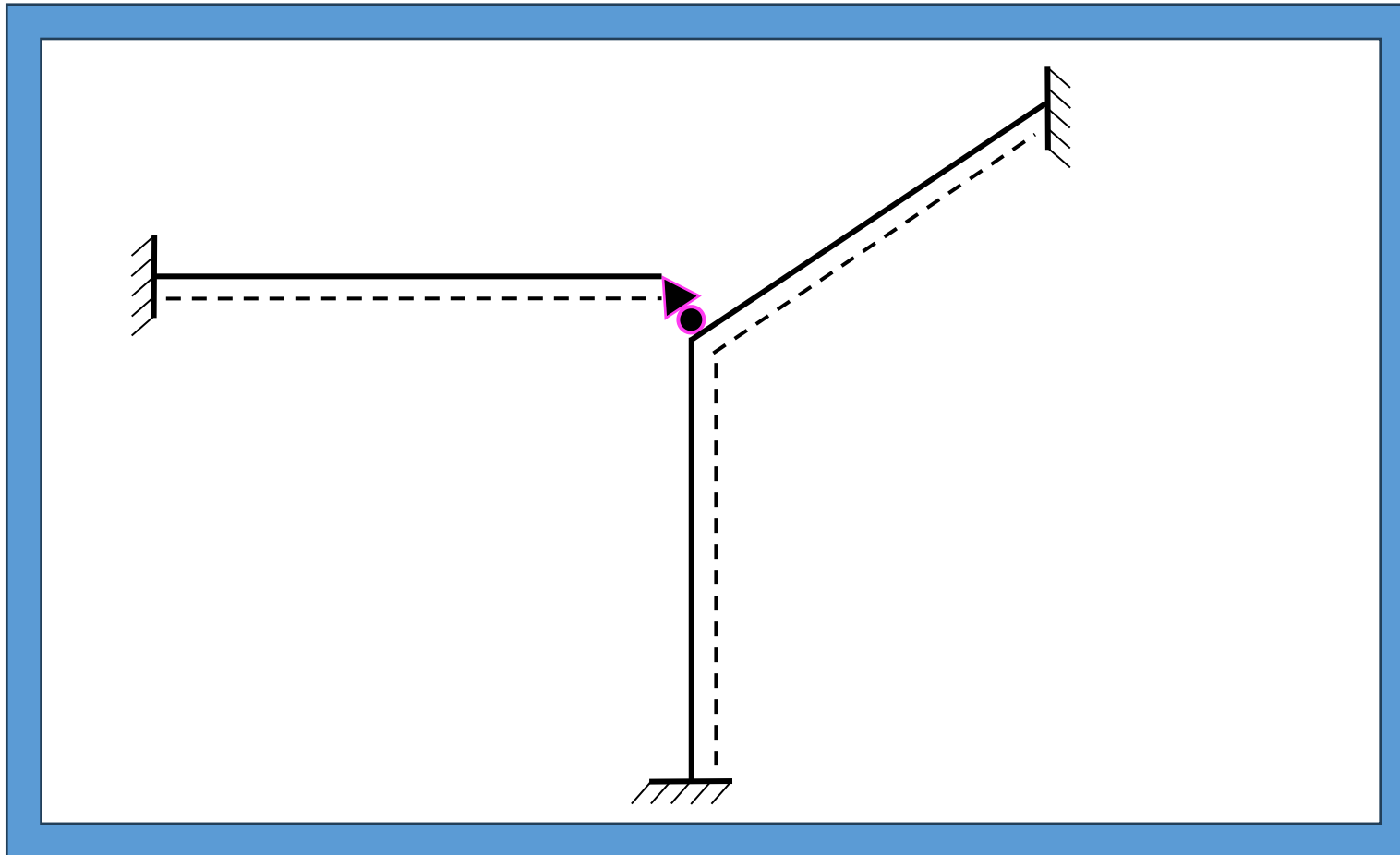


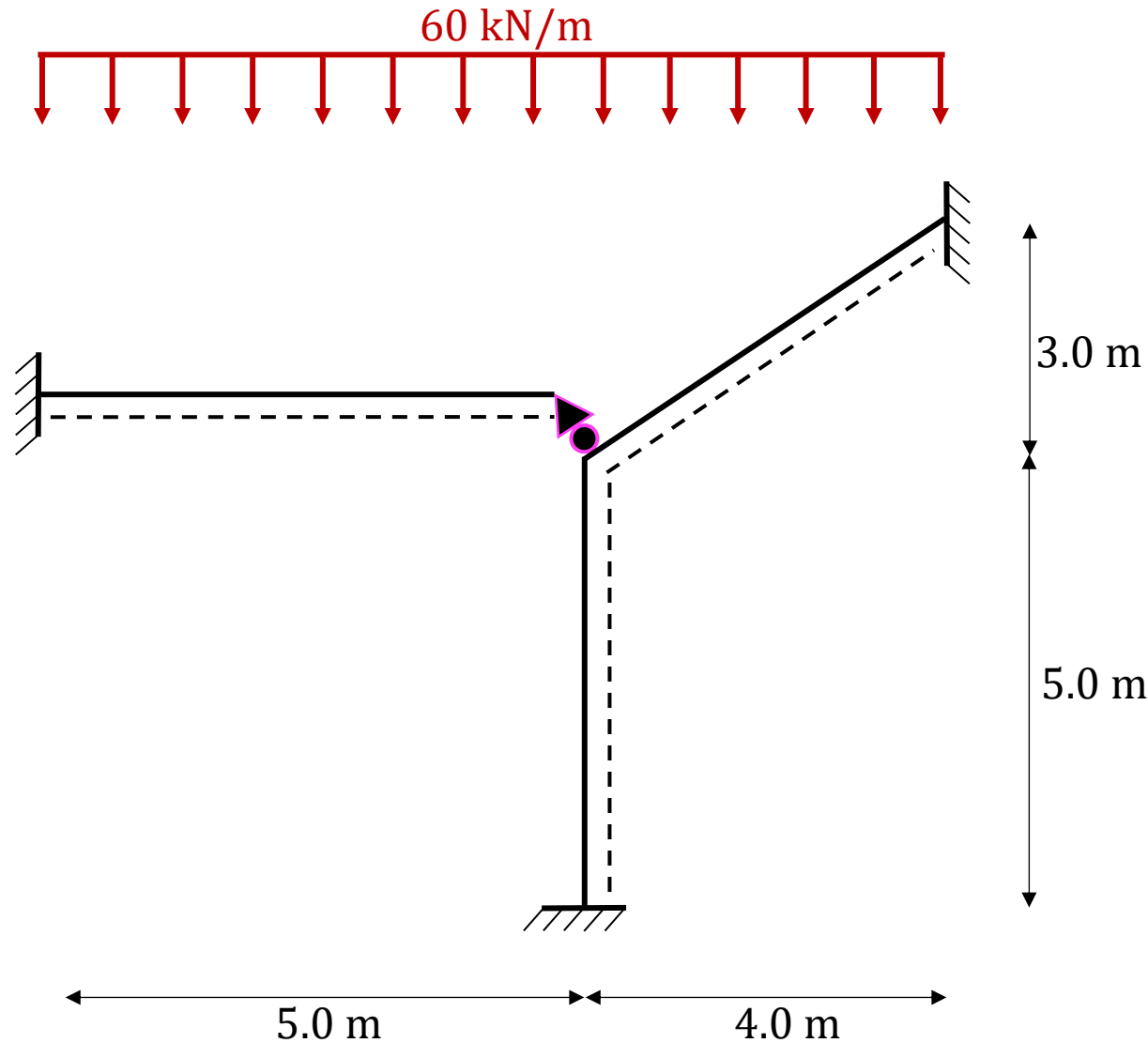
Αριθμητικό Παράδειγμα
Επίλυσης Πλαισίου
με Συνδυασμένο Κόμβο

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ & ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ	
ΑΣΚΗΣΗ	#5
ΗΜ/ΝΙΑ	15/05/2025
ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ	

Εξεταζόμενο Πλαίσιο



Δεδομένα:

- $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0.30 \times 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$
- $I = 0.3 \times \frac{0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$
- $q = 60 \text{ kN/m}$

Παρατηρώ:

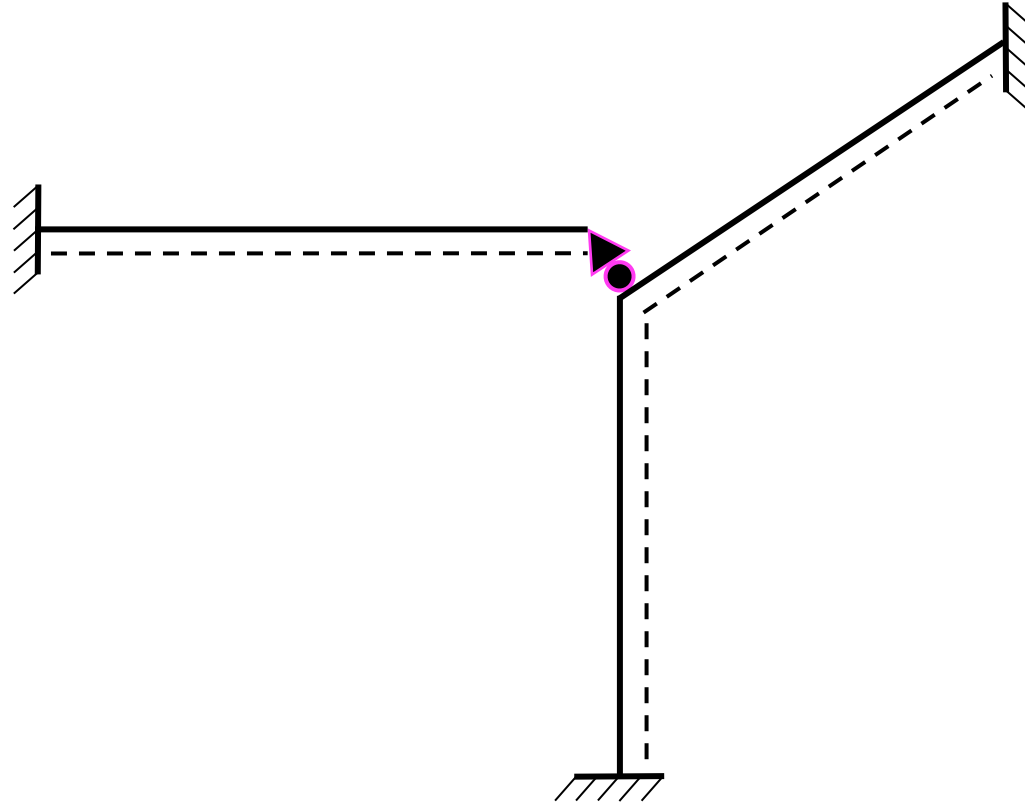
- Ενδιάμεσα φορτία
- Εσωτερική ελευθέρωση

Κανένα παράδειγμα
φορέα με εσωτερική
ελευθέρωση ;

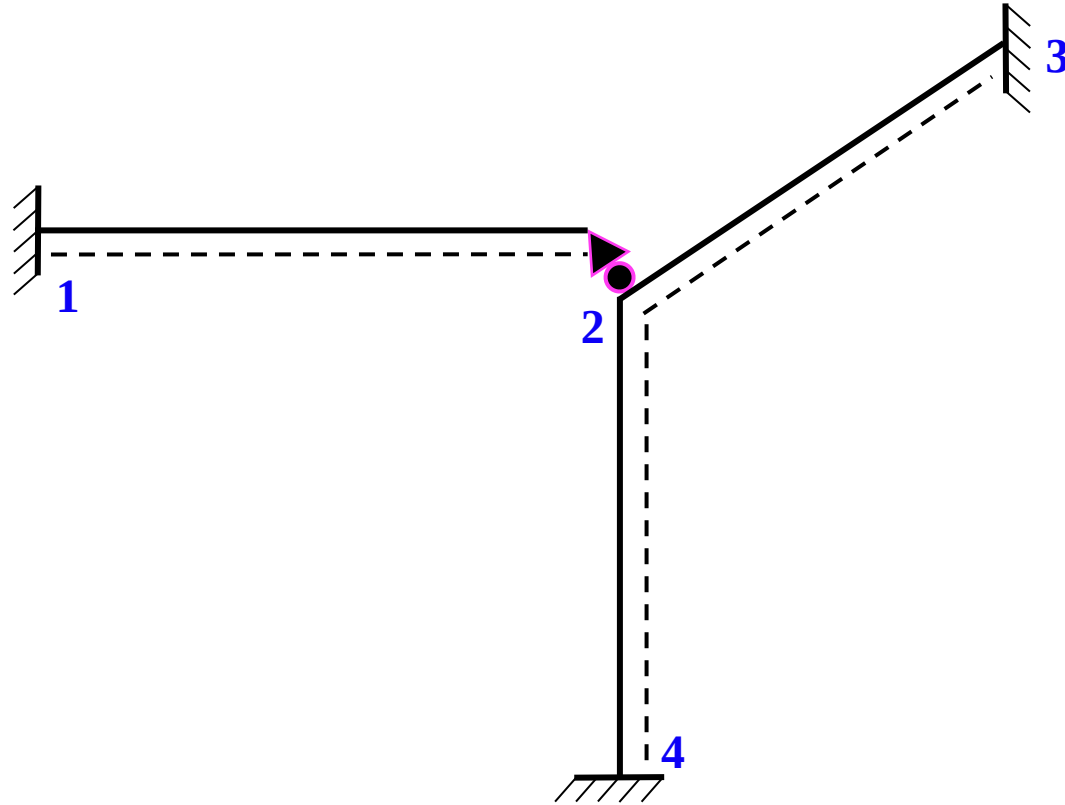


Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα
από ομογενές και ισότροπο υλικό.

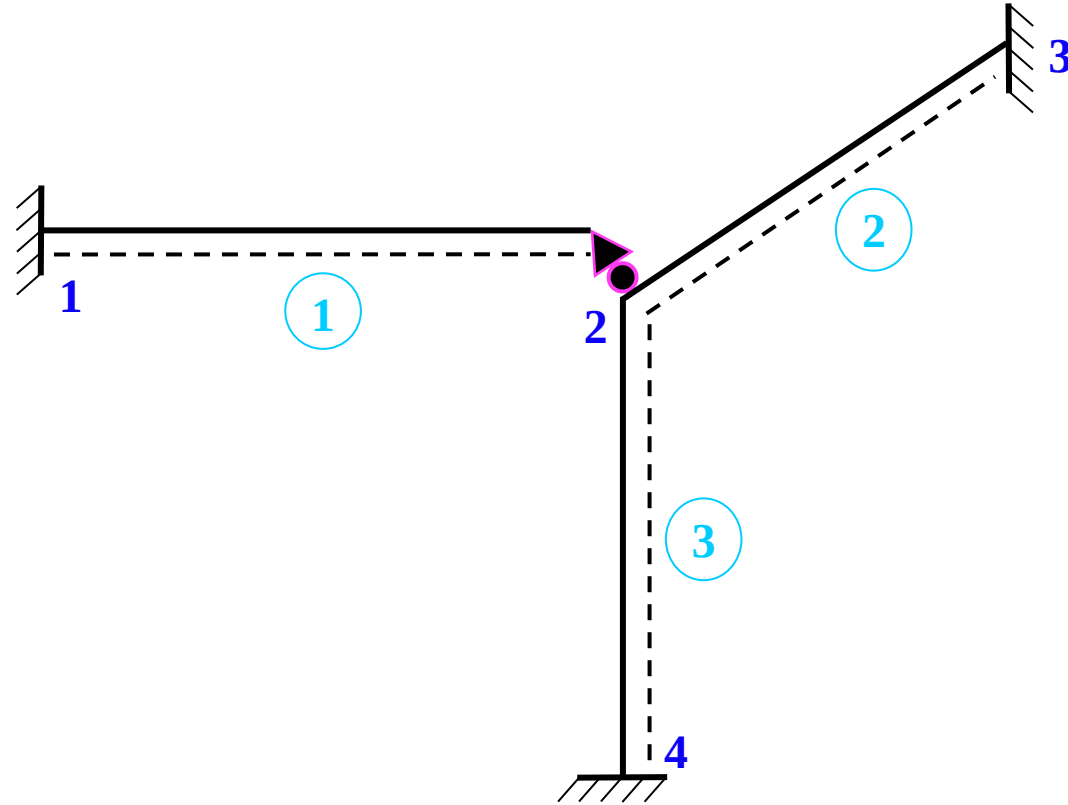
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



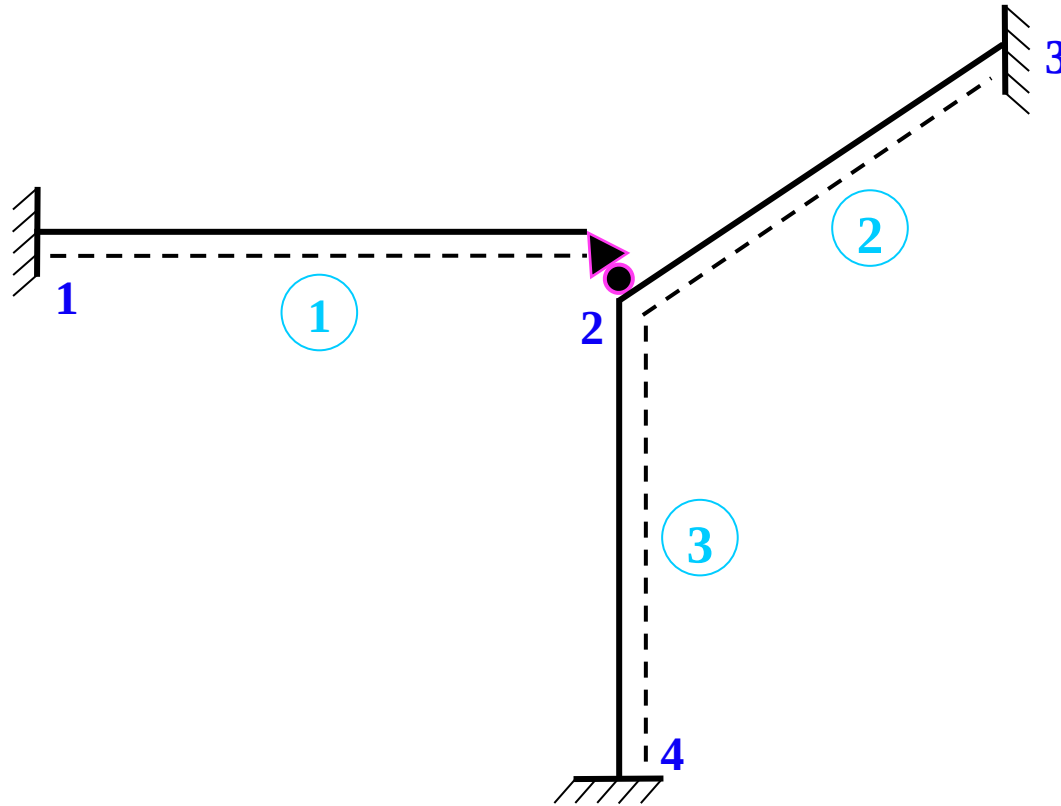
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση *Κόμβων* και Μελών



ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση *Κόμβων* και *Μελών*

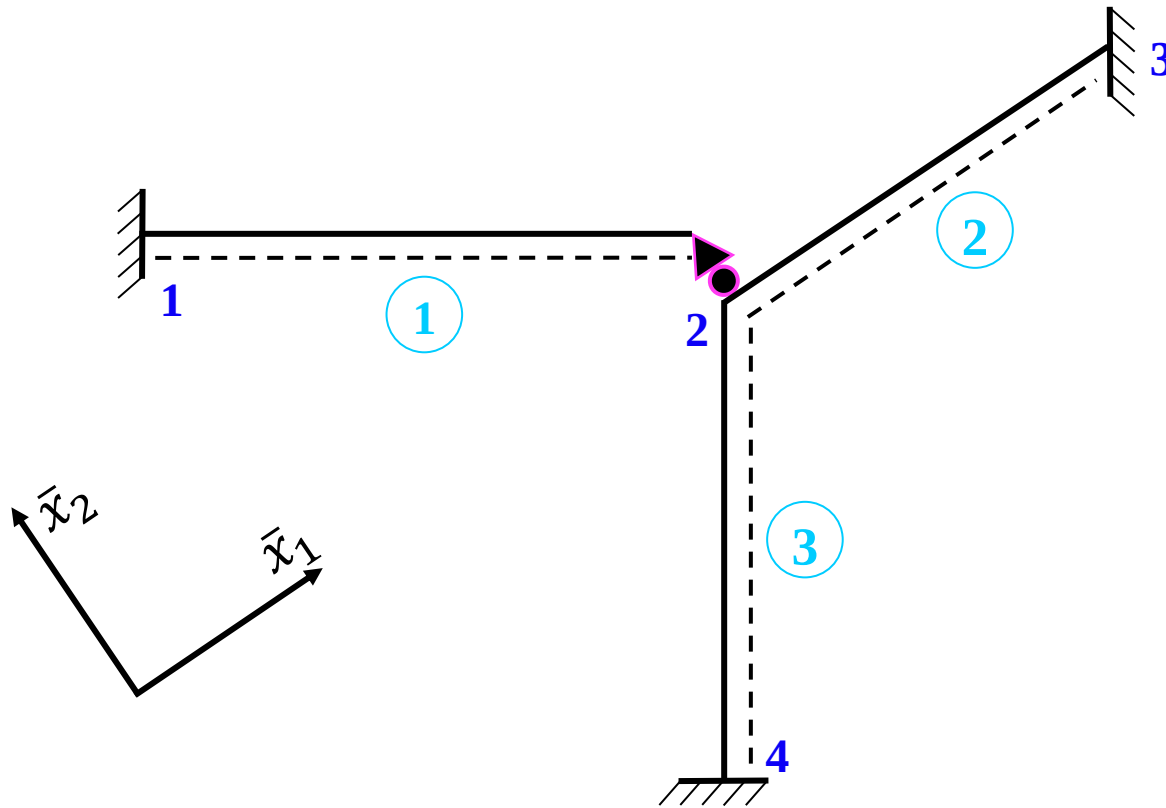


ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$



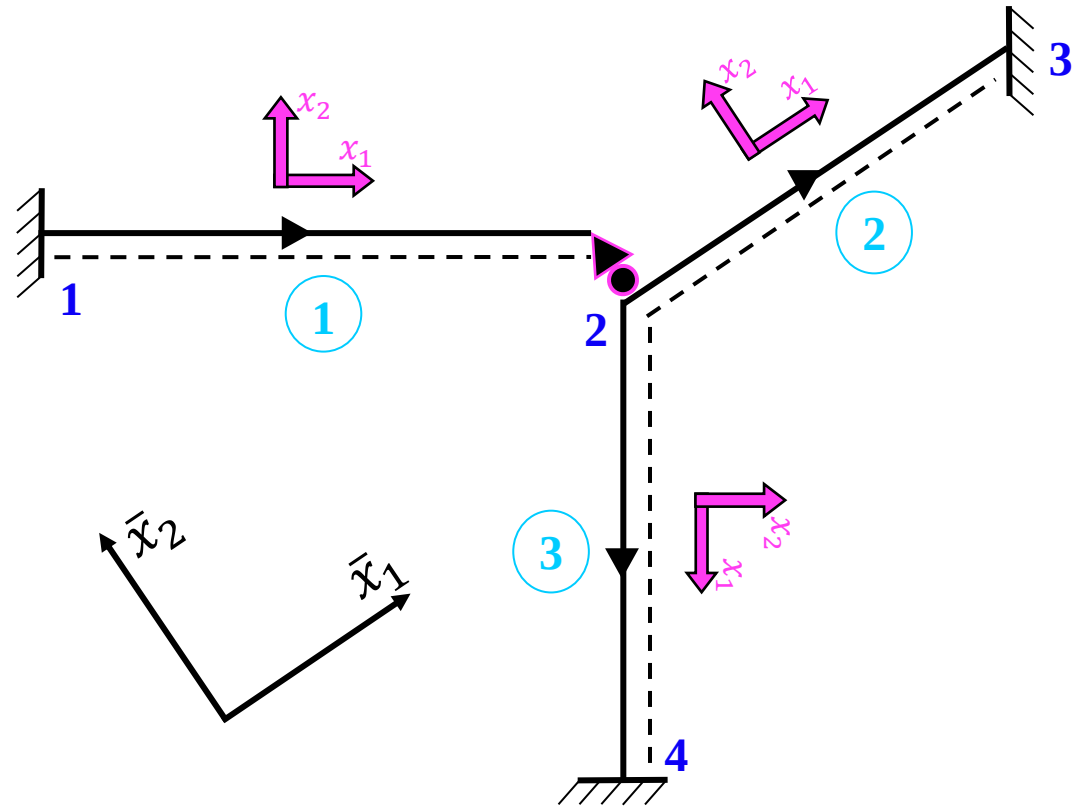
- Δεν έκανα την προφανή επιλογή καθολικού συστήματος.
- Η συγκεκριμένη επιλογή «βολεύει» διότι έτσι διευκολύνεται ο ορισμός της ΚΟΙΝΗΣ μετατόπισης στον συνδυασμένο κόμβο.
- Σε περίπτωση που έχω ελευθέρωση που δεν είναι προσανατολισμένη κατά τη διεύθυνση καθολικού άξονα, τότε είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός από το καθολικό στο τοπικό σύστημα αξόνων της ελευθέρωσης. (όπως κάναμε με τις λοξές στηρίξεις)

ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$



- Δεν έκανα την προφανή επιλογή καθολικού συστήματος.
- Η συγκεκριμένη επιλογή «βολεύει» διότι έτσι διευκολύνεται ο ορισμός της ΚΟΙΝΗΣ μετατόπισης στον συνδυασμένο κόμβο.
- Σε περίπτωση που έχω ελευθέρωση που δεν είναι προσανατολισμένη κατά τη διεύθυνση καθολικού άξονα, τότε είναι απαραίτητος ο μετασχηματισμός από το καθολικό στο τοπικό σύστημα αξόνων της ελευθέρωσης. (όπως κάναμε με τις λοξές στηρίξεις)

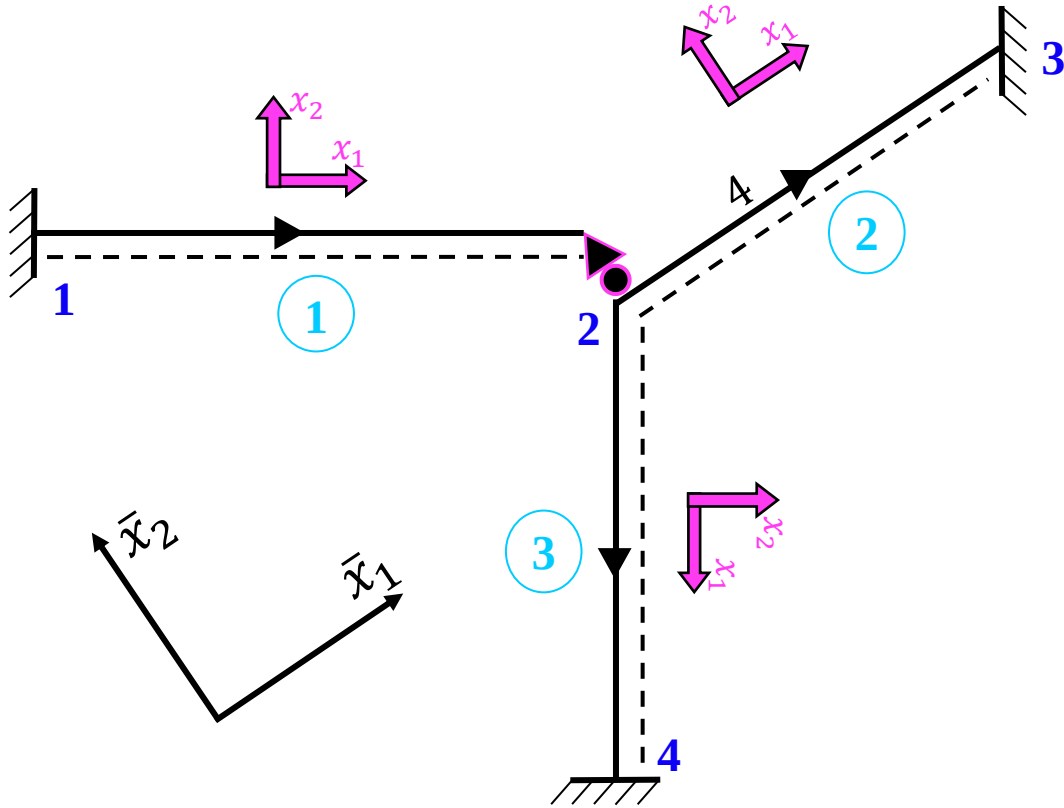
ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό).
- Ός προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

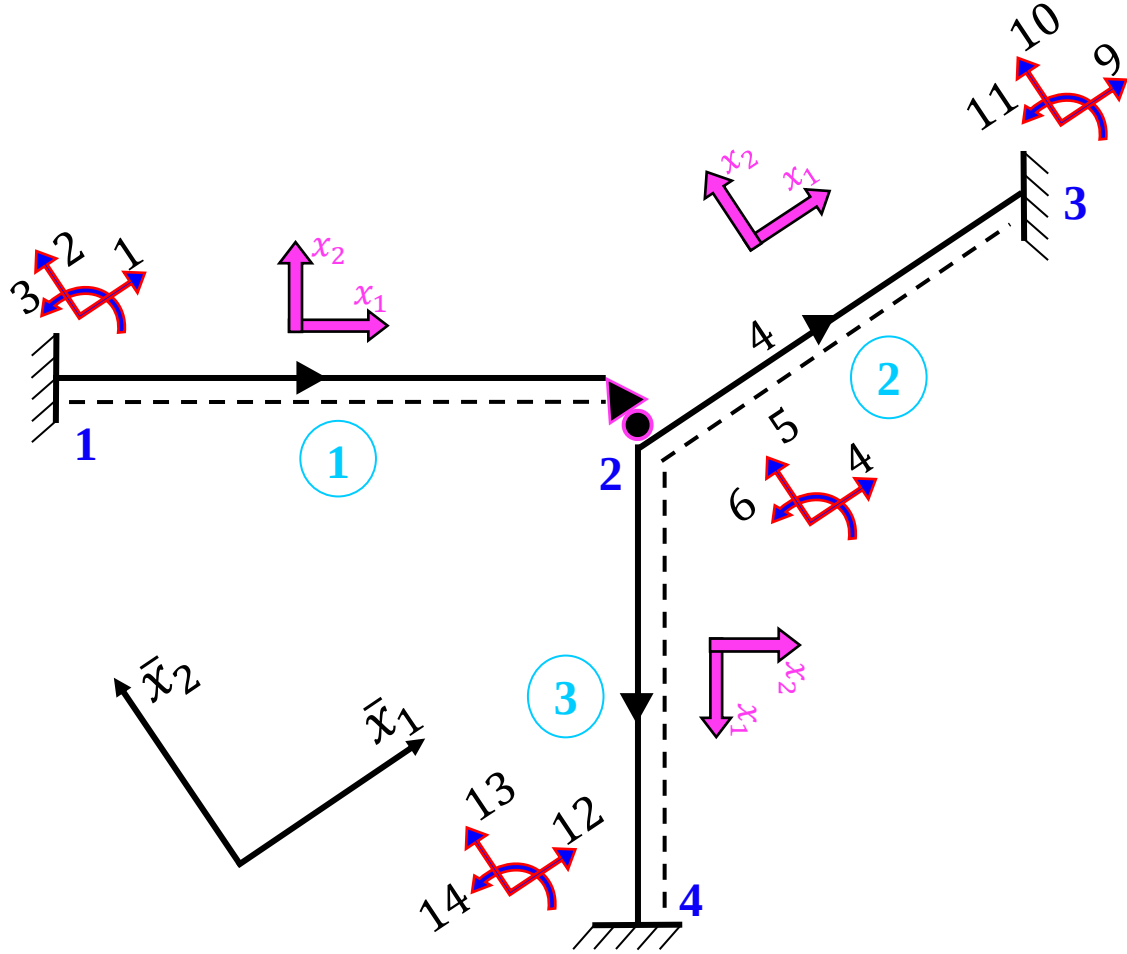
Τα φορτία παραλείπονται χάριν απλότητας του σχήματος.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



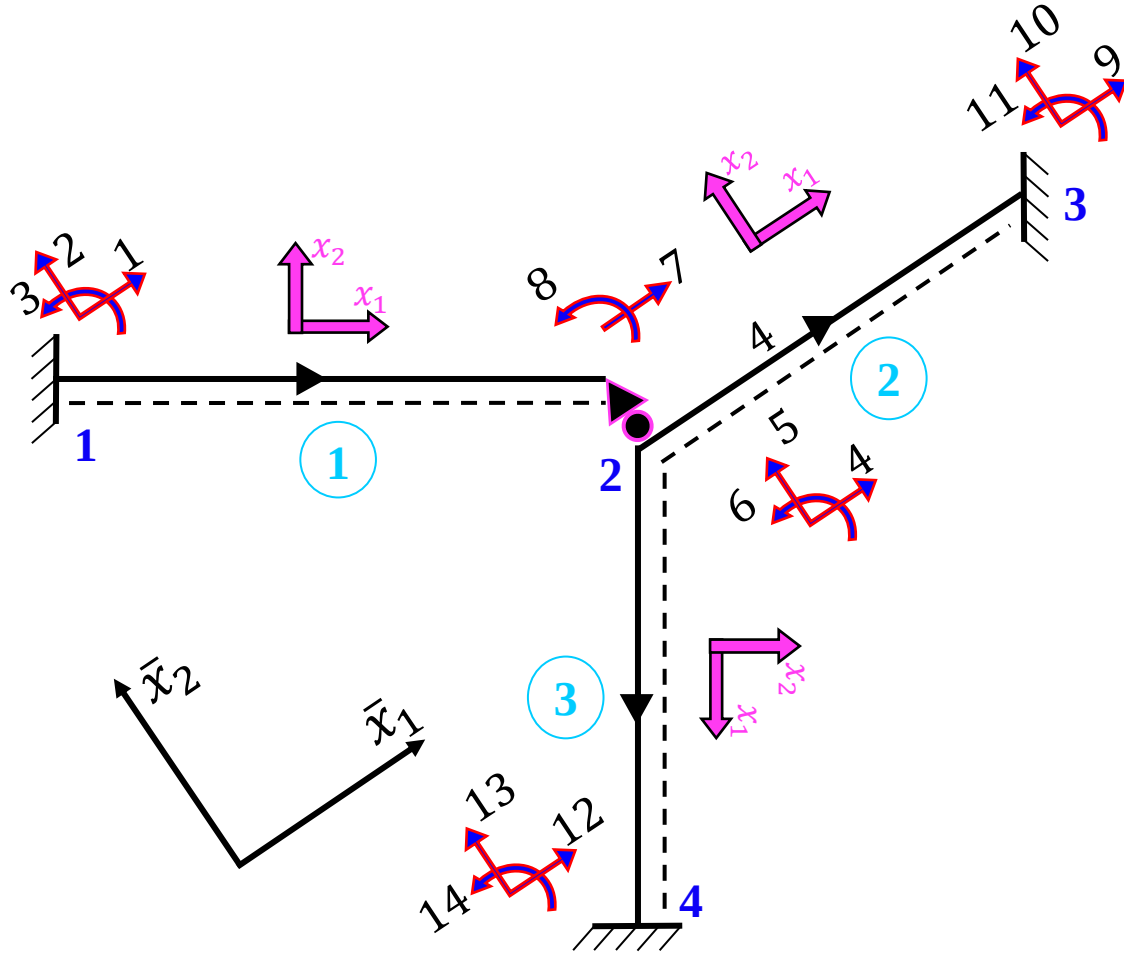
- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



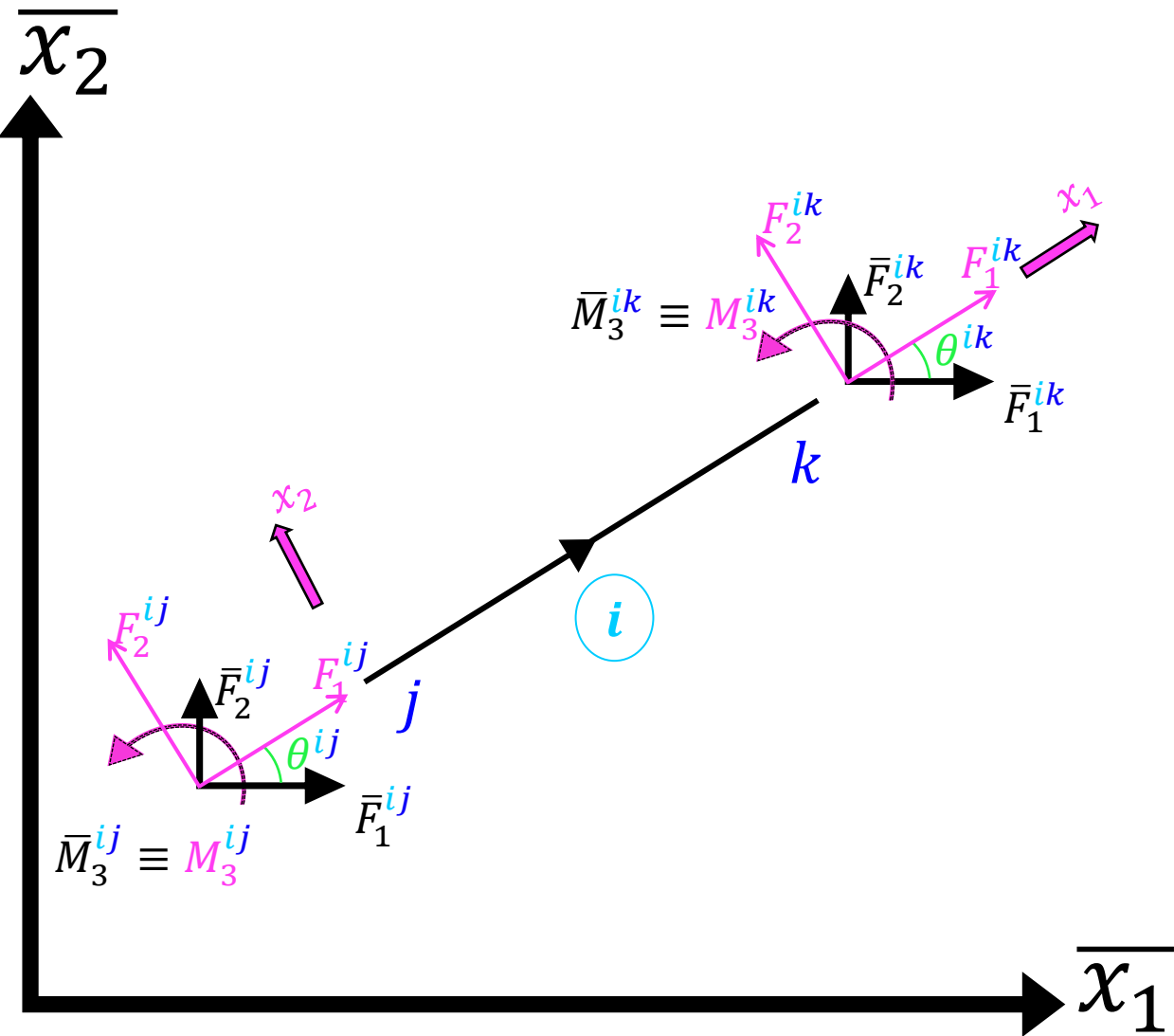
- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε.) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- **ΠΡΟΣΟΧΗ!**
Έχω μια εσωτερική ελευθέρωση στον κόμβο 2. Αυτή η «εσωτερική κύλιση» επιτρέπει:
 1. Την ανεξάρτητη μετατόπιση των μελών που συντρέχουν στον κόμβο κατά τη διεύθυνση της κύλισης.
 2. Την ανεξάρτητη στροφή των μελών που συντρέχουν στον κόμβο περί άξονα κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου.

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)



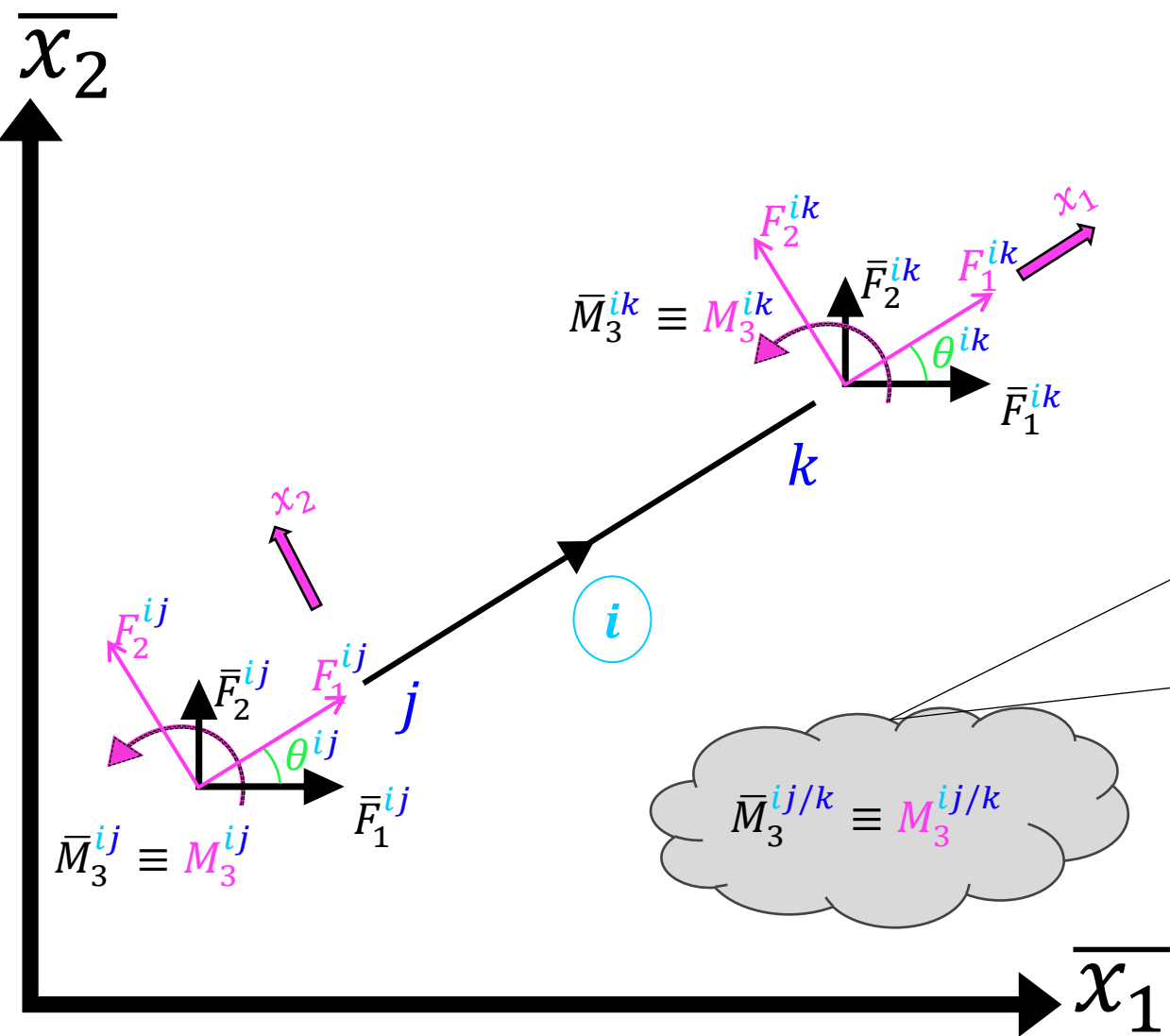
$$[\Lambda_{\text{PF}}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{\text{PF}}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ \hline [\mathbf{0}] & [\Lambda_{\text{PF}}^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta^{ij} & \sin\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta^{ij} & \cos\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\theta^{ik} & \sin\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta^{ik} & \cos\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :

$$\theta^{ij} = \theta^{ik}$$
- Ισχύει: $[\Lambda_{\text{PF}}^i]^{-1} = [\Lambda_{\text{PF}}^i]^T$
- Ο καθολικός $\overline{x_1}$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

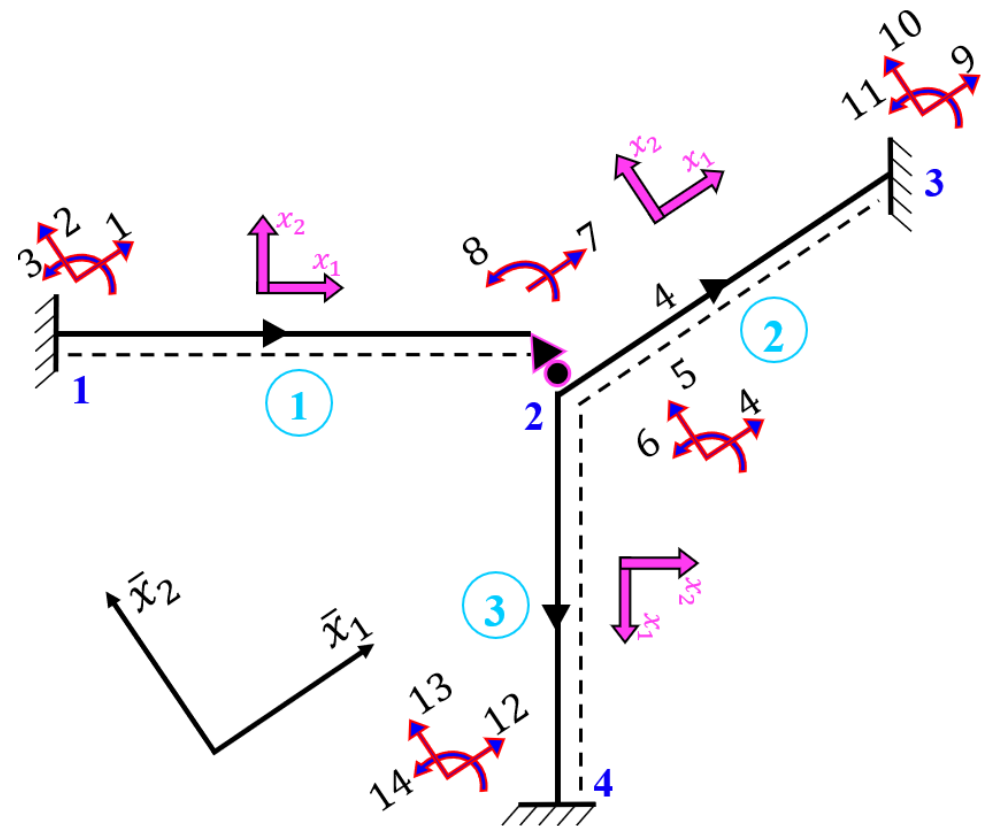


$$[\Lambda_{PF}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :
 $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_{PF}^i]^{-1} = [\Lambda_{PF}^i]^T$
- Ο καθολικός $\bar{x}_1$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos \theta^i$	$\sin \theta^i$
1	323.13	0.8	-0.6
2	0	1	0
3	233.13	-0.6	0.8

$$[\Lambda^1] = \begin{bmatrix} 0.8000 & -0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.8000 & -0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6000 & 0.8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^3] = \begin{bmatrix} -0.6000 & -0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8000 & -0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.6000 & -0.8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8000 & -0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών

(1/2)

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

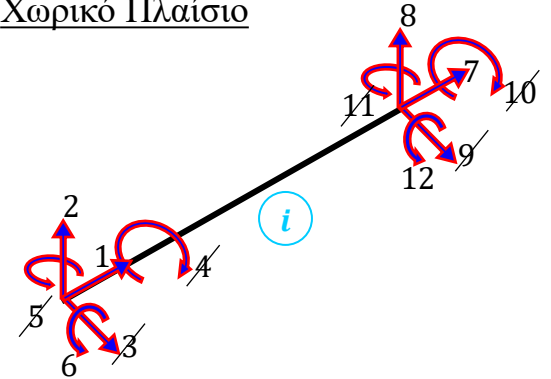
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix}$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

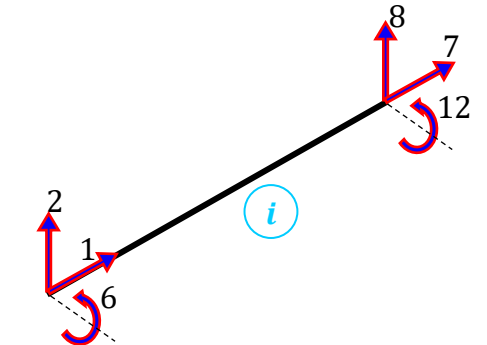
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/3)

$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{matrix}$$

Χωρικό Πλαίσιο



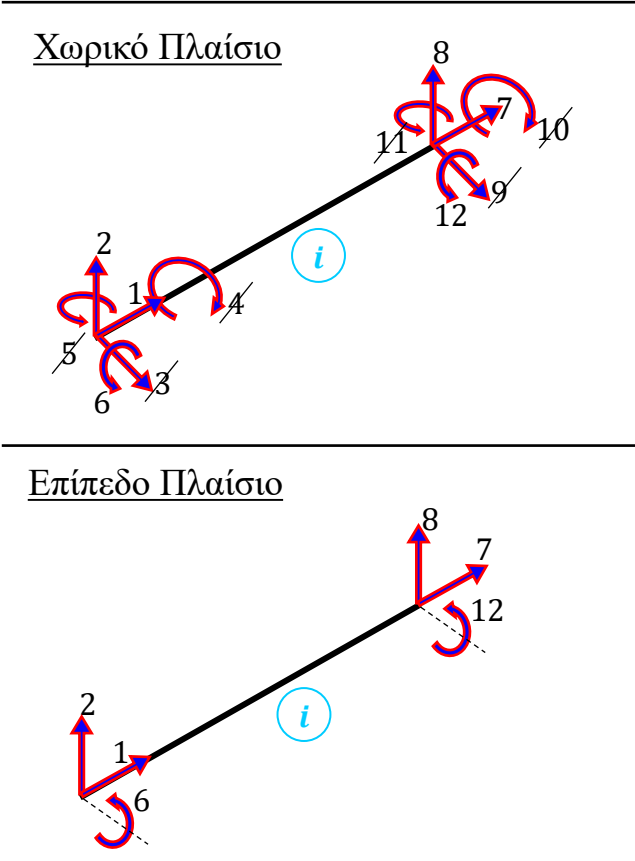
Επίπεδο Πλαίσιο



BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{PF}^i] =$$

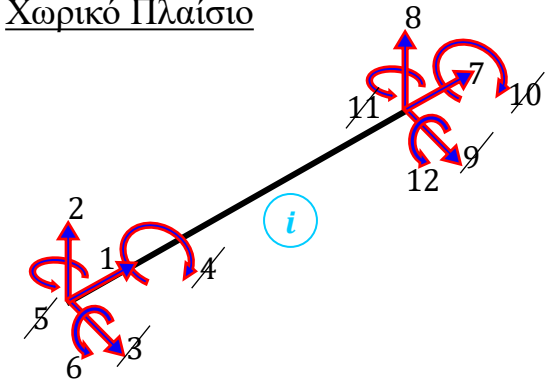
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$



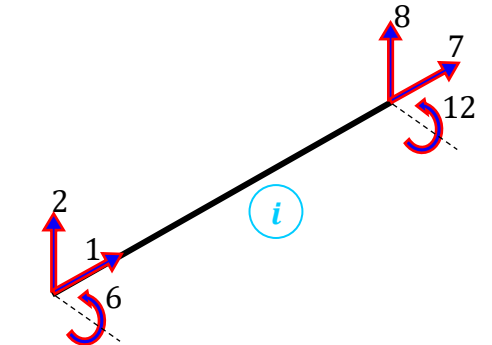
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Χωρικό Πλαίσιο



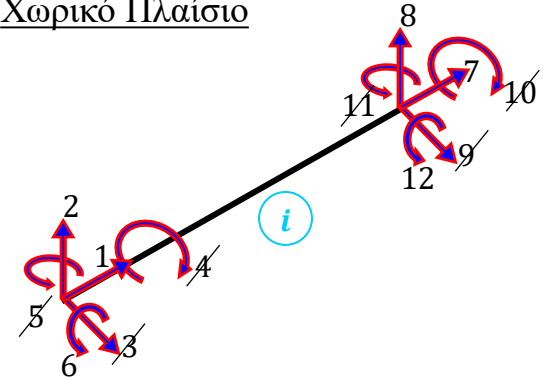
Επίπεδο Πλαίσιο



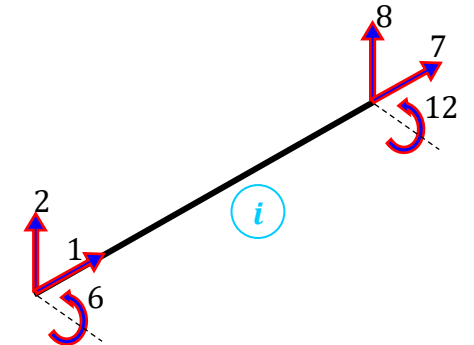
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Χωρικό Πλαίσιο



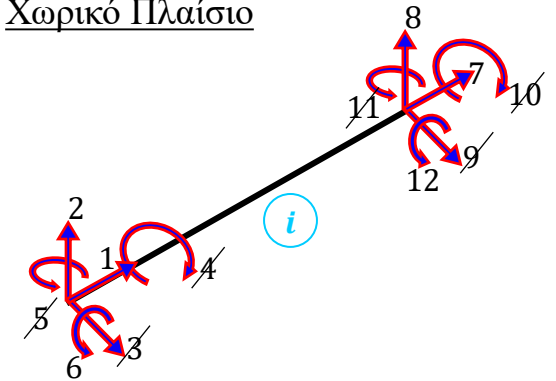
Επίπεδο Πλαίσιο



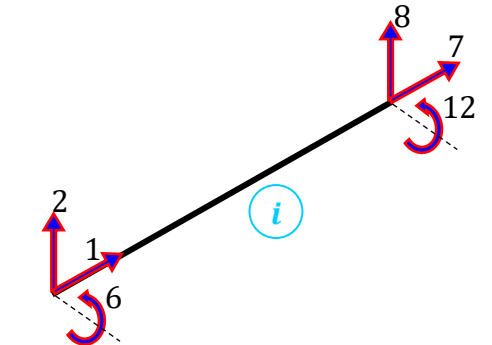
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Χωρικό Πλαίσιο



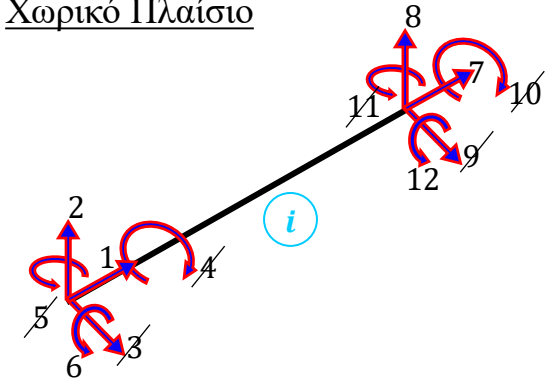
Επίπεδο Πλαίσιο



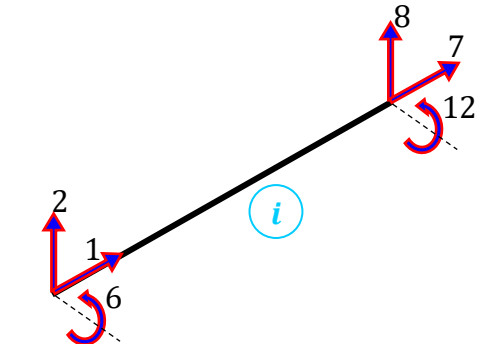
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο

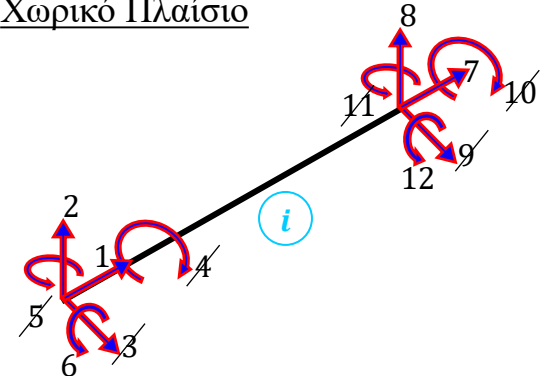


ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

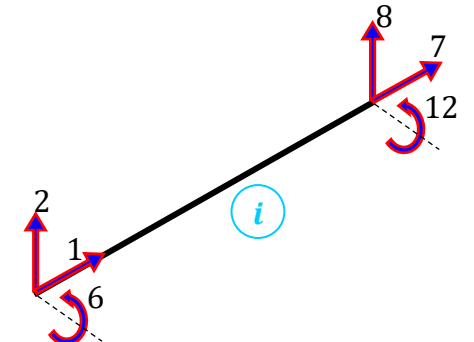
$$[k_{PF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

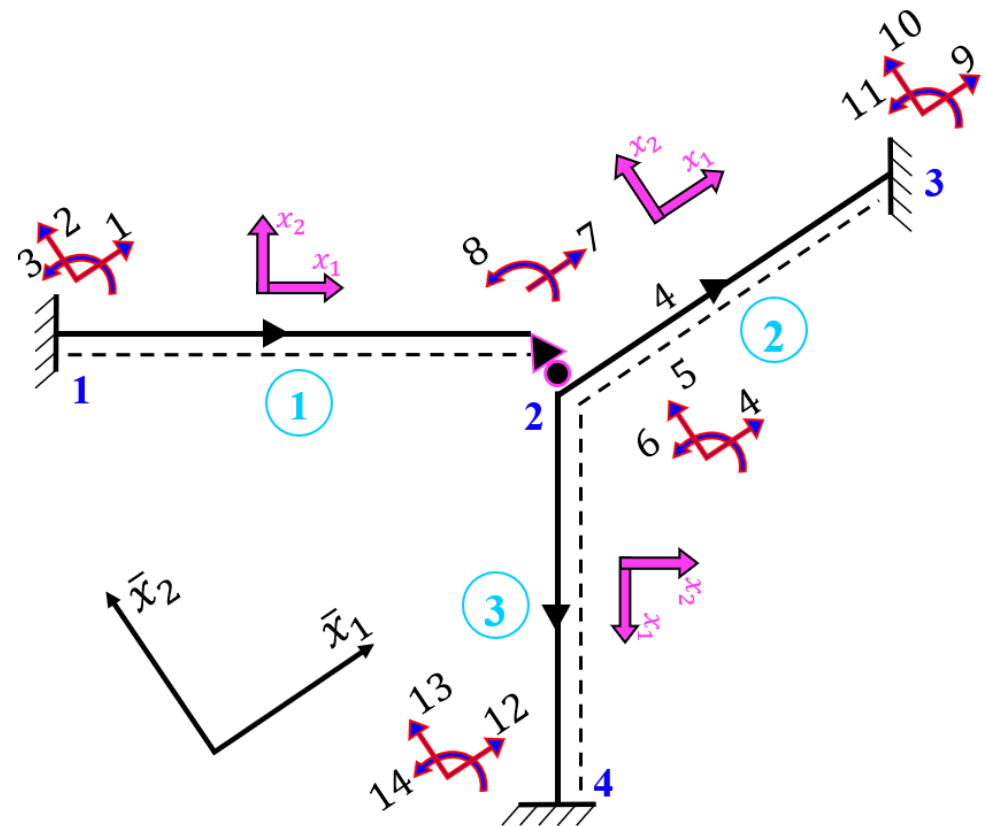
Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)



$$[k^1] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{8} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[k^2] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \textcolor{red}{11} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[k^3] = \begin{bmatrix} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{12} & \textcolor{red}{13} & \textcolor{red}{14} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{bmatrix} \times 10^5$$

Μέλος i	E^i [kN/m ²]	A^i [m ²]	I^i [m ⁴]	L^i [m]
1	2.1×10^7	0.18	0.0054	5.0
2	2.1×10^7	0.18	0.0054	5.0
3	2.1×10^7	0.18	0.0054	5.0

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/2)

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε μέλους υπολογίζεται από τη σχέση: $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i][\Lambda_{PF}^i]$

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 & \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 & 1 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 & 2 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 & 3 \\ \hline -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 & 7 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 & 5 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 & 8 \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 & \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & 5 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & 6 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 & 10 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 11 \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 & \\ \hline 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 & 4 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 & 5 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 & 6 \\ \hline -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 & 12 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 & 13 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 & 14 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/2)



Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι συμμετρικό. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).

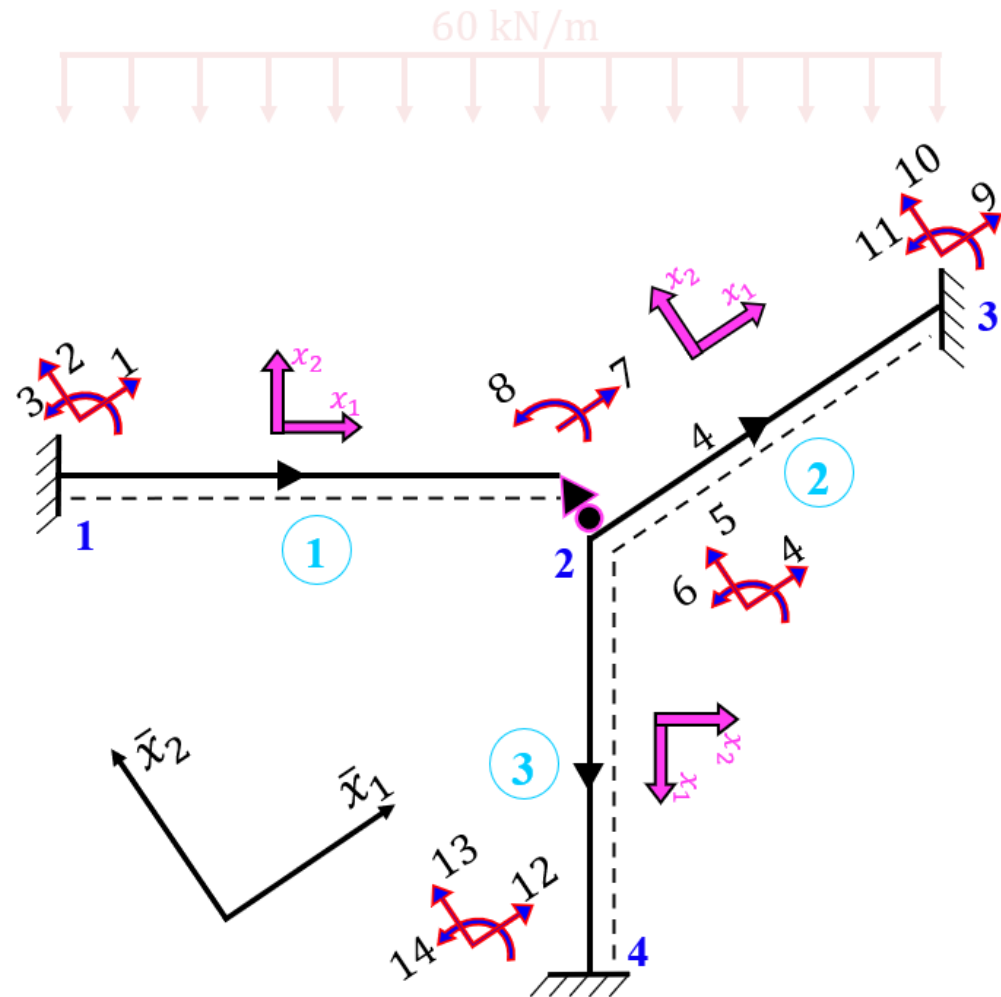


Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα θετικά (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$. Κατ'εξάιρεση, το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν και το αντίστοιχο καθολικό να εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις, αλλά αυτό γίνεται καθώς έχουμε θεωρήσει τέμνουσα δύναμη (που δεν ορίζεται), για να έχουμε «όμορφα και τετράγωνα» μητρώα.



Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις



$$\{\bar{P}^{nodal}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{M}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{13} \\ \bar{M}_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{13} \\ \bar{R}_{14} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \\ \text{\#4} \end{matrix}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \\ \text{\#4} \end{matrix}$$

Αγνοώ προσωρινά:

- τα ενδιάμεσα φορτία

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα ^(1/3)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με

$$\text{τη βοήθεια της σχέσης: } [\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PF}^i],$$

$$\text{με τη μορφή: } [\bar{k}^i] = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix}, \text{ επιμερίζοντας δηλαδή το μητρώο αυτό}$$

σε 4 **υπομητρώα** διάστασης 3x3.

2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί **για όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα ^(1/3)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος να κατασκευαστεί το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με τη βοήθεια της σχέσης: $[\bar{K}]$

με τη μορφή: $[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \bar{k}_{13} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{31} & \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{bmatrix}$, επιμεριζόμενα, δηλαδή το μητρώο αυτό

σε 4 **υπομητρώα** διαστάσεως 3×3 .

2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους εισάγεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλους τους **μέλους** για **όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι τα υπομητρώα εισάγονται στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αν υπάρχουν.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/3)

- Μέχρι τώρα, η σύνθεση του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του φορέα γινόταν με επαλληλία των ανά κόμβο υπομητρώων των καθολικών μητρώων στιβαρότητας των μελών.
- Στην παρούσα περίπτωση όπου έχουμε εσωτερική/ες ελευθερώσεις, δεν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ αυτών των υπομητρώων. Για παράδειγμα το υπομητρώο $[\bar{k}_{22}^1]$ αντιστοιχεί στους β.ε. 7, 5, 8 ενώ το υπομητρώο $[\bar{k}_{22}^2]$ αντιστοιχεί στους β.ε. 4, 5, 6. Επομένως η επαλληλία (άθροιση) τους θα οδηγούσε σε λανθασμένο αποτέλεσμα.
- Δηλαδή, η ύπαρξη εσωτερικών ελευθερώσεων καθιστά την σύνθεση μέσω υπομητρώων δυσχερή.
- Επομένως επιλέγουμε να κάνουμε τη σύνθεση στοιχείο-στοιχείο (δηλ. β.ε. – β.ε.).

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ \hline -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 \\ \hline 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ \hline -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \hline ? & -3.5765 & 0.1633 & 0 & 3.5765 & 0 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & ? & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.3513 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & 3.5765 & 7.7777 & 0.1089 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0.1089 & ? & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 0 & -3.5765 & 0 & 4.8776 & -0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7913 & 3.5765 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ \hline -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 \\ \hline 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ \hline -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & 0 & 3.5765 & 0 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & ? & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.3513 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & 3.5765 & 7.7777 & 0.1089 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0.1089 & ? & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 0 & -3.5765 & 0 & 4.8776 & -0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7913 & 3.5765 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$[\bar{k}^1] = 10^5 \times$

1	2	3	7	5	8	
4.8776	-3.5765	0.1633	-4.8776	3.5765	0.1633	1
-3.5765	2.7913	0.2177	3.5765	-2.7913	0.2177	2
0.1633	0.2177	0.9072	-0.1633	-0.2177	0.4536	3
-4.8776	3.5765	-0.1633	4.8776	-3.5765	-0.1633	7
3.5765	-2.7913	-0.2177	-3.5765	2.7913	-0.2177	5
0.1633	0.2177	0.4536	-0.1633	-0.2177	0.9072	8

$[\bar{k}^2] = 10^5 \times$

4	5	6	9	10	11	
7.5600	0	0	-7.5600	0	0	4
0	0.1089	0.2722	0	-0.1089	0.2722	5
0	0.2722	0.9072	0	-0.2722	0.4536	6
-7.5600	0	0	7.5600	0	0	9
0	-0.1089	-0.2722	0	0.1089	-0.2722	10
0	0.2722	0.4536	0	-0.2722	0.9072	11

$[\bar{k}^3] = 10^5 \times$

4	5	6	12	13	14	
2.7913	3.5765	0.2177	-2.7913	-3.5765	0.2177	4
3.5765	4.8776	-0.1633	-3.5765	-4.8776	-0.1633	5
0.2177	-0.1633	0.9072	-0.2177	0.1633	0.4536	6
-2.7913	-3.5765	-0.2177	2.7913	3.5765	-0.2177	12
-3.5765	-4.8776	0.1633	3.5765	4.8776	0.1633	13
0.2177	-0.1633	0.4536	-0.2177	0.1633	0.9072	14

$[\bar{K}] = 10^5 \times$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14		
4.8776	-3.5765	0.1633	0	3.5765	0	-4.8776	0.1633	0	0	0	0	0	0	0	1
-3.5765	2.7913	0.2177	0	-2.7913	0	3.5765	0.2177	0	0	0	0	0	0	0	2
0.1633	0.2177	0.9072	0	-0.2177	0	-0.1633	0.4536	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	10.3513	3.5765	0.2177	0	0	-7.5600	0	0	-2.7913	-3.5765	0.2177	0	4
3.5765	-2.7913	-0.2177	3.5765	7.7777	0.1089	-3.5765	-0.2177	0	-0.1089	0.2722	-3.5765	-4.8776	-0.1633	0	5
0	0	0	?	0.1089	?	0	0	0	-0.2722	0.4536	-0.2177	0.1633	0.4536	0	6
-4.8776	3.5765	-0.1633	0	-3.5765	0	4.8776	-0.1633	0	0	0	0	0	0	0	7
0.1633	0.2177	0.4536	0	-0.2177	0	-0.1633	0.9072	0	0	0	0	0	0	0	8
0	0	0	-7.5600	0	0	0	0	7.5600	0	0	0	0	0	0	9
0	0	0	0	-0.1089	-0.2722	0	0	0	0.1089	0.2722	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0.2722	0.4536	0	0	0	-0.2722	0.9072	0	0	0	0	11
0	0	0	-2.7913	-3.5765	-0.2177	0	0	0	0	0	2.7913	3.5765	?	0	12
0	0	0	-3.5765	-4.8776	0.1633	0	0	0	0	0	3.5765	4.8776	0.1633	0	13
0	0	0	0.2177	-0.1633	0.4536	0	0	0	0	0	-0.2177	0.1633	0.9072	0	14

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cc} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cc} 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 \\ 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{array} \\ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|cc} 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 \\ 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \\ \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & 0 & 3.5765 & 0 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.3513 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & 3.5765 & 7.7777 & 0.1089 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & ? & 0.1089 & 1.8144 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 0 & -3.5765 & 0 & 4.8776 & -0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7913 & 3.5765 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array} \end{array}$$

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 8 \\ 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \end{array} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 9 & 10 & 11 \\ 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{array} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & 6 & 12 & 13 & 14 \\ 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^5 \times \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & 0 & 3.5765 & 0 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.3513 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & 3.5765 & 7.7777 & 0.1089 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & 0.1089 & 1.8144 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 0 & -3.5765 & 0 & 4.8776 & -0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7913 & 3.5765 & ? \\ 0 & 0 & 0 & -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/3)

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{8} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & -4.8776 & 3.5765 & 0.1633 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 3.5765 & -2.7913 & 0.2177 \\ \hline 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & -0.1633 & -0.2177 & 0.4536 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 4.8776 & -3.5765 & -0.1633 \\ \hline 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & -0.2177 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & -0.1633 & -0.2177 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{7} \\ \textcolor{red}{5} \\ \textcolor{red}{8} \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \textcolor{red}{11} \\ \hline 7.5600 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & -0.1089 & 0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.9072 & 0 & -0.2722 & 0.4536 \\ \hline -7.5600 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0.1089 & -0.2722 \\ 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & -0.2722 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{red}{5} \\ \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{red}{9} \\ \textcolor{red}{10} \\ \textcolor{red}{11} \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccc} \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{12} & \textcolor{red}{13} & \textcolor{red}{14} \\ \hline 2.7913 & 3.5765 & 0.2177 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 \\ 3.5765 & 4.8776 & -0.1633 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.9072 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 \\ \hline -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 \\ -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 \\ 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{red}{5} \\ \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{red}{12} \\ \textcolor{red}{13} \\ \textcolor{red}{14} \end{array}$$

$$[\bar{K}] = 10^5 \times \begin{array}{c|cccccccccccccccc} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} & \textcolor{red}{7} & \textcolor{red}{8} & \textcolor{red}{9} & \textcolor{red}{10} & \textcolor{red}{11} & \textcolor{red}{12} & \textcolor{red}{13} & \textcolor{red}{14} \\ \hline 4.8776 & -3.5765 & 0.1633 & 0 & 3.5765 & 0 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.9072 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.3513 & 3.5765 & 0.2177 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & 0.2177 & 0 \\ 3.5765 & -2.7913 & -0.2177 & 3.5765 & 7.7777 & 0.1089 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & -0.1089 & 0.2722 & -3.5765 & -4.8776 & -0.1633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & 0.1089 & 1.8144 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.4536 & -0.2177 & 0.1633 & 0.4536 & 0 \\ -4.8776 & 3.5765 & -0.1633 & 0 & -3.5765 & 0 & 4.8776 & -0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1633 & 0.2177 & 0.4536 & 0 & -0.2177 & 0 & -0.1633 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7.5600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1089 & -0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0.1089 & 0.2722 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2722 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & -0.2722 & 0.9072 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.7913 & -3.5765 & -0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7913 & 3.5765 & -0.2177 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.5765 & -4.8776 & 0.1633 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5765 & 4.8776 & 0.1633 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2177 & -0.1633 & 0.4536 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2177 & 0.1633 & 0.9072 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{4} \\ \textcolor{red}{5} \\ \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{red}{7} \\ \textcolor{red}{8} \\ \textcolor{red}{9} \\ \textcolor{red}{10} \\ \textcolor{red}{11} \\ \textcolor{red}{12} \\ \textcolor{red}{13} \\ \textcolor{red}{14} \end{array}$$

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

- i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης
- ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης
- iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης
- iv) Τροποποίηση μετακινήσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

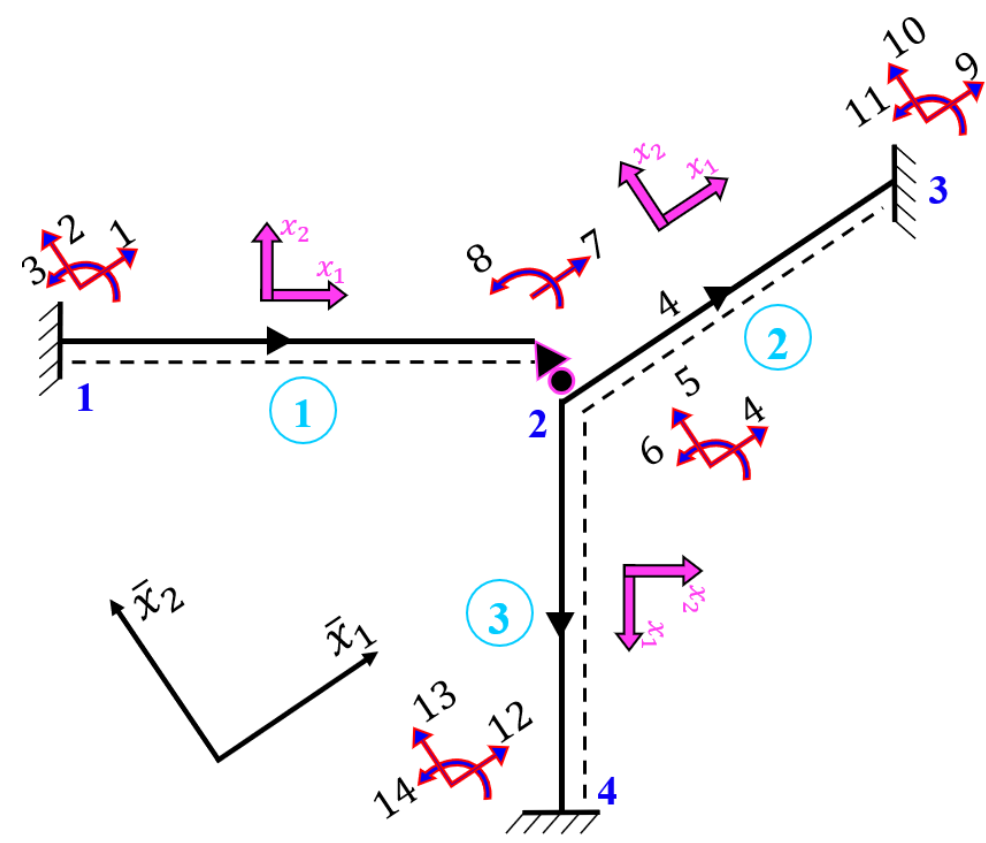
Τα γλιτώσαμε όλα αυτά 😁

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/4)

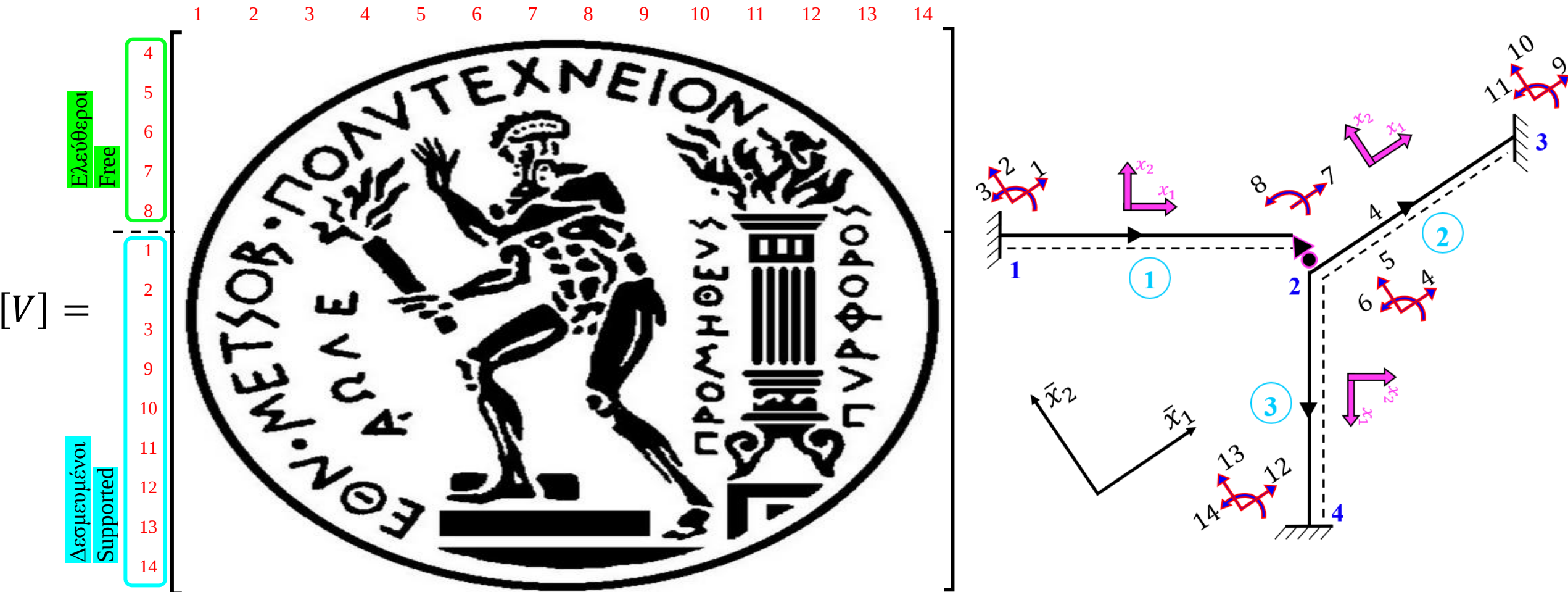
$[V] =$

Ελεύθεροι Free	
Δεσμευμένοι Supported	



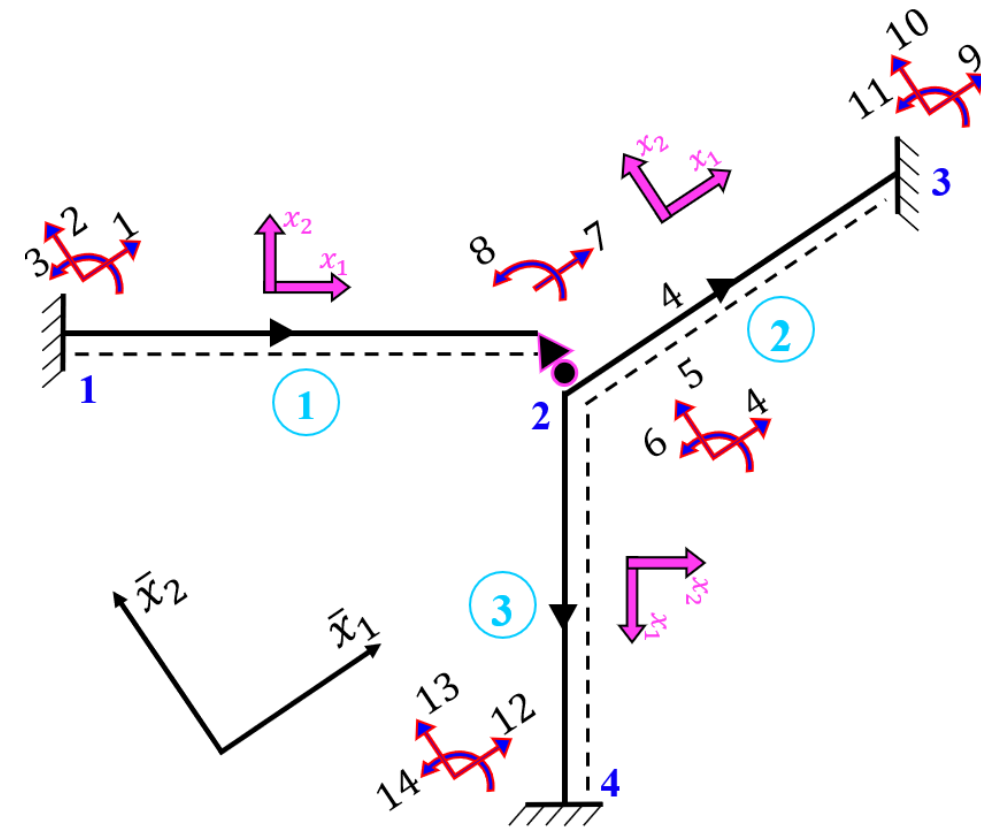
ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω
αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/4)



BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/4)

$$[V] = \begin{array}{c|c} \begin{array}{l} \text{Ελεύθεροι} \\ \text{Free} \end{array} & \begin{array}{l} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{l} \text{Δεσμευμένοι} \\ \text{Supported} \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{array} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/4)

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων :

$$\{\bar{P}_{nodal,m}\} = [V]\{\bar{P}_{nodal}\} = \begin{bmatrix} \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{M}_8 \\ \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{13} \\ \bar{M}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{13} \\ \bar{R}_{14} \end{bmatrix}$$
$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V]\{\bar{\Delta}\} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/4)

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T =$$

10.3513	3.5765	0.2177	0	0	0	0	0	-7.5600	0	0	-2.7913	-3.5765	0.2177
3.5765	7.7777	0.1089	-3.5765	-0.2177	3.5765	-2.7913	-0.2177	0	-0.1089	0.2722	-3.5765	-4.8776	-0.1633
0.2177	0.1089	1.8144	0	0	0	0	0	0	-0.2722	0.4536	-0.2177	0.1633	0.4536
0	-3.5765	0	4.8776	-0.1633	-4.8776	3.5765	-0.1633	0	0	0	0	0	0
0	-0.2177	0	-0.1633	0.9072	0.1633	0.2177	0.4536	0	0	0	0	0	0
0	3.5765	0	-4.8776	0.1633	4.8776	-3.5765	0.1633	0	0	0	0	0	0
0	-2.7913	0	3.5765	0.2177	-3.5765	2.7913	0.2177	0	0	0	0	0	0
0	-0.2177	0	-0.1633	0.4536	0.1633	0.2177	0.9072	0	0	0	0	0	0
-7.5600	0	0	0	0	0	0	0	7.5600	0	0	0	0	0
0	-0.1089	-0.2722	0	0	0	0	0	0	0.1089	-0.2722	0	0	0
0	0.2722	0.4536	0	0	0	0	0	0	-0.2722	0.9072	0	0	0
-2.7913	-3.5765	-0.2177	0	0	0	0	0	0	0	0	2.7913	3.5765	-0.2177
-3.5765	-4.8776	0.1633	0	0	0	0	0	0	0	0	3.5765	4.8776	0.1633
0.2177	-0.1633	0.4536	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2177	0.1633	0.9072

$\times 10^5$

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] \\ [\bar{K}_{sf}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

(3/4)

$$[\bar{K}_m] = [V][\hat{K}][V]^T = \begin{bmatrix} 0 & -2.7913 & 0 & 3.5765 & 0.2177 & -3.5765 & 2.7913 & 0.2177 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^5$$
$$\begin{bmatrix} \boxed{\bar{K}_{ff}} & \boxed{\bar{K}_{fs}} \\ \boxed{\bar{K}_{sf}} & \boxed{\bar{K}_{ss}} \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

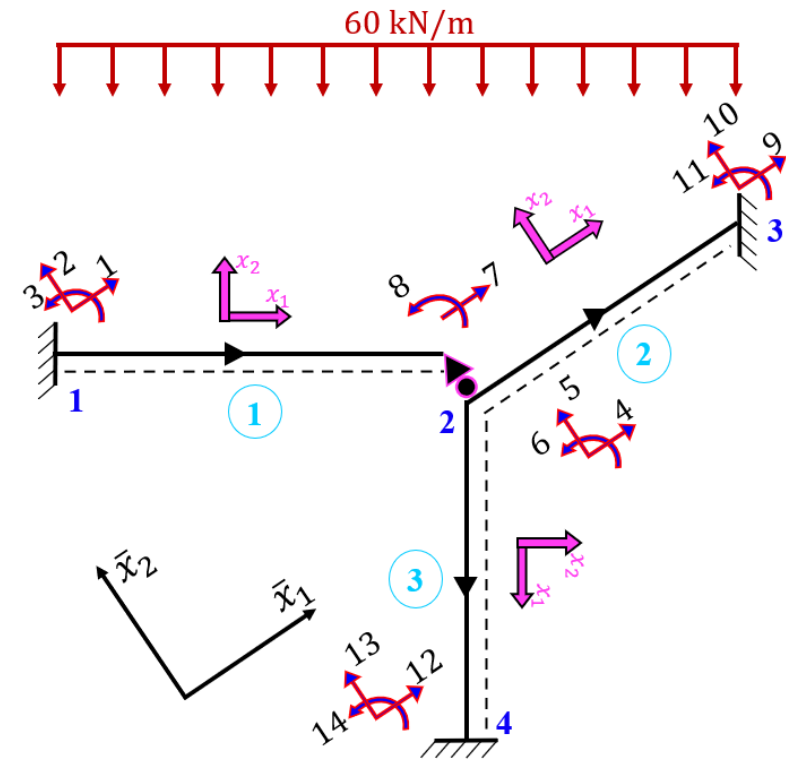
(4/4)

Εάν είχα μόνο επικόμβια φορτία, σε αυτό το στάδιο θα μπορούσα πλέον να επιλύσω εξίσωση ισορροπίας (σχέση στιβαρότητας) και να υπολογίσω τα άγνωστα μεγέθη:

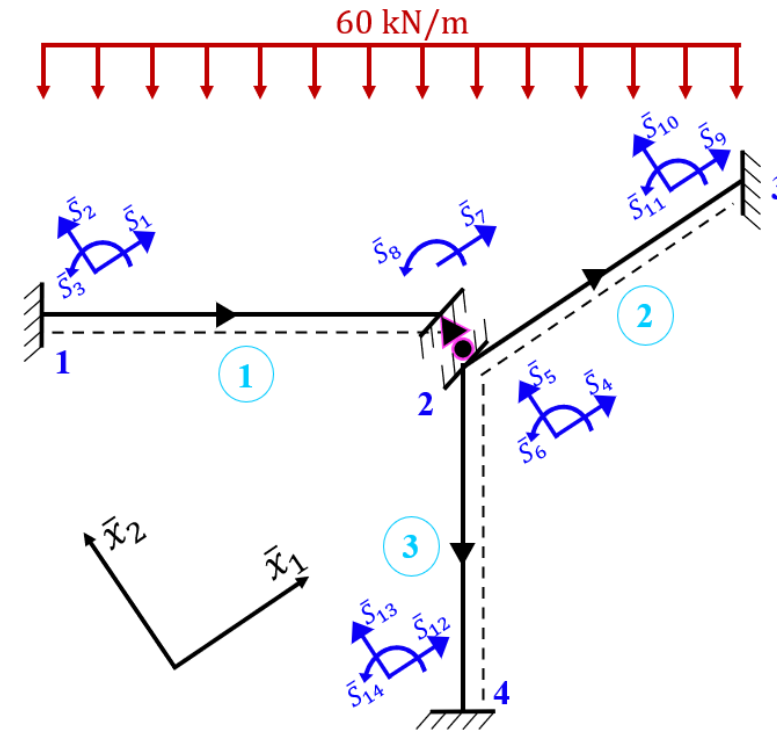
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.} \\ \bar{\Delta}_f = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) \\ 2. \text{ Επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε.} \\ \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} \end{array} \right.$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

i) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα

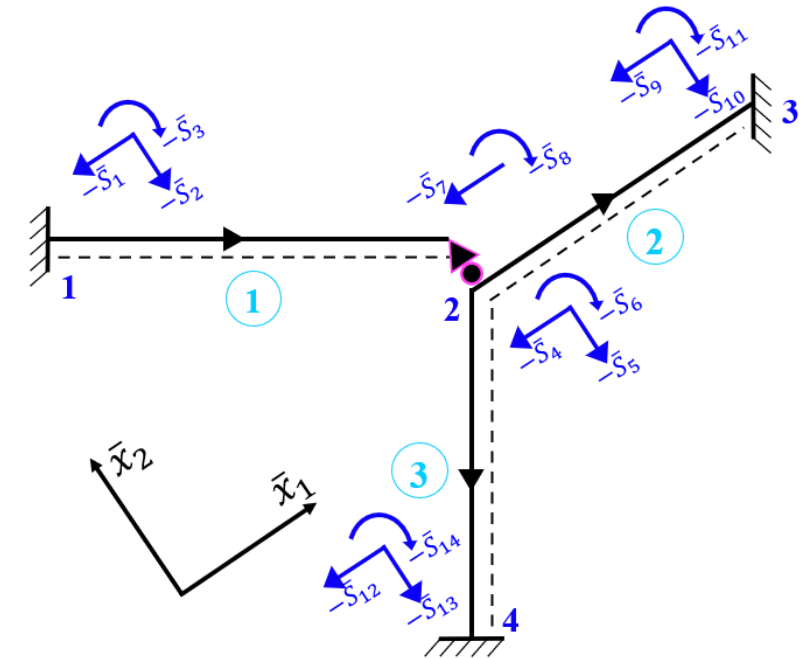


ΑΡΧΙΚΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ



ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία

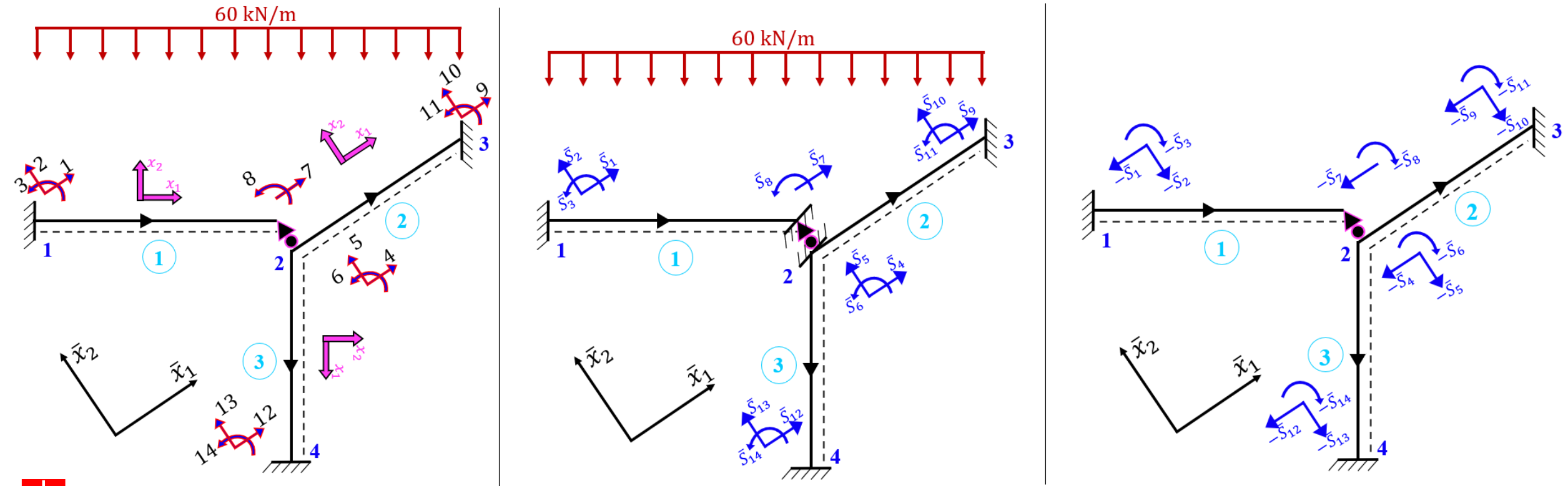


ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις → ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

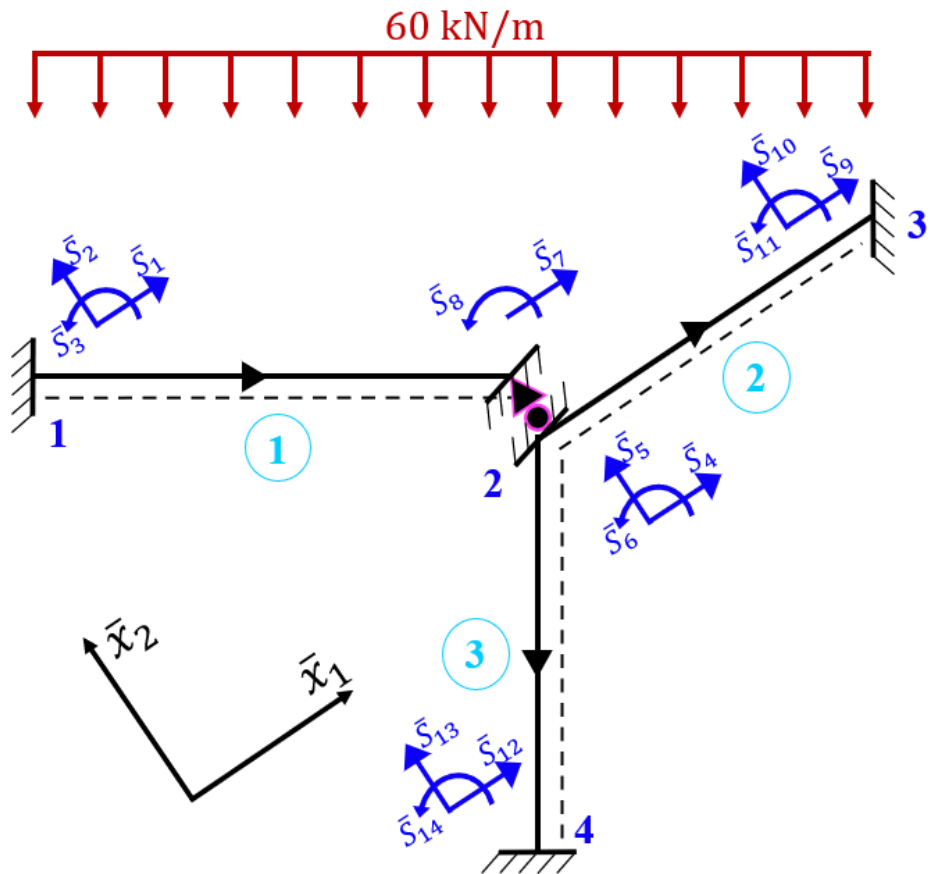
i) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα



- Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων



Μέλος Φόρτιση	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✗
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗	✗

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:

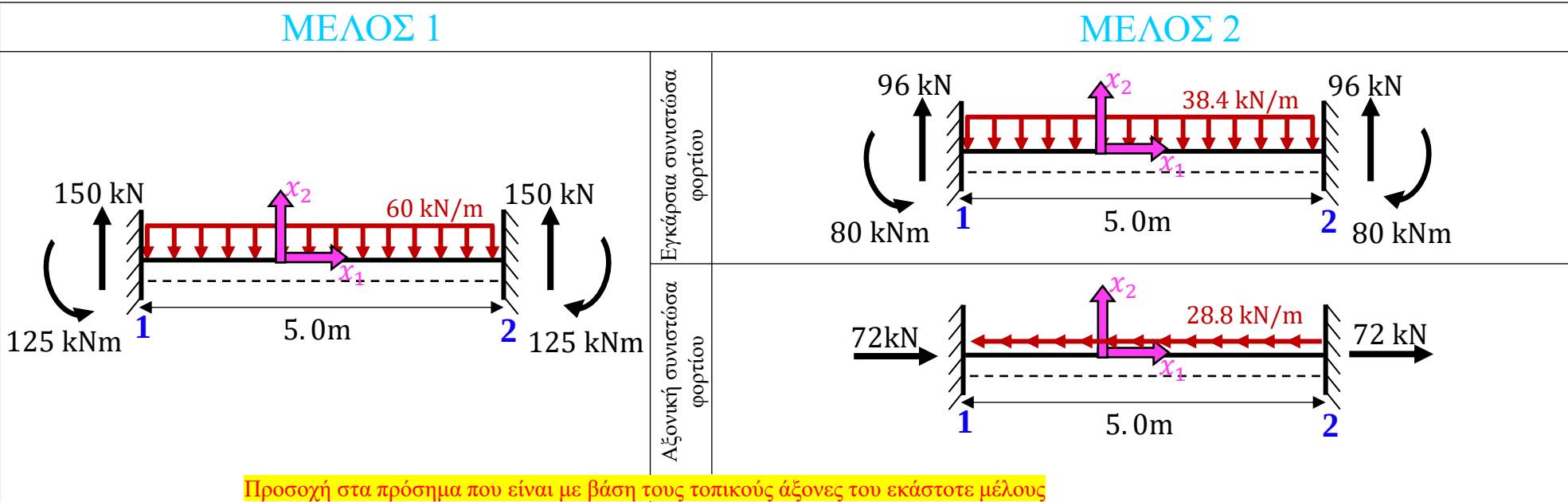
α) *ενδιάμεσων φορτίων*

 Δες παράρτημα για υπενθύμιση ανάλυσης κεκλιμένου φορτίου.

Ενδιάμεσο Φορτίο

Το μέλος 3 είναι αφόρτιστο !

$$\{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Μέλος \ Φόρτιση	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✗
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗	✗

$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 150 \\ 125 \\ 0 \\ 150 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα

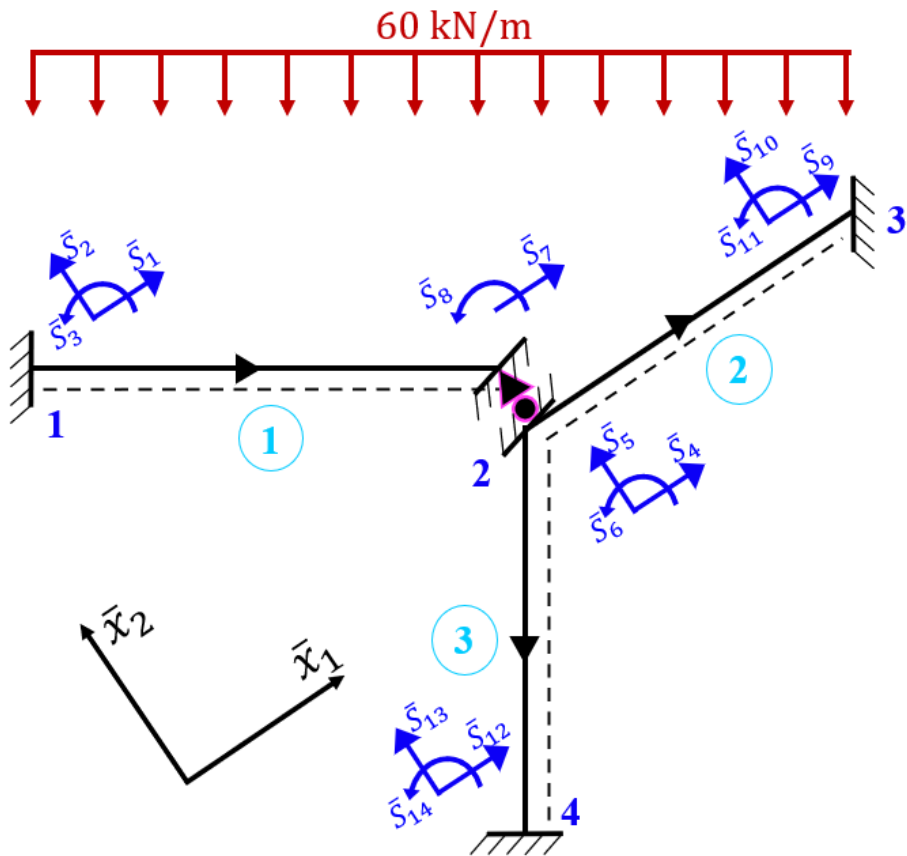
$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{PF}^1]^T \{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \\ 90 \\ 120 \\ -125 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^3\} = [\Lambda_{PF}^3]^T \{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^2\} = [\Lambda_{PF}^2]^T \{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

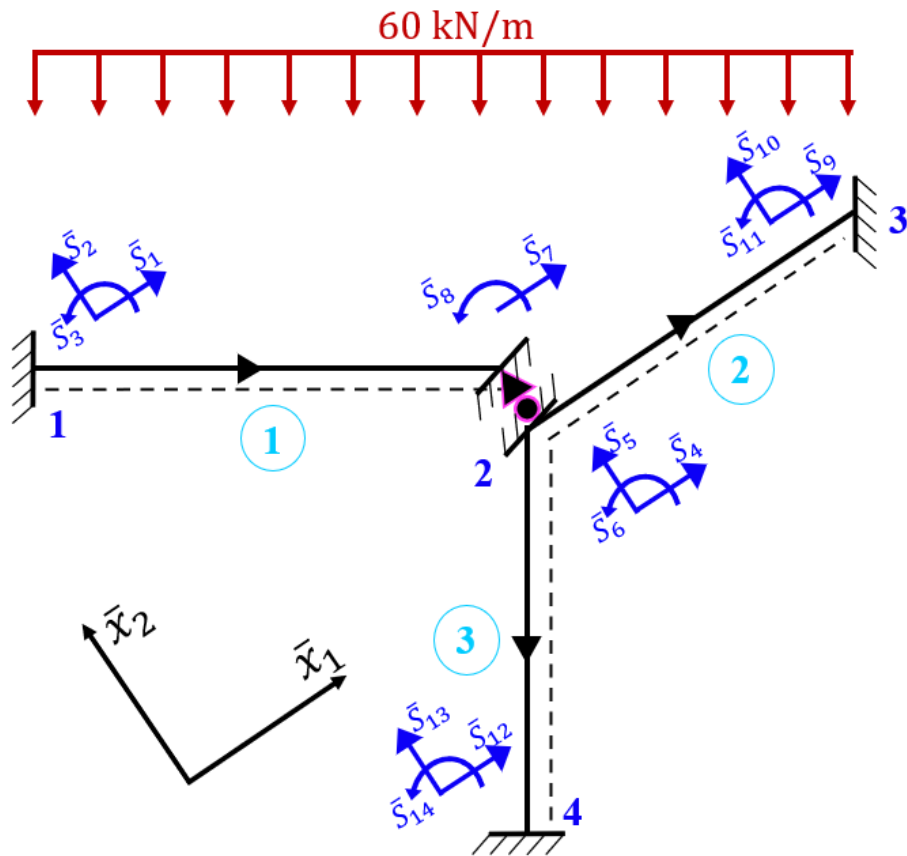
$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} + \{A_r^{3j}\}$$

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(4)}\} = \{\bar{A}_r^{3j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

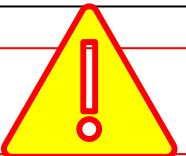
iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} + \{A_r^{3j}\}$$



$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(4)}\} = \{\bar{A}_r^{3j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟ ΚΟΜΒΟ!

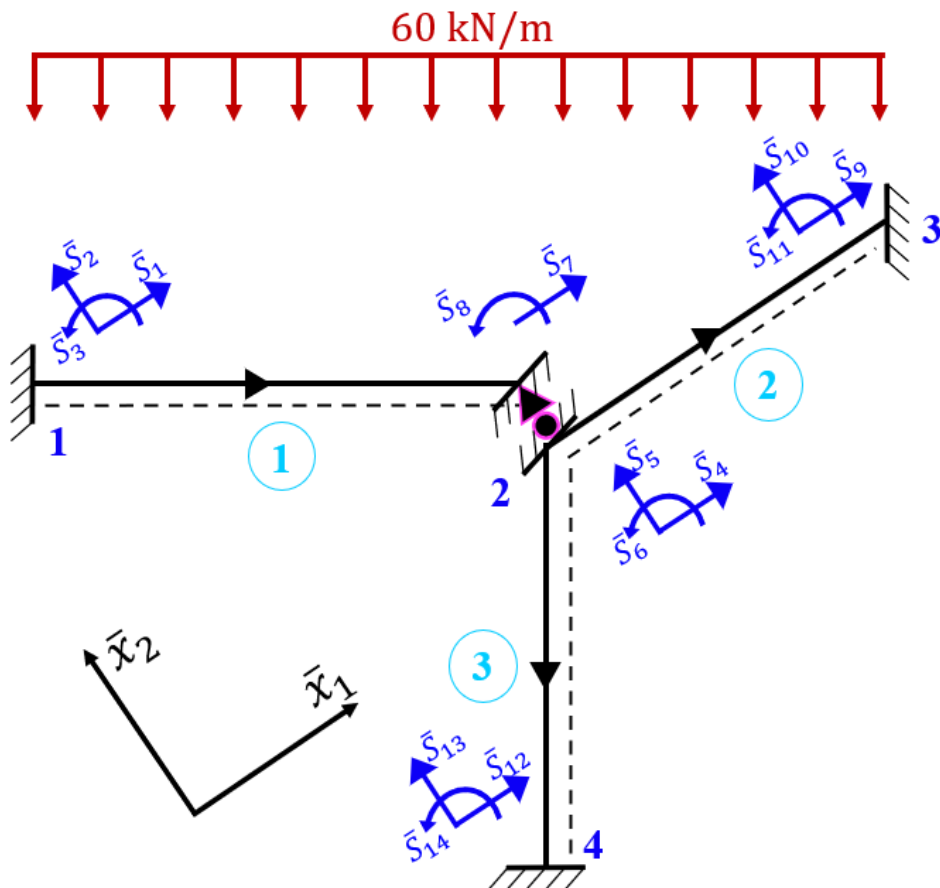
Ότι είπαμε για τη σύνθεση του μητρώου δυσκαμψίας του φορέα, ισχύει για όλα τα μεγέθη του φορέα που απαιτούν την τέλεση σύνθεσης (assembly) από μεγέθη των επιμέρους μελών.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΟΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΟ ΚΟΜΒΟ!

Για τον κόμβο 2 θα το πάω στοιχείο-στοιχείο για να είμαι σίγουρος



$$\{\bar{A}_r^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 90 \\ 120 \\ 125 \\ 90 \\ 120 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\{\bar{A}_r^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 96 \\ 80 \\ 72 \\ 96 \\ -80 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$\{\bar{A}_r^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 72 \\ 216 \\ 80 \\ 90 \\ -125 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέσση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης

Δεν έχουμε λοξή στήριξη 😊

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

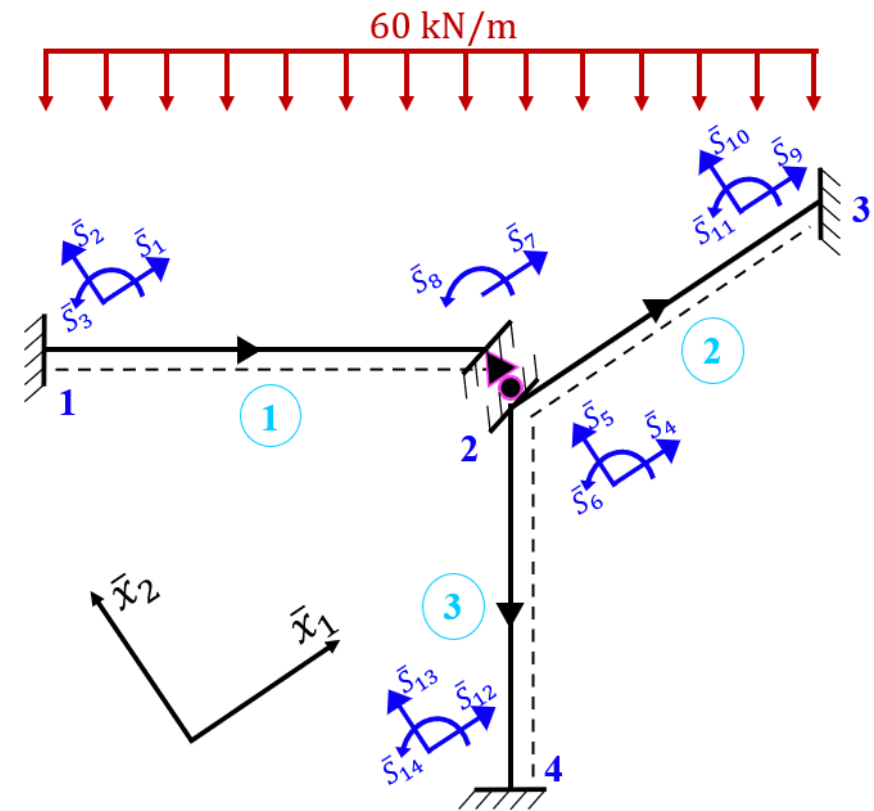
vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (1/2)

Το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα δίδεται ως:

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^{nodal}\} - \{\bar{S}\}$$

και με την τροποποίηση λόγω αναδιάταξης:

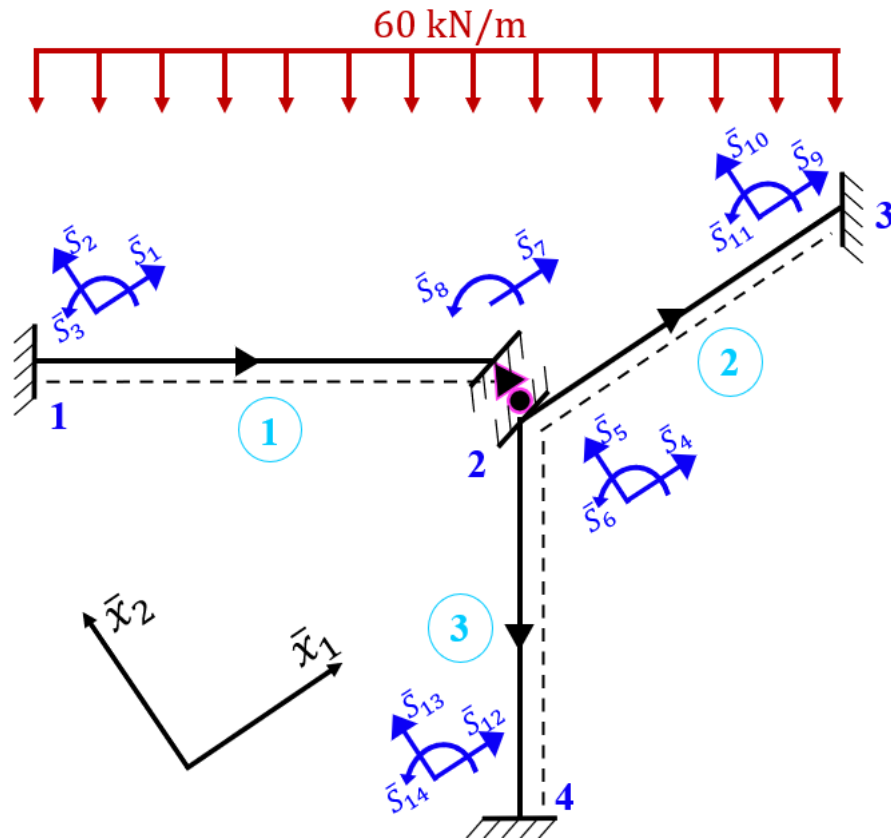
$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}^{nodal}_m\} - \{\bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{13} \\ \bar{R}_{14} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -72 \\ -216 \\ -80 \\ -90 \\ -90 \\ 125 \\ -90 \\ -120 \\ -125 \\ -72 \\ -96 \\ +80 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -72 \\ -216 \\ -80 \\ -90 \\ 125 \\ \bar{R}_1 - 90 \\ \bar{R}_2 - 120 \\ \bar{R}_3 - 125 \\ \bar{R}_9 - 72 \\ \bar{R}_{10} - 96 \\ \bar{R}_{11} + 80 \\ \bar{R}_{12} - 0 \\ \bar{R}_{13} - 0 \\ \bar{R}_{14} - 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$



ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (2/2)

Το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα ταυτίζεται με αυτό του αρχικού φορέα:



$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

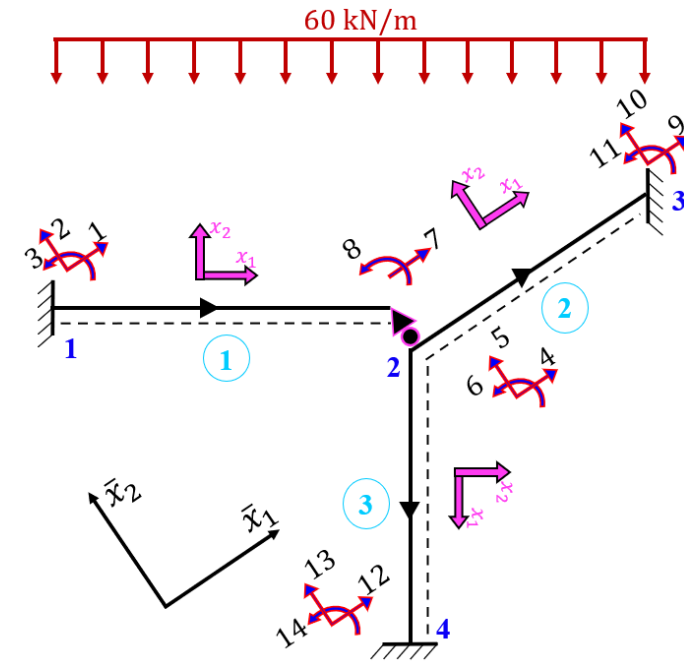
vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1}(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3067 \\ -5.5374 \\ -4.2337 \\ -5.5220 \\ 11.456 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 - 90 \\ \bar{R}_2 - 120 \\ \bar{R}_3 - 125 \\ \bar{R}_9 - 72 \\ \bar{R}_{10} - 96 \\ \bar{R}_{11} + 80 \\ \bar{R}_{12} - 0 \\ \bar{R}_{13} - 0 \\ \bar{R}_{14} - 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 90 \\ -17.9908 \\ 73.0368 \\ -98.7895 \\ 17.5507 \\ -34.2747 \\ 170.7895 \\ 216.4401 \\ -7.3168 \end{Bmatrix}$$

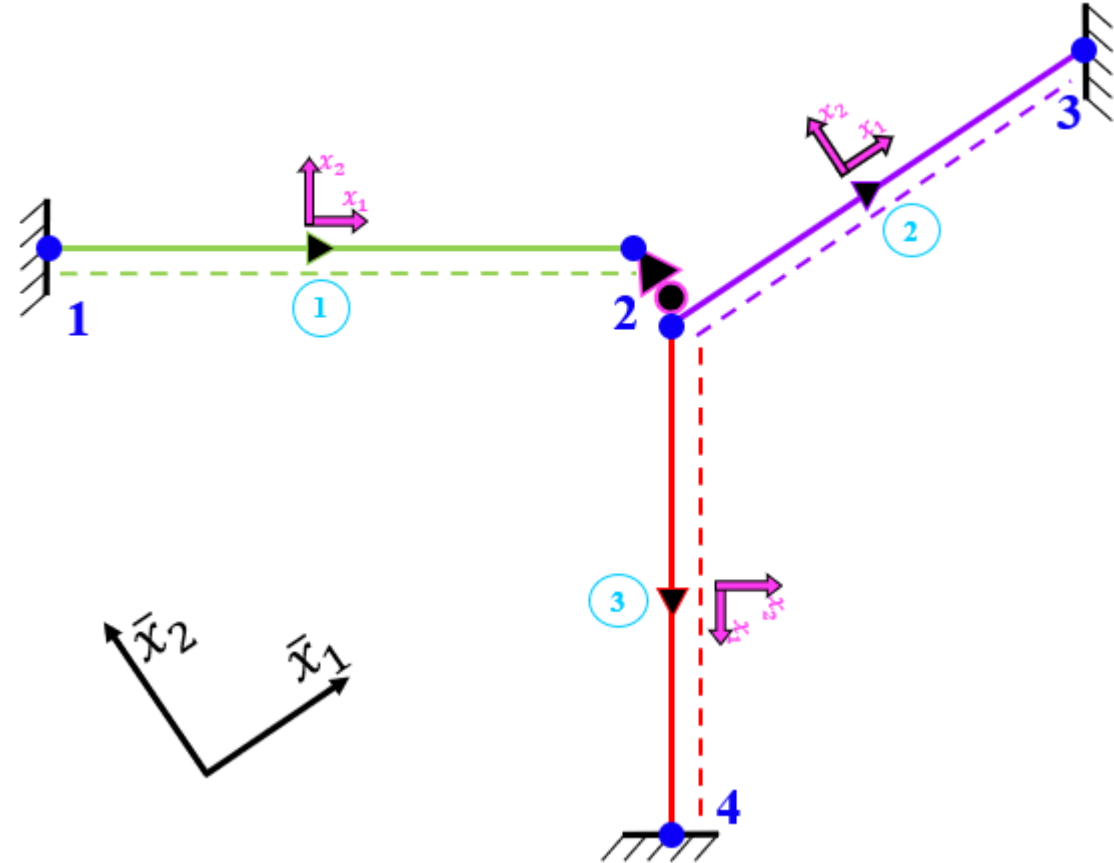
Αντιδράσεις:

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{13} \\ \bar{R}_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 180 \\ 102.0092 \\ 198.0368 \\ -26.7895 \\ 113.5507 \\ -114.2747 \\ 170.7895 \\ 216.4401 \\ -7.3168 \end{Bmatrix}$$



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

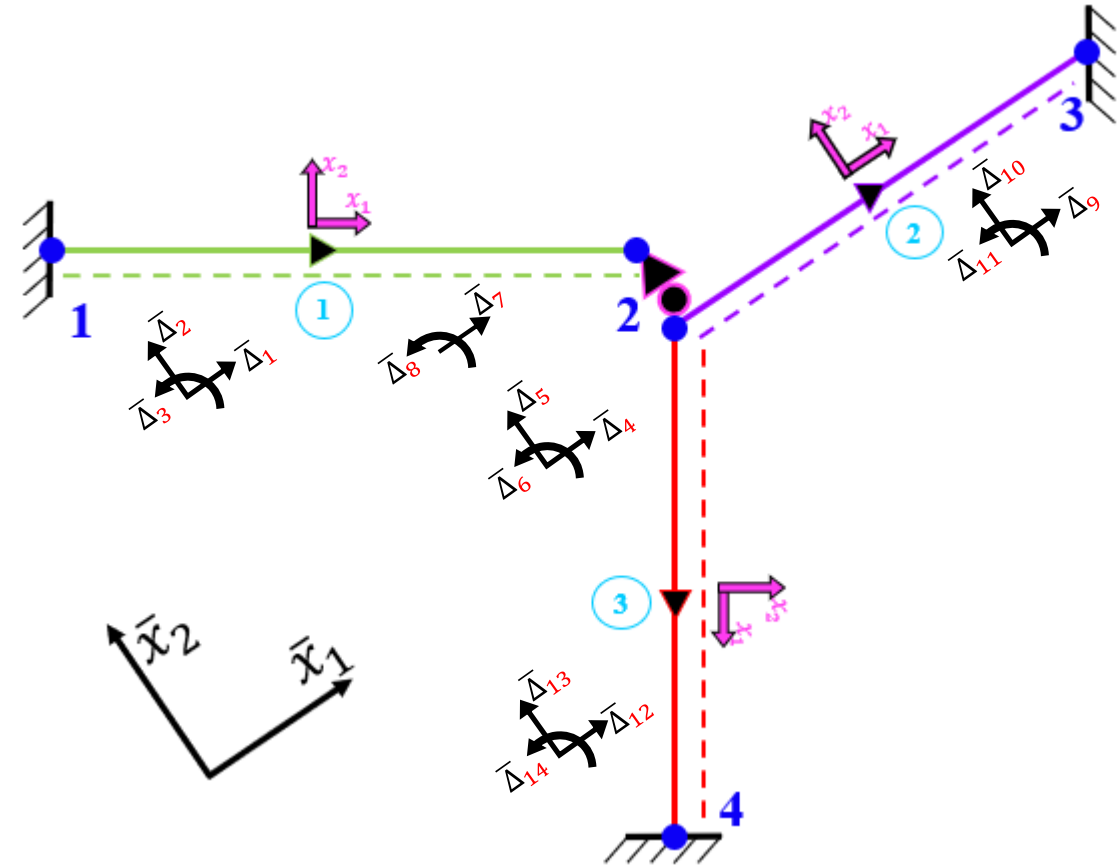
Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

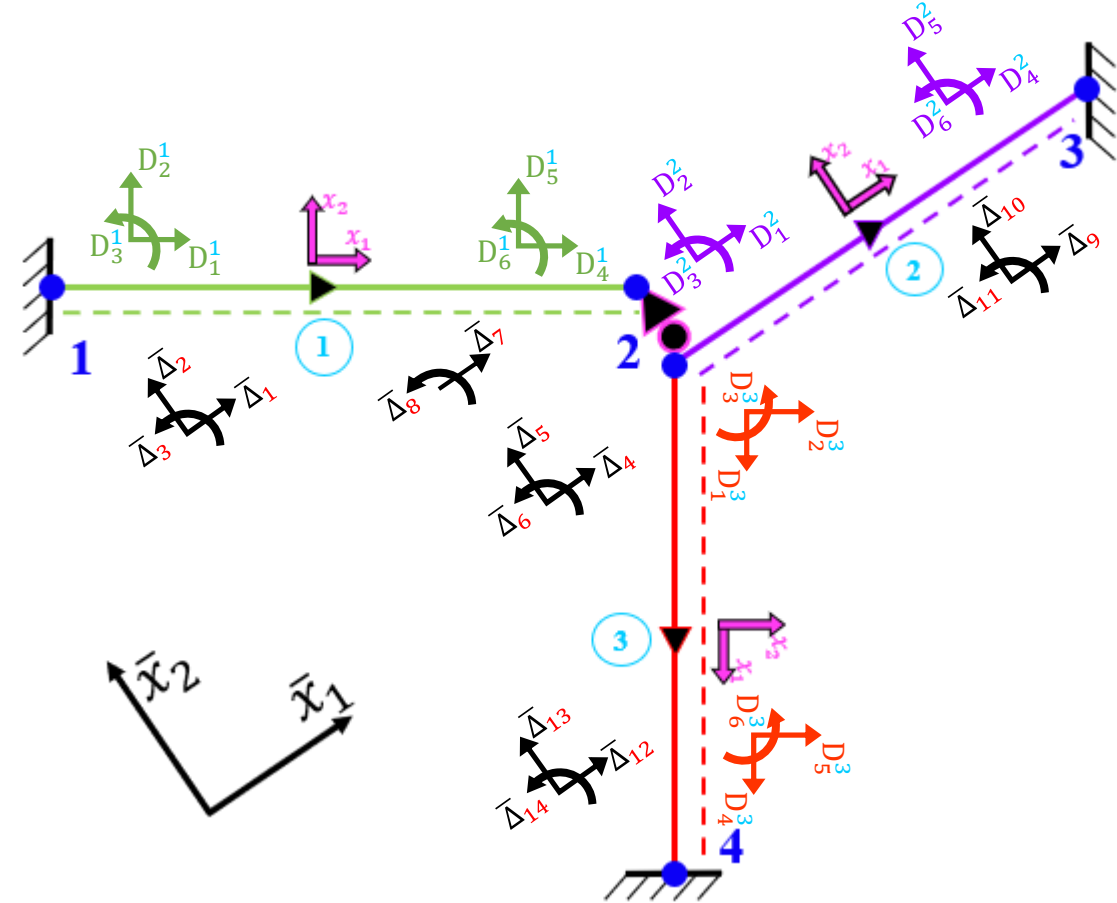
- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$.

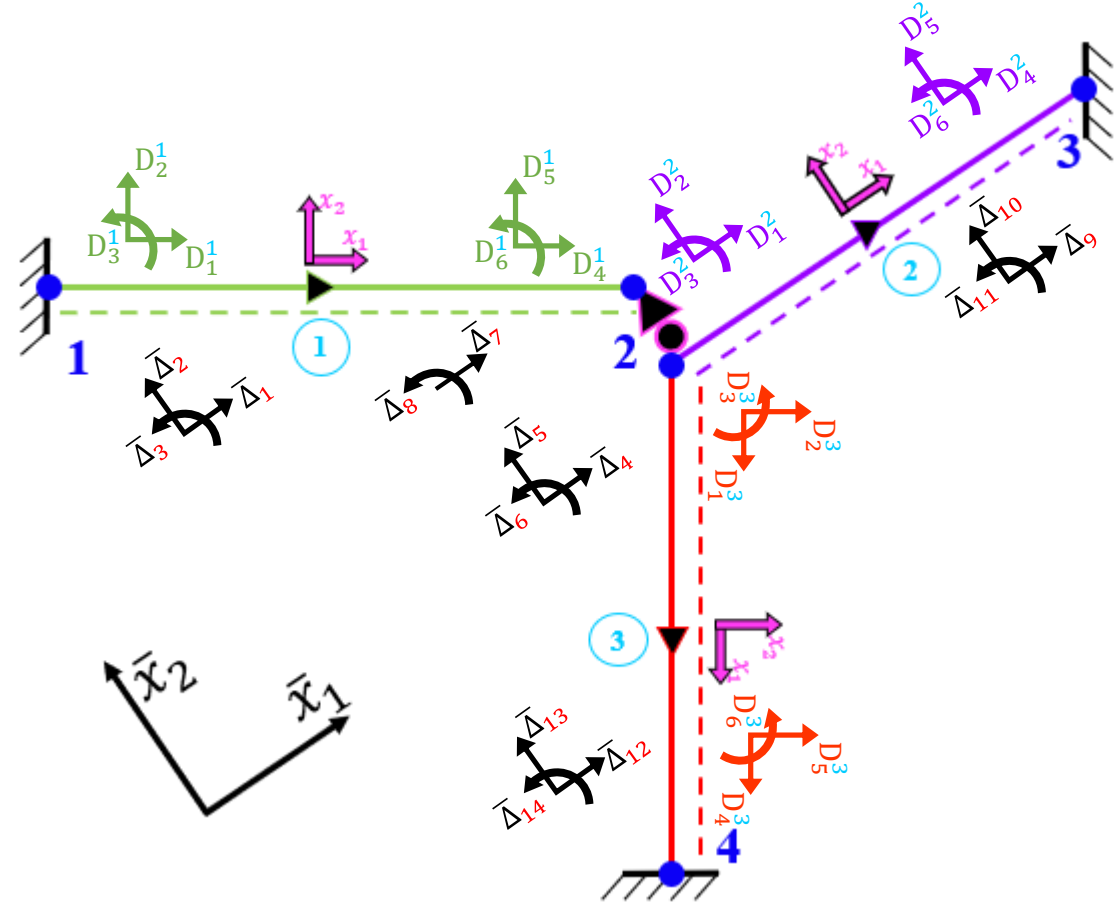


ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$.
- Υπολογίζω τις τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους i με επαλληλία του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα:

$$\{A^i\} = \underbrace{\{A_r\}}_{\text{παγιωμένος}} + \underbrace{[k^i] \{D^i\}}_{\text{ισοδύναμος}}$$



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Τοπικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων μέλους i :

$$\{D^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.0952 \\ -7.7431 \\ 11.4557 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

$$\{D^2\} = \begin{Bmatrix} 1.3067 \\ -5.5374 \\ -4.2337 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

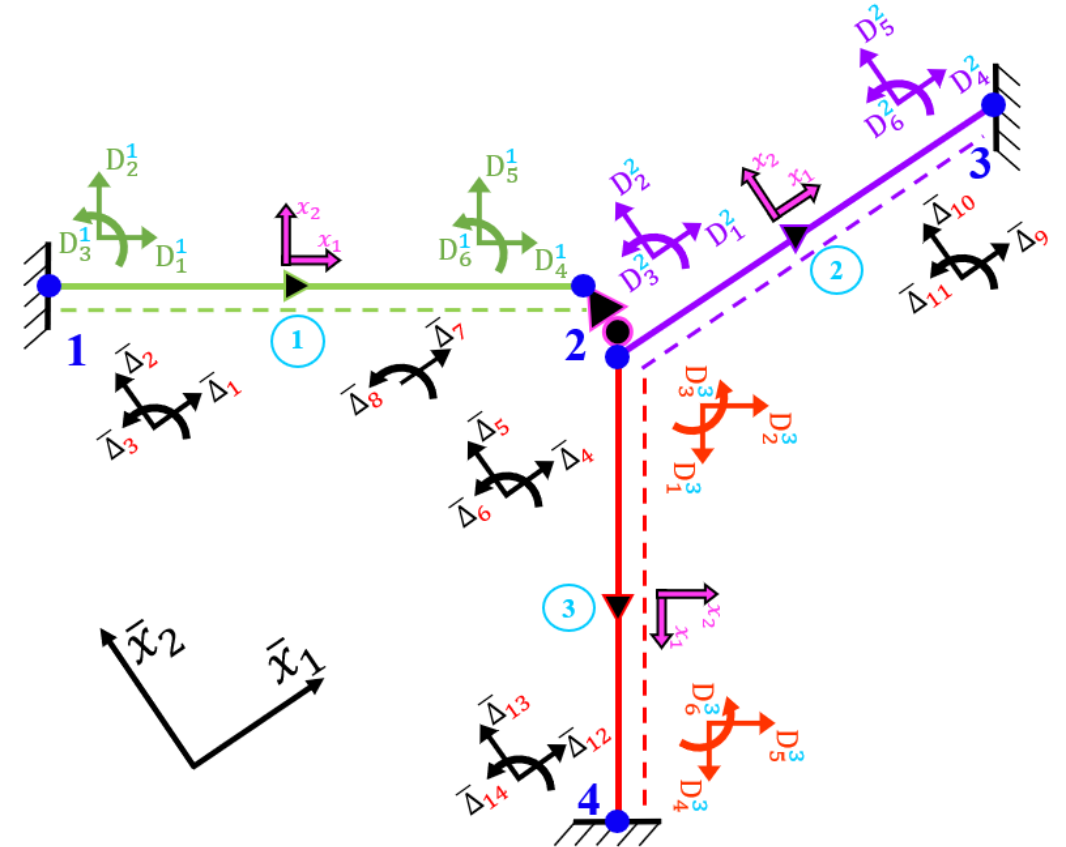
$$\{D^3\} = \begin{Bmatrix} 3.6458 \\ 4.3678 \\ -4.2337 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

Τοπικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων μέλους i :

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 82.79 \\ 189.61 \\ 198.04 \\ -82.79 \\ 110.39 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 170.79 \\ 78.45 \\ 26.52 \\ -26.79 \\ 113.55 \\ -114.27 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 275.63 \\ -6.77 \\ -26.52 \\ -275.63 \\ 6.77 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$$



BHMA 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Τώρα μένει να χαράξω τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών.
Πρώτα θα πρέπει να θυμηθώ τη κλασική σύμβαση της στατικής για τα εντατικά μεγέθη (η οποία διαφέρει από τη σύμβαση που θεωρούμε στη μητρική στατική για τους βαθμούς ελευθερίας).

Σύμβαση Μητρικής Στατικής	Κλασική Σύμβαση Στατικής
Θετικές φορές	Θετικές φορές

Επομένως ένα διάνυσμα τοπικών ακραίων δράσεων μέλους που έχει αυτή τη μορφή:

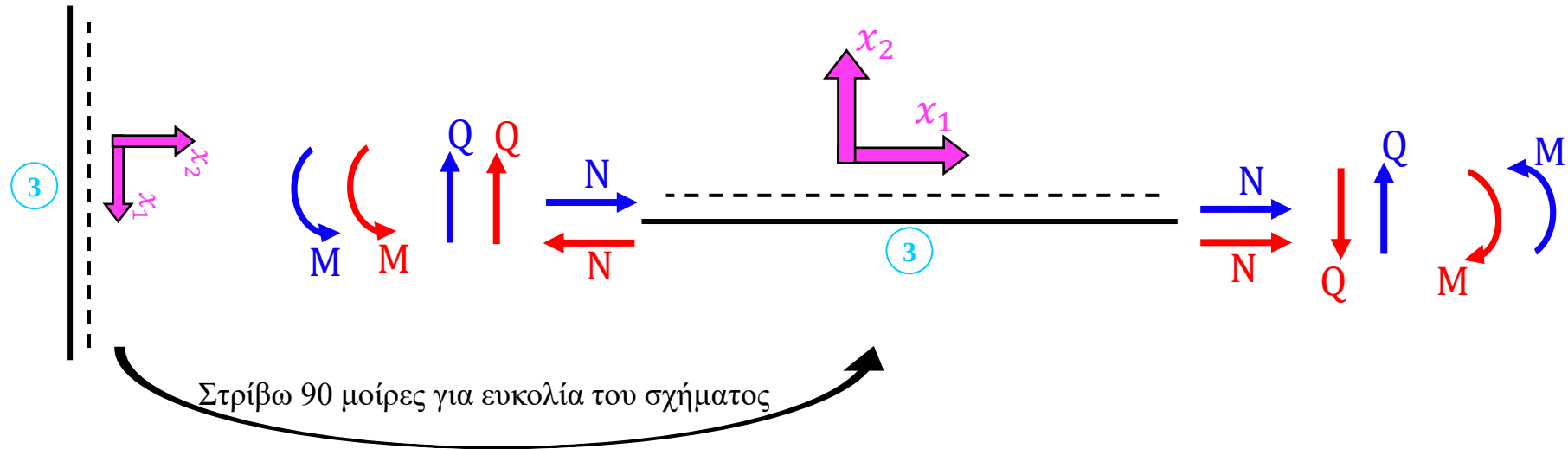
$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix}$$

Με τη κλασική σύμβαση της στατικής αποκτά αυτά τα πρόσημα:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$

BHMA 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών

Μια σημείωση για το μέλος 3. Επειδή οι τοπικοί άξονες του μέλους δεν είναι οι συνήθεις (δηλαδή ο x_2 «κοιτάει» προς την ίνα αναφοράς και όχι αντίθετα), θέλουν λίγη προσοχή τα πρόσημα των εντατικών μεγεθών.



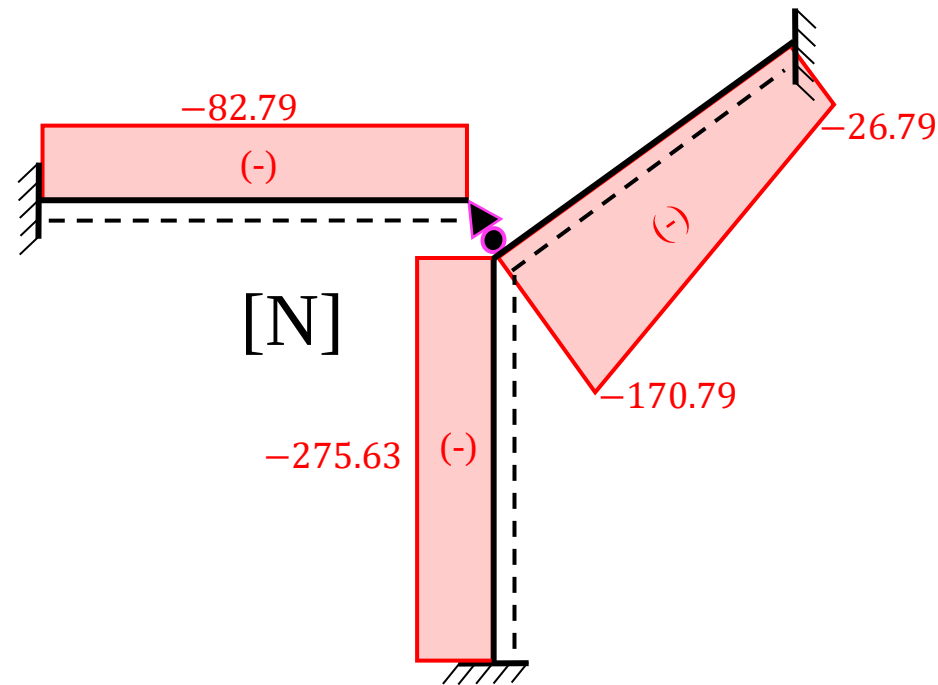
Επομένως, ειδικά για το μέλος 3:

Θετικές φορές Μητρικής Στατικής
(σύμφωνα με τους τοπικούς άξονες)

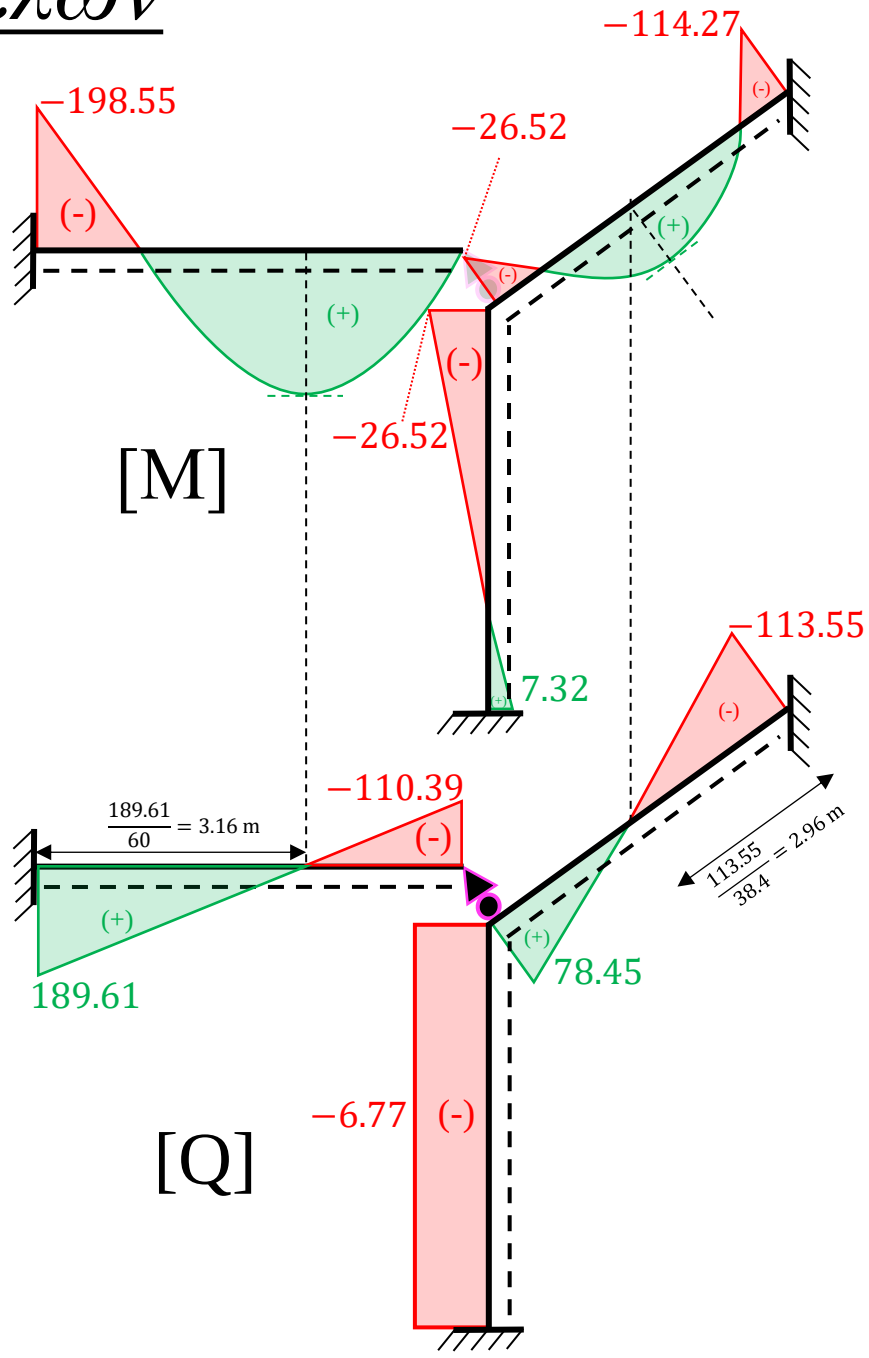
Θετικές φορές Σύμβασης Στατικής
(Ροπές εφελκύουν την ίνα, Αξονικές εφελκύουν το μέλος, ωρολογιακό ζεύγος τεμνουσών)

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} N_j \\ Q_j \\ M_j \\ N_k \\ Q_k \\ M_k \end{Bmatrix} \Rightarrow \{A^3\} = \begin{Bmatrix} -N_j \\ Q_j \\ M_j \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{Bmatrix}$$

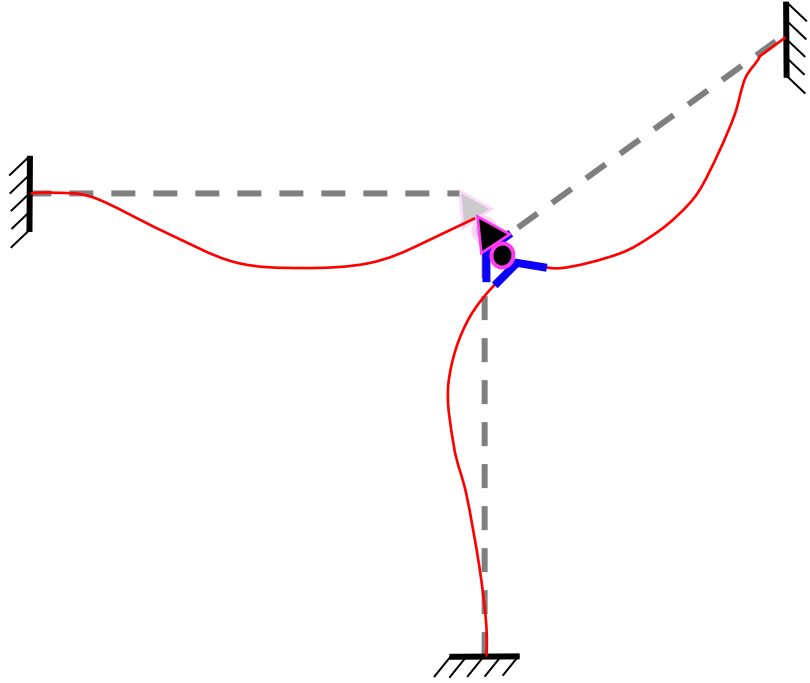
ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών



$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 82.79 \\ 189.61 \\ 198.04 \\ -82.79 \\ 110.39 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 170.79 \\ 78.45 \\ 26.52 \\ -26.79 \\ 113.55 \\ -114.27 \end{Bmatrix}$	$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 275.63 \\ -6.77 \\ -26.52 \\ -275.63 \\ 6.77 \\ -7.32 \end{Bmatrix}$
$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$	$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} -N_j \\ Q_j \\ M_j \\ N_k \\ -Q_k \\ -M_k \end{Bmatrix}$	

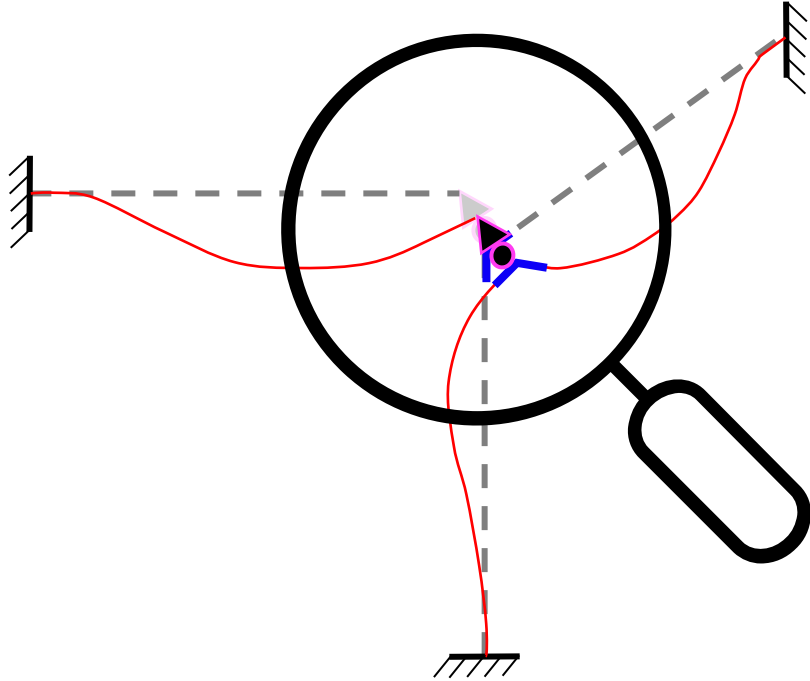


Παραμορφωμένη Εικόνα Φορέα



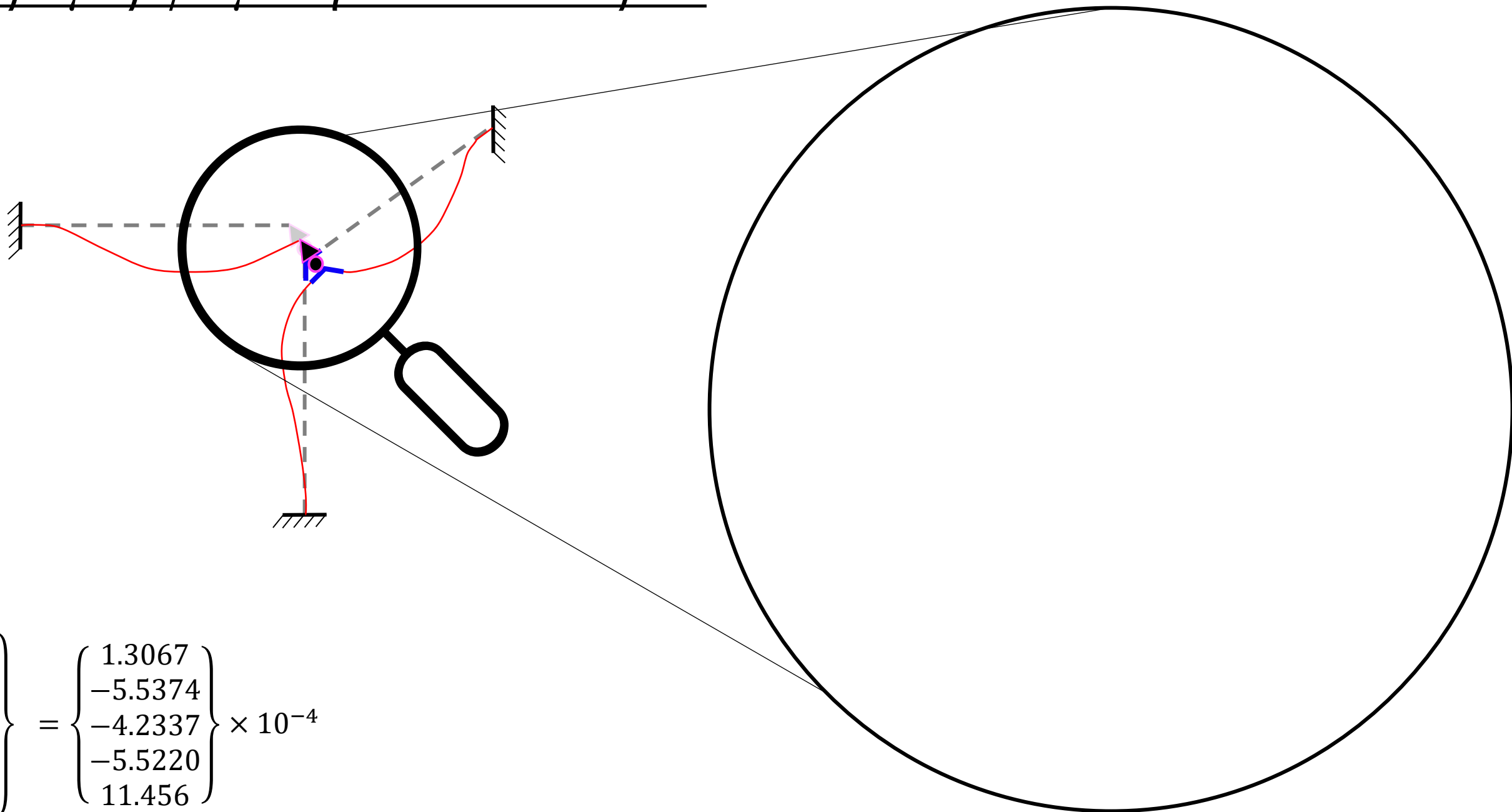
$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3067 \\ -5.5374 \\ -4.2337 \\ -5.5220 \\ 11.456 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

Παραμορφωμένη Εικόνα Φορέα

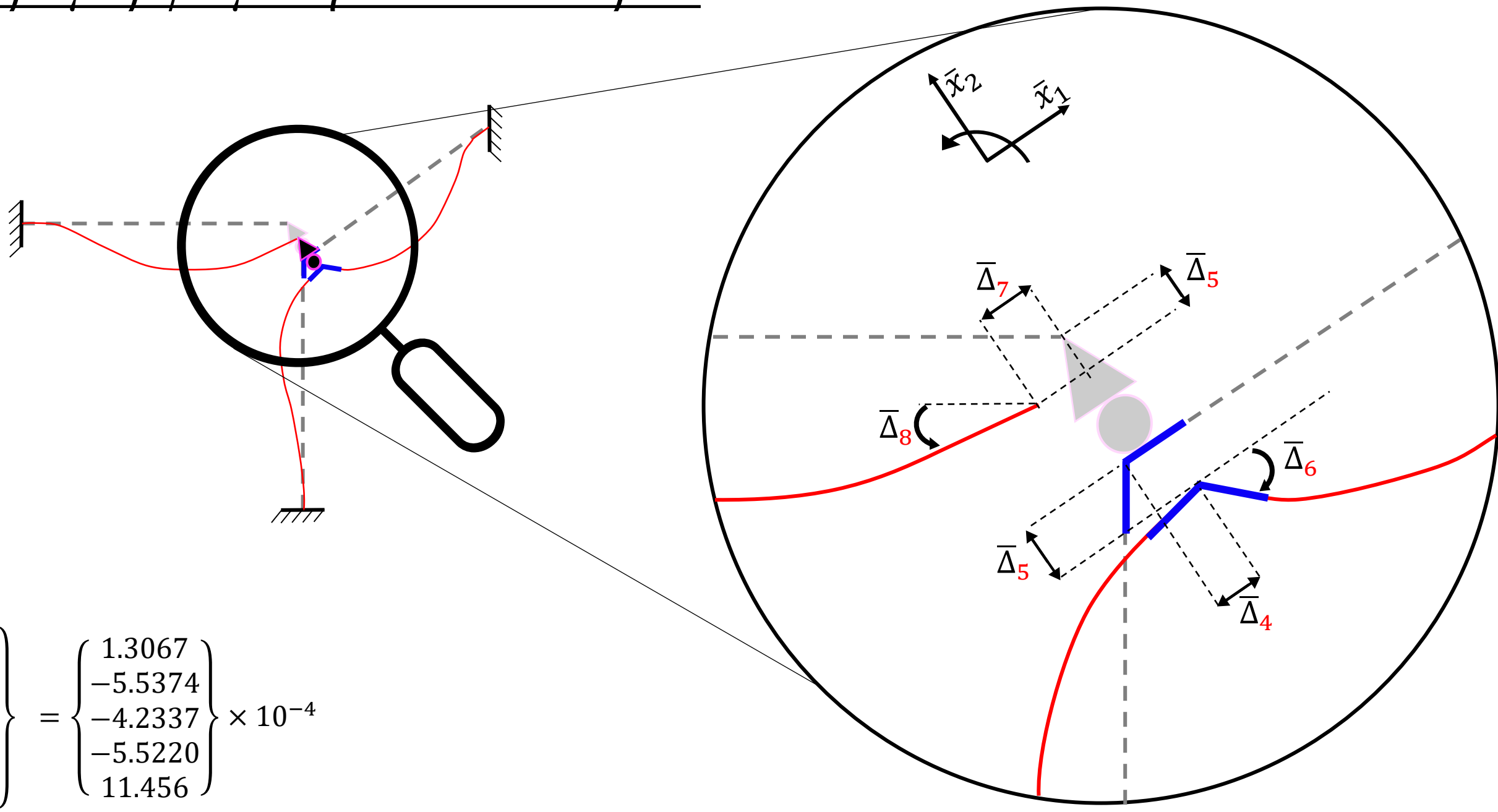


$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3067 \\ -5.5374 \\ -4.2337 \\ -5.5220 \\ 11.456 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

Παραμορφωμένη Εικόνα Φορέα



Παραμορφωμένη Εικόνα Φορέα

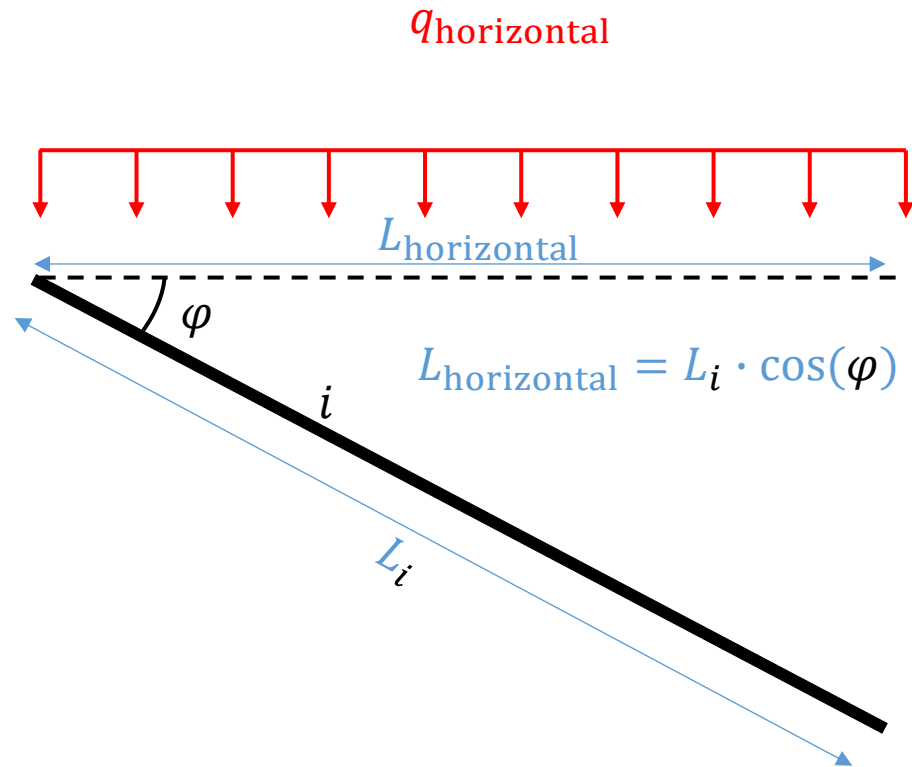


Παράρτημα

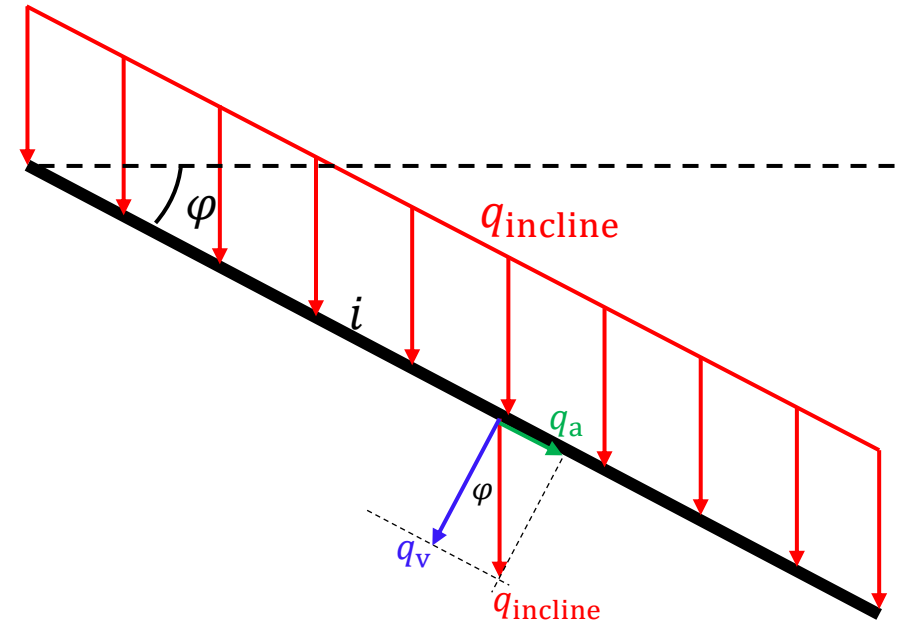
Για λόγους πληρότητας, στο παράρτημα αυτό υπενθυμίζονται:

- A. Η ανάλυση ενός κατανεμημένου φορτίου, που ασκείται σε κεκλιμένο μέλος, σε συνιστώσες.
- B. Οι ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών, για τις περιπτώσεις ενδιάμεσων δράσεων που εξετάζονται στην άσκηση.

A. Ανάλυση κατανεμημένου φορτίου σε συνιστώσες



The load must be distributed along the actual length of the element

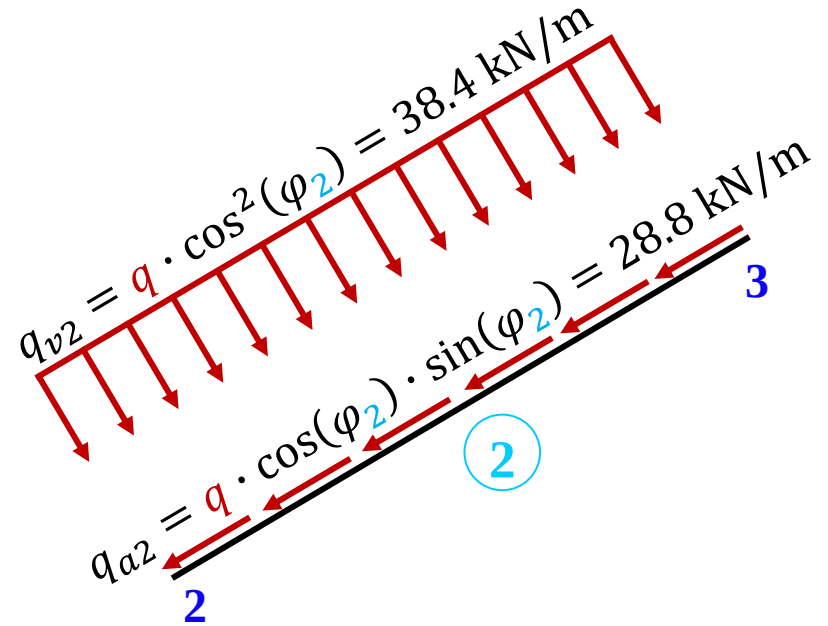
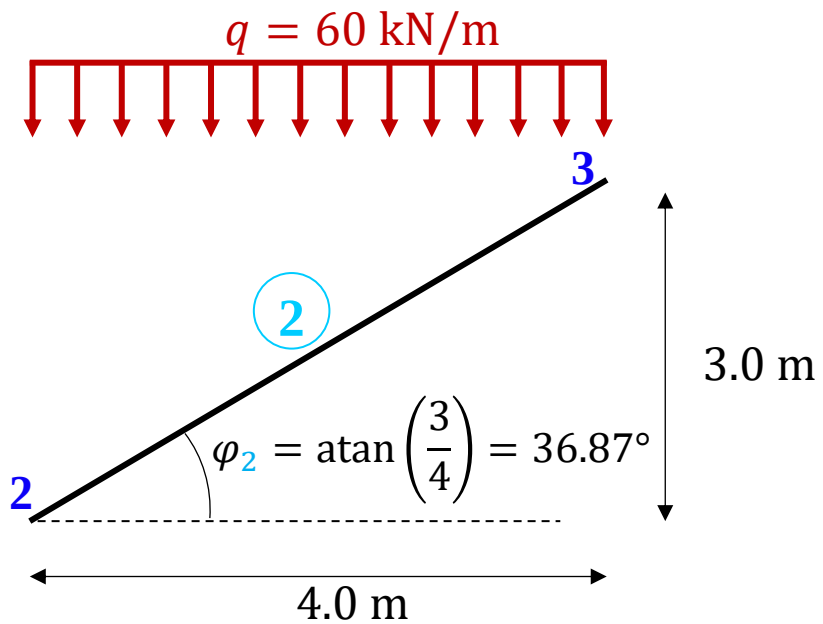


$$\begin{aligned} q_{\text{horizontal}} \cdot L_{\text{horizontal}} &= q_{\text{incline}} \cdot L_i \\ \Rightarrow q_{\text{horizontal}} \cdot \cancel{L_i} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}} \cdot \cancel{L_i} \\ \Rightarrow q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}} \end{aligned}$$

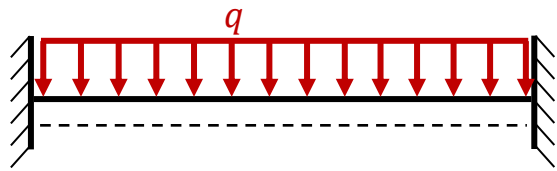
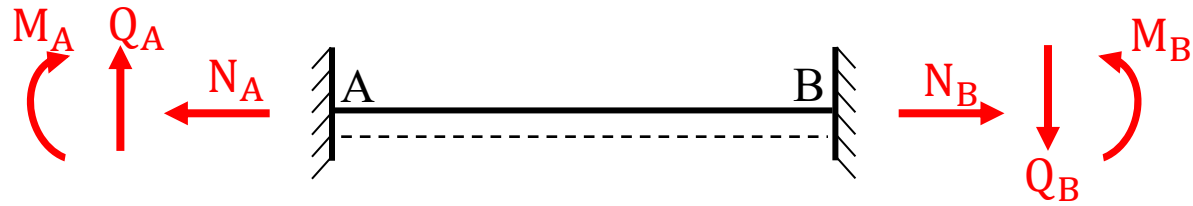
$$\left\{ \begin{aligned} q_v &= q_{\text{incline}} \cdot \cos(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \cos(\varphi) \\ q_a &= q_{\text{incline}} \cdot \sin(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

A. Ανάλυση κατανεμημένου φορτίου σε συνιστώσες

Συγκεκριμένα για το παράδειγμα, για το μέλος 2 έχουμε:



B. Ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών



$$M_A = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_A = \frac{qL}{2}$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_B = -\frac{qL}{2}$$