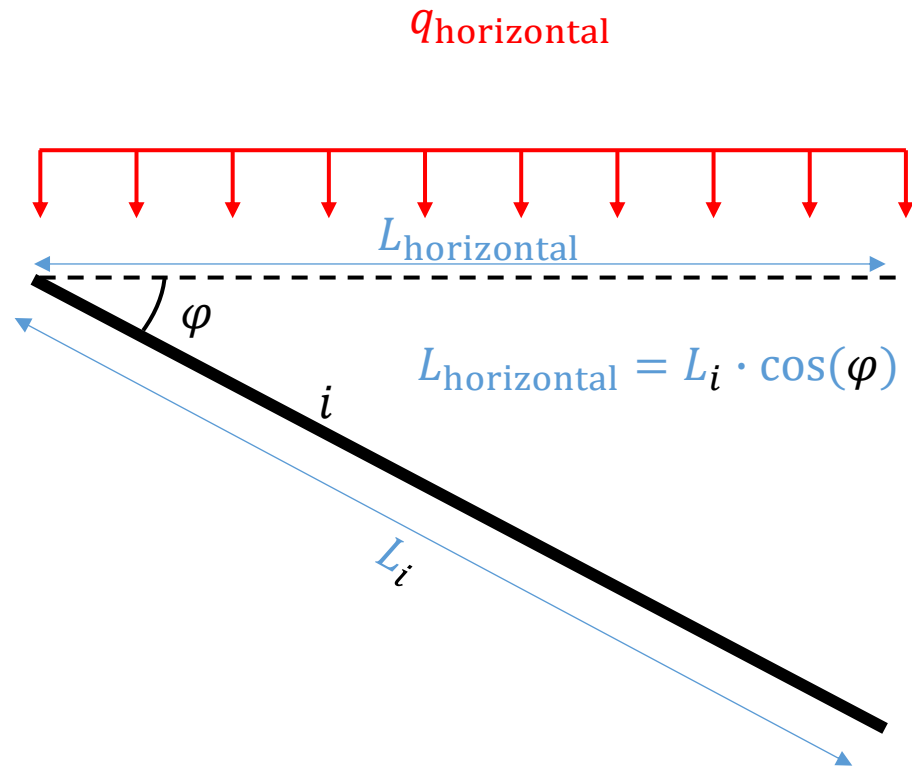


Παράρτημα

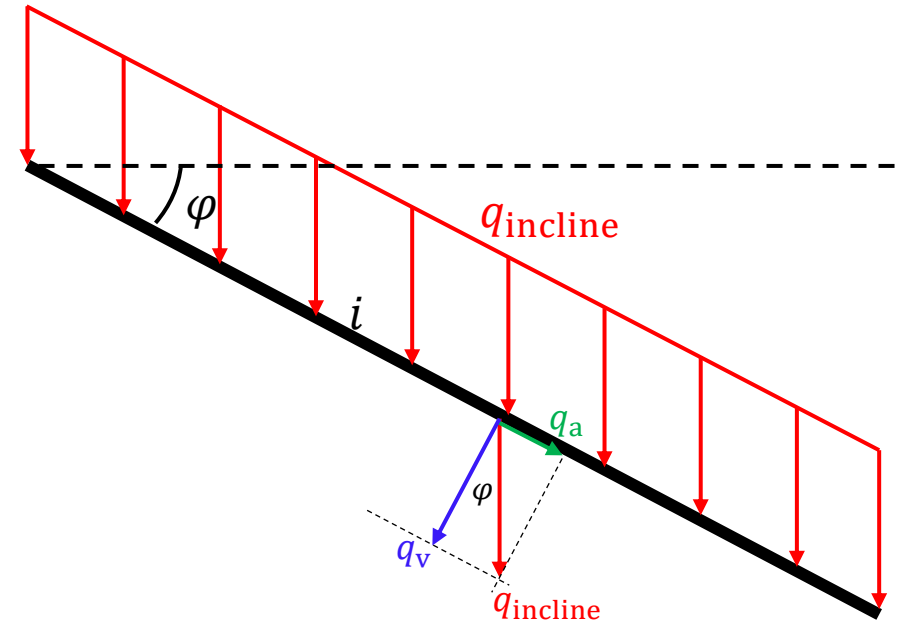
Για λόγους πληρότητας, στο παράρτημα αυτό υπενθυμίζονται:

- A. Η ανάλυση ενός κατανεμημένου φορτίου, που ασκείται σε κεκλιμένο μέλος, σε συνιστώσες.
- B. Οι ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών, για τις περιπτώσεις ενδιάμεσων δράσεων που εξετάζονται στην άσκηση

A. Ανάλυση κατανεμημένου φορτίου σε συνιστώσες



The load must be distributed along the actual length of the element

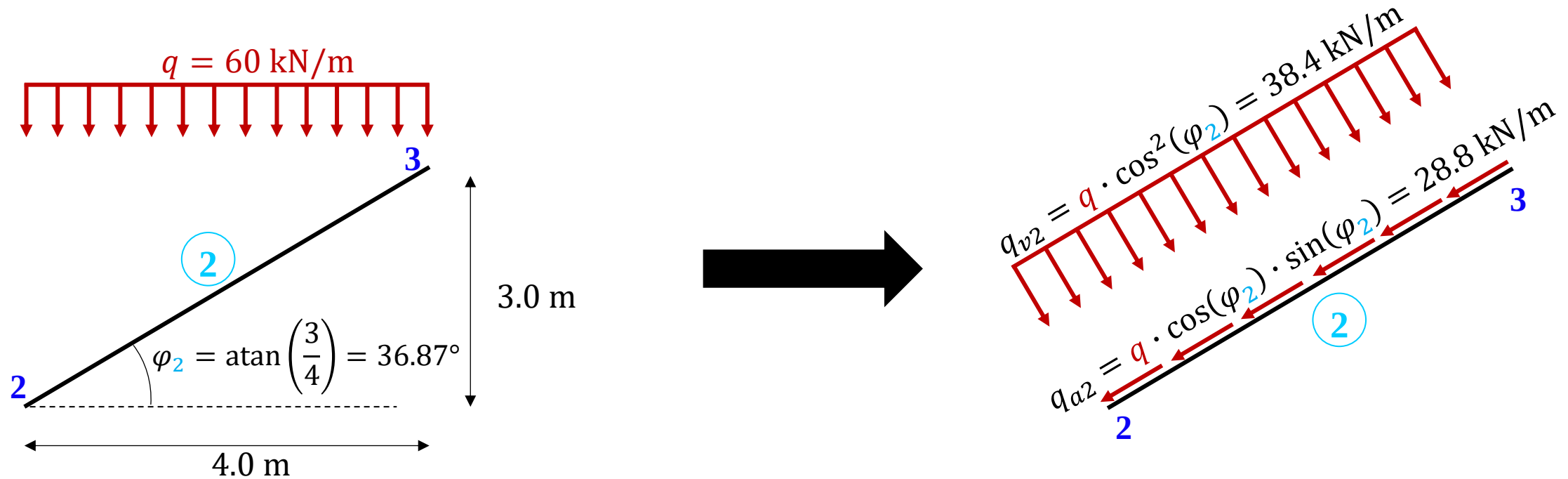


$$\begin{aligned} q_{\text{horizontal}} \cdot L_{\text{horizontal}} &= q_{\text{incline}} \cdot L_i \\ \Rightarrow q_{\text{horizontal}} \cdot \cancel{L_i} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}} \cdot \cancel{L_i} \\ \Rightarrow q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}} \end{aligned}$$

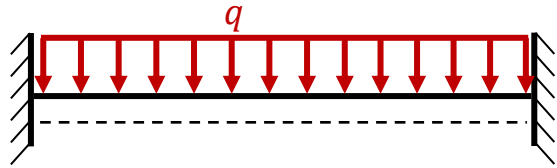
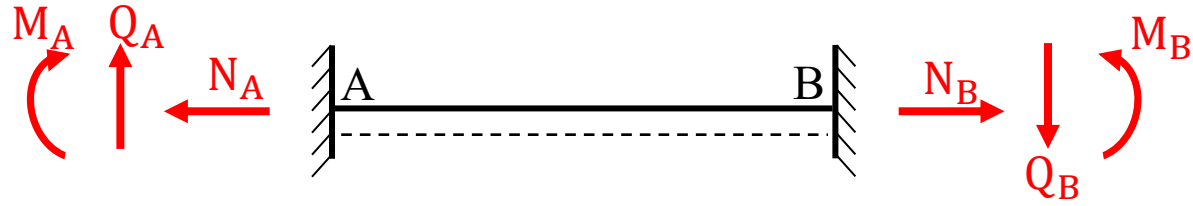
$$\left\{ \begin{aligned} q_v &= q_{\text{incline}} \cdot \cos(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \cos(\varphi) \\ q_a &= q_{\text{incline}} \cdot \sin(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

A. Ανάλυση κατανεμημένου φορτίου σε συνιστώσες

Συγκεκριμένα για το παράδειγμα, για το μέλος 2 έχουμε:



B. Ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών



$$M_A = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_A = \frac{qL}{2}$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_B = -\frac{qL}{2}$$