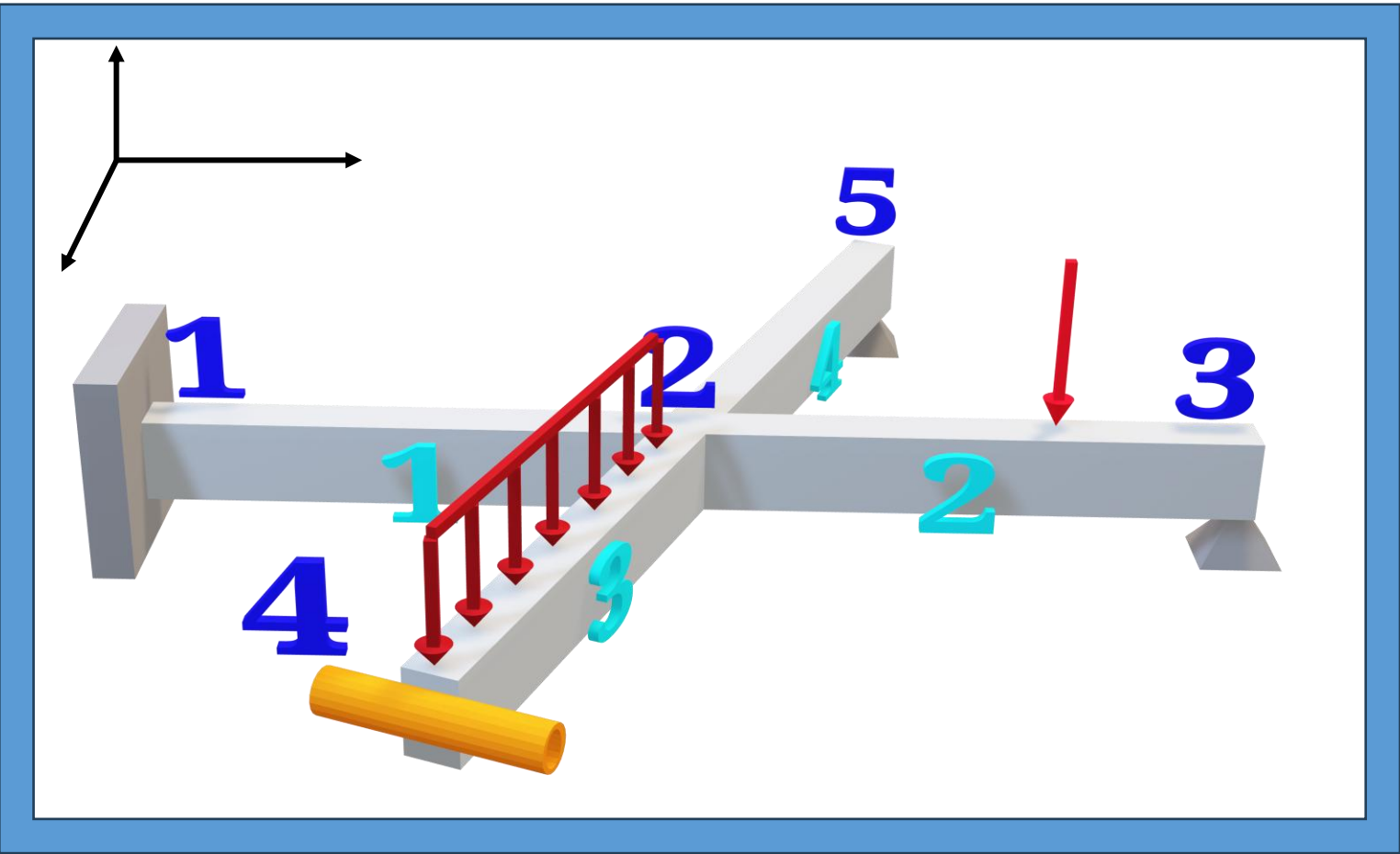
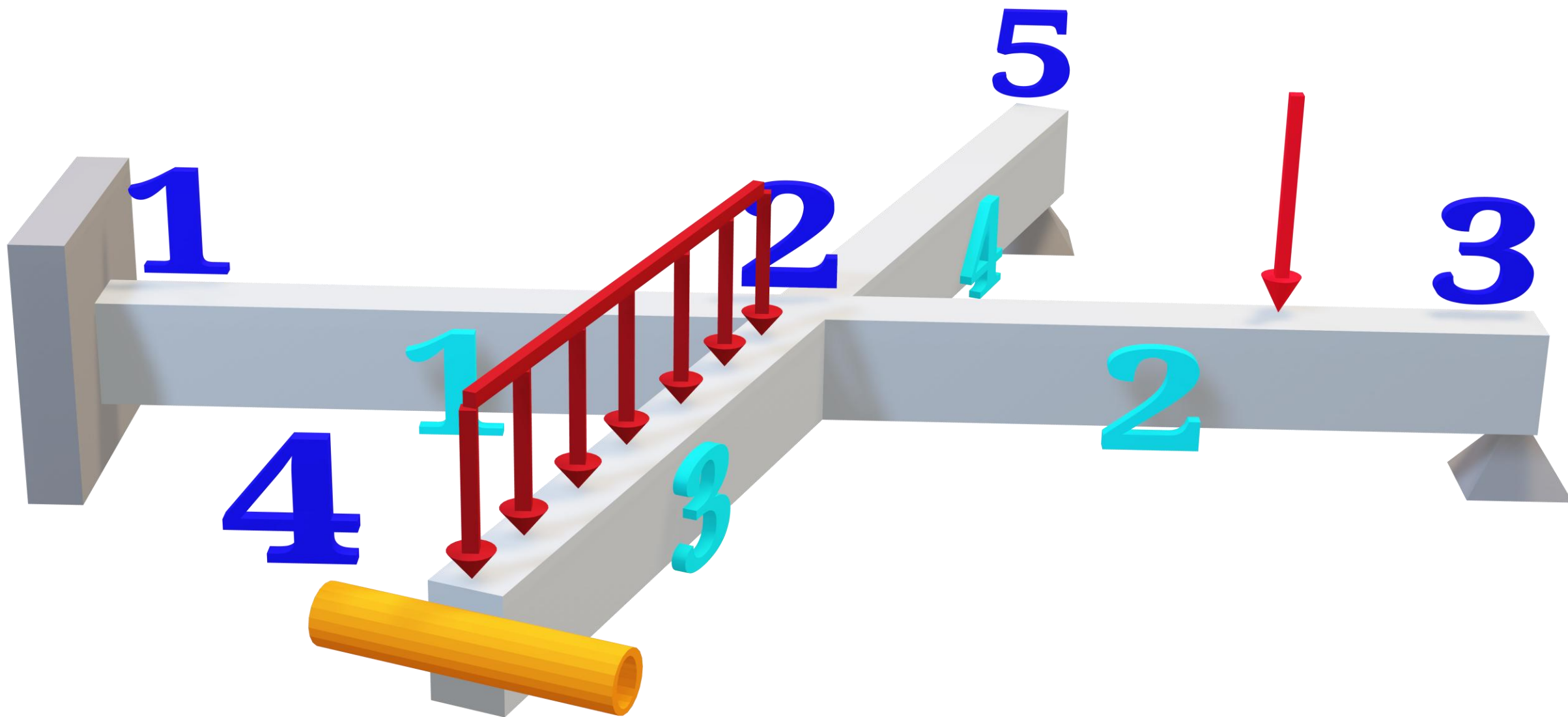


Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης Εσχάρας

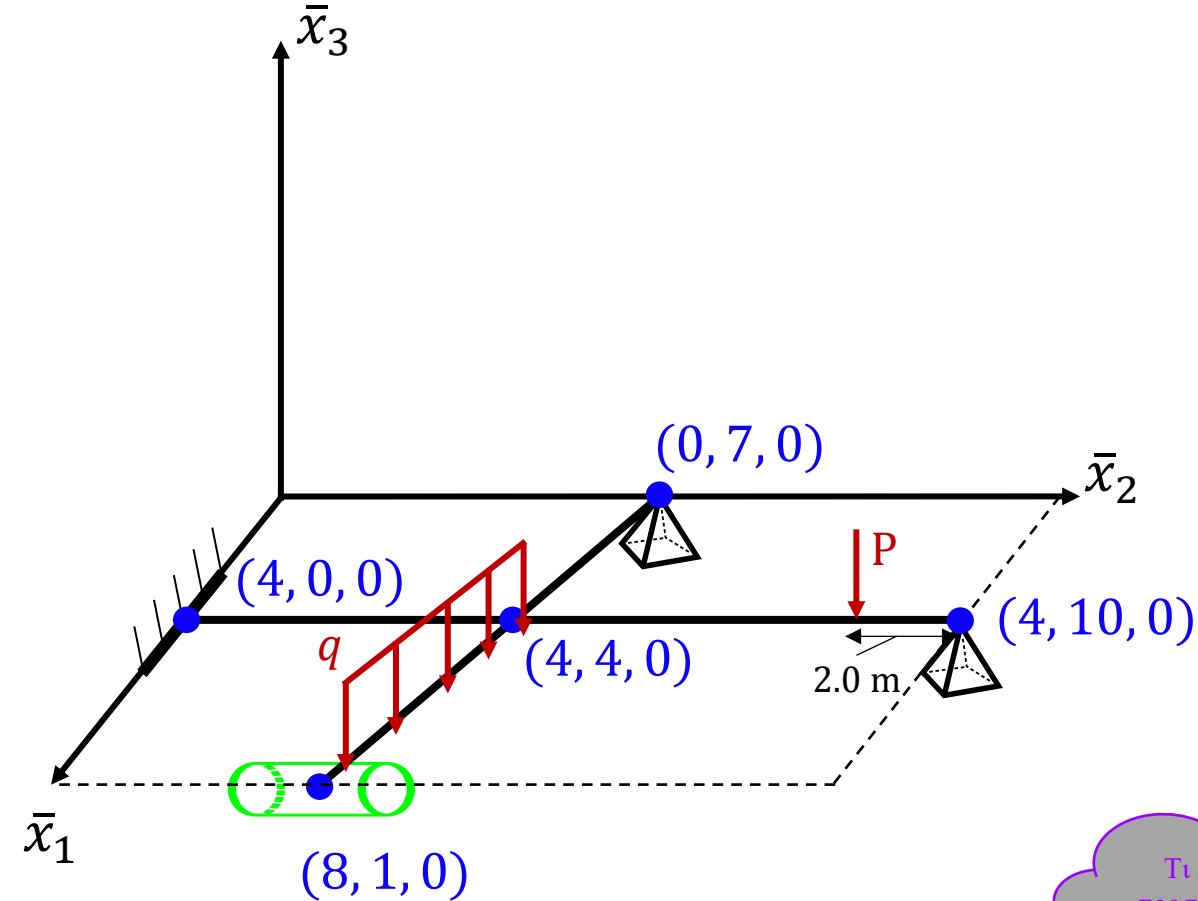
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ & ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ	
ΑΣΚΗΣΗ	#4
ΗΜ/ΝΙΑ	05/05/2025
ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ	



Εξεταζόμενη Εσχάρα



Δεδομένα:

- $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0.30 \times 0.60 = 0.18 \text{ m}^2$
- $I_2 = 0.3 \times \frac{0.6^3}{12} = 0.0054 \text{ m}^4$
- $I_1 = \eta \times 0.3^3 \times 0.6 = 0.0054 \text{ m}^4$
- $\eta = 0.229$, για ορθογώνια διατομή με $h/b = 2$
- $\nu = 0.15$
- $q = 40 \text{ kN/m}$
- $P = 100 \text{ kN}$

Τι είδους φορείς
προσομοιώνονται ως
εσχάρες άραγε;

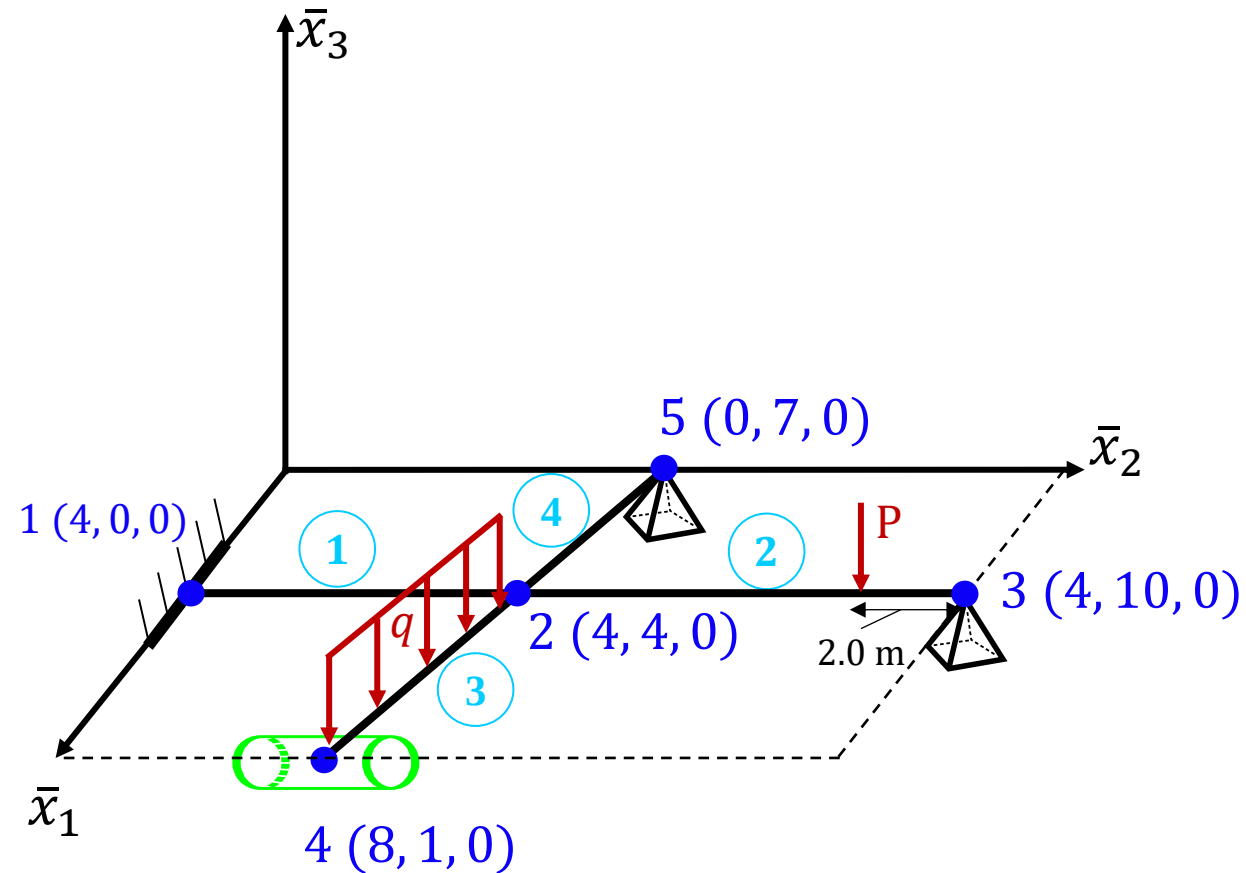


Παρατηρώ:

- Ενδιάμεσα φορτία
- Μια «περίεργη» στήριξη

Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

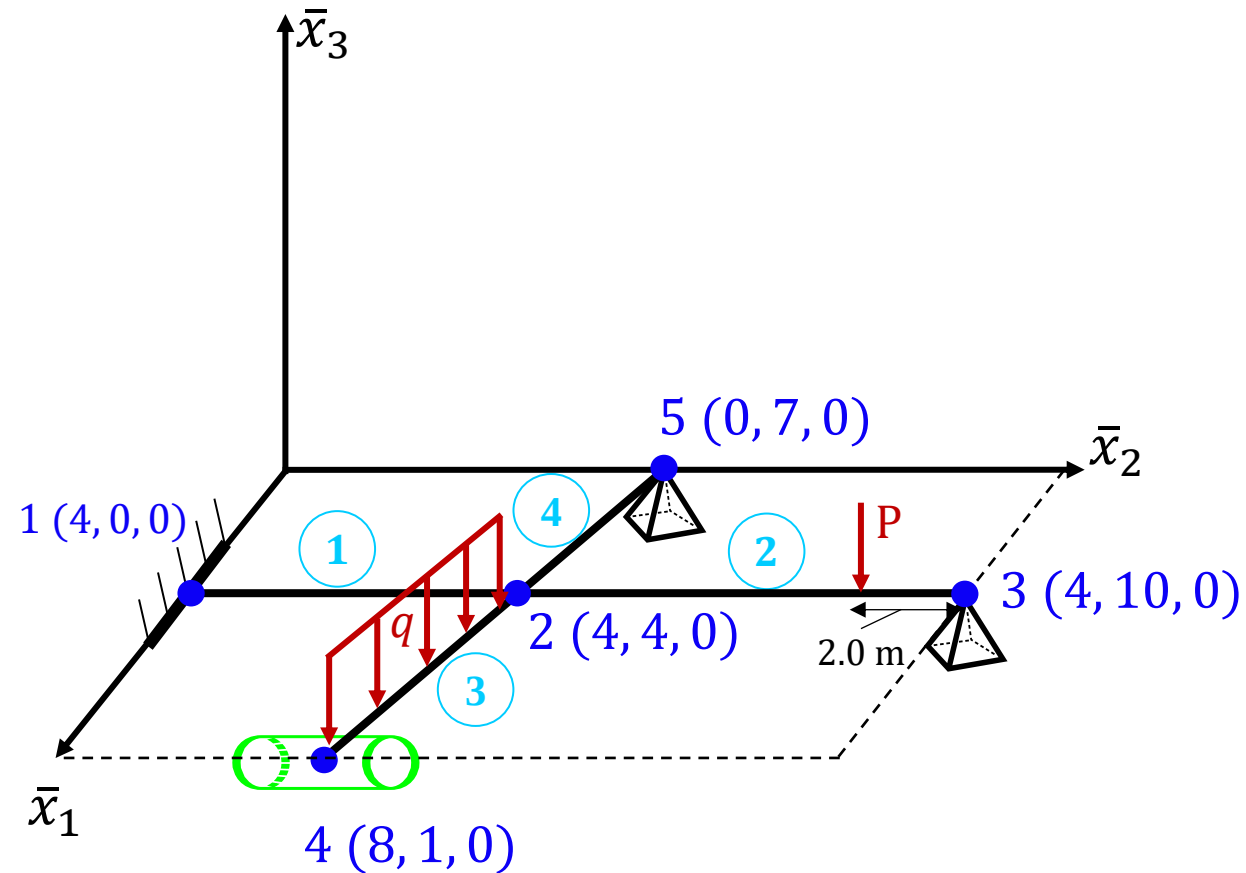
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



Παρατηρήσεις:

- Όλος ο φορέας κείται σε **ένα επίπεδο**.
- Η φόρτιση είναι αποκλειστικά **κάθετη** στο επίπεδο αυτό
- Ο κόμβος 1 στηρίζεται με πάκτωσης.
- Οι κόμβοι 3, 5 στηρίζονται με σφαιρική (χωρική) άρθρωση.
- Ο κόμβος 4 στηρίζεται με έναν «κύλινδρο». Πρακτικά, εκεί επιτρέπεται μόνο η στροφή περί τον διαμήκη άξονα του κυλίνδρου.

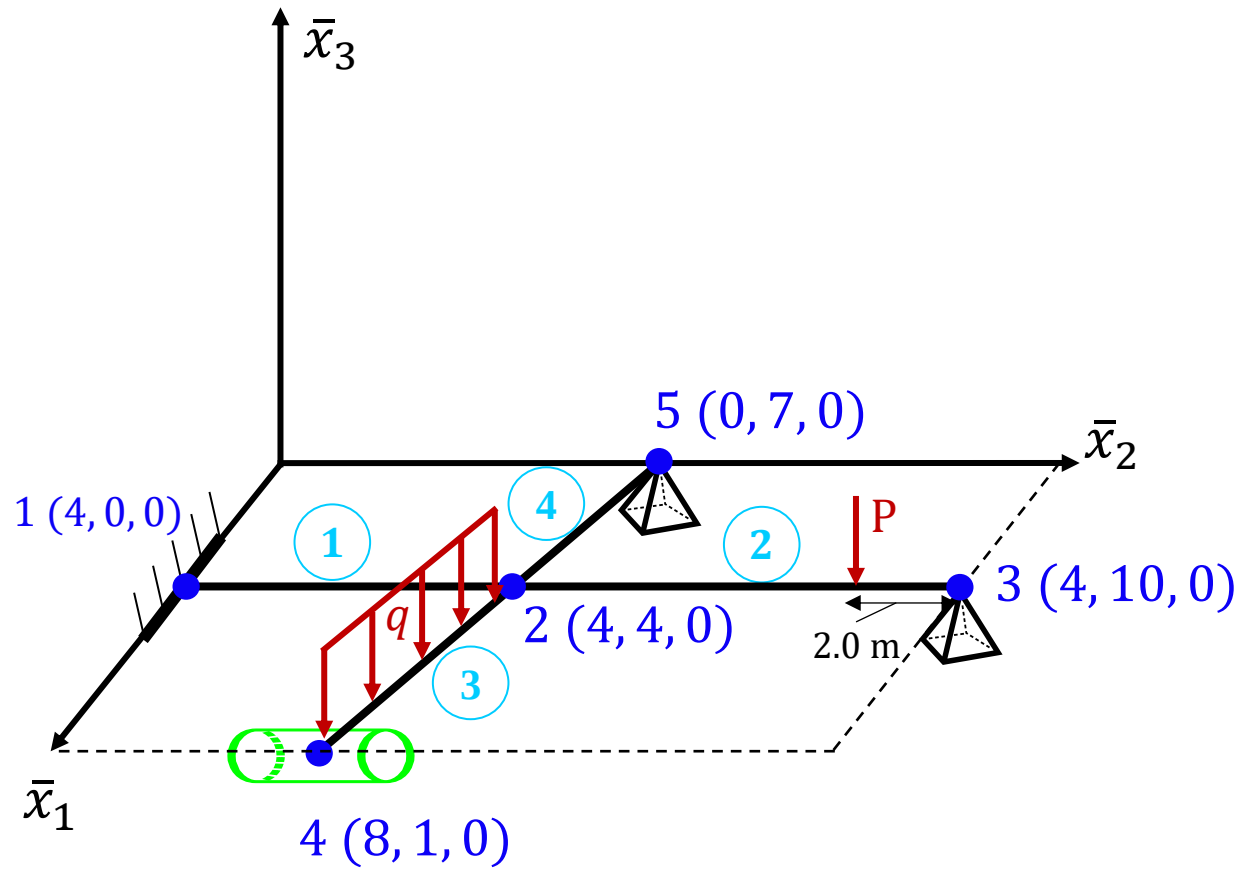
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



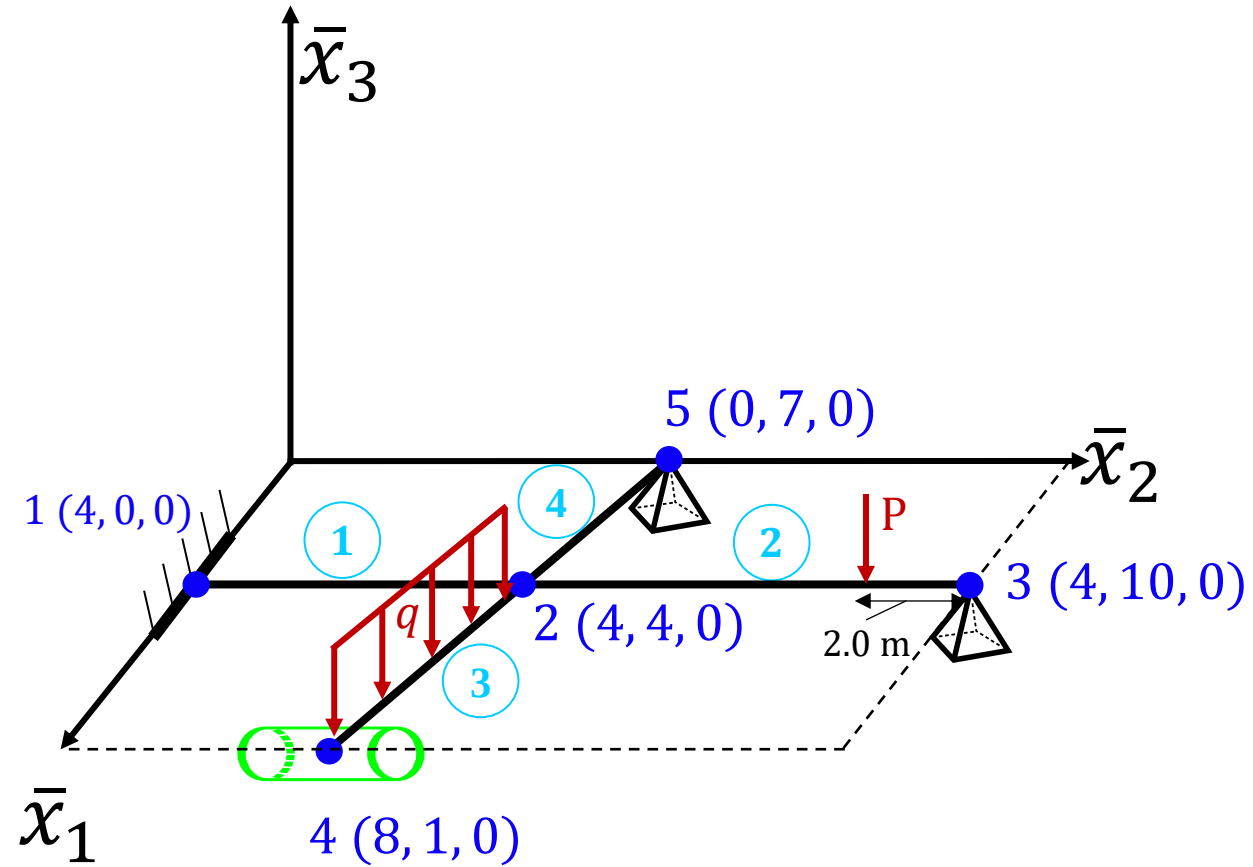
Παρατηρήσεις:

- Όλος ο φορέας κείται σε **ένα επίπεδο**.
- Η φόρτιση είναι αποκλειστικά **κάθετη** στο επίπεδο αυτό
- Ο κόμβος 1 στηρίζεται με **πάκτωσης**.
- Οι κόμβοι 3, 5 στηρίζονται με **σφαιρική (χωρική) άρθρωση**.
- Ο κόμβος 4 στηρίζεται με έναν «κύλινδρο». Πρακτικά, εκεί επιτρέπεται μόνο η στροφή περί τον διαμήκη άξονα του κυλίνδρου.

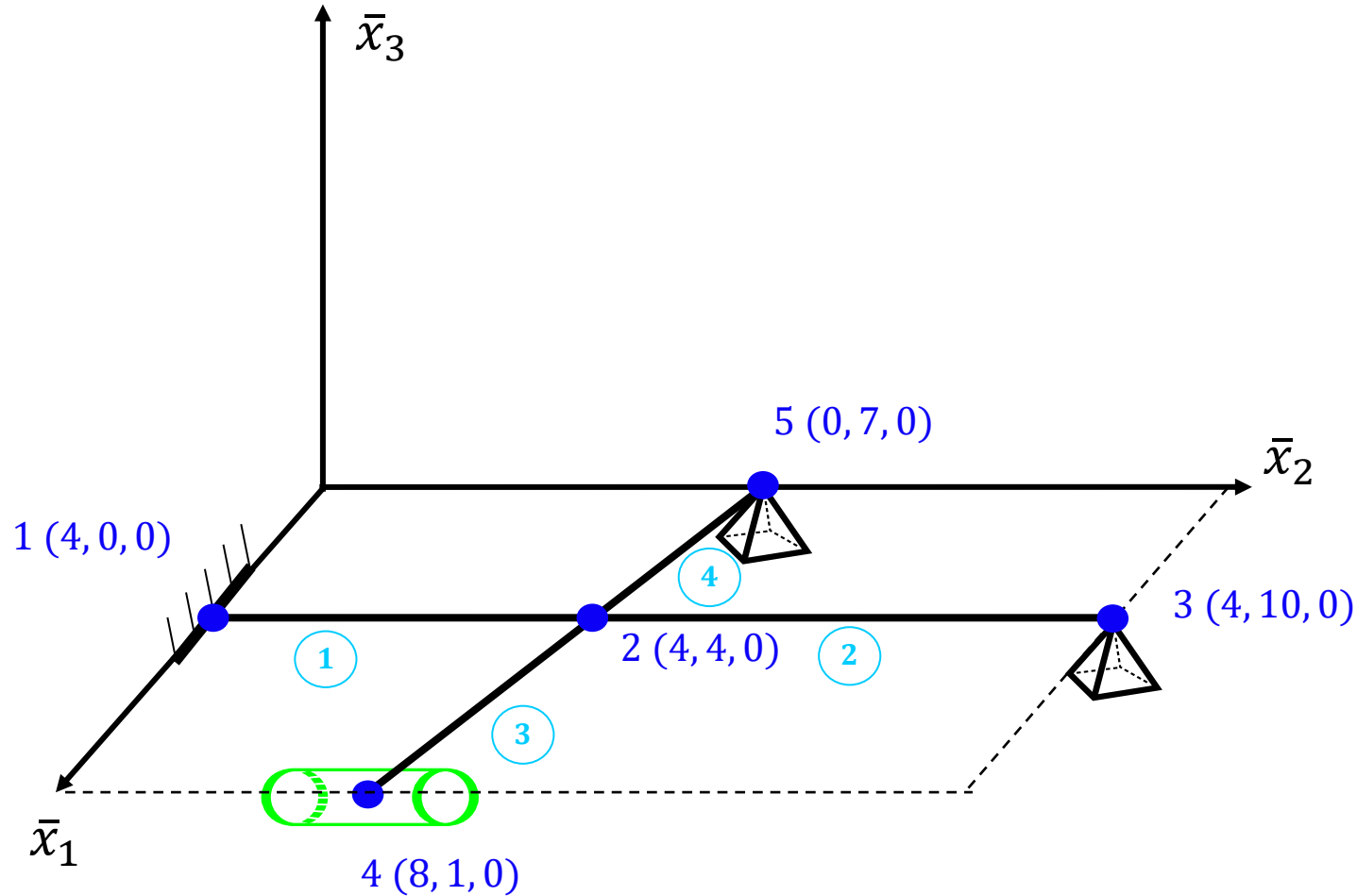
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$



ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\bar{x}_1\bar{x}_2$



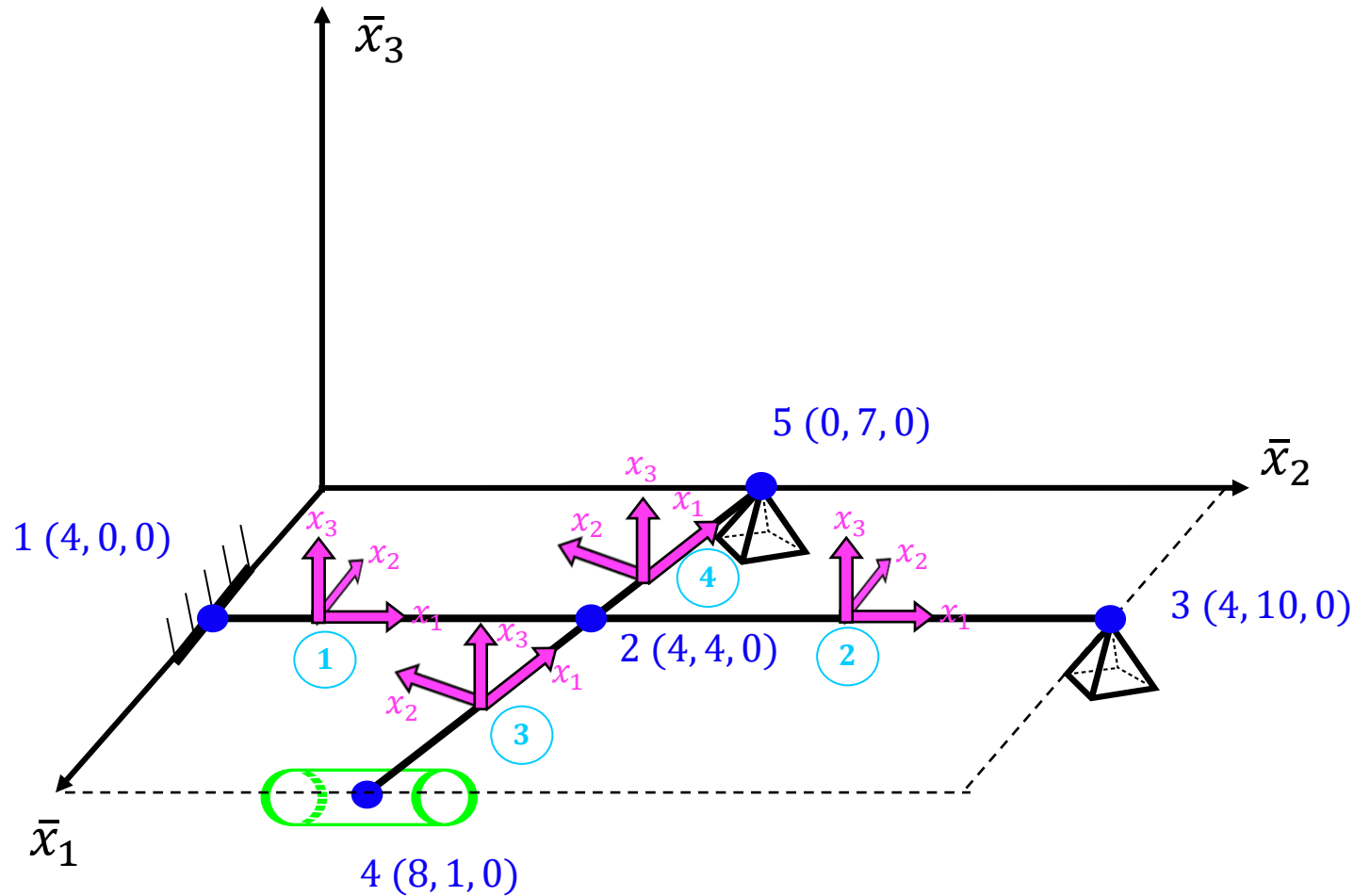
ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό).
- Επιλέγω ο τοπικός x_3 να ταυτίζεται με τον καθολικό $\bar{x}_3$.
- Ως προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

Τα φορτία παραλείπονται χάριν απλότητας του σχήματος.

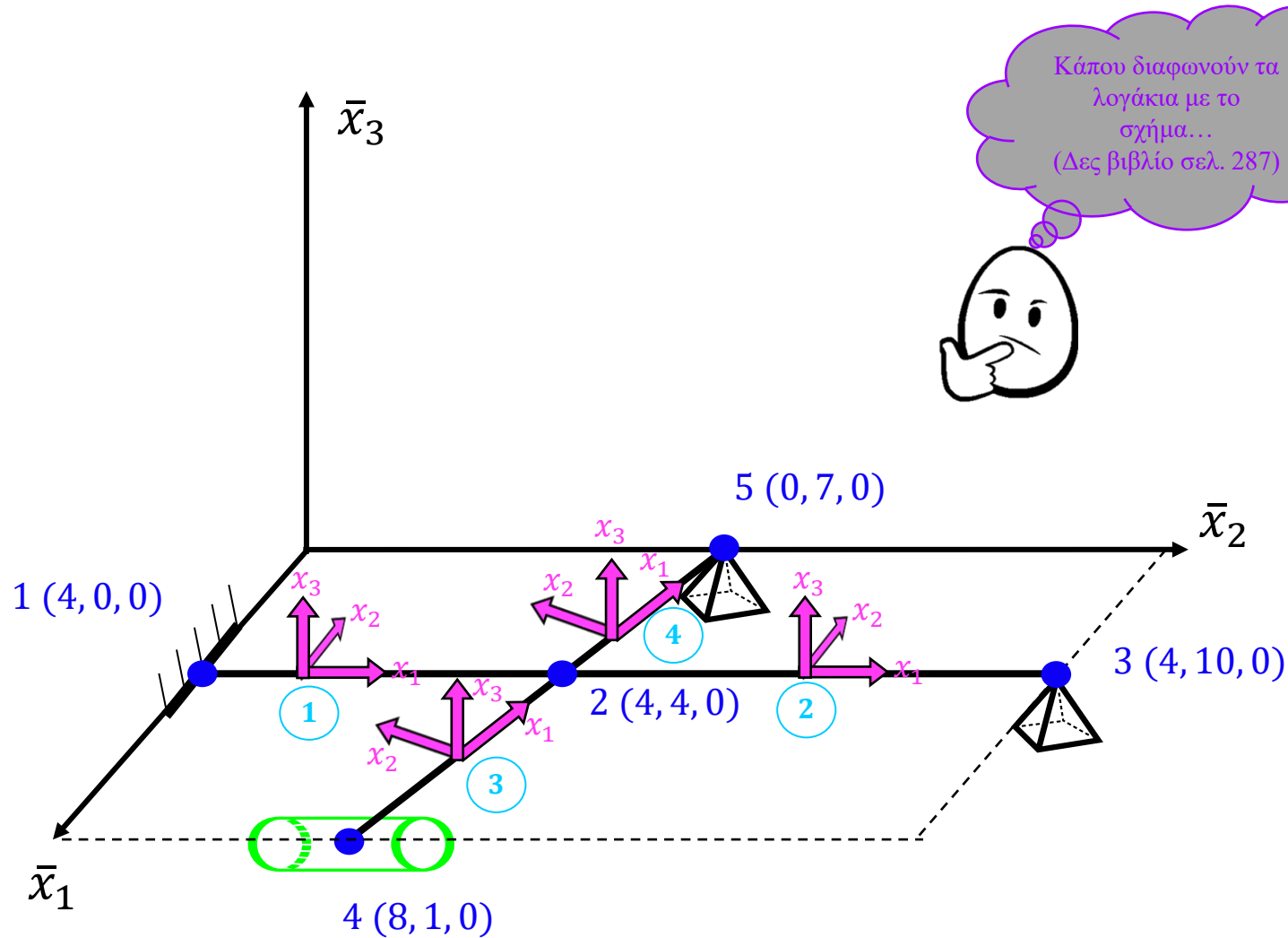
ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό).
- Επιλέγω ο τοπικός x_3 να ταυτίζεται με τον καθολικό $\bar{x}_3$.
- Ως προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

Τα φορτία παραλείπονται χάριν απλότητας του σχήματος.

ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2

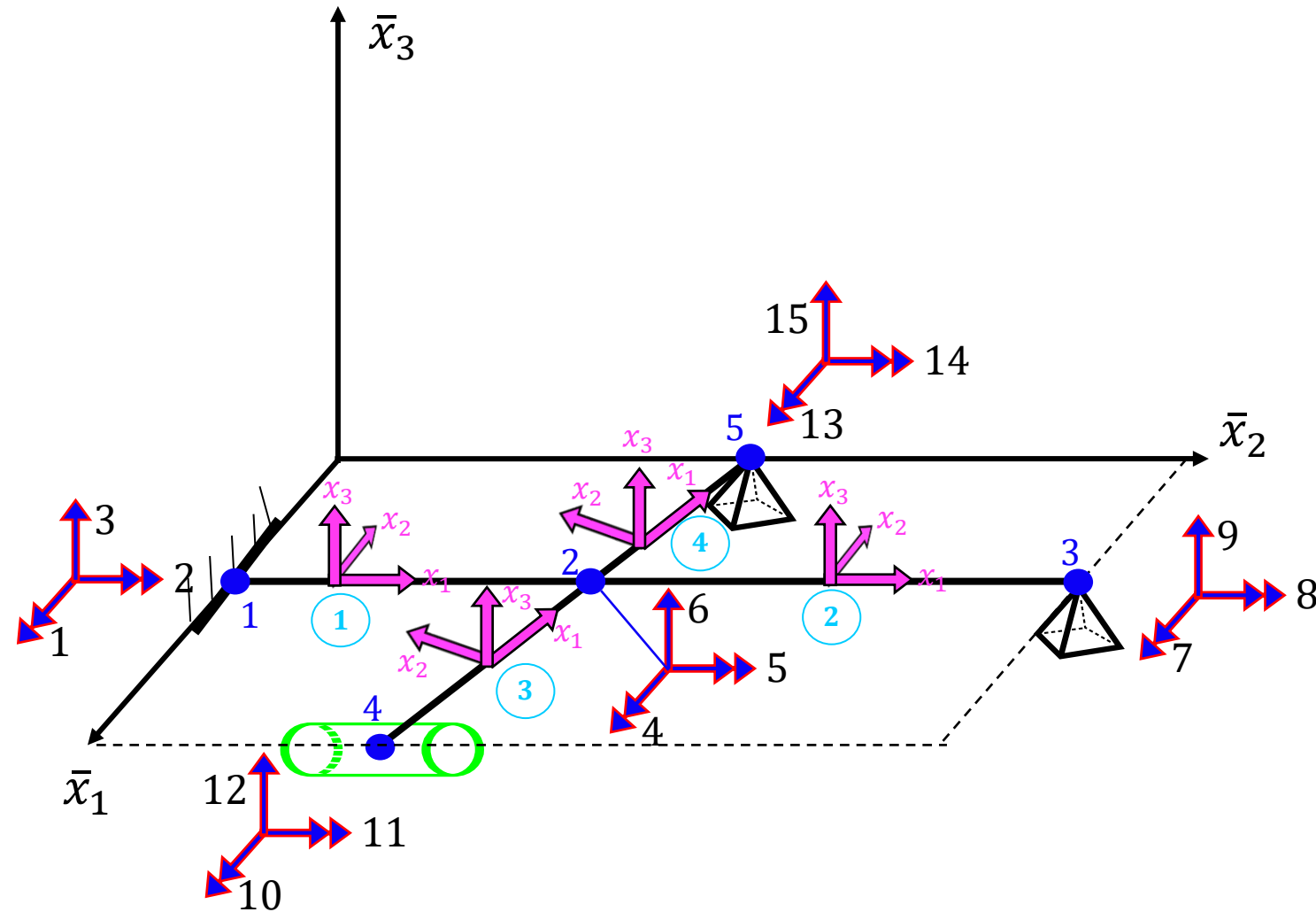


- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό).
- Επιλέγω ο τοπικός x_3 να ταυτίζεται με τον καθολικό $\bar{x}_3$.
- Ως προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

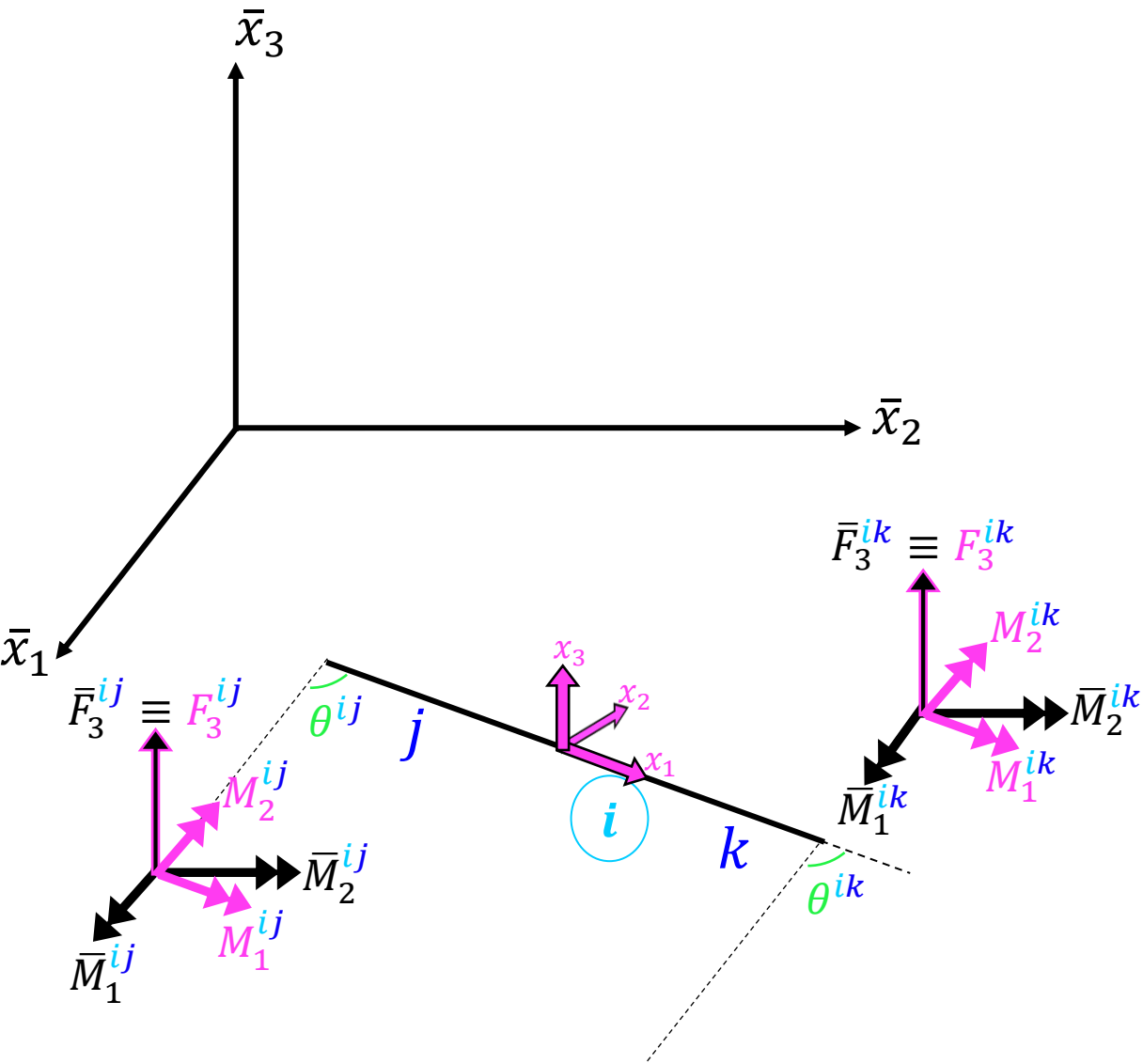
Τα φορτία παραλείπονται χάριν απλότητας του σχήματος.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων

- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- Κάθε κόμβος της εσχάρας στο χώρο διαθέτει 3 β.ε., μία μετατόπιση κάθετα στο επίπεδο της εσχάρας και δύο στροφές περί τους άξονες που κείνται στο επίπεδο της. Έτσι, οι β.ε. του φορέα θα είναι $3N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων.
- Η αρίθμηση των β.ε. γίνεται κατά αύξουσα σειρά κόμβων και καθολικών αξόνων.



BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

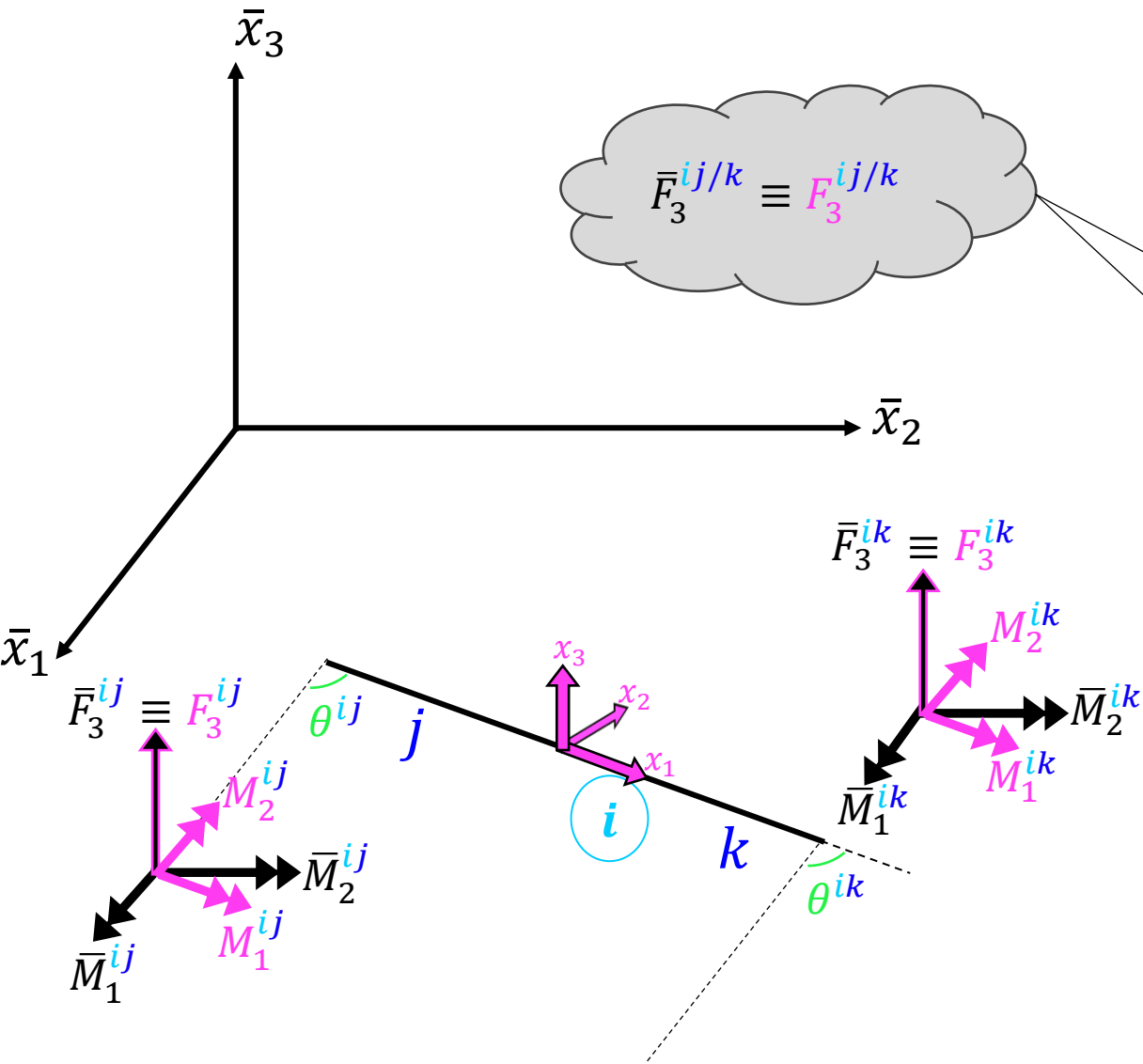


$$[\Lambda_G^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_G^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\Lambda_G^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :
 $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_G^i]^{-1} = [\Lambda_G^i]^T$
- Ο καθολικός $\bar{x}_1$ στρέφεται περί τον $\bar{x}_3$ για να «βρει» τον τοπικό x_1 . (κανόνας δεξιού χεριού)

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

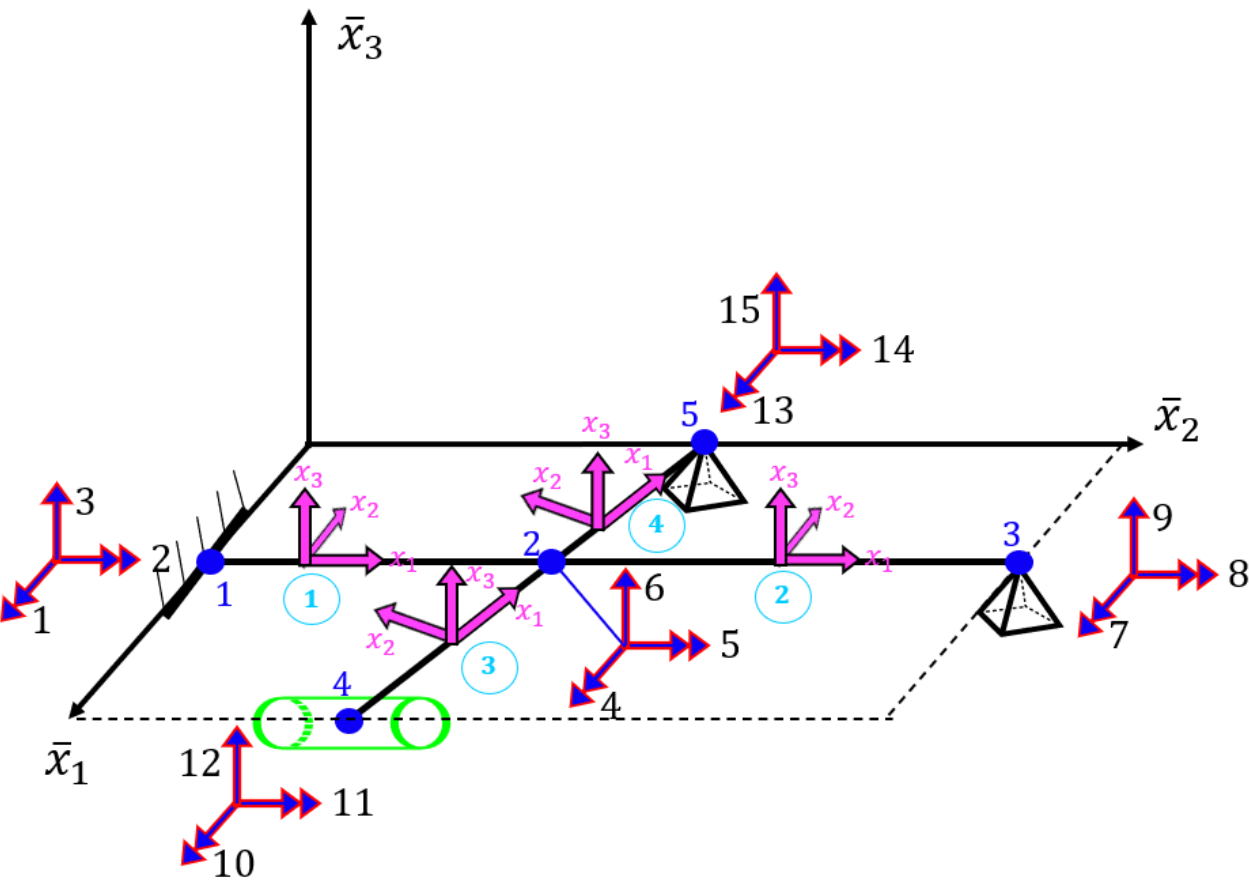


$$[\Lambda_G^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_G^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\Lambda_G^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta^{ij} & \sin\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\theta^{ij} & \cos\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta^{ik} & \sin\theta^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta^{ik} & \cos\theta^{ik} \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :
 $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_G^i]^{-1} = [\Lambda_G^i]^T$
- Ο καθολικός $\bar{x}_1$ στρέφεται περί τον $\bar{x}_3$ για να «βρει» τον τοπικό x_1 . (κανόνας δεξιού χεριού)

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(2/2)

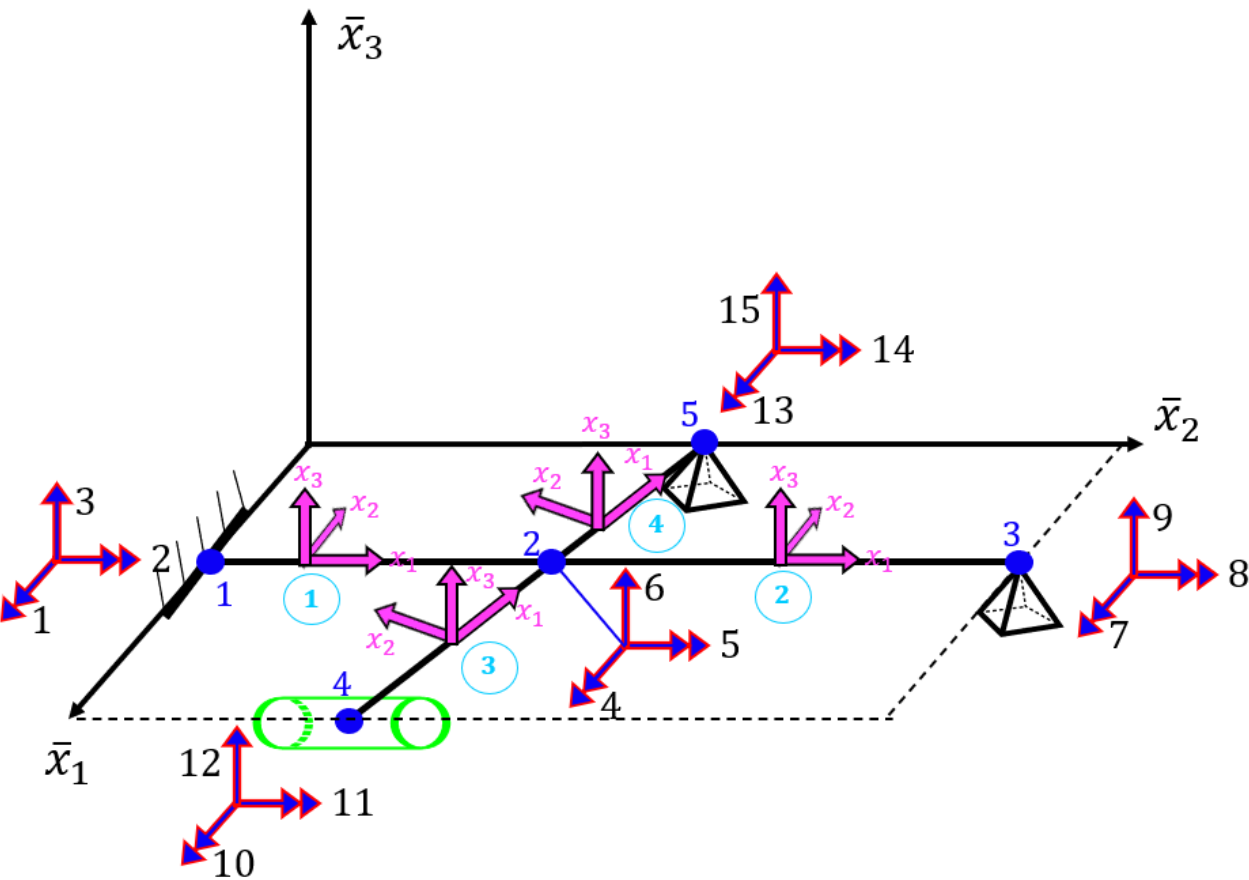


$$[\Lambda^1] = [\Lambda^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^3] = [\Lambda^4] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8000 & 0.6000 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6000 & -0.8000 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -0.8000 & 0.6000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -0.6000 & -0.8000 \end{bmatrix}$$

Μέλος <i>i</i>	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1,2	90	1	0
3,4			

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(2/2)



$$[\Lambda^1] = [\Lambda^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^3] = [\Lambda^4] = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8000 & 0.6000 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6000 & -0.8000 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -0.8000 & 0.6000 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & -0.6000 & -0.8000 \end{bmatrix}$$

Μέλος <i>i</i>	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1,2	90	1	0
3,4	143.13	-0.8	0.6

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΣΧΑΡΑΣ

$$[k^i] = \left[\begin{array}{c|c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array} \right] =$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$
u_2	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0
u_3	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$
u_5	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0
u_6	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$

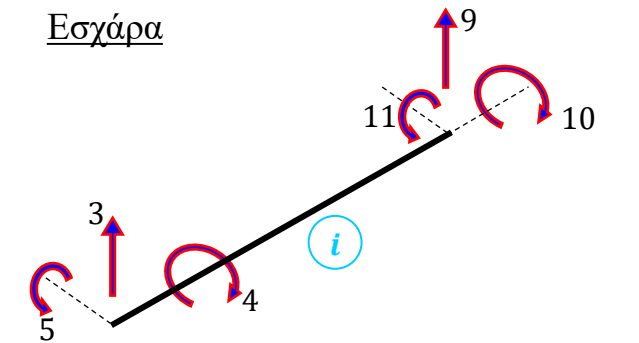
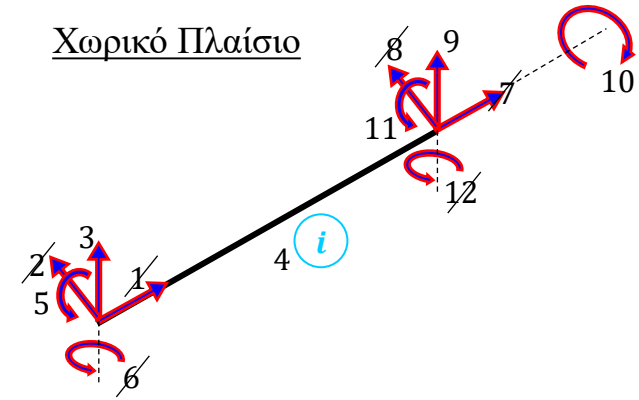
το λέμε και «δυστρεψία»

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.

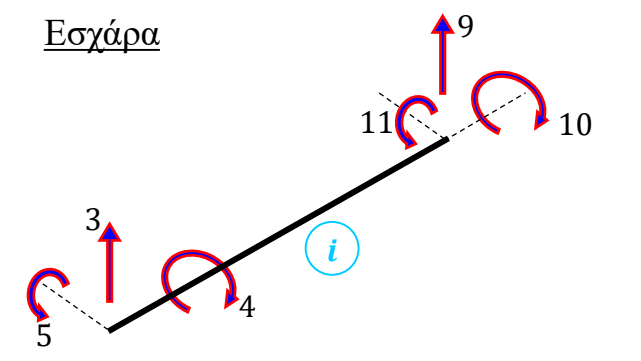
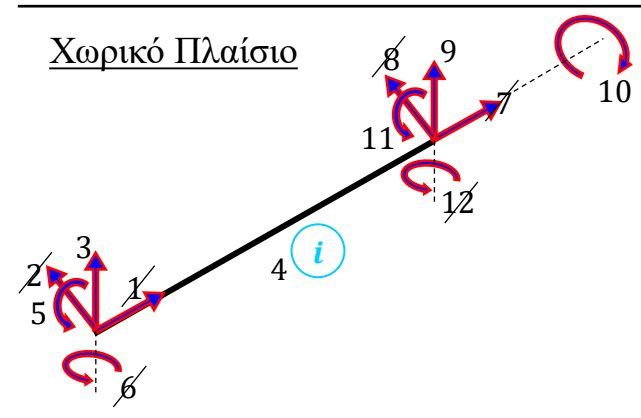


ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{Row 1: } \frac{E^i A^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 2: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 3: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 4: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 5: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 6: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 7: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 8: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 9: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 10: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 11: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 12: } 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \text{Row 13: } -\frac{E^i A^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 14: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 15: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 16: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 17: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 18: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 19: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 20: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 21: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 22: } 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Row 23: } 0 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Row 24: } 0 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{array} \end{bmatrix}$$

Note: The matrix is symmetric. The first 6 rows and columns are highlighted with red dashed lines in the original image.

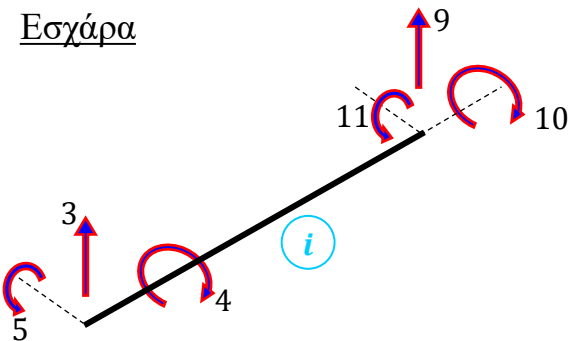
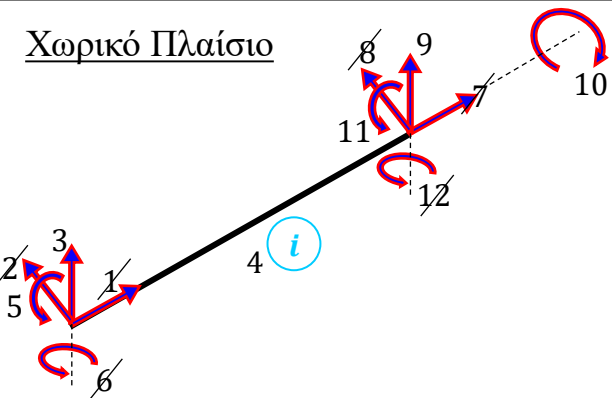
Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.



ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^i{}^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^i{}^3} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^i{}^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^i{}^3} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^i{}^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^i{}^3} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^i{}^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^i{}^3} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^i{}^2} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^i{}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.

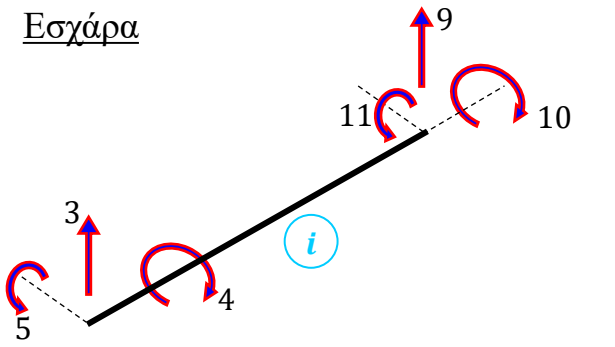
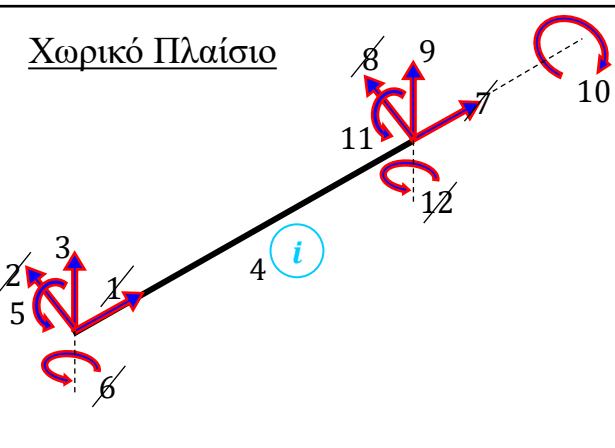


BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] =$$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.

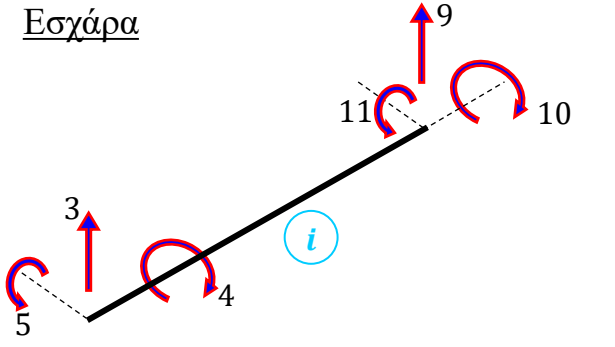
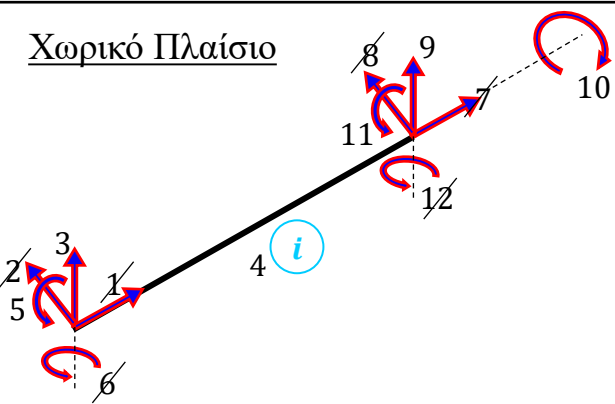


BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] =$$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.

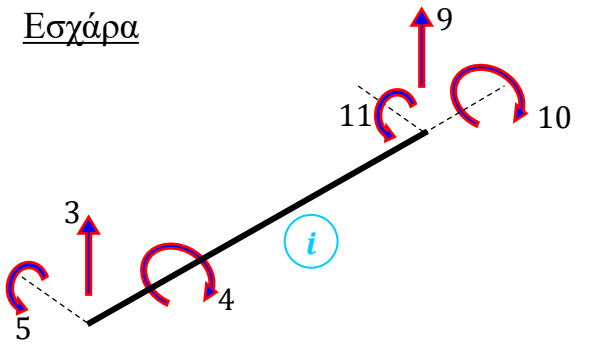
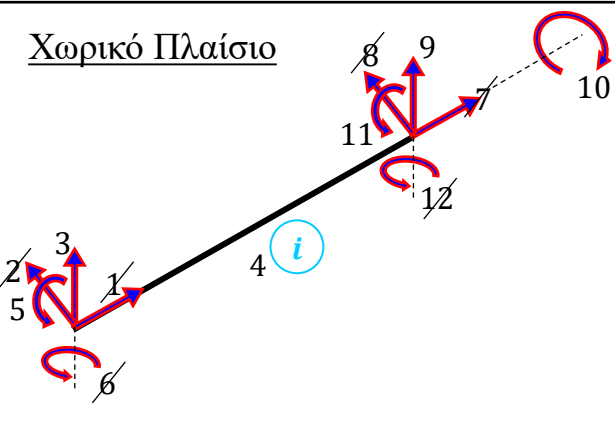


BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] =$$

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

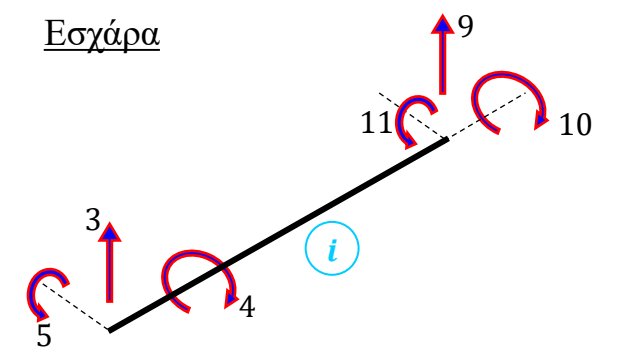
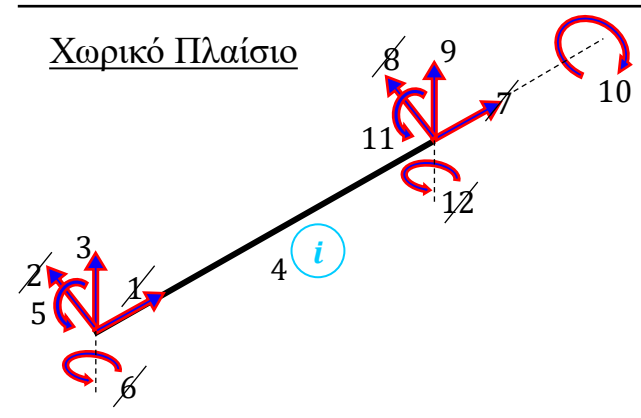
Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.



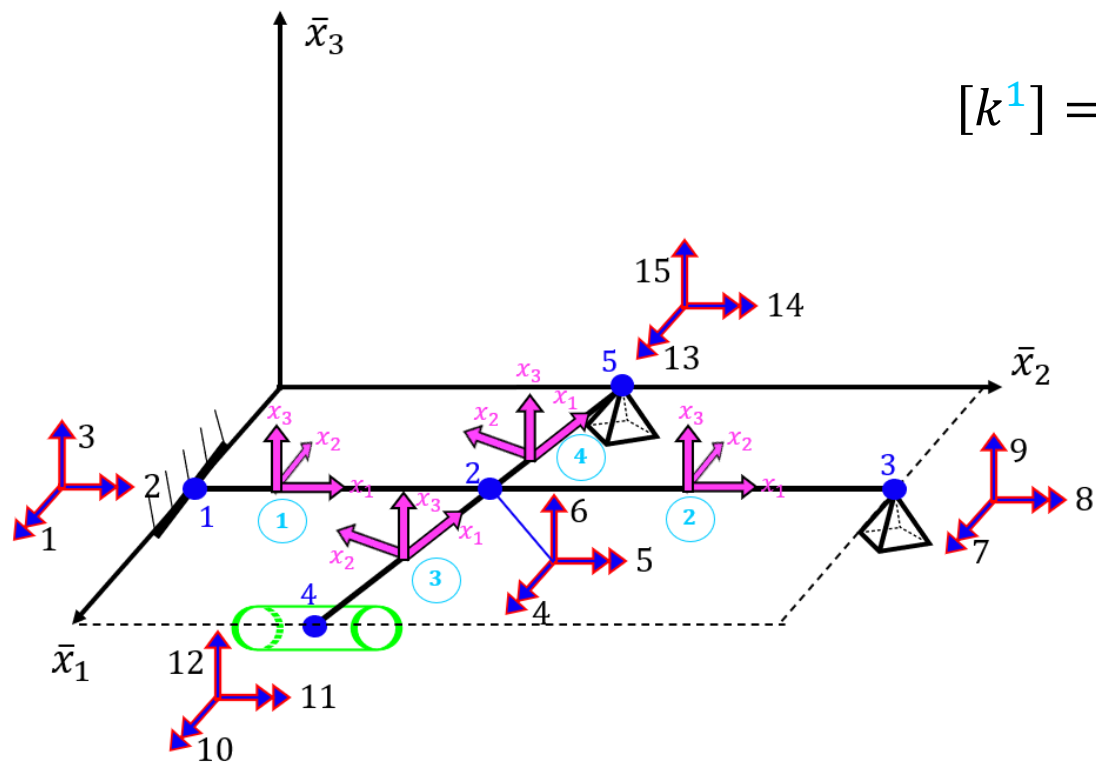
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$$[k_G^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του μέλους εσχάρας προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 1, 2, 6, 7, 8, 12.



BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)



$[k^1] = 10^5 \times$

3	1	2	6	4	5
0.2126	0	-0.4252	0.2126	0	-0.4252
0	0.0847	0	0	-0.0847	0
-0.4252	0	1.1340	0.4252	0	-0.5670
-0.2126	0	0.4252	0.2126	0	0.4252
0	-0.0847	0	0	0.0847	0
-0.4252	0	0.5670	0.4252	0	1.1340

3
1
2
6
4
5

Με κόκκινο είναι οι καθολικοί β.ε. στους οποίους θα μετασχηματιστούν οι τοπικοί β.ε.. Προσοχή στη σειρά! Είναι ΚΑΙ κατά αύξουσα σειρά καθολικού άξονα.

$[k^2] = 10^4 \times$

6	4	5	9	7	8
0.6300	0	-1.8900	0.6300	0	-1.8900
0	0.5645	0	0	-0.5645	0
-1.8900	0	7.5600	1.8900	0	3.7800
-0.6300	0	1.8900	0.6300	0	1.8900
0	-0.5645	0	0	0.5645	0
-1.8900	0	3.7800	1.8900	0	7.5600

6
4
5
9
7
8

$[k^3] = 10^4 \times$

12	10	11	6	4	5
1.0886	0	-2.7216	1.0886	0	-2.7216
0	0.6774	0	0	-0.6774	0
-2.7216	0	9.0720	2.7216	0	4.5360
-1.0886	0	2.7216	1.0886	0	2.7216
0	-0.6774	0	0	0.6774	0
-2.7216	0	4.5360	2.7216	0	9.0720

6
4
5
12
10
11

$[k^4] = 10^4 \times$

6	4	5	15	13	14
1.0886	0	-2.7216	1.0886	0	-2.7216
0	0.6774	0	0	-0.6774	0
-2.7216	0	9.0720	2.7216	0	4.5360
-1.0886	0	2.7216	1.0886	0	2.7216
0	-0.6774	0	0	0.6774	0
-2.7216	0	4.5360	2.7216	0	9.0720

6
4
5
15
13
14

Μέλος <i>i</i>	<i>Eⁱ</i> [kN/m ²]	<i>ν</i>	<i>Aⁱ</i> [m ²]	<i>I₁ⁱ</i> [m ⁴]	<i>I₂ⁱ</i> [m ⁴]	<i>Lⁱ</i> [m]
1	2.1 × 10 ⁷	0.15	0.18	0.0037	0.0054	4.0
2	2.1 × 10 ⁷	0.15	0.18	0.0037	0.0054	6.0
3	2.1 × 10 ⁷	0.15	0.18	0.0037	0.0054	5.0
4	2.1 × 10 ⁷	0.15	0.18	0.0037	0.0054	5.0

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/2)

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε μέλους υπολογίζεται από τη σχέση: $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i][\Lambda_{PF}^i]$

$$[\bar{k}^1] = 10^5 \times \begin{array}{ccccc|cc} 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \\ \hline 0.2126 & 0.4252 & 0 & 0.2126 & 0.4252 & 0 & 3 \\ 0.4252 & 1.1340 & 0 & -0.4252 & 0.5670 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0.0847 & 0 & 0 & -0.0847 & 2 \\ \hline -0.2126 & -0.4252 & 0 & 0.2126 & -0.4252 & 0 & 6 \\ 0.4252 & 0.5670 & 0 & -0.4252 & 1.1340 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -0.0847 & 0 & 0 & 0.0847 & 5 \end{array}$$

$$[\bar{k}^3] = 10^4 \times \begin{array}{ccccc|cc} 12 & 10 & 11 & 6 & 4 & 5 & \\ \hline 1.0886 & 1.6330 & 2.1773 & 1.0886 & 1.6330 & 2.1773 & 6 \\ 1.6330 & 3.6995 & 4.0294 & -1.6330 & 1.1994 & 2.5025 & 4 \\ 2.1773 & 4.0294 & 6.0500 & -2.1773 & 2.5025 & 2.6592 & 5 \\ \hline -1.0886 & -1.6330 & -2.1773 & 1.0886 & -1.6330 & -2.1773 & 12 \\ 1.6330 & 1.1994 & 2.5025 & -1.6330 & 3.6995 & 4.0294 & 10 \\ 2.1773 & 2.5025 & 2.6592 & -2.1773 & 4.0294 & 6.0500 & 11 \end{array}$$

$$[\bar{k}^2] = 10^4 \times \begin{array}{ccccc|cc} 6 & 4 & 5 & 9 & 7 & 8 & \\ \hline 0.6300 & 1.8900 & 0 & 0.6300 & 1.8900 & 0 & 6 \\ 1.8900 & 7.5600 & 0 & -1.8900 & 3.7800 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0.5645 & 0 & 0 & -0.5645 & 5 \\ \hline -0.6300 & -1.8900 & 0 & 0.6300 & -1.8900 & 0 & 9 \\ 1.8900 & 3.7800 & 0 & -1.8900 & 7.5600 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -0.5645 & 0 & 0 & 0.5645 & 8 \end{array}$$

$$[\bar{k}^4] = 10^4 \times \begin{array}{ccccc|cc} 6 & 4 & 5 & 15 & 13 & 14 & \\ \hline 1.0886 & 1.6330 & 2.1773 & 1.0886 & 1.6330 & 2.1773 & 6 \\ 1.6330 & 3.6995 & 4.0294 & -1.6330 & 1.1994 & 2.5025 & 4 \\ 2.1773 & 4.0294 & 6.0500 & -2.1773 & 2.5025 & 2.6592 & 5 \\ \hline -1.0886 & -1.6330 & -2.1773 & 1.0886 & -1.6330 & -2.1773 & 15 \\ 1.6330 & 1.1994 & 2.5025 & -1.6330 & 3.6995 & 4.0294 & 13 \\ 2.1773 & 2.5025 & 2.6592 & -2.1773 & 4.0294 & 6.0500 & 14 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/2)



Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι συμμετρικό. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).

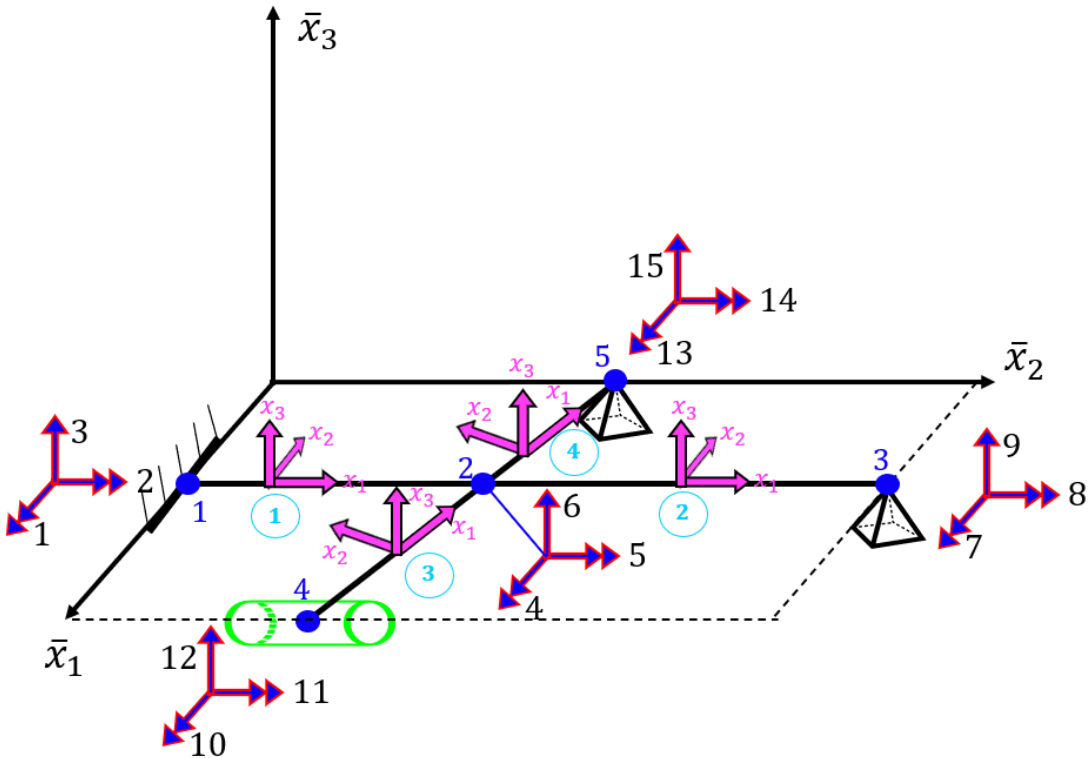


Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα θετικά (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$.



Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις



- Αγνοώ προσωρινά:
- τα ενδιάμεσα φορτία

$$\{\bar{P}_{nodal}\} = \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \\ \text{\#4} \\ \text{\#5} \end{matrix} \begin{pmatrix} \bar{P}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \hline \bar{P}_6 \\ \bar{M}_4 \\ \bar{M}_5 \\ \hline \bar{P}_9 \\ \bar{M}_7 \\ \bar{M}_8 \\ \hline \bar{P}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{M}_{11} \\ \hline \bar{P}_{15} \\ \bar{M}_{13} \\ \bar{M}_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_9 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{15} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \\ \text{\#4} \\ \text{\#5} \end{matrix} \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \hline \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \hline \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \hline \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \hline \bar{\Delta}_{15} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \hline 0 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \hline 0 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \hline 0 \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{pmatrix}$$

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα ^(1/4)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με

$$\text{τη βοήθεια της σχέσης: } [\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PF}^i],$$

$$\text{με τη μορφή: } [\bar{k}^i] = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix}, \text{ επιμερίζοντας δηλαδή το μητρώο αυτό}$$

σε 4 **υπομητρώα** διάστασης 3x3.

2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί **για όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/4)

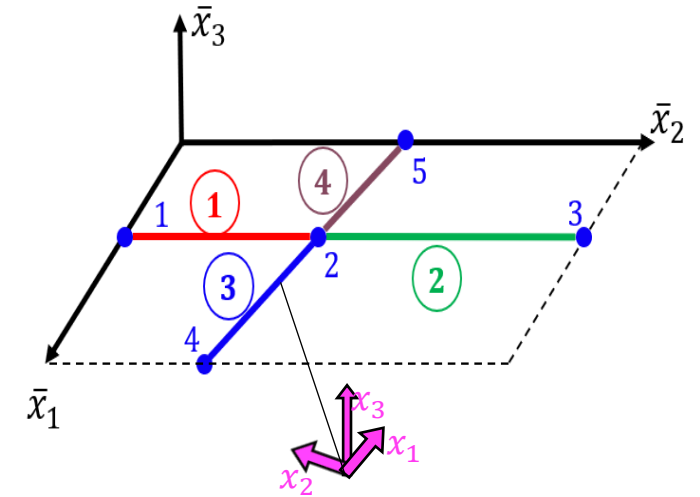
Πως μεταφέρονται τα καθολικά υπομητρώα μέλους $[\bar{k}_{jj}^i]$, $[\bar{k}_{jk}^i]$, $[\bar{k}_{kj}^i]$, $[\bar{k}_{kk}^i]$ στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα:

1. Το $[\bar{k}_{jj}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
2. Το $[\bar{k}_{jk}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.
3. Το $[\bar{k}_{kj}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
4. Το $[\bar{k}_{kk}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1					
κόμβος 2					
κόμβος 3					
κόμβος 4					
κόμβος 5					

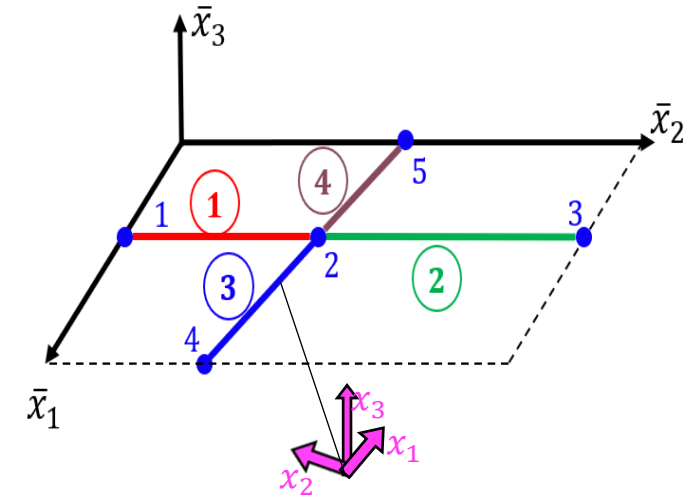


Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1	$\begin{bmatrix} -1 \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix}$				
κόμβος 2					
κόμβος 3					
κόμβος 4					
κόμβος 5					

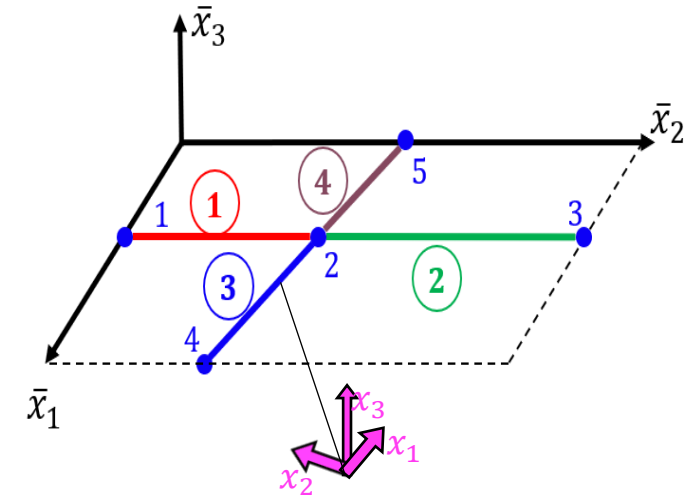


Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

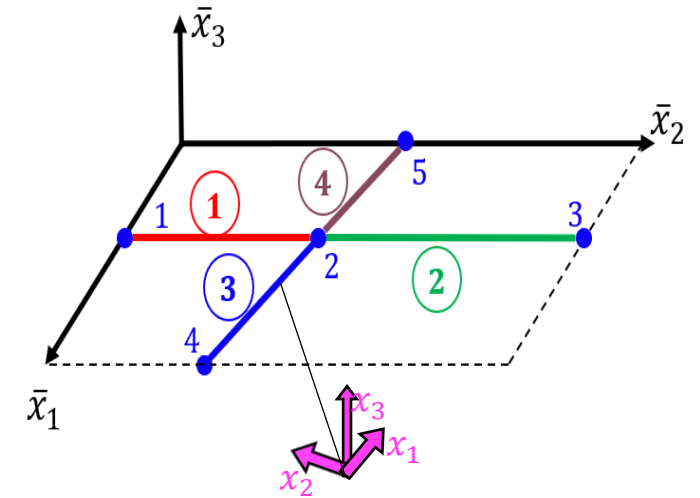
	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1	$\begin{bmatrix} -1 \\ k_{jj} \end{bmatrix}$				
κόμβος 2		$\begin{bmatrix} -1 \\ k_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ k_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ k_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ k_{jj} \end{bmatrix}$			
κόμβος 3					
κόμβος 4					
κόμβος 5					



ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

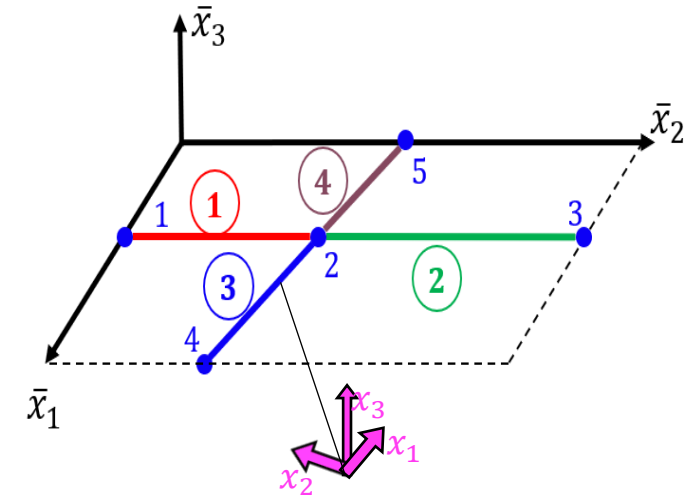
	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1	$\begin{bmatrix} -1 \\ k_{jj} \end{bmatrix}$				
κόμβος 2		$\begin{bmatrix} -1 \\ k_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ k_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ k_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ k_{jj} \end{bmatrix}$			
κόμβος 3			$\begin{bmatrix} -2 \\ k_{kk} \end{bmatrix}$		
κόμβος 4					
κόμβος 5					



ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}$				
κόμβος 2		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^4 \end{bmatrix}$			
κόμβος 3			$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix}$		
κόμβος 4				$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	
κόμβος 5					

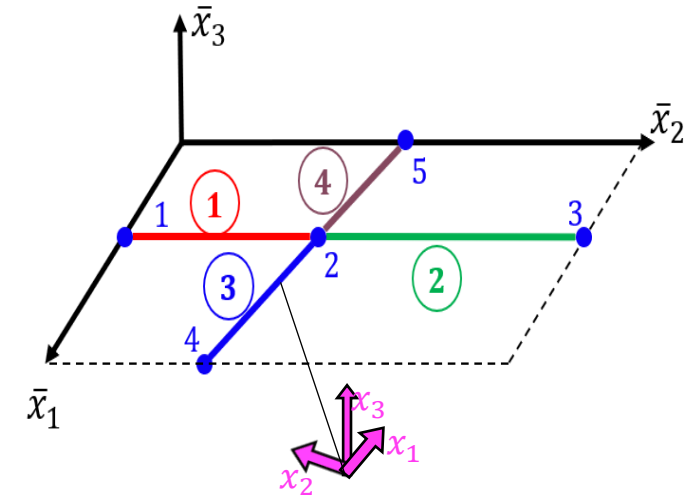


Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$[K] =$

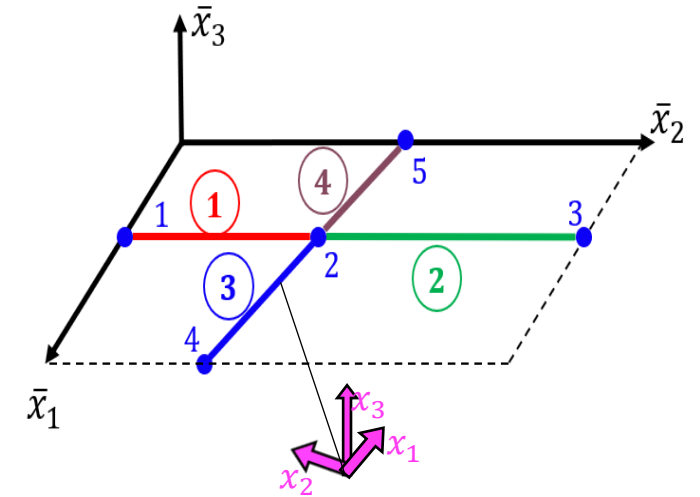
	κόμβος 1	κόμβος 2	κόμβος 3	κόμβος 4	κόμβος 5
κόμβος 1	$\begin{bmatrix} -1 \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix}$				
κόμβος 2		$\begin{bmatrix} -1 \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix}$			
κόμβος 3			$\begin{bmatrix} -2 \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix}$		
κόμβος 4				$\begin{bmatrix} -3 \\ \bar{k}_{jj} \end{bmatrix}$	
κόμβος 5					$\begin{bmatrix} -4 \\ \bar{k}_{kk} \end{bmatrix}$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

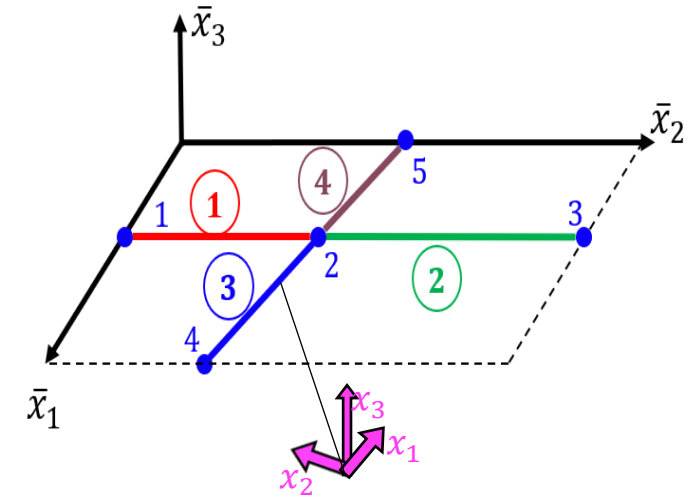
$$[\bar{K}] = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \\ \text{κόμβος 5} \end{array} \right\} \begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} \text{κόμβος 1} \\ \left[\bar{k}_{jj}^1 \right] \end{array} & \begin{array}{c} \text{κόμβος 2} \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \text{κόμβος 3} \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \text{κόμβος 4} \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \text{κόμβος 5} \\ \square \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \left[\bar{k}_{kj}^1 \right] \end{array} & \begin{array}{c} \left[\bar{k}_{kk}^1 \right] + \left[\bar{k}_{jj}^2 \right] + \\ \left[\bar{k}_{kk}^3 \right] + \left[\bar{k}_{jj}^4 \right] \end{array} & \square & \square & \square \\ \hline [0] & \left[\bar{k}_{kj}^2 \right] & \left[\bar{k}_{kk}^2 \right] & \square & \square \\ \hline [0] & \left[\bar{k}_{jk}^3 \right] & [0] & \left[\bar{k}_{jj}^3 \right] & \square \\ \hline [0] & \left[\bar{k}_{kj}^4 \right] & [0] & [0] & \left[\bar{k}_{kk}^4 \right] \end{array} \end{array}$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$$[\bar{K}] = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \\ \text{κόμβος 5} \end{array} \right\} \begin{array}{ccccc} \left. \begin{array}{l} \text{κόμβος 1} \\ \text{κόμβος 2} \\ \text{κόμβος 3} \\ \text{κόμβος 4} \\ \text{κόμβος 5} \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \left[\bar{k}_{jj}^1 \right] \\ \left[\bar{k}_{kj}^1 \right] \\ [0] \\ [0] \\ [0] \end{array} & \begin{array}{c} \left[\bar{k}_{jk}^1 \right] \\ \left[\bar{k}_{kk}^1 \right] + \left[\bar{k}_{jj}^2 \right] + \\ \left[\bar{k}_{kk}^3 \right] + \left[\bar{k}_{jj}^4 \right] \\ \left[\bar{k}_{jk}^2 \right] \\ \left[\bar{k}_{jk}^3 \right] \\ [0] \\ \left[\bar{k}_{jk}^4 \right] \end{array} & \begin{array}{c} [0] \\ \left[\bar{k}_{jk}^2 \right] \\ \left[\bar{k}_{kk}^2 \right] \\ [0] \\ [0] \end{array} & \begin{array}{c} [0] \\ \left[\bar{k}_{kj}^3 \right] \\ [0] \\ \left[\bar{k}_{jj}^3 \right] \\ [0] \end{array} & \begin{array}{c} \left[\bar{k}_{jk}^4 \right] \\ \left[\bar{k}_{jk}^4 \right] \\ [0] \\ \left[\bar{k}_{jj}^4 \right] \\ \left[\bar{k}_{kk}^4 \right] \end{array} \end{array} \end{array}$$



BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (4/4)

		#1			#2			#3			#4			#5			
		3	1	2	6	4	5	9	7	8	12	10	11	15	13	14	
#1	3	0.2126	0.4252	0	0.2126	0.4252	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	× 10 ⁵
	1	0.4252	1.1340	0	-0.4252	0.5670	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	2	0	0	0.0847	0	0	-0.0847	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
#2	6	-0.2126	-0.4252	0	0.4934	-0.2362	0	0.0630	0.1890	0	-0.1089	-0.1633	-0.2177	0.1089	0.1633	0.2177	
	4	0.4252	0.5670	0	-0.2362	2.6299	0.8059	-0.1890	0.3780	0	0.1633	0.1199	0.2502	-0.1633	0.1199	0.2502	
	5	0	0	-0.0847	0	0.8059	1.3511	0	0	-0.0565	0.2177	0.2502	0.2659	-0.2177	0.2502	0.2659	
#3	9	0	0	0	-0.0630	-0.1890	0	0.0630	-0.1890	0	0	0	0	0	0	0	
	7	0	0	0	0.1890	0.3780	0	-0.1890	0.7560	0	0	0	0	0	0	0	
	8	0	0	0	0	0	-0.0565	0	0	0.0565	0	0	0	0	0	0	
#4	12	0	0	0	0.1089	0.1633	0.2177	0	0	0	0.1089	0.1633	0.2177	0	0	0	
	10	0	0	0	-0.1633	0.1199	0.2502	0	0	0	0.1633	0.3699	0.4029	0	0	0	
	11	0	0	0	-0.2177	0.2502	0.2659	0	0	0	0.2177	0.4029	0.6050	0	0	0	
#5	15	0	0	0	-0.1089	-0.1633	-0.2177	0	0	0	0	0	0	0.1089	-0.1633	-0.2177	
	13	0	0	0	0.1633	0.1199	0.2502	0	0	0	0	0	0	-0.1633	0.3699	0.4029	
	14	0	0	0	0.2177	0.2502	0.2659	0	0	0	0	0	0	-0.2177	0.4029	0.6050	

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

Δεν έχουμε λοξή στήριξη 😊

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

Ούτε ελαστική στήριξη έχουμε 😊

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Μην τα ξαναλέμε 😁

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας

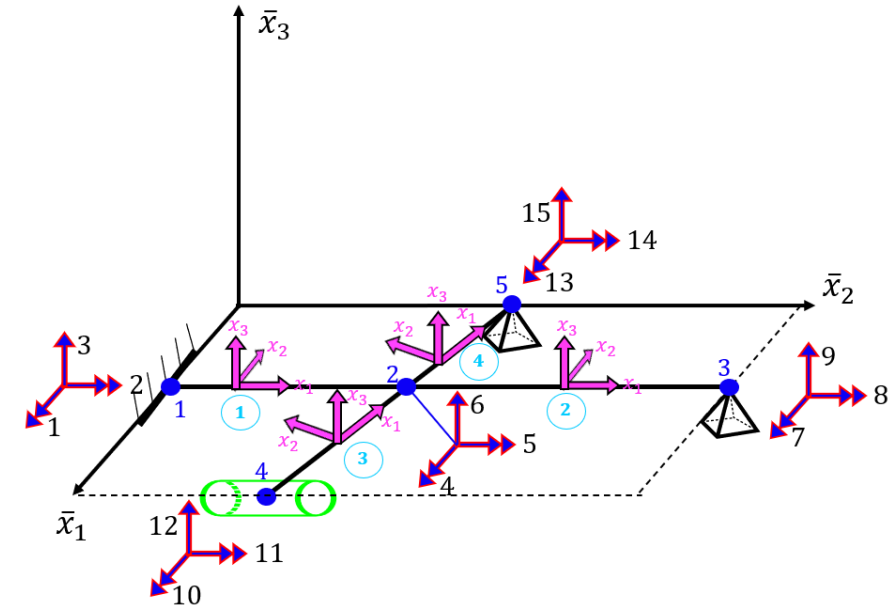
iv) Τροποποίηση μετακινήσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

...

BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/4)

$$[V] = \begin{array}{c|cccccccccccccccc} \text{Ελεύθεροι} \\ \text{Free} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Δεσμευμένοι} \\ \text{Supported} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

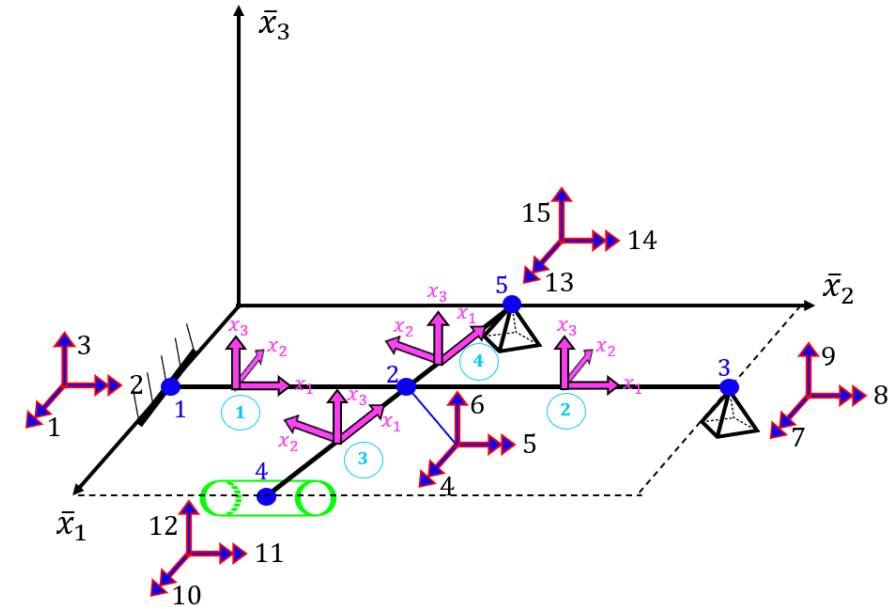


BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/4)

$[V] =$

		6	4	5	7	8	11	13	14	3	1	2	9	12	10	15
Ελεύθεροι Free	6	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Δεσμευμένοι Supported	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0



ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/4)

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων :

$$\{\bar{P}_{nodal,m}\} = [V]\{\bar{P}_{nodal}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{P}_6 \\ \bar{M}_4 \\ \bar{M}_5 \\ \bar{M}_7 \\ \bar{M}_8 \\ \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{13} \\ \bar{M}_{14} \\ \bar{P}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{P}_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{R}_{15} \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V]\{\bar{\Delta}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{12} \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/4)

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\bar{K}_m] = [V][\bar{K}][V]^T =$$

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

	6	4	5	7	8	11	13	14	3	1	2	9	12	10	15
6	0.4934	-0.2362	0	0.1890	0	-0.2177	0.1633	0.2177	-0.2126	-0.4252	0	0.0630	-0.1089	-0.1633	0.1089
4	-0.2362	2.6299	0.8059	0.3780	0	0.2502	0.1199	0.2502	0.4252	0.5670	0	-0.1890	0.1633	0.1199	-0.1633
5	0	0.8059	1.3511	0	-0.0565	0.2659	0.2502	0.2659	0	0	-0.0847	0	0.2177	0.2502	-0.2177
7	0.1890	0.3780	0	0.7560	0	0	0	0	0	0	0	-0.1890	0	0	0
8	0	0	-0.0565	0	0.0565	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-0.2177	0.2502	0.2659	0	0	0.6050	0	0	0	0	0	0	0.2177	0.4029	0
13	0.1633	0.1199	0.2502	0	0	0	0.3699	0.4029	0	0	0	0	0	0	-0.1633
14	0.2177	0.2502	0.2659	0	0	0	0.4029	0.6050	0	0	0	0	0	0	-0.2177
3	0.2126	0.4252	0	0	0	0	0	0	0.2126	0.4252	0	0	0	0	0
1	-0.4252	0.5670	0	0	0	0	0	0	0.4252	1.1340	0	0	0	0	0
2	0	0	-0.0847	0	0	0	0	0	0	0	0.0847	0	0	0	0
9	-0.0630	-0.1890	0	-0.1890	0	0	0	0	0	0	0	0.0630	0	0	0
12	0.1089	0.1633	0.2177	0	0	0.2177	0	0	0	0	0	0	0.1089	0.1633	0
10	-0.1633	0.1199	0.2502	0	0	0.4029	0	0	0	0	0	0	0.1633	0.3699	0
15	-0.1089	-0.1633	-0.2177	0	0	0	-0.1633	-0.2177	0	0	0	0	0	0	0.1089

$\times 10^5$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

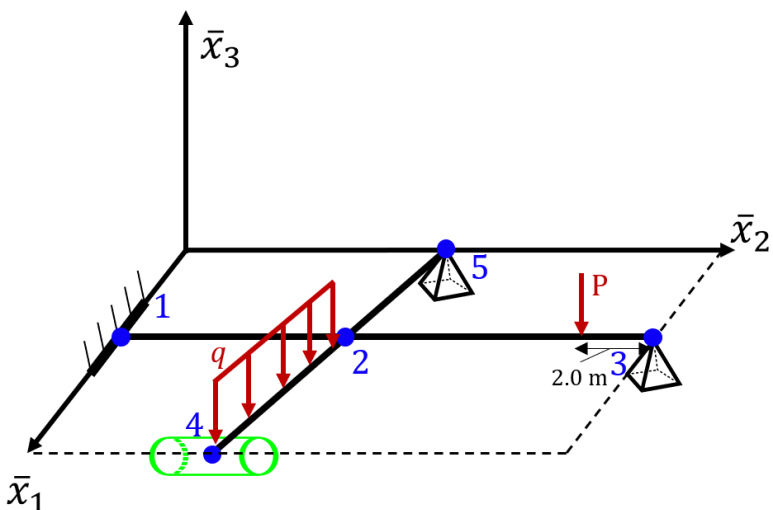
(4/4)

Εάν είχα μόνο επικόμβια φορτία, σε αυτό το στάδιο θα μπορούσα πλέον να επιλύσω εξίσωση ισορροπίας (σχέση στιβαρότητας) και να υπολογίσω τα άγνωστα μεγέθη:

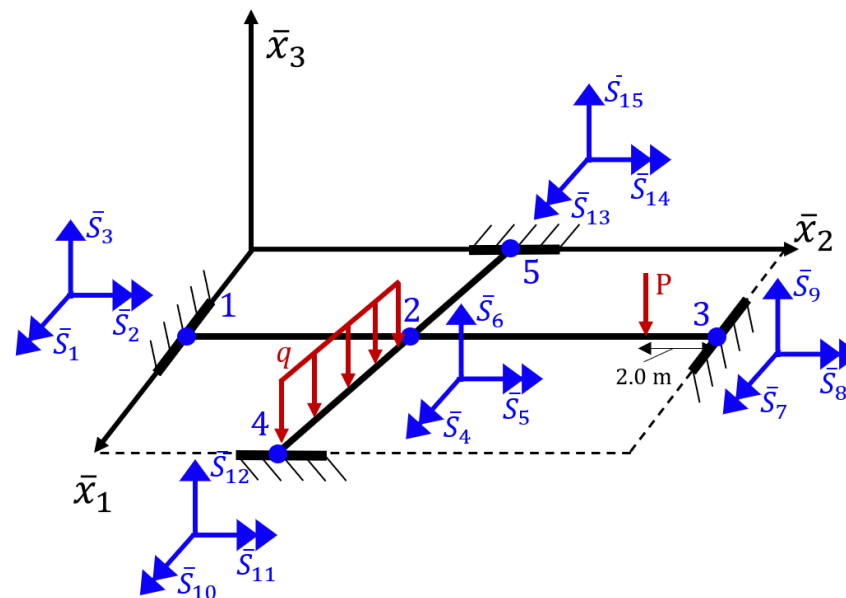
$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.} \\ \bar{\Delta}_f = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) \\ 2. \text{ Επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε.} \\ \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} \end{array} \right.$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ι) Κατασκευή **Παγιωμένου** και **Ισοδύναμου** Φορέα

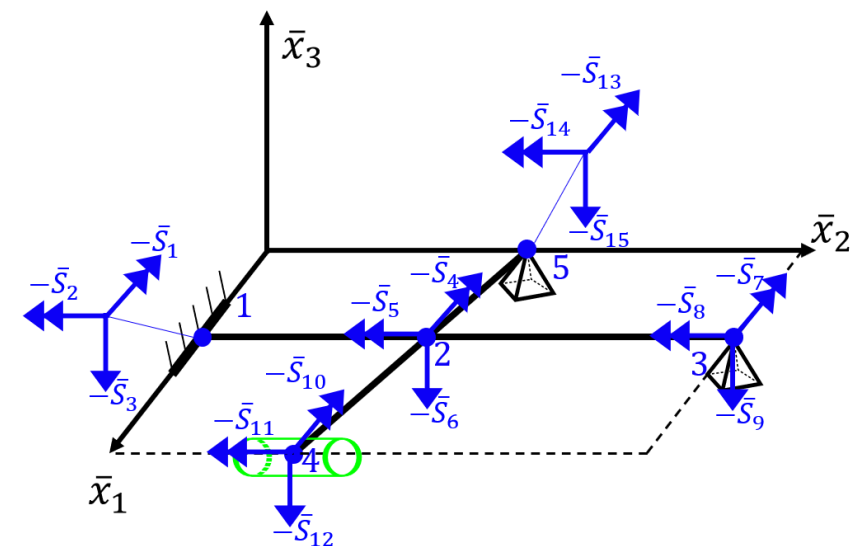


ΑΡΧΙΚΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ



= ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία

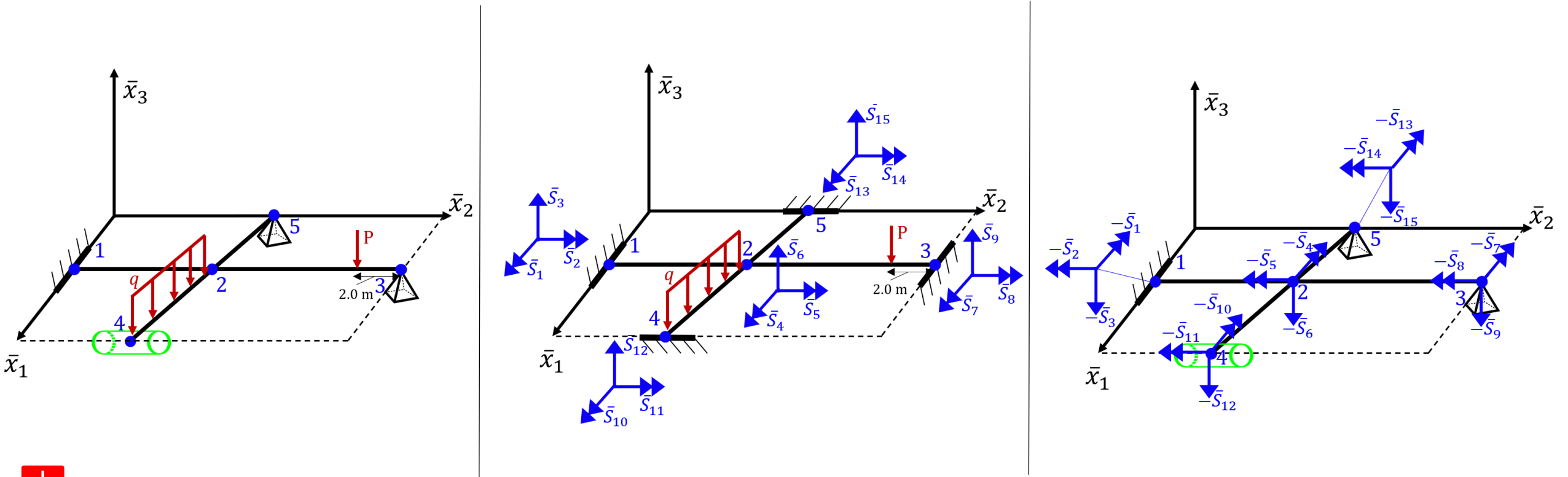


+ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις → ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

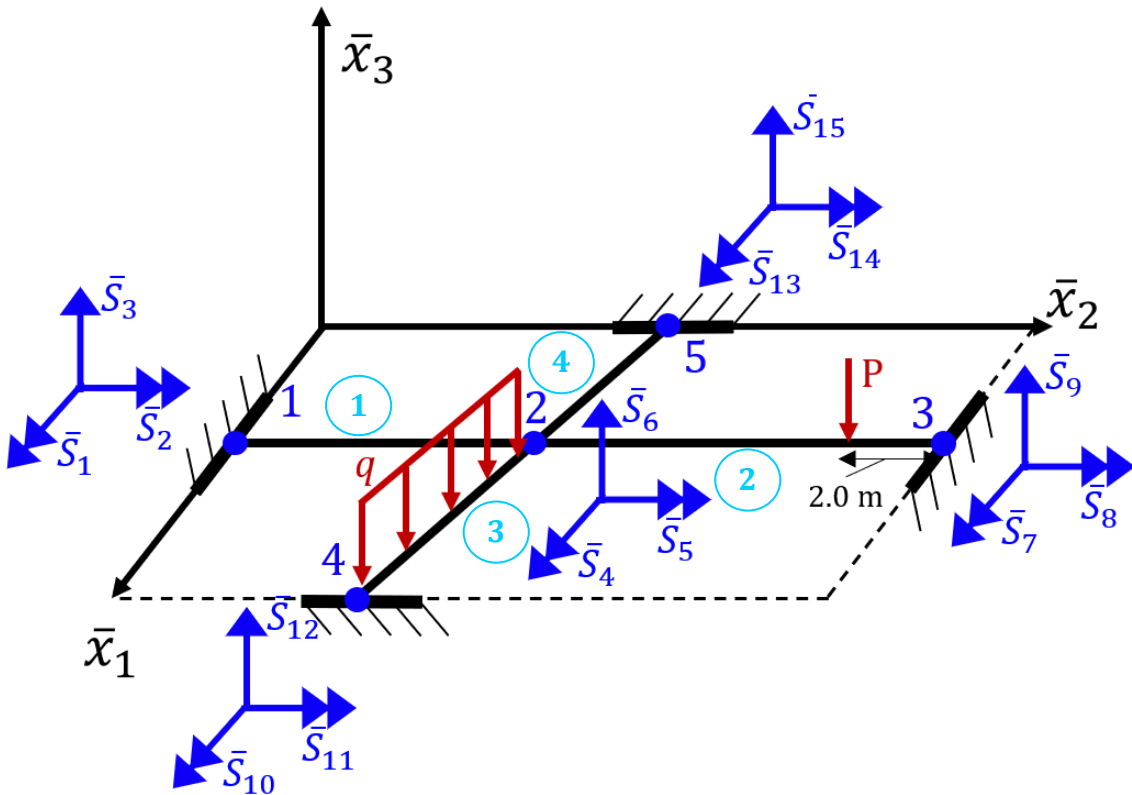
ι) Κατασκευή **Παγιωμένου** και **Ισοδύναμου** Φορέα



- Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

- ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
- α) ενδιάμεσων φορτίων



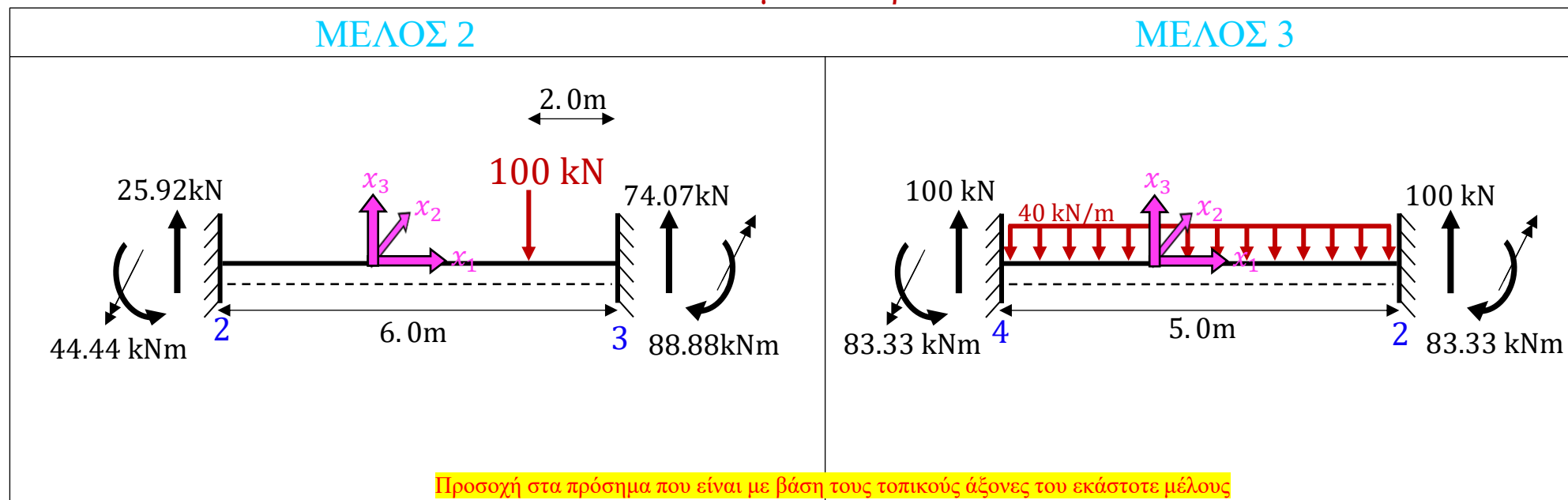
Μέλος Φόρτιση	1	2	3	4
Ενδιάμεσο Φορτίο	✗	✓	✓	✗
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗	✗	✗

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:

α) *ενδιάμεσων φορτίων*

Ενδιάμεσο Φορτίο



Τα μέλη 1 και 4 είναι αφόρτιστα !

$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{A_r^4\}$$

Μέλος \ Φόρτιση	1	2	3	4
Ενδιάμεσο Φορτίο	✗	✓	✓	✗
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗	✗	✗

$$\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 25.92 \\ 0 \\ -44.44 \\ 74.07 \\ 0 \\ 88.89 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 0 \\ -83.33 \\ 100 \\ 0 \\ 83.33 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα

$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{PF}^1]^T \{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

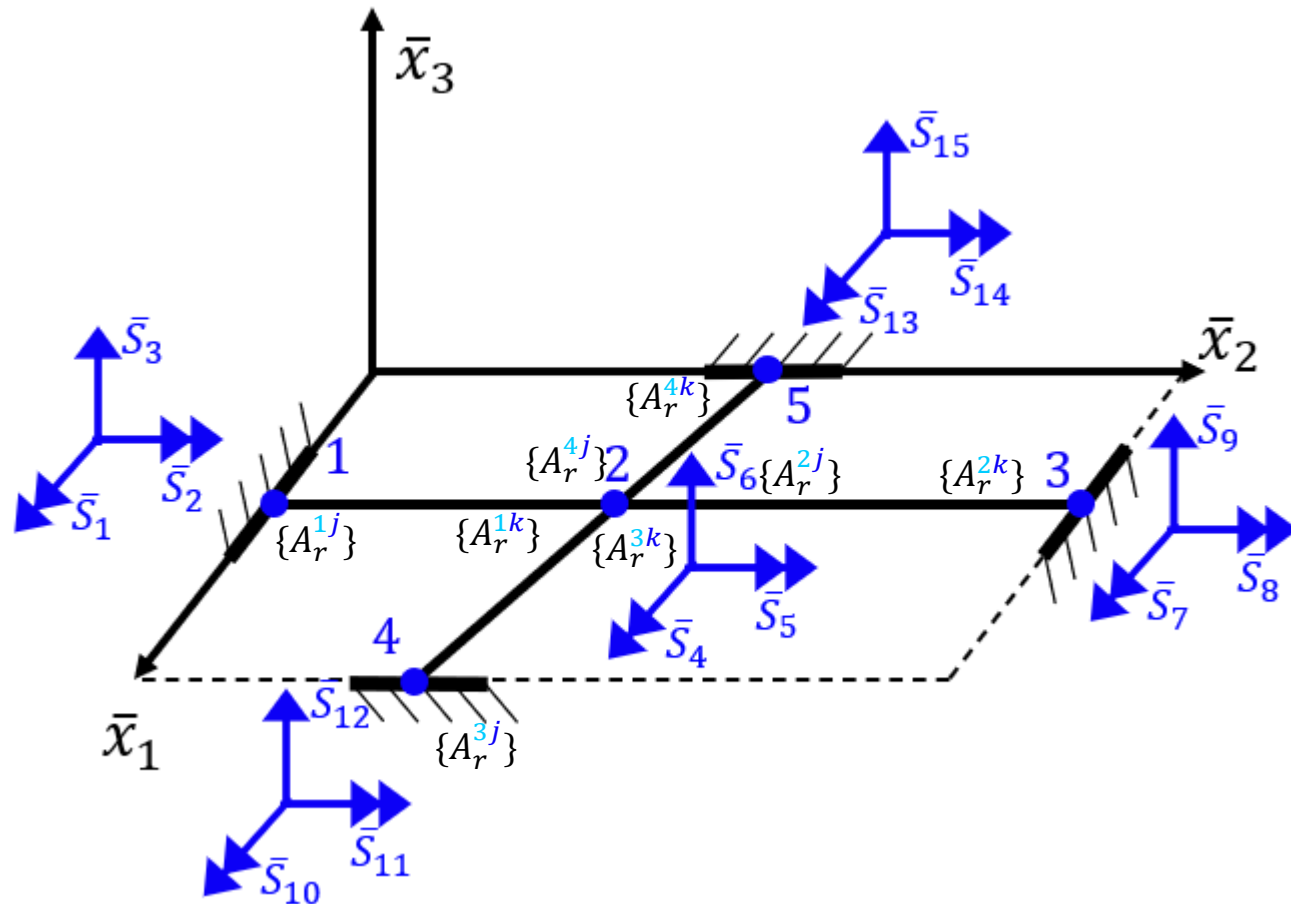
$$\{\bar{A}_r^3\} = [\Lambda_{PF}^3]^T \{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 50 \\ 66.67 \\ 100 \\ -50 \\ -66.67 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^2\} = [\Lambda_{PF}^2]^T \{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} 25.92 \\ 44.44 \\ 0 \\ 74.07 \\ -88.89 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^4\} = [\Lambda_{PF}^4]^T \{A_r^4\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} + \{A_r^{3k}\} + \{A_r^{4j}\} = \begin{Bmatrix} 125.93 \\ -5.56 \\ -66.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{Bmatrix} 74.07 \\ -88.89 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(4)}\} = \{\bar{A}_r^{3j}\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 50 \\ 66.67 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}$$

$$\{\bar{S}^{(5)}\} = \{\bar{A}_r^{4k}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 15 \\ 13 \\ 14 \end{matrix}$$

(Τα ενδιάμεσα φορτία του παγιωμένου φορέα παραλείπονται εδώ χάριν απλότητας του σχήματος.)

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης

Δεν έχουμε λοξή στήριξη 😊

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

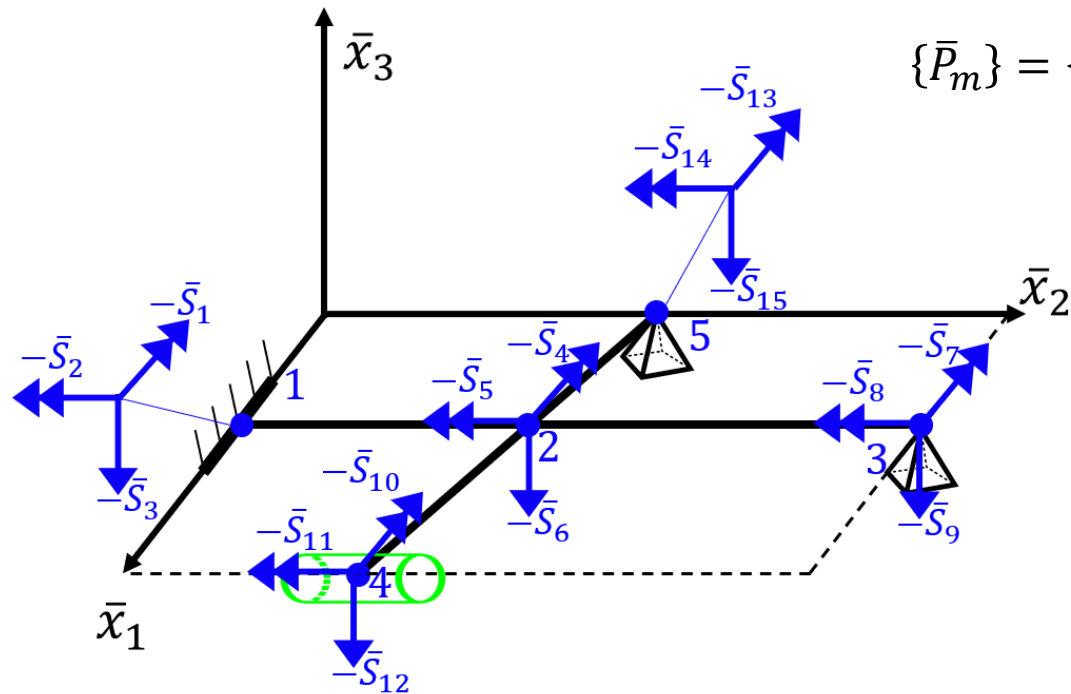
vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (1/2)

Το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα δίδεται ως:

$$\{\bar{P}\} = \{\bar{P}^{nodal}\} - \{\bar{S}\}$$

και με την τροποποίηση λόγω αναδιάταξης:

$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}^{nodal}_m\} - \{\bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix}$$

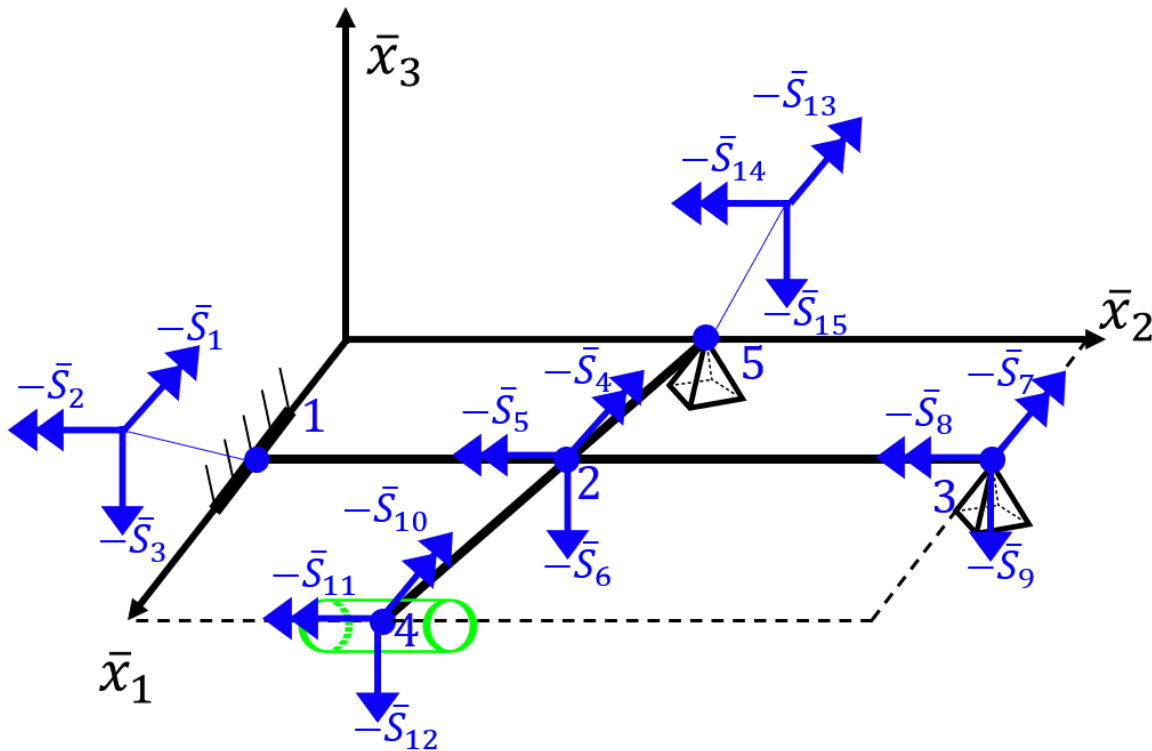


$$= \begin{pmatrix} -125.93 \\ 5.56 \\ 66.67 \\ 88.89 \\ 0 \\ -66.67 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 - 74.07 \\ \bar{R}_{12} - 100 \\ \bar{M}_{10} - 50 \\ \bar{R}_{15} \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \\ 13 \\ 14 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 9 \\ 12 \\ 10 \\ 15 \end{matrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (2/2)

Το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα ταυτίζεται με αυτό του αρχικού φορέα:

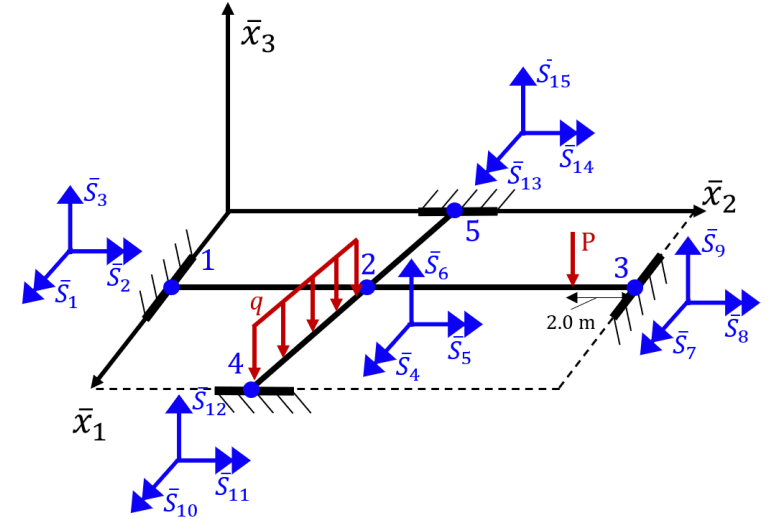


$$\{\bar{\Delta}_m\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Delta}_f \\ \hline \bar{\Delta}_s \end{array} \right\} = \left(\begin{array}{c} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$$

BHMA 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1}(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \\ \bar{\Delta}_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -79 \\ -17 \\ 19 \\ 40 \\ 19 \\ -41 \\ -7.59 \\ 32 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$



$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 - 74.07 \\ \bar{R}_{12} - 100 \\ \bar{M}_{10} - 50 \\ \bar{R}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.81 \\ 236.86 \\ -16.22 \\ 6.61 \\ 10.72 \\ -7.86 \\ 14.78 \end{Bmatrix}$$

Αντιδράσεις ➡

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{R}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.81 \\ 236.86 \\ -16.22 \\ 80.68 \\ 110.72 \\ 42.14 \\ 14.78 \end{Bmatrix}$$

BHMA 12: Επίλυση εσχάρας υποβαλλόμενης σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων

Η προηγούμενη διαφάνεια στο περσινό μάθημα (23/05/2024) παρουσιάστηκε έτσι και επεσήμανα το λάθος (κίτρινο highlight).

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{sf}] \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{13} \end{Bmatrix} \times 10^{-4} = \begin{Bmatrix} 79 \\ -17 \\ 19 \\ 40 \\ 19 \\ -41 \\ -7.59 \\ 22 \end{Bmatrix}$$

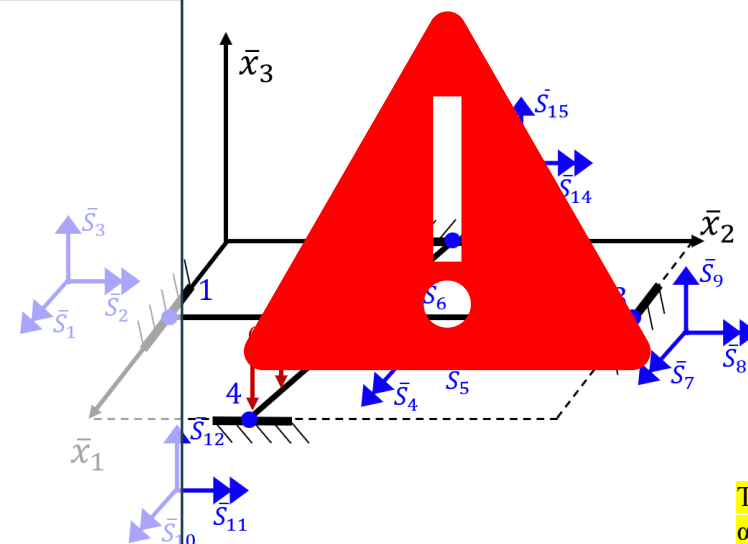
Υπήρχε ένα λάθος στον κώδικα το οποίο αποκαλύφθηκε με έναν έλεγχο συμμετρίας των μητρώων δυσκαμψίας!!

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 - 74.07 \\ M_{10} - 50 \\ \bar{R}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.81 \\ 236.86 \\ -16.22 \\ -92.75 \\ 10.72 \\ 7.86 \\ 15.13 \end{Bmatrix}$$

Τονίζεται λοιπόν η σημασία των σχολίων του Βήματος 7

Αντιδράσεις

$$\begin{Bmatrix} \bar{R}_3 \\ \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \\ \bar{R}_9 \\ \bar{R}_{12} \\ \bar{M}_{10} \\ \bar{R}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 93.81 \\ 236.86 \\ -16.22 \\ -18.67 \\ 110.72 \\ 42.14 \\ 15.13 \end{Bmatrix}$$



Το SAP2000 δίνει αποτέλεσμα 80.61.

Πολύ πιο λογικό νούμερο δεδομένης της φόρτισης.

Θα ελεγχθεί ξανά ο κώδικας που παράγει τα αποτελέσματα...

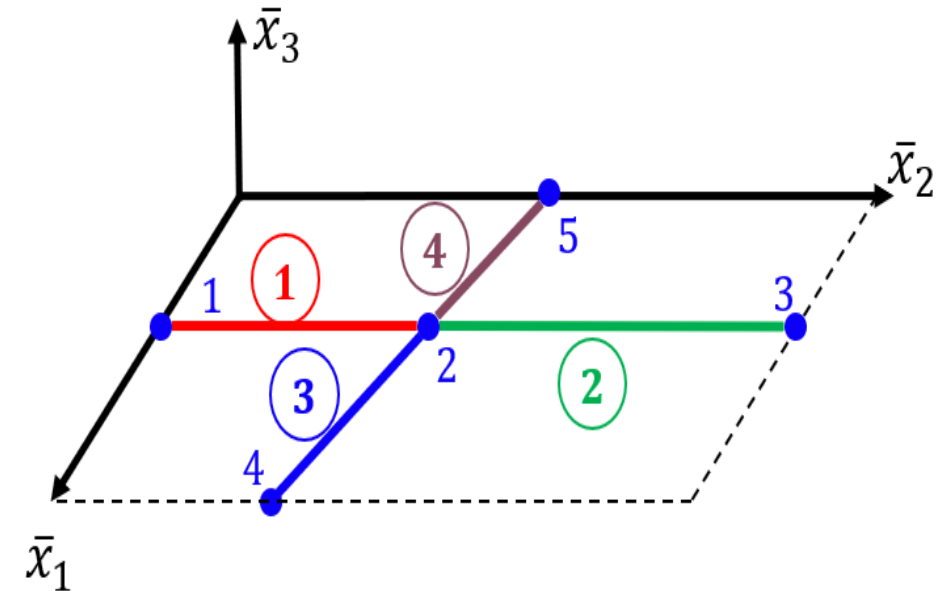
Έτσι όπως είναι τώρα είναι σαν να λέει ότι η αντίδραση είναι προς τα κάτω.

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

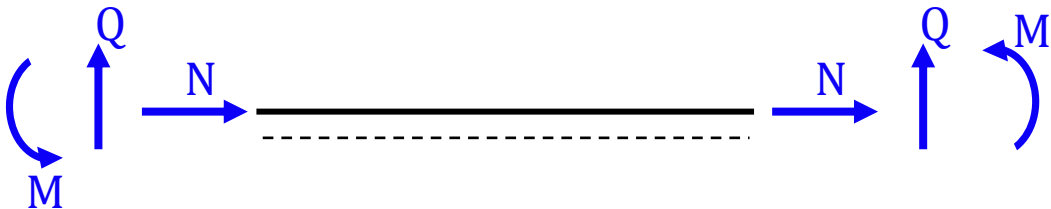
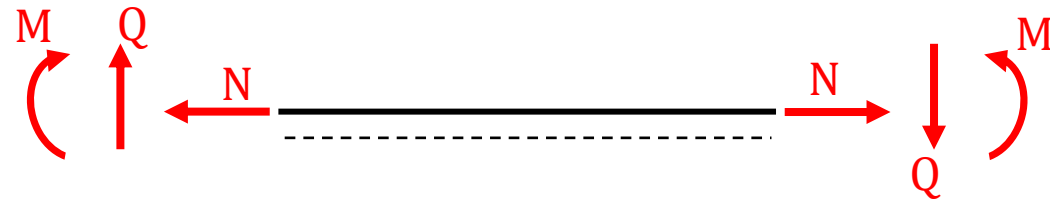
- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$.
- Υπολογίζω τις τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους i με επαλληλία του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα:

$$\{A^i\} = \underbrace{\{A_r^i\}}_{\text{παγιωμένος}} + \underbrace{[k^i]\{D^i\}}_{\text{ισοδύναμος}}$$



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας

Τώρα μένει να χαράξω τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών.
Πρώτα θα πρέπει να θυμηθώ τη κλασική σύμβαση της στατικής για τα εντατικά μεγέθη (η οποία διαφέρει από τη σύμβαση που θεωρούμε στη μητρική στατική για τους βαθμούς ελευθερίας).

Σύμβαση Μητρικής Στατικής	Κλασική Σύμβαση Στατικής
Θετικές φορές	Θετικές φορές
	

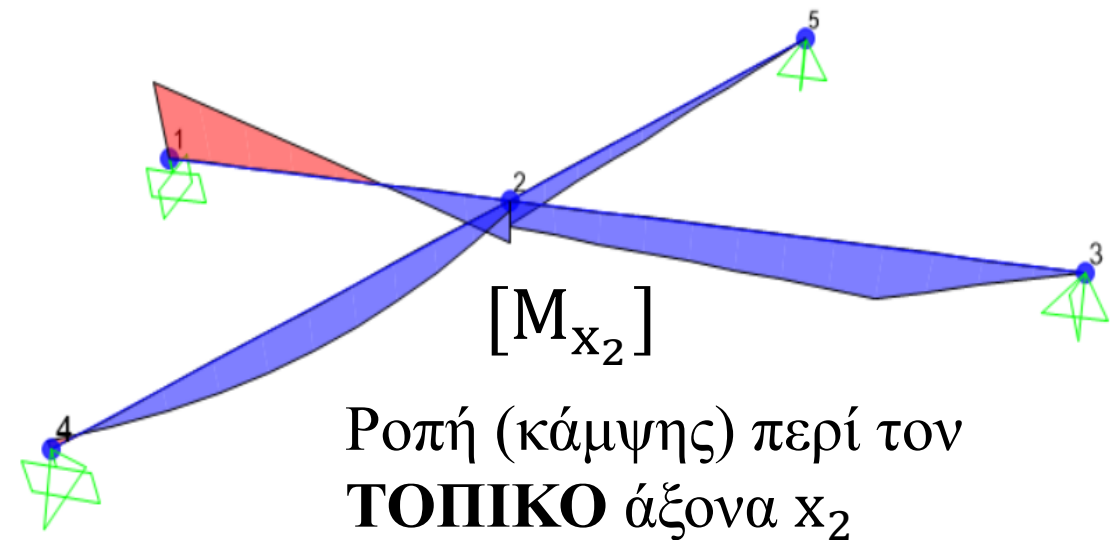
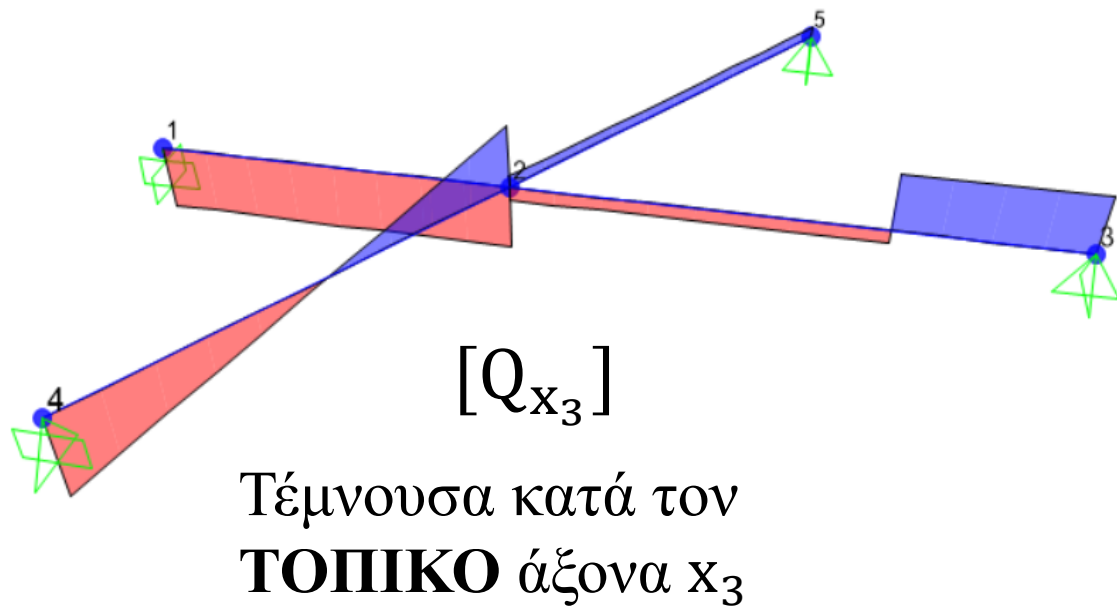
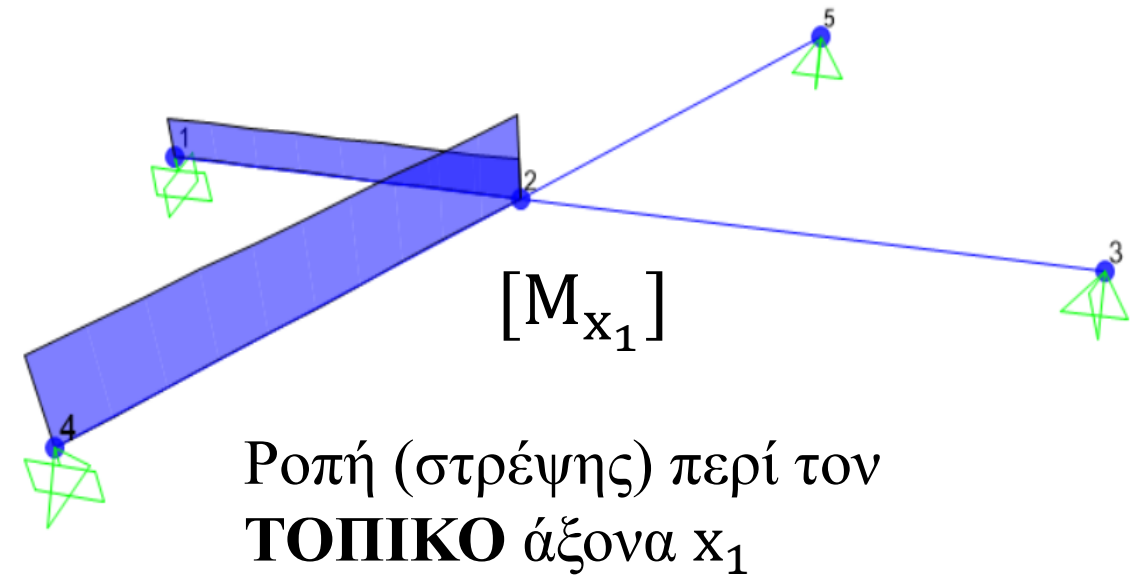
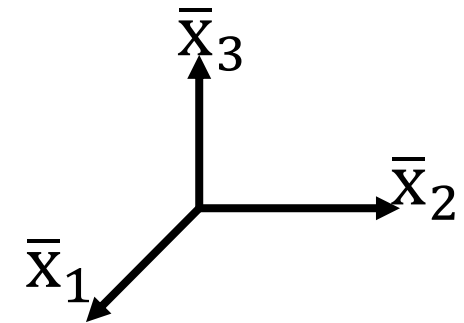
Επομένως ένα διάνυσμα τοπικών ακραίων δράσεων μέλους που έχει αυτή τη μορφή:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix}$$

Με τη κλασική σύμβαση της στατικής αποκτά αυτά τα πρόσημα:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών εσχάρας



Παραμορφωμένη εικόνα εσχάρας από το SAP2000

