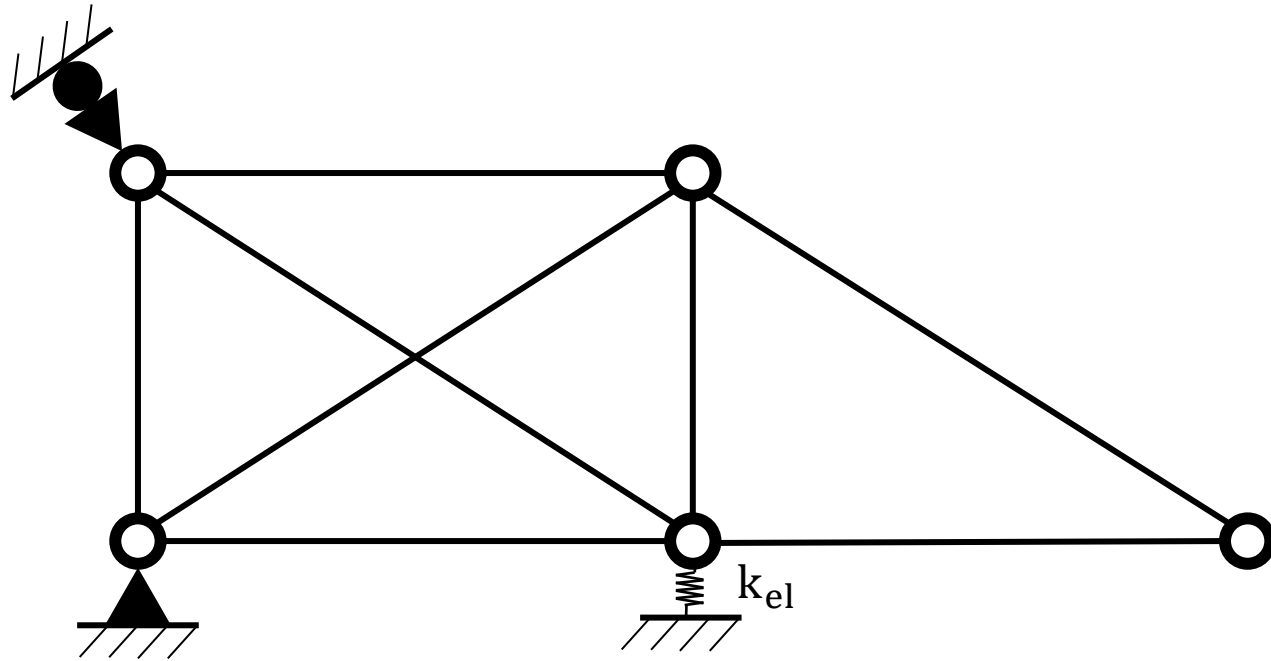




Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

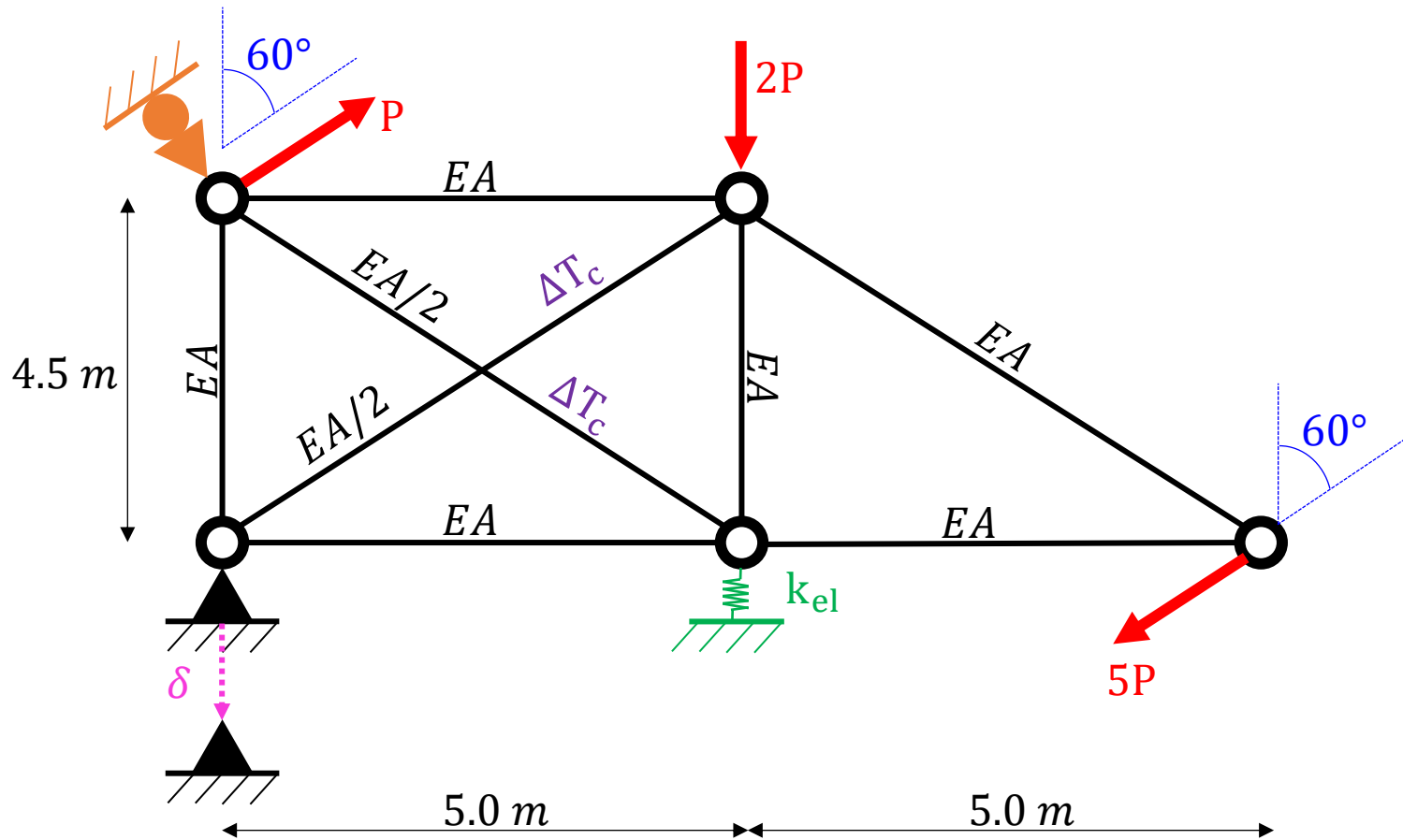
Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης Επίπεδου Δικτυώματος



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ & ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ	
ΑΣΚΗΣΗ	#1
ΗΜ/ΝΙΑ	05/03/2025 (Βήμα 1-9) 18/03/2025 (Βήμα 10-13)
ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ	

george_pissas@outlook.com

Εξεταζόμενο Δικτύωμα

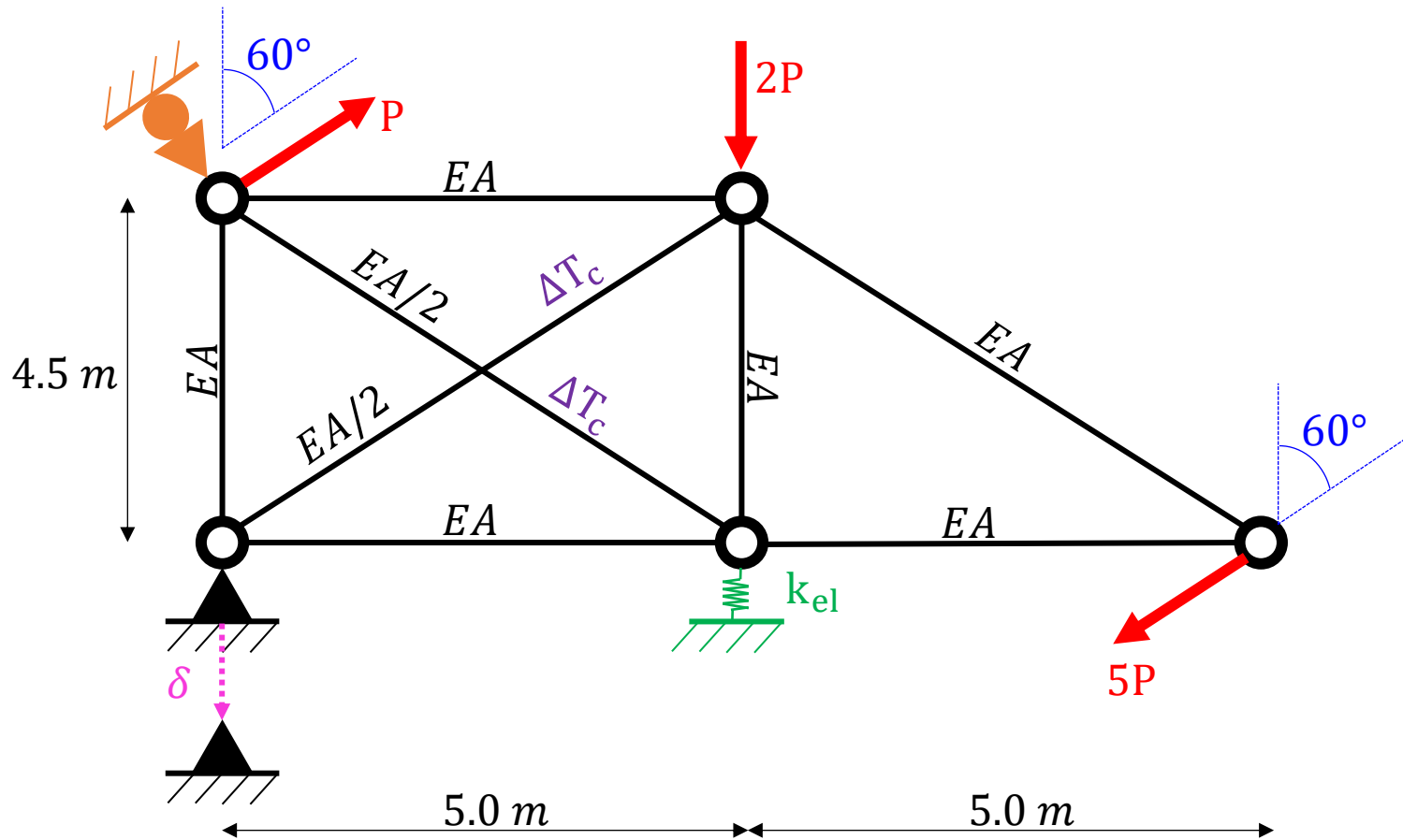


Δεδομένα:

- $E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$
- $A = 10 \text{ cm}^2$
- $T = 30^\circ\text{C}$
- $T_0 = 15^\circ\text{C}$
- $\delta = 2 \text{ cm}$
- $k_{el} = 30 \times 10^3 \text{ kN/m}$
- $P = 50 \text{ kN}$
- $\alpha = 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Τα μέλη του δικτύωματος είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

Εξεταζόμενο Δικτύωμα

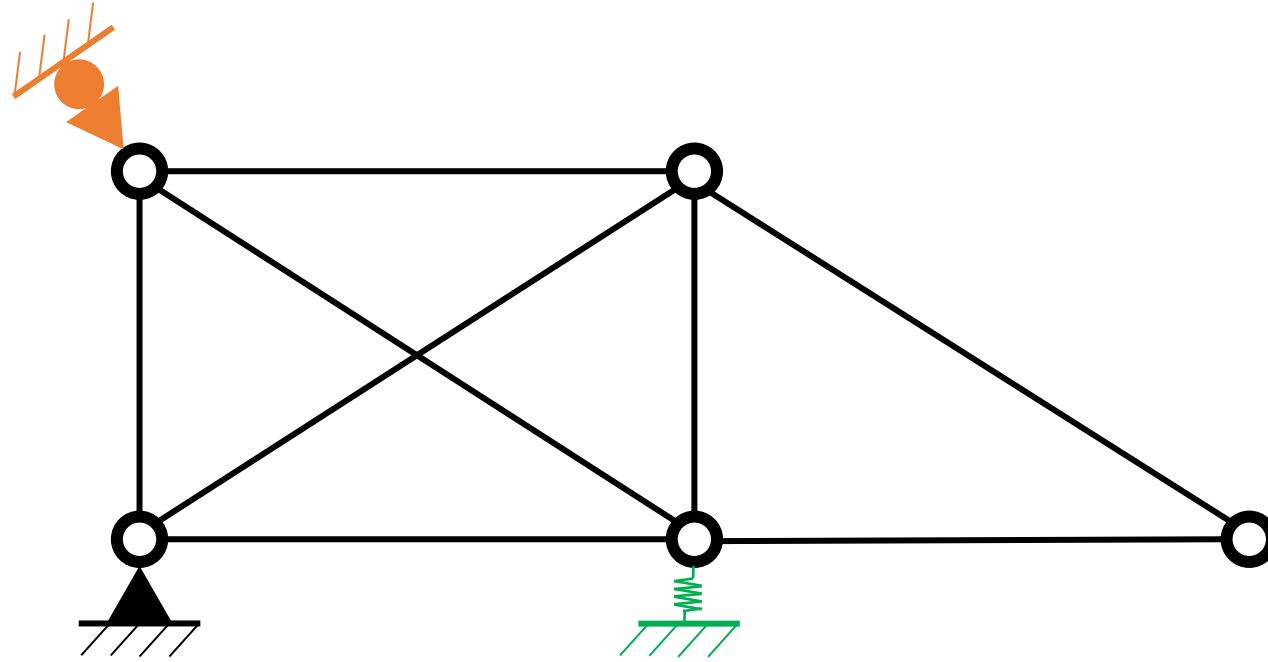


Παρατηρώ:

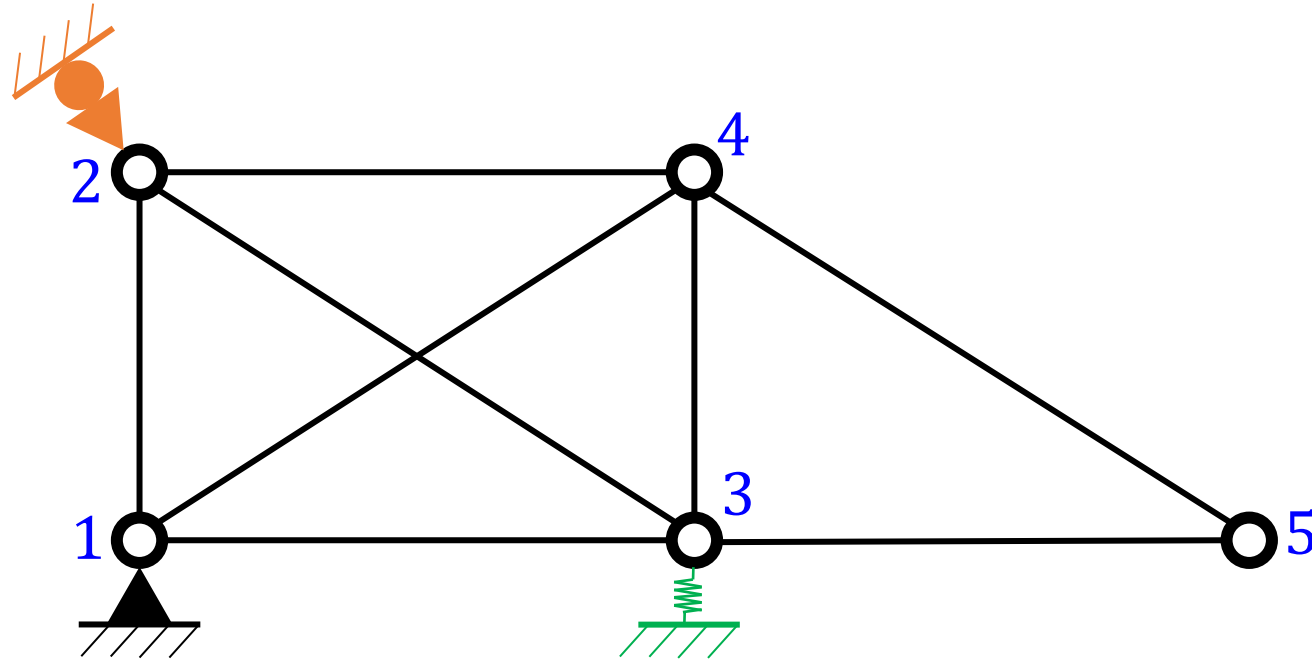
- Επικόμβια φορτία
- Λοξή στήριξη
- Ελαστική στήριξη
- Υποχώρηση στήριξης
- Θερμοκρασιακή μεταβολή

Τα μέλη του δικτυώματος είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

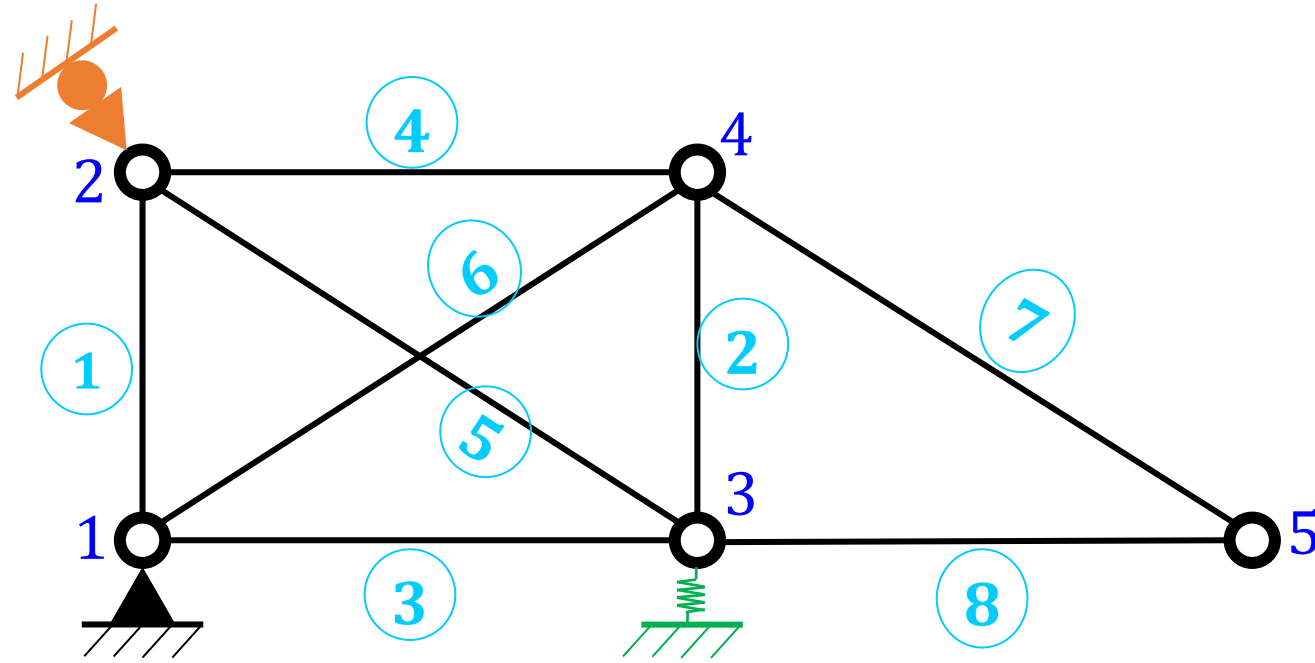
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



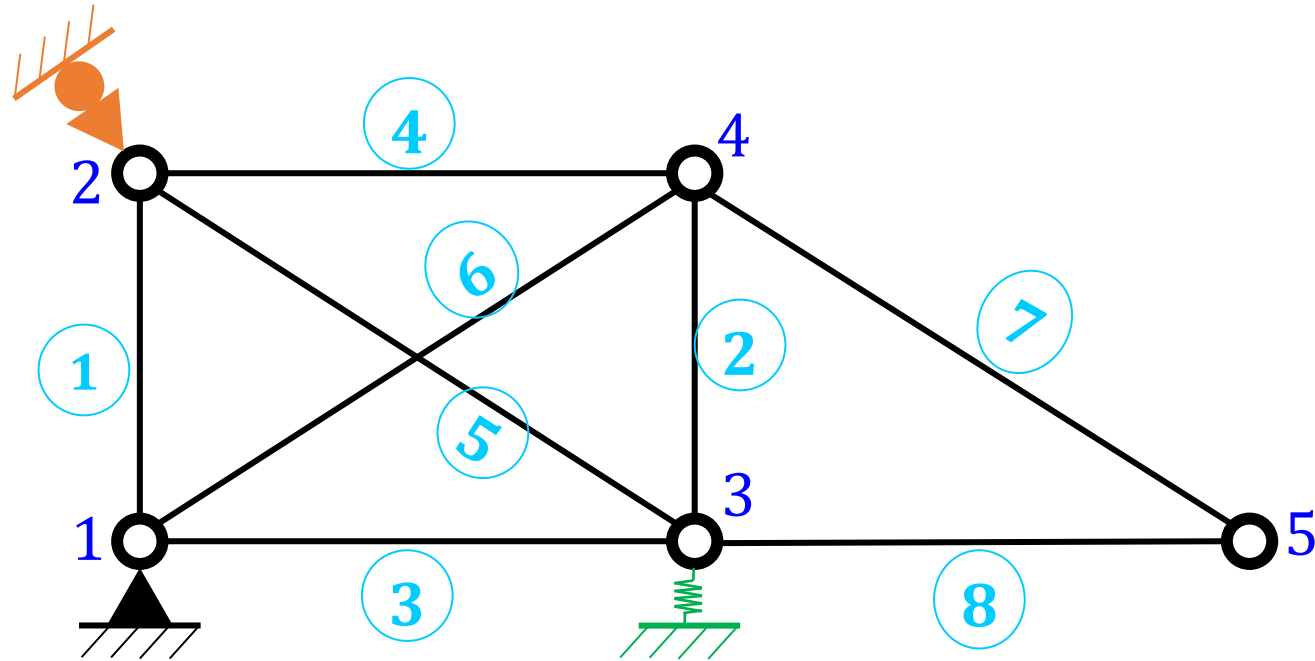
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση *Κόμβων* και Μελών



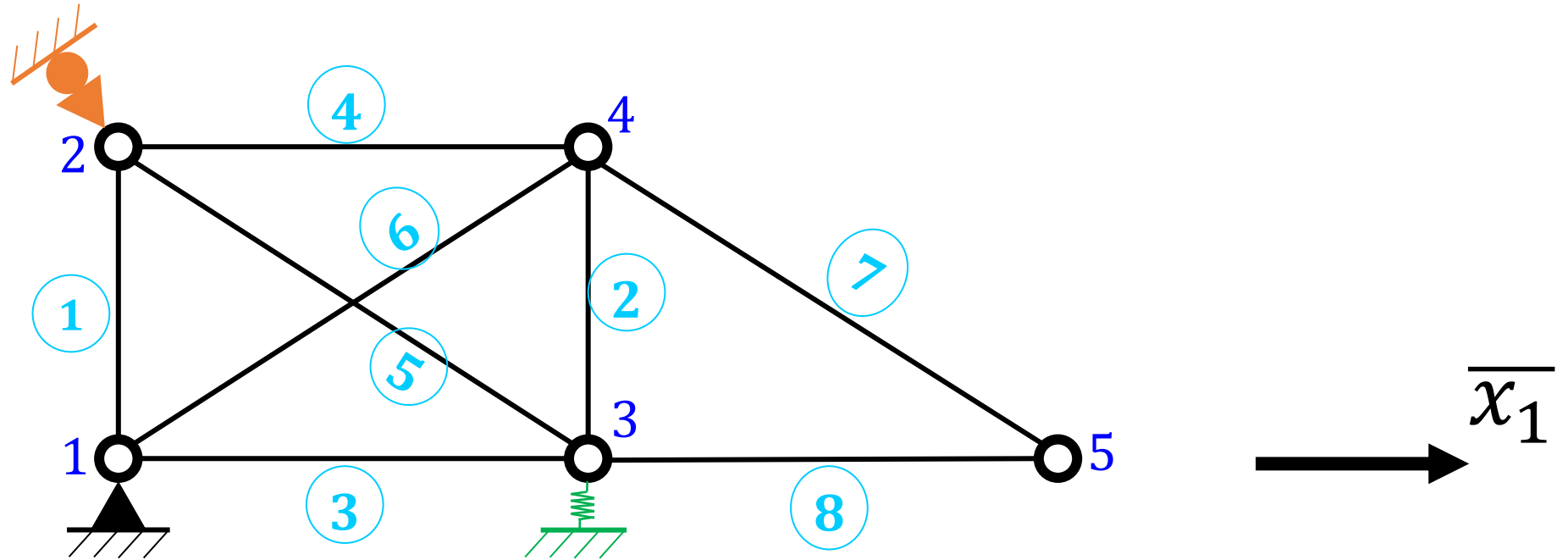
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση *Κόμβων* και *Μελών*



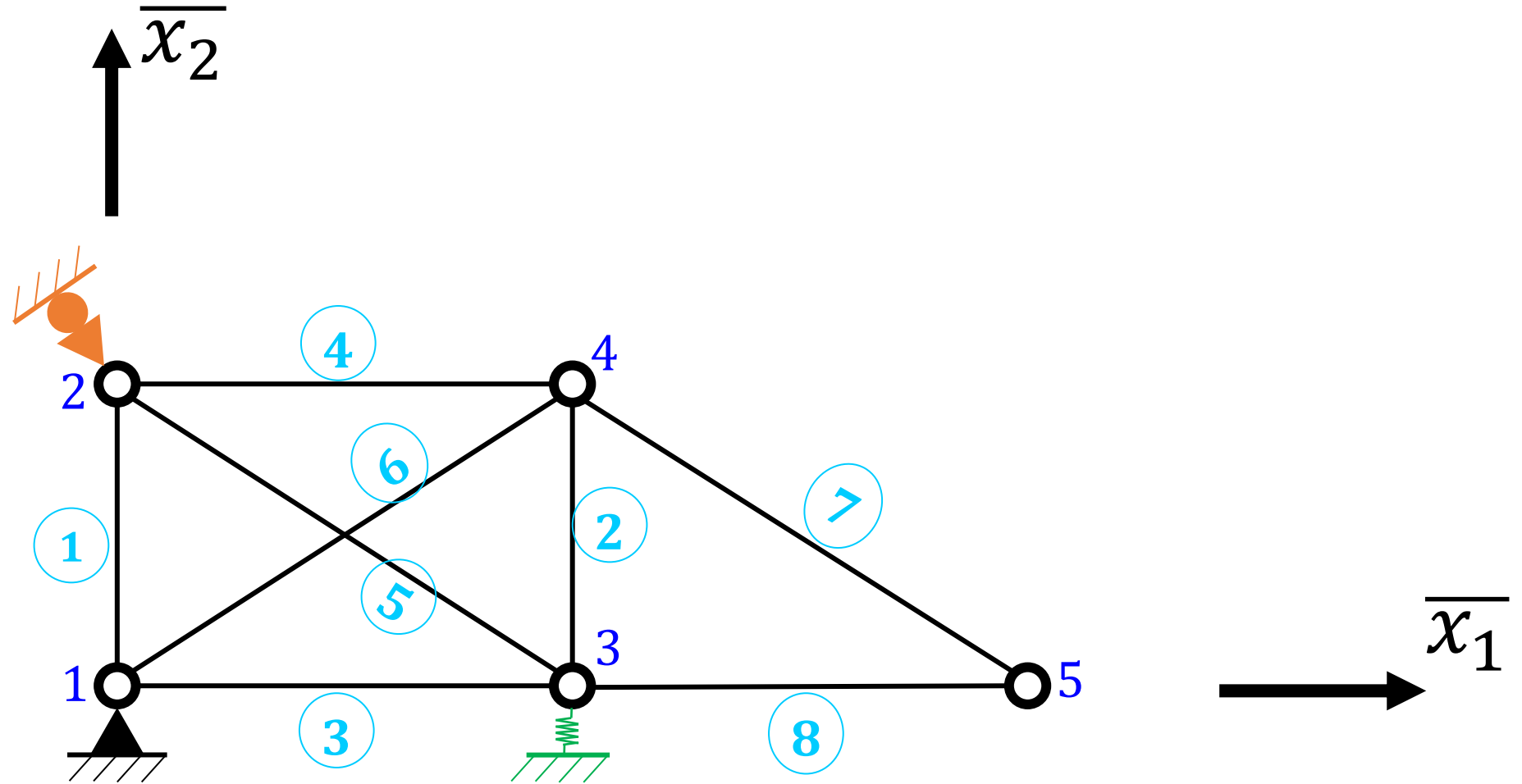
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων Ox_1x_2



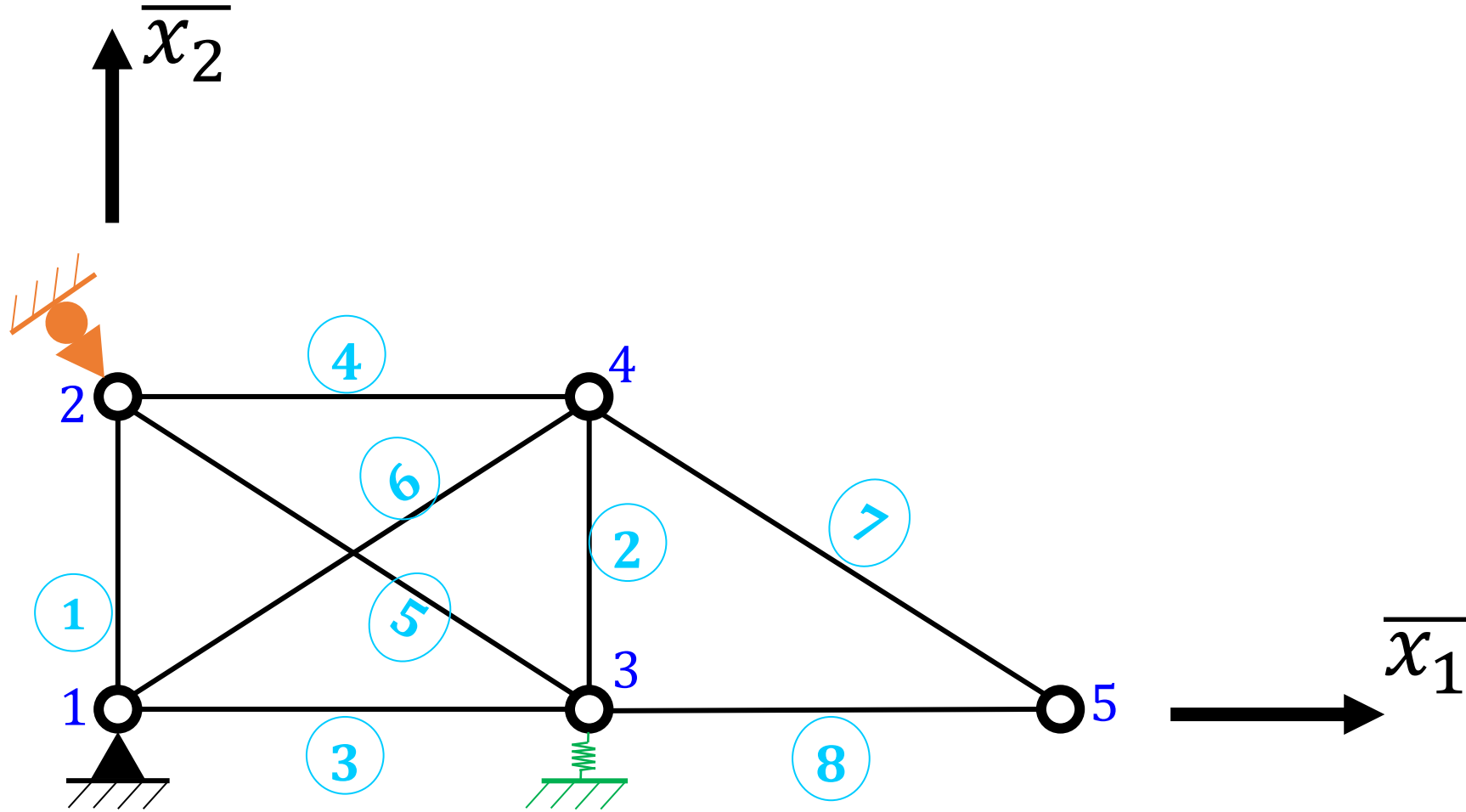
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x_1x_2}$



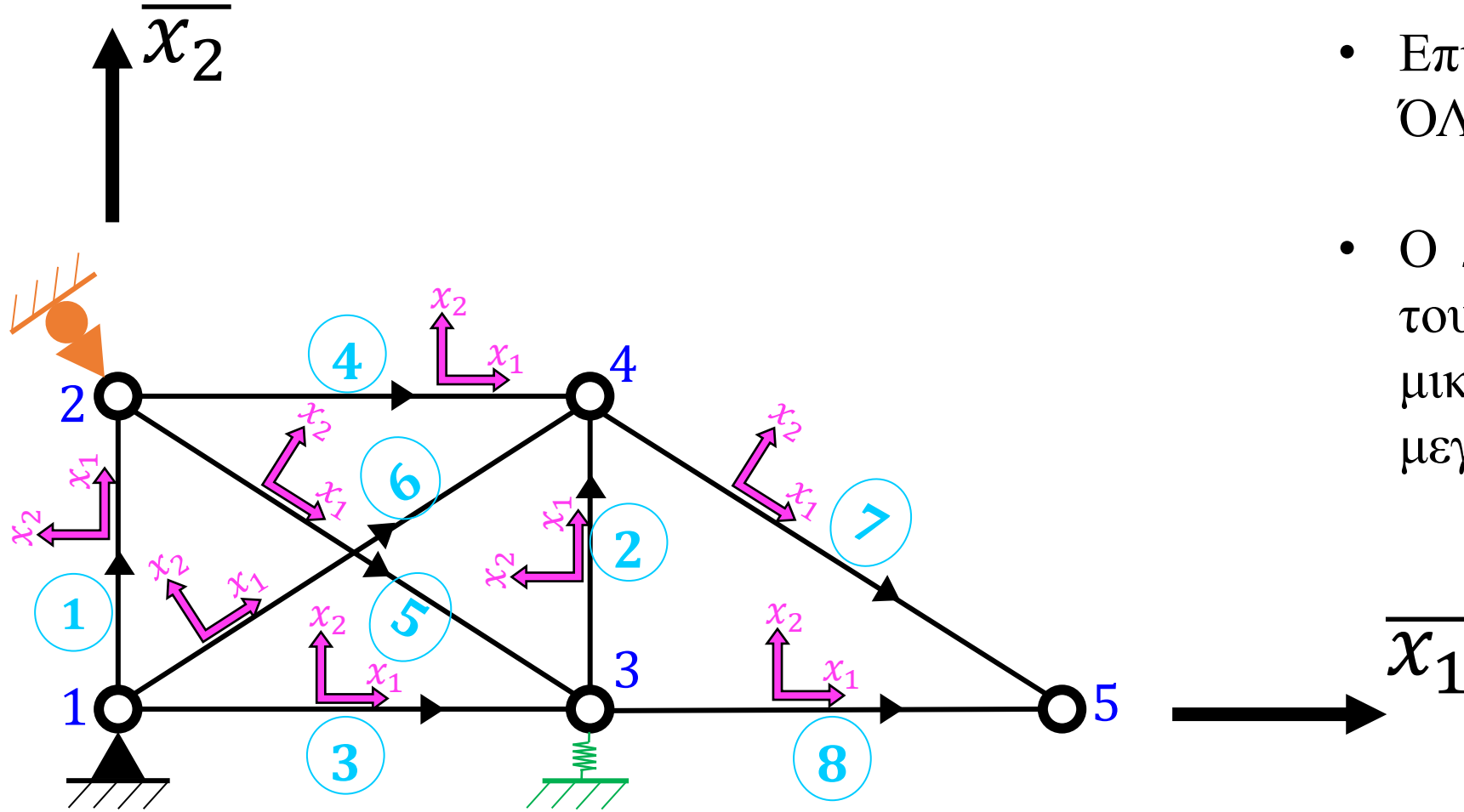
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x}_1\overline{x}_2$



ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2

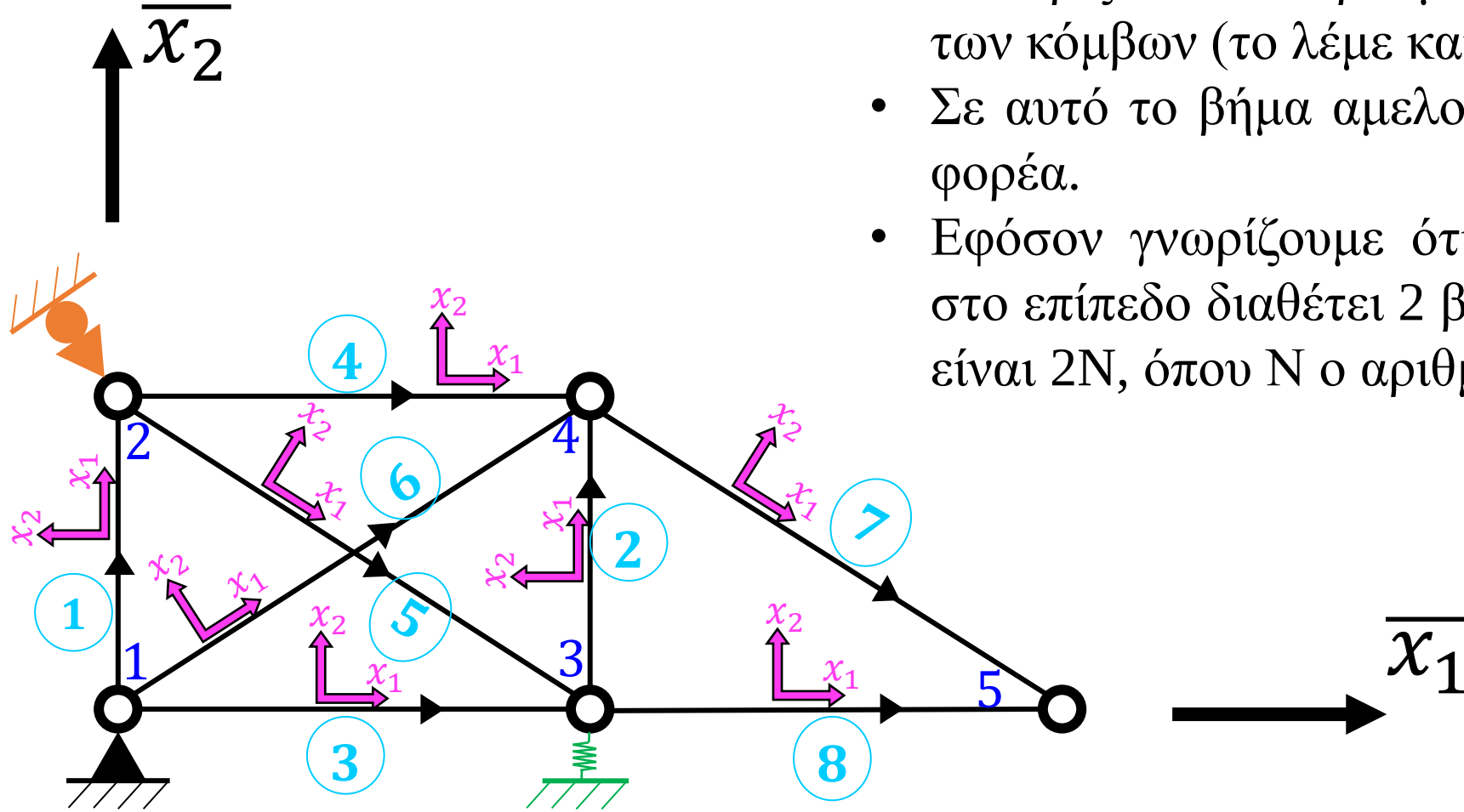


ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό !).

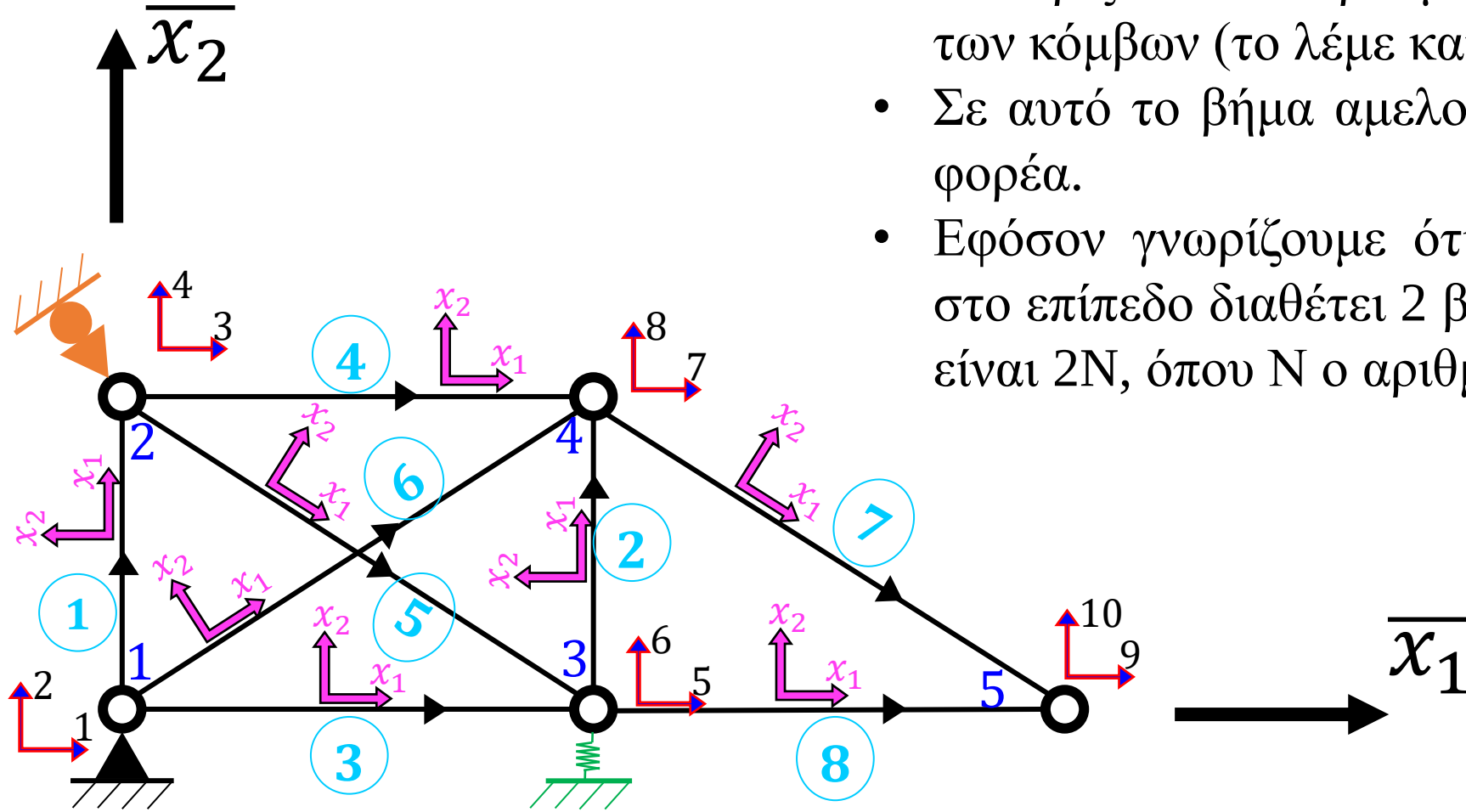
ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



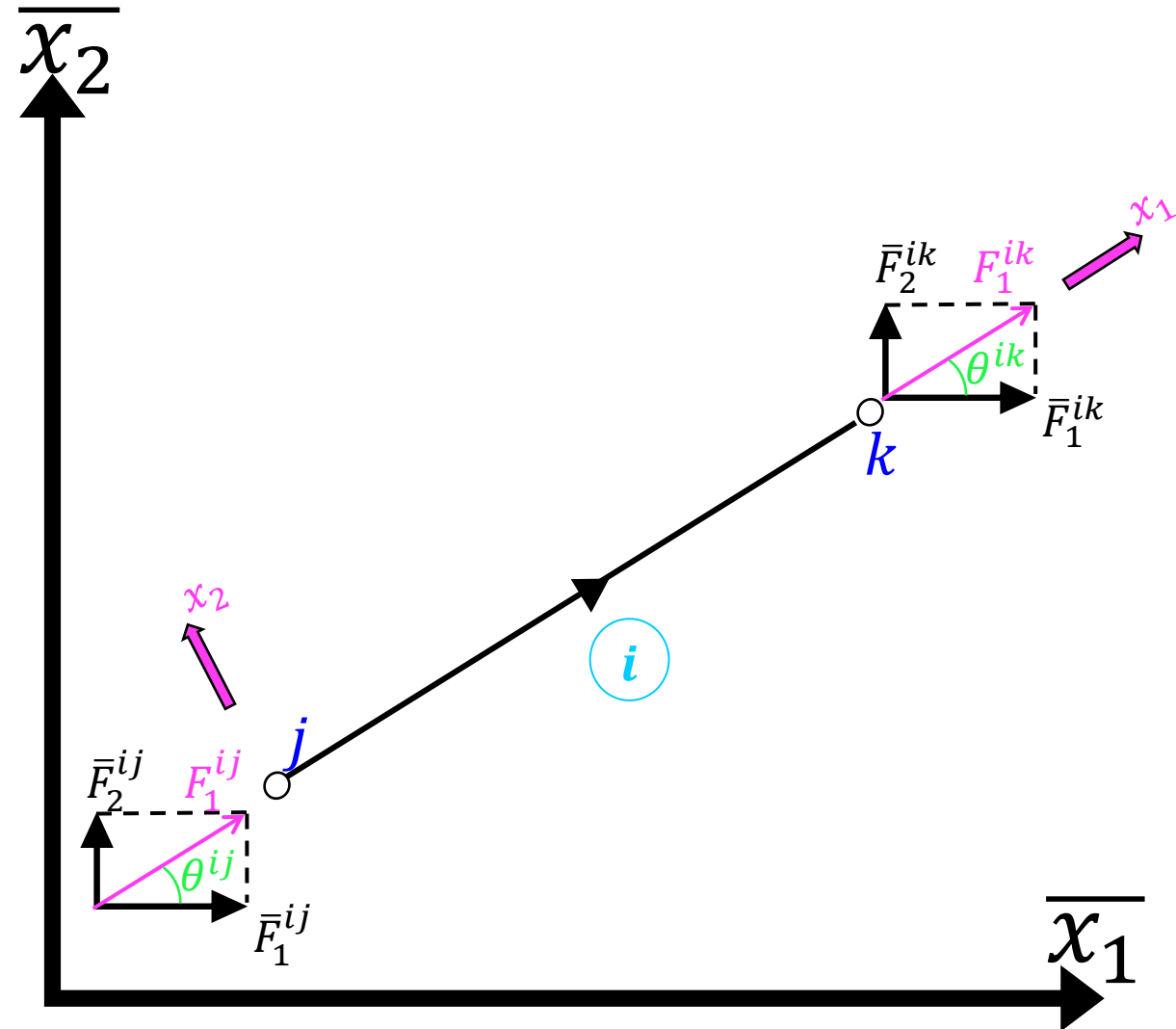
- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- Εφόσον γνωρίζουμε ότι κάθε κόμβος δικτυώματος στο επίπεδο διαθέτει 2 β.ε., τότε οι β.ε. του φορέα θα είναι $2N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων

- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- Εφόσον γνωρίζουμε ότι κάθε κόμβος δικτυώματος στο επίπεδο διαθέτει 2 β.ε., τότε οι β.ε. του φορέα θα είναι $2N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων.



BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

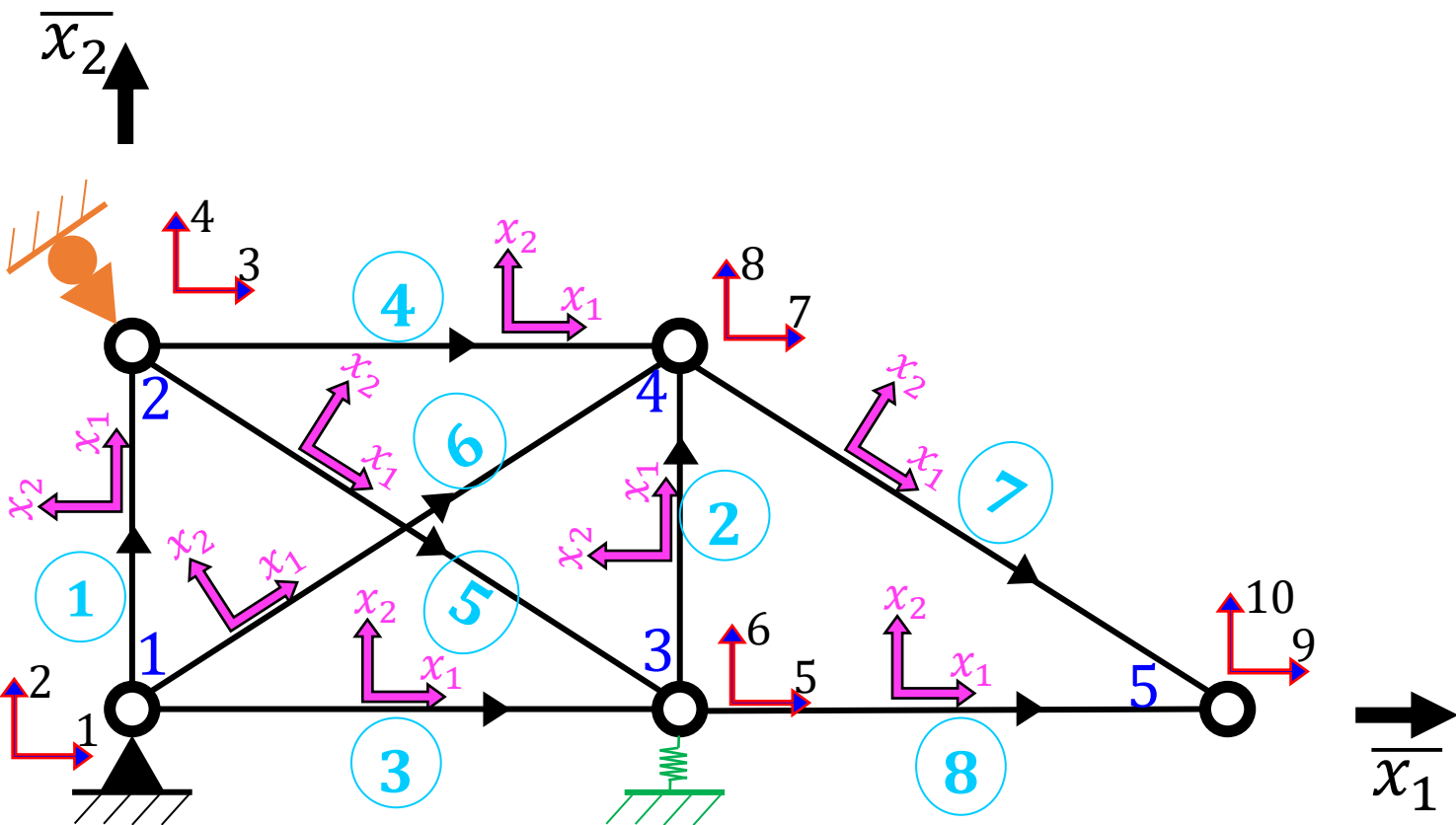


$$[\Lambda_{PT}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PT}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ \hline [\mathbf{0}] & [\Lambda_{PT}^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta^{ij} & \sin\theta^{ij} & 0 & 0 \\ -\sin\theta^{ij} & \cos\theta^{ij} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos\theta^{ik} & \sin\theta^{ik} \\ 0 & 0 & -\sin\theta^{ik} & \cos\theta^{ik} \end{bmatrix}$$

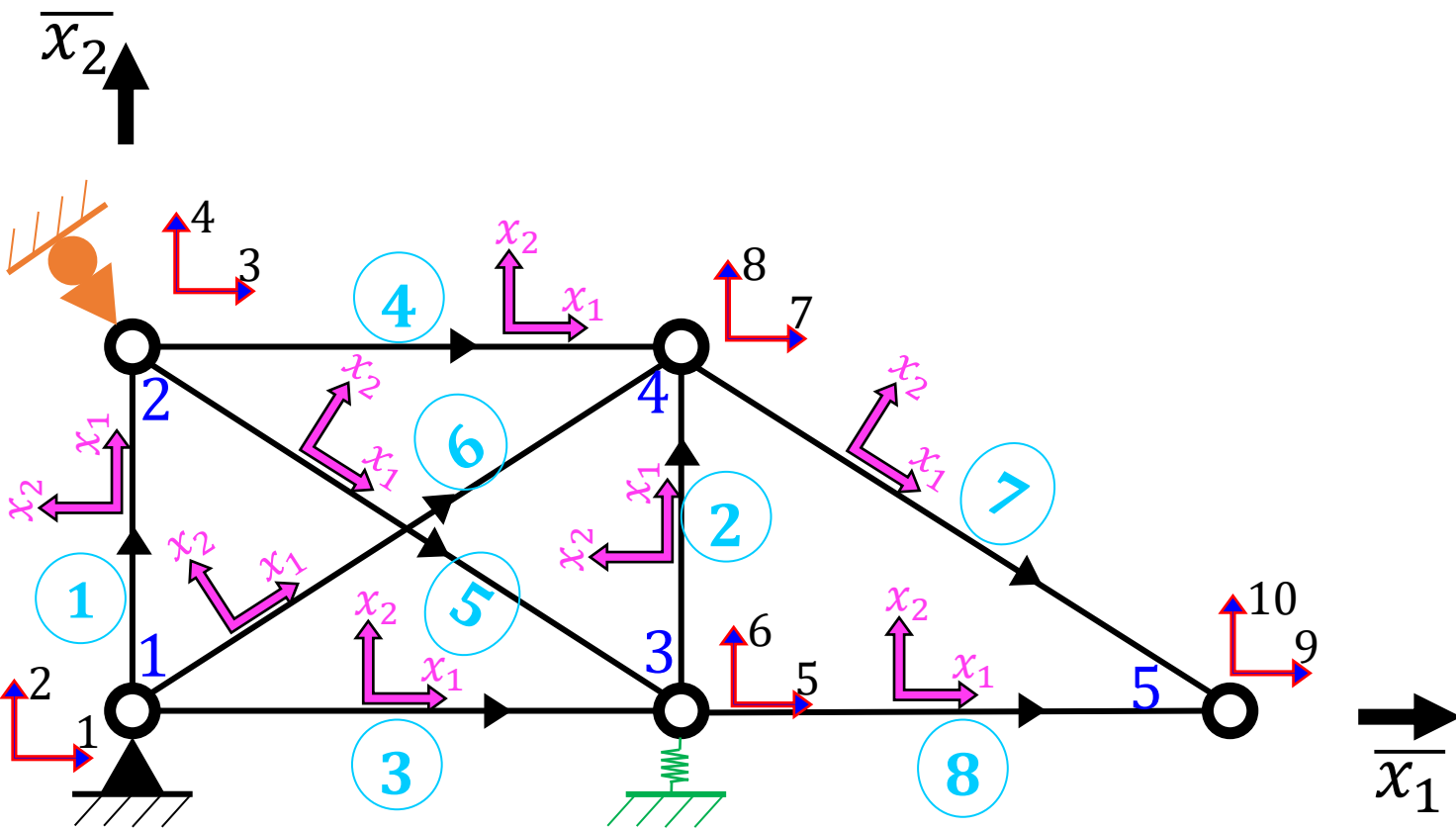
- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει: $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_{PT}^i]^{-1} = [\Lambda_{PT}^i]^T$
- Ο καθολικός $\overline{x_1}$ στρέφεται αντιστροφικά για να «βρει» τον τοπικό x_1

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



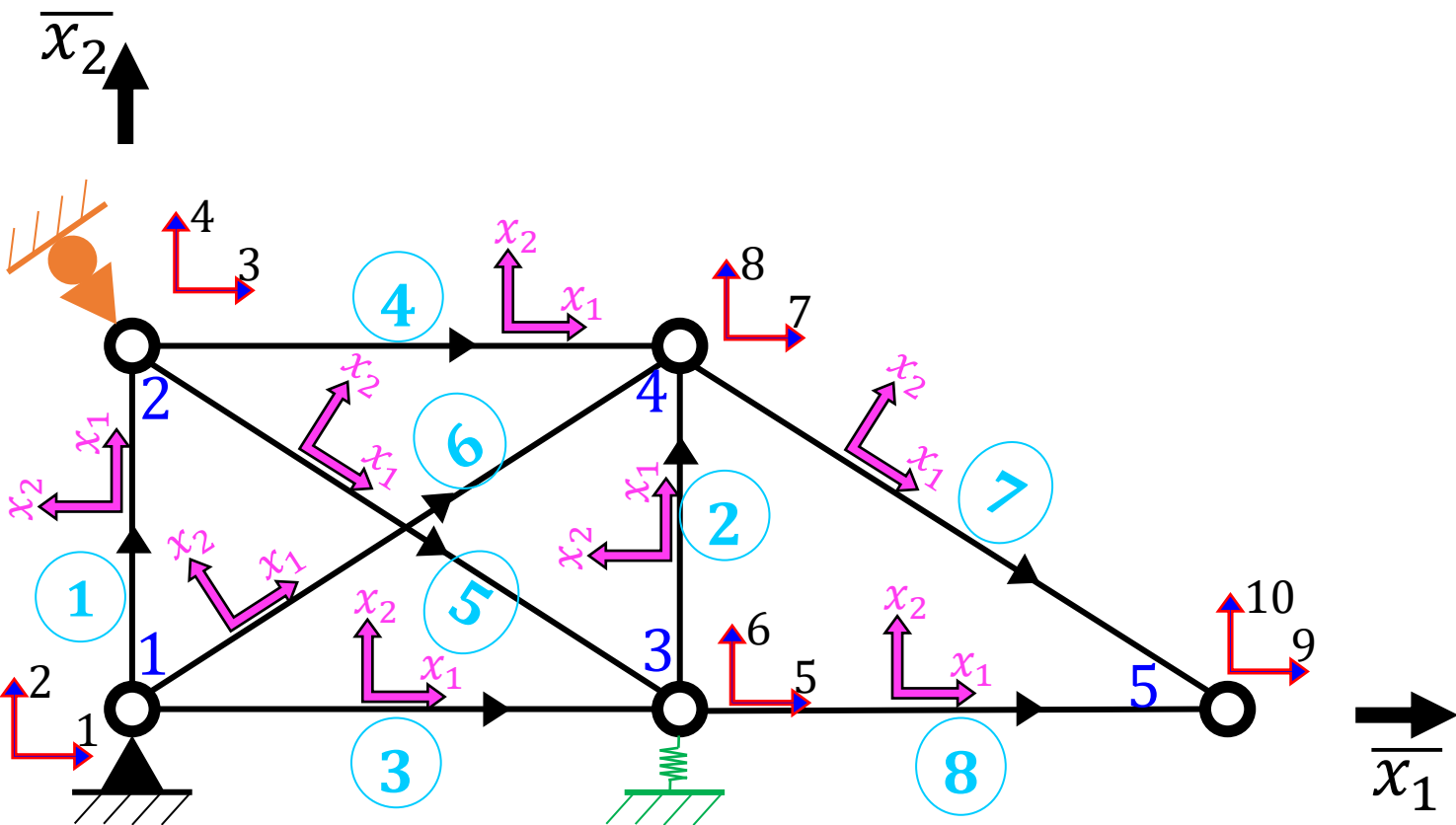
Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1			
2	90	0	1
3	0	1	0
4	0	1	0
5			
6			
7	-41.987	0.7433	-0.6690
8	0	1	0

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



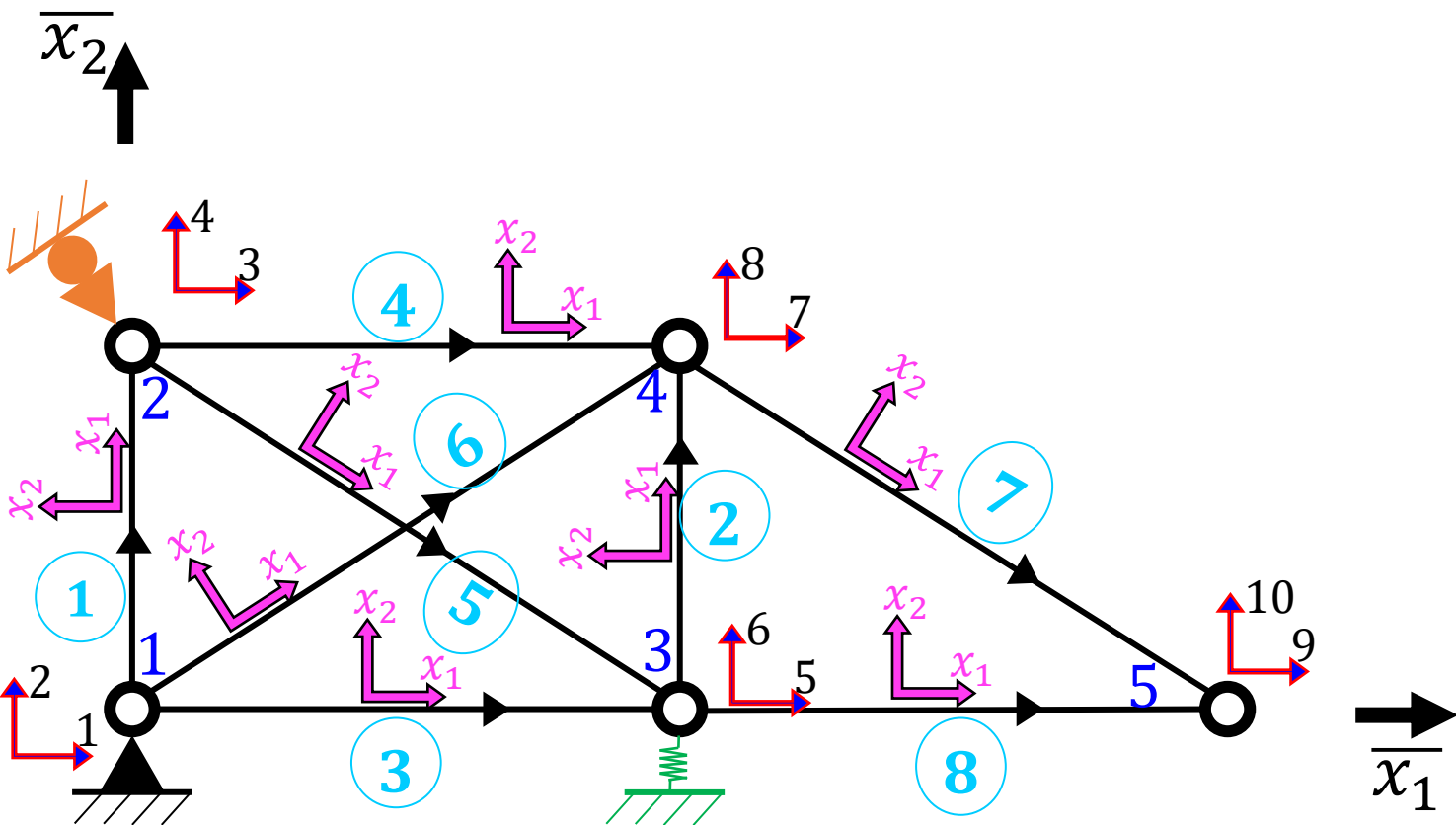
Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1	90	0	1
2	90	0	1
3	0	1	0
4	0	1	0
5			
6			
7	-41.987	0.7433	-0.6690
8	0	1	0

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(2/2)



Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1	90	0	1
2	90	0	1
3	0	1	0
4	0	1	0
5	-41.987	0.7433	-0.6690
6			
7	-41.987	0.7433	-0.6690
8	0	1	0

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(2/2)

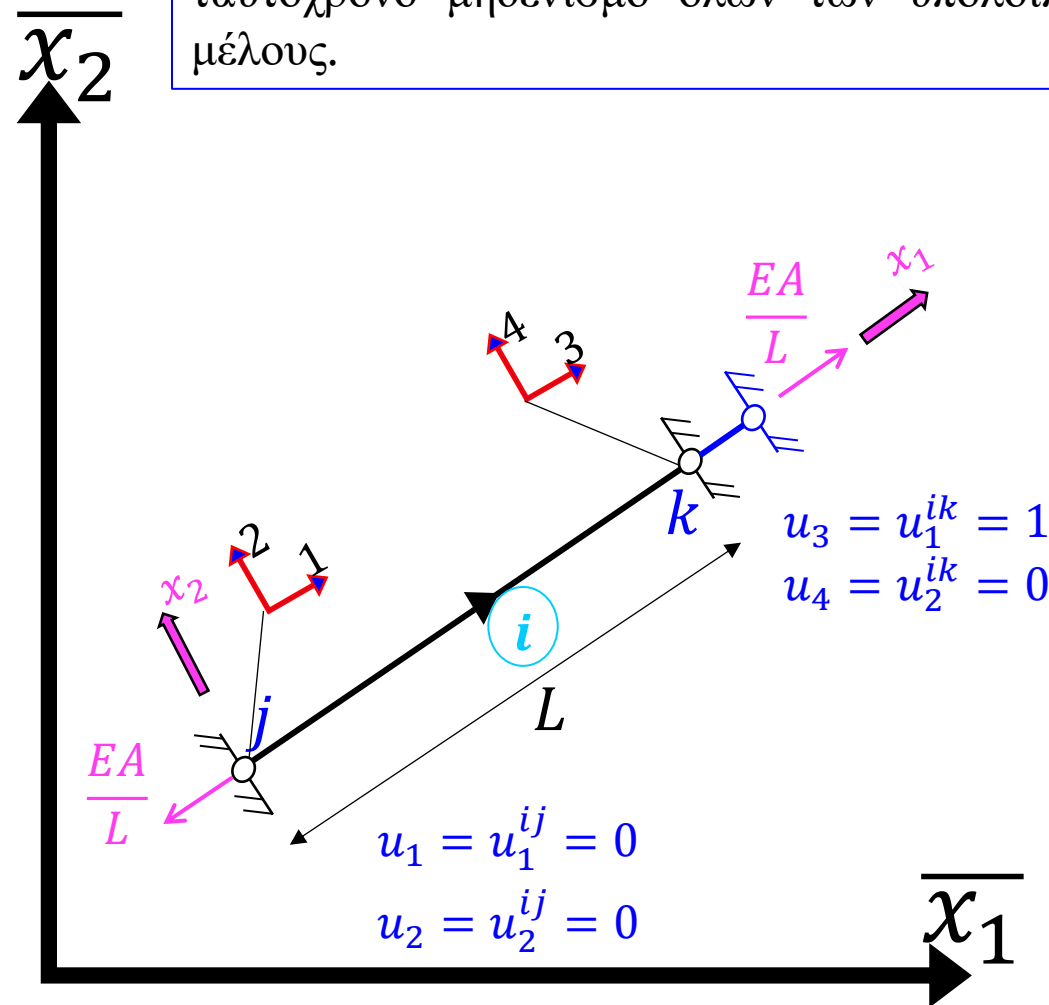


Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1	90	0	1
2	90	0	1
3	0	1	0
4	0	1	0
5	-41.987	0.7433	-0.6690
6	41.987	0.7433	0.6690
7	-41.987	0.7433	-0.6690
8	0	1	0

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον τοπικό β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον τοπικό β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.

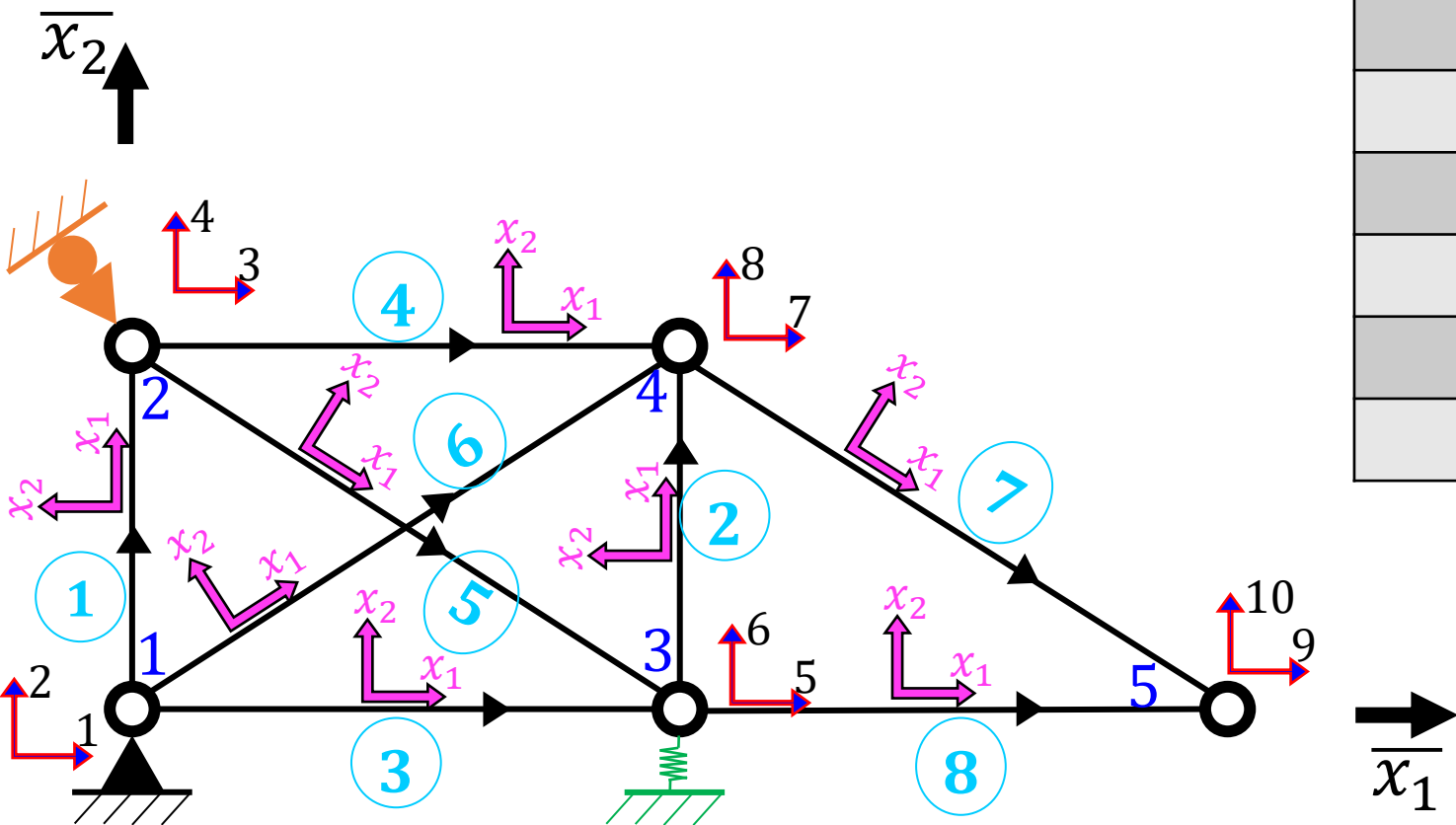
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$



	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	$E^i A^i / L^i$	0	$-E^i A^i / L^i$	0
u_2	0	0	0	0
u_3	$-E^i A^i / L^i$	0	$E^i A^i / L^i$	0
u_4	0	0	0	0

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ
ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/3)



Μέλος i	E^i [kN/m ²]	A^i [cm ²]	L^i [m]
1	2.1×10^8	10	4.5
2	2.1×10^8	10	4.5
3	2.1×10^8	10	5.0
4	2.1×10^8	10	5.0
5	2.1×10^8	5	6.7268
6	2.1×10^8	5	6.7268
7	2.1×10^8	10	6.7268
8	2.1×10^8	10	5.0

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)

$[k^1] =$

	1	2	3	4
1	4.6667e+04	0	-4.6667e+04	0
2	0	0	0	0
3	-4.6667e+04	0	4.6667e+04	0
4	0	0	0	0

$[k^5] =$

	1	2	3	4
1	1.5609e+04	0	-1.5609e+04	0
2	0	0	0	0
3	-1.5609e+04	0	1.5609e+04	0
4	0	0	0	0

$[k^2] =$

	1	2	3	4
1	4.6667e+04	0	-4.6667e+04	0
2	0	0	0	0
3	-4.6667e+04	0	4.6667e+04	0
4	0	0	0	0

$[k^6] =$

	1	2	3	4
1	1.5609e+04	0	-1.5609e+04	0
2	0	0	0	0
3	-1.5609e+04	0	1.5609e+04	0
4	0	0	0	0

$[k^3] =$

	1	2	3	4
1	42000	0	-42000	0
2	0	0	0	0
3	-42000	0	42000	0
4	0	0	0	0

$[k^7] =$

	1	2	3	4
1	3.1218e+04	0	-3.1218e+04	0
2	0	0	0	0
3	-3.1218e+04	0	3.1218e+04	0
4	0	0	0	0

$[k^4] =$

	1	2	3	4
1	42000	0	-42000	0
2	0	0	0	0
3	-42000	0	42000	0
4	0	0	0	0

$[k^8] =$

	1	2	3	4
1	42000	0	-42000	0
2	0	0	0	0
3	-42000	0	42000	0
4	0	0	0	0

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/3)

Η σχέση στιβαρότητας για ένα μέλος i στο καθολικό σύστημα γράφεται ως:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{A}^{ij}\} \\ \{\bar{A}^{ik}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^i & \bar{k}_{12}^i & \bar{k}_{13}^i & \bar{k}_{14}^i \\ \bar{k}_{21}^i & \bar{k}_{22}^i & \bar{k}_{23}^i & \bar{k}_{24}^i \\ \bar{k}_{31}^i & \bar{k}_{32}^i & \bar{k}_{33}^i & \bar{k}_{34}^i \\ \bar{k}_{41}^i & \bar{k}_{42}^i & \bar{k}_{43}^i & \bar{k}_{44}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{A}^i\} = [\bar{k}^i]\{\bar{u}^i\}$$

Ενώ στο τοπικό σύστημα:

$$\{A^i\} = [k^i]\{u^i\} \Rightarrow [\Lambda^i]\{\bar{A}^i\} = [k^i][\Lambda^i]\{\bar{u}^i\} \Rightarrow$$

$$\{\bar{A}^i\} = \underbrace{[\Lambda^i]^T [k^i] [\Lambda^i]}_{[\bar{k}^i]} \{\bar{u}^i\}$$

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/3)

Η σχέση στιβαρότητας για ένα μέλος i στο καθολικό σύστημα γράφεται ως:

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{A}^{ij}\} \\ \{\bar{A}^{ik}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{ij} \\ \bar{F}_2^{ij} \\ \bar{F}_1^{ik} \\ \bar{F}_2^{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{k}_{11}^i & \bar{k}_{12}^i & \bar{k}_{13}^i & \bar{k}_{14}^i \\ \bar{k}_{21}^i & \bar{k}_{22}^i & \bar{k}_{23}^i & \bar{k}_{24}^i \\ \bar{k}_{31}^i & \bar{k}_{32}^i & \bar{k}_{33}^i & \bar{k}_{34}^i \\ \bar{k}_{41}^i & \bar{k}_{42}^i & \bar{k}_{43}^i & \bar{k}_{44}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^{ij} \\ \bar{u}_2^{ij} \\ \bar{u}_1^{ik} \\ \bar{u}_2^{ik} \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\bar{A}^i\} = [\bar{k}^i]\{\bar{u}^i\}$$

Ενώ στο τοπικό σύστημα:

$$\{A^i\} = [k^i]\{u^i\} \Rightarrow [\Lambda^i]\{\bar{A}^i\} = [k^i][\Lambda^i]\{\bar{u}^i\} \Rightarrow$$

$$\{\bar{A}^i\} = \underbrace{[\Lambda^i]^T [k^i] [\Lambda^i]}_{[\bar{k}^i]} \{\bar{u}^i\}$$

Το τυχόν στοιχείο $\bar{k}_{mn}^i$ του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη καθολική ακραία δράση κατά τον καθολικό β.ε. m , όταν επιβληθεί MONADIAIA και MONADIKH ακραία μετακίνηση κατά τον καθολικό β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/3)



Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι συμμετρικό. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).



Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι πάντα θετικά (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$. Κατ'εξαίρεση, το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν και το αντίστοιχο καθολικό να εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις, αλλά αυτό γίνεται καθώς έχουμε θεωρήσει τέμνουσα δύναμη που (δεν ορίζεται), για να έχουμε «όμορφα και τετράγωνα» μητρώα.



Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι μηδενική. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)

$$[\bar{k}^1] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4.6667\text{e}+04 & -4.6667\text{e}+04 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4.6667\text{e}+04 & 4.6667\text{e}+04 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^2] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4.6667\text{e}+04 & -4.6667\text{e}+04 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4.6667\text{e}+04 & 4.6667\text{e}+04 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^3] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 42000 & 0 & -42000 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -42000 & 0 & 42000 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

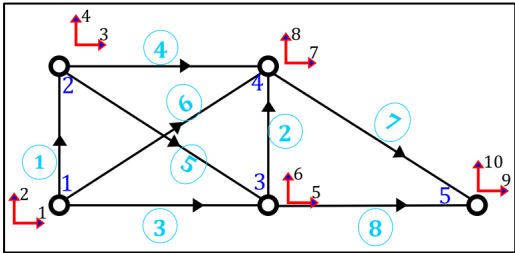
$$[\bar{k}^4] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 42000 & 0 & -42000 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -42000 & 0 & 42000 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^5] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8.6239\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 & -8.6239\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 \\ 2 & -7.7615\text{e}+03 & 6.9853\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 & -6.9853\text{e}+03 \\ 3 & -8.6239\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 & 8.6239\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 \\ 4 & 7.7615\text{e}+03 & -6.9853\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 & 6.9853\text{e}+03 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^6] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 8.6239\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 & -8.6239\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 \\ 2 & 7.7615\text{e}+03 & 6.9853\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 & -6.9853\text{e}+03 \\ 3 & -8.6239\text{e}+03 & -7.7615\text{e}+03 & 8.6239\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 \\ 4 & -7.7615\text{e}+03 & -6.9853\text{e}+03 & 7.7615\text{e}+03 & 6.9853\text{e}+03 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^7] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1.7248\text{e}+04 & -1.5523\text{e}+04 & -1.7248\text{e}+04 & 1.5523\text{e}+04 \\ 2 & -1.5523\text{e}+04 & 1.3971\text{e}+04 & 1.5523\text{e}+04 & -1.3971\text{e}+04 \\ 3 & -1.7248\text{e}+04 & 1.5523\text{e}+04 & 1.7248\text{e}+04 & -1.5523\text{e}+04 \\ 4 & 1.5523\text{e}+04 & -1.3971\text{e}+04 & -1.5523\text{e}+04 & 1.3971\text{e}+04 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[\bar{k}^8] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 42000 & 0 & -42000 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -42000 & 0 & 42000 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



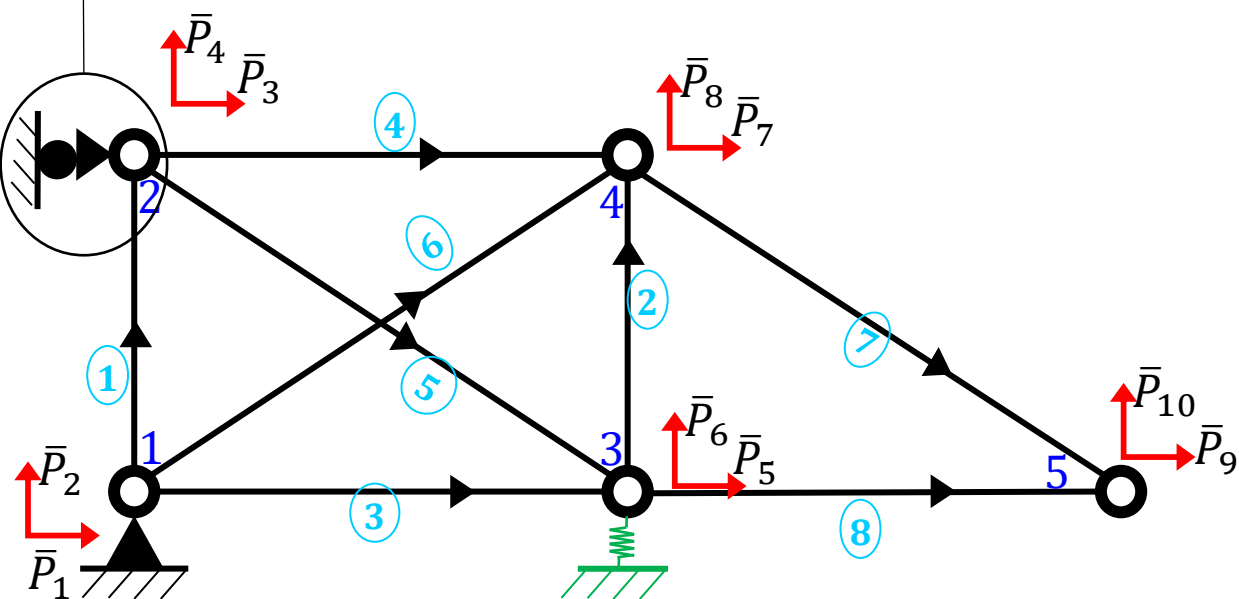
Με μαύρη αρίθμηση οι τοπικοί β.ε. του μέλους.

Με κόκκινη αρίθμηση οι αντίστοιχοι καθολικοί β.ε..

Συμβουλή: Βάζω πάντα δείκτες!

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις

Αγνοώ προσωρινά την λοξή στήριξη καθώς και τα ενδιάμεσα φορτία, και μορφώνω τα καθολικά διανύσματα επικόμβιων μετατοπίσεων και δράσεων (δυνάμεων), $\{\bar{\Delta}\}$ και $\{\bar{F}\}$, αντίστοιχα ως:



$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_1^{(5)} \\ \bar{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1^{(1)} \\ \bar{F}_2^{(1)} \\ \bar{F}_1^{(2)} \\ \bar{F}_2^{(2)} \\ \bar{F}_1^{(3)} \\ \bar{F}_2^{(3)} \\ \bar{F}_1^{(4)} \\ \bar{F}_2^{(4)} \\ \bar{F}_1^{(5)} \\ \bar{F}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{F}_4 \\ \bar{F}_5 \\ \bar{F}_6 \\ \bar{F}_7 \\ \bar{F}_8 \\ \bar{F}_9 \\ \bar{F}_{10} \end{Bmatrix}$$

2^{ος} τρόπος γραφής: $\bar{\Delta}$ αύξων αριθμός β.ε.
 1^{ος} τρόπος γραφής: $\bar{\Delta}$ (αύξων αριθμός κόμβου) καθολικός άξονας β.ε.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (1/5)

Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο »

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου δικτυώματος βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετατοπίσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με

τη βοήθεια της σχέσης: $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PT}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PT}^i]$,

με τη μορφή: $[\bar{k}^i] = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix}$, επιμερίζοντας δηλαδή το μητρώο αυτό

σε 4 **υπομητρώα** διάστασης 2x2.

2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί για όλα τα μέλη του δικτυώματος, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/5)

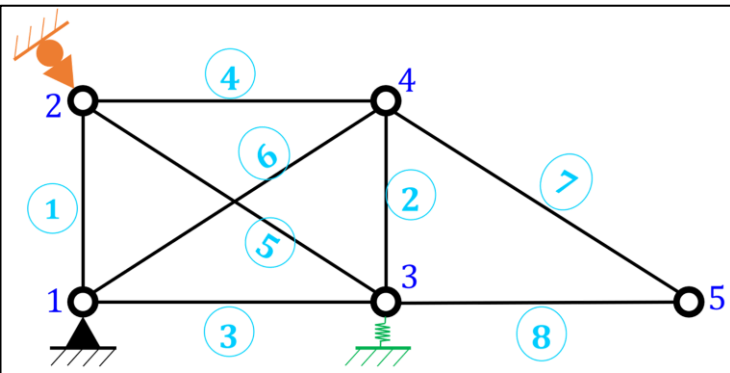
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο »

Πως μεταφέρονται τα καθολικά υπομητρώα μέλους $[\bar{k}_{jj}^i]$, $[\bar{k}_{jk}^i]$, $[\bar{k}_{kj}^i]$, $[\bar{k}_{kk}^i]$ στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα:

1. Το $[\bar{k}_{jj}^i]$ τοποθετείται στην **γραμμή** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβο αρχής** και **στήλη** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβου αρχής** του μέλους.
2. Το $[\bar{k}_{jk}^i]$ τοποθετείται στην **γραμμή** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβο αρχής** και **στήλη** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβου πέρατος** του μέλους.
3. Το $[\bar{k}_{kj}^i]$ τοποθετείται στην **γραμμή** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβο πέρατος** και **στήλη** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβου αρχής** του μέλους.
4. Το $[\bar{k}_{kk}^i]$ τοποθετείται στην **γραμμή** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβο πέρατος** και **στήλη** με αριθμό τον αριθμό του **κόμβου πέρατος** του μέλους.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

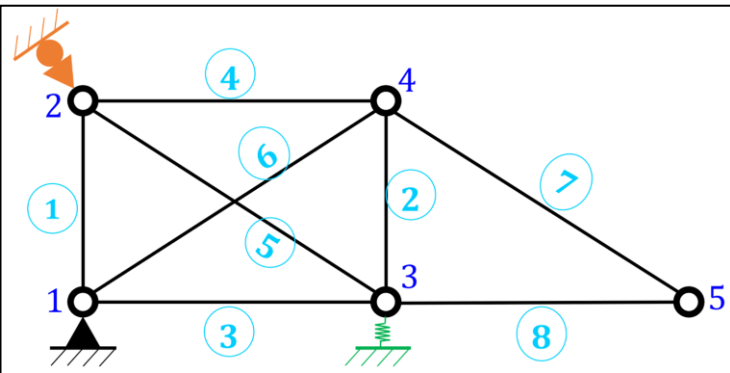
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

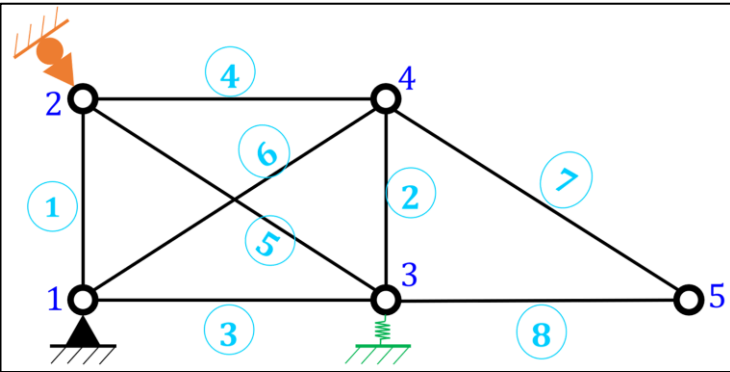
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

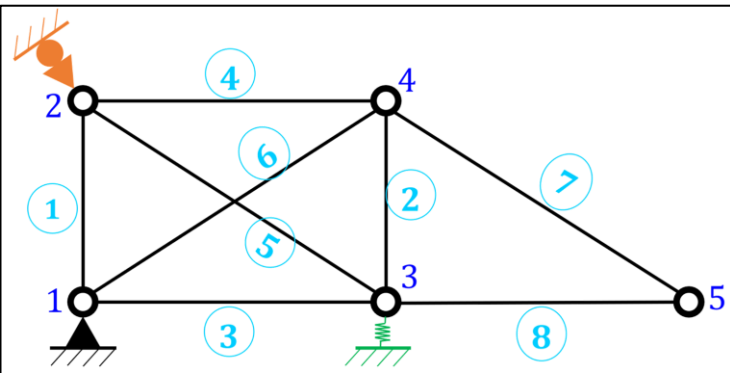
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

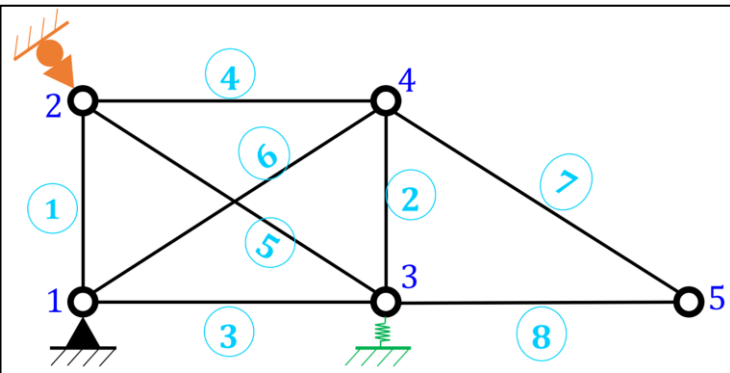
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

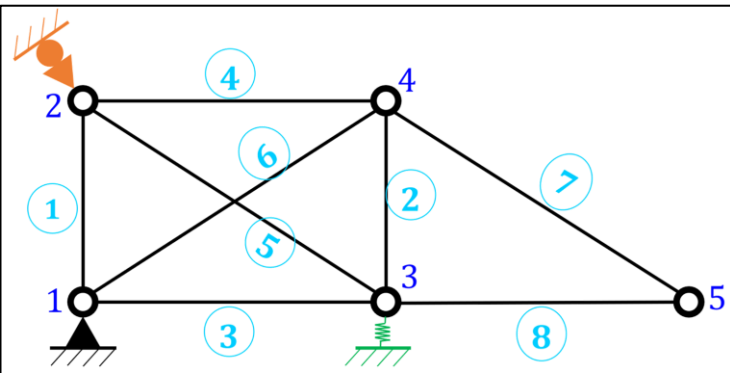
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

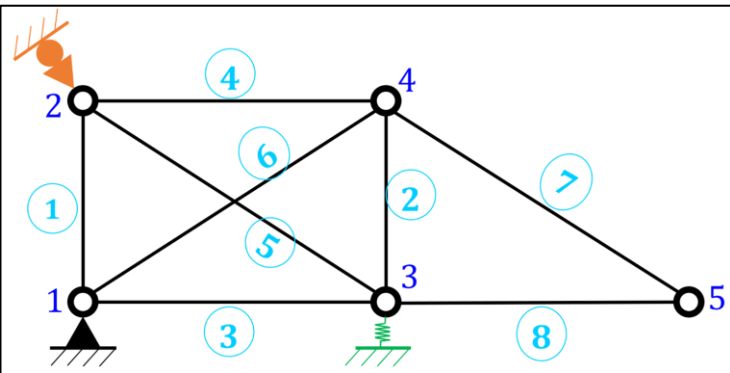
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

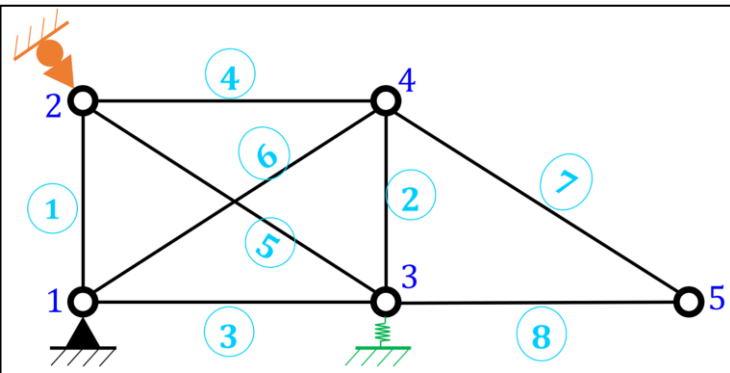
Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/5)

Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο»



	#1	#2	#3	#4	#5
#1	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#2	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$
#3	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^8 \end{bmatrix}$
#4	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{jk}^7 \end{bmatrix}$
#5	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^8 \end{bmatrix}$

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (4/5)

Α' μέθοδος:
«κόμβο - κόμβο »

$[\bar{K}] =$

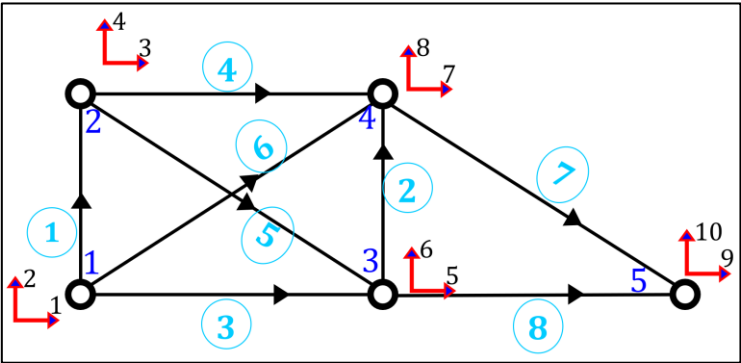
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.0624e+04	7.7615e+03	0	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0
2	7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0
3	0	0	5.0624e+04	-7.7615e+03	-8.6239e+03	7.7615e+03	-42000	0	0	0
4	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	5.3652e+04	7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	0
5	-42000	0	-8.6239e+03	7.7615e+03	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0
6	0	0	7.7615e+03	-6.9853e+03	-7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0
7	-8.6239e+03	-7.7615e+03	-42000	0	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	0	0	0	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04
10	0	0	0	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (5/5)

Β' μέθοδος:
«β.ε. – β.ε.»

Εναλλακτικά, μπορώ να συνθέσω το μητρώο στιβαρότητας βαθμό ελευθερίας – βαθμό ελευθερίας.

Εδώ βοηθάει πολύ να έχω βάλει δείκτες β.ε. στα μητρώα των επιμέρους μελών!



Για παράδειγμα, για τον β.ε. 9:

$[\bar{k}^7] =$

	7	8	9	10
7	1.7248e+04	-1.5523e+04	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-1.5523e+04	1.3971e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	-1.7248e+04	1.5523e+04	1.7248e+04	-1.5523e+04
10	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

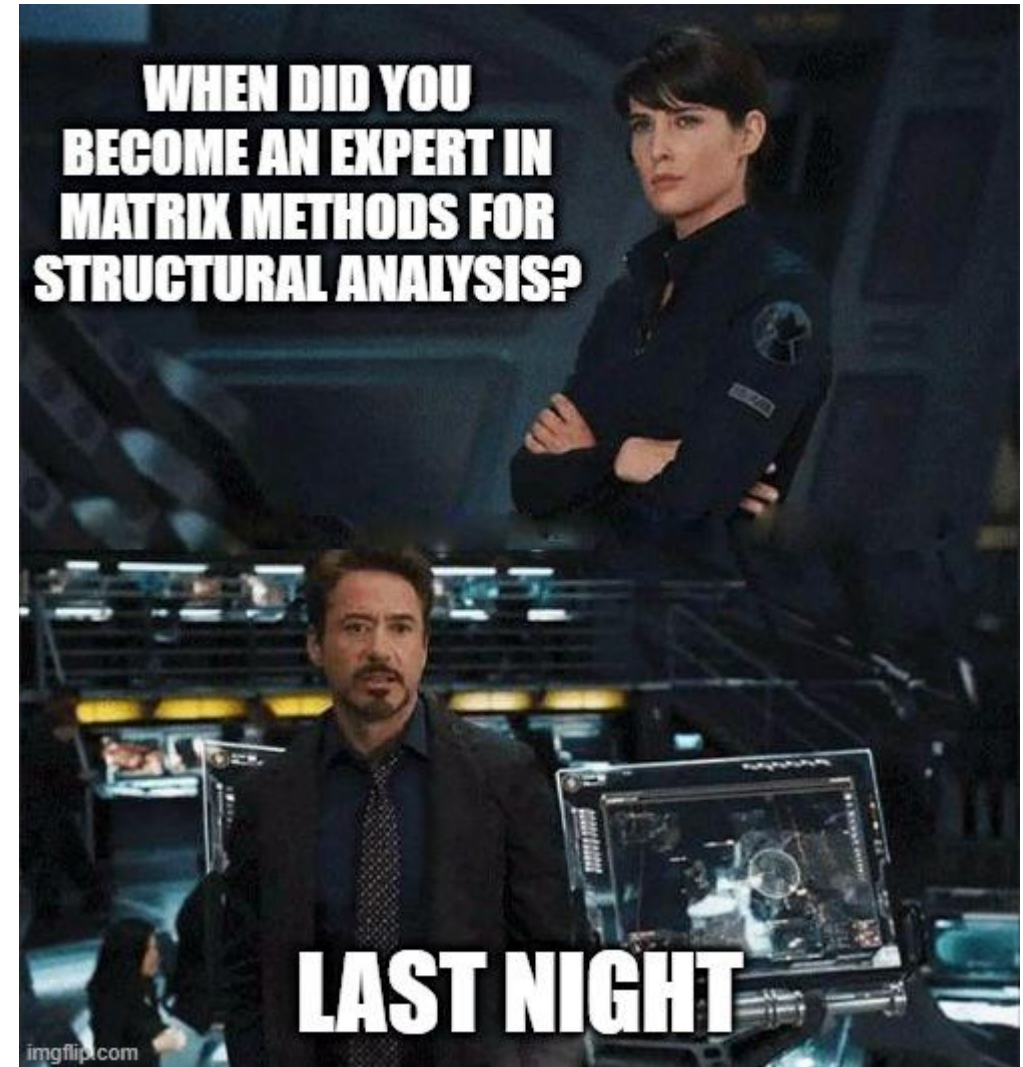
$[\bar{k}^8] =$

	5	6	9	10
5	42000	0	-42000	0
6	0	0	0	0
9	-42000	0	42000	0
10	0	0	0	0

$[\bar{K}] =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.0624e+04	7.7615e+03	0	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0
2	7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0
3	0	0	5.0624e+04	-7.7615e+03	-8.6239e+03	7.7615e+03	-42000	0	0	0
4	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	5.3652e+04	7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	0
5	-42000	0	-8.6239e+03	7.7615e+03	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0
6	0	0	7.7615e+03	-6.9853e+03	-7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0
7	-8.6239e+03	-7.7615e+03	-42000	0	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	0	0	0	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04
10	0	0	0	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

Τα υπόλοιπα την ερχόμενη εβδομάδα!



ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (1/5)

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

Αν έχω δουλέψει κόμβο – κόμβο:

- Βρίσκω το υπομητρώ του καθολικού μητρώου στιβαρότητας που αντιστοιχεί στον κόμβο με την ελαστική στήριξη → **κόμβος 3**
- Ανάλογα με τη διεύθυνση του ελατηρίου μορφώνω ένα υπομητρώο στιβαρότητας που αφορά μόνο τη δυσκαμψία του ελατηρίου

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{el} \end{bmatrix}$$

(προφανώς εαν η ελαστική στήριξη δεν είχε τη διεύθυνση κάποιου καθολικού β.ε. της κατασκευής, τότε θα έπρεπε να αναλύσω σε συνιστώσες!)

- Τέλος, προσθέτω αυτό το μητρώο δυσκαμψίας στο υπομητρώο $[\bar{K}]_{33}$

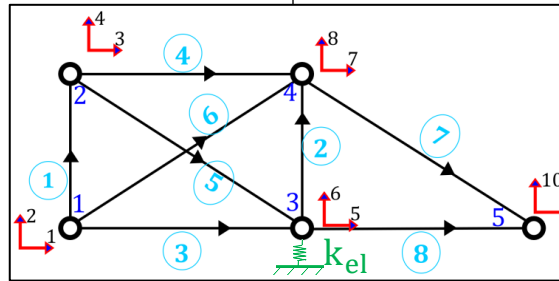
$$[\bar{K}_m]_{33} = [\bar{K}]_{33} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{el} \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Αν έχω δουλέψει β.ε. – β.ε.:

- Βρίσκω τον/τους β.ε. στους οποίους «συνεισφέρει» το ελατήριο → **β.ε. 6**
- Παω στην/στις θέσεις του καθολικού μητρώου στιβαρότητας της κατασκευής που αντιστοιχούν σε αυτούς τους β.ε. προσθέτω τη δυσκαμψία του ελατηρίου.

(πάλι προσέχω εαν η ελαστική στήριξη είναι λοξή, οπότε και προσθέτω την κατάλληλη ποσότητα.)

$$[\bar{K}_m]_{6-6} = [\bar{K}]_{6-6} + k_{el}$$



ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (1/5)

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

$[\bar{K}] =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.0624e+04	7.7615e+03	0	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0
2	7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0
3	0	0	5.0624e+04	-7.7615e+03	-8.6239e+03	7.7615e+03	-42000	0	0	0
4	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	5.3652e+04	7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	0
5	-42000	0	-8.6239e+03	7.7615e+03	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0
6	0	0	7.7615e+03	-6.9853e+03	-7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0
7	-8.6239e+03	-7.7615e+03	-42000	0	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	0	0	0	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04
10	0	0	0	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

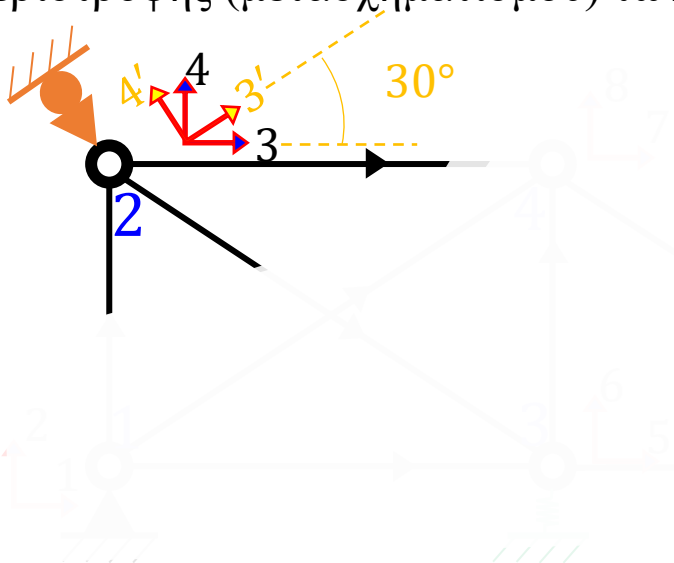
$[\bar{K}_m] =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.0624e+04	7.7615e+03	0	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0
2	7.7615e+03	5.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0
3	0	0	5.0624e+04	-7.7615e+03	-8.6239e+03	7.7615e+03	-42000	0	0	0
4	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	5.3652e+04	7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	0
5	-42000	0	-8.6239e+03	7.7615e+03	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0
6	0	0	7.7615e+03	-6.9853e+03	-7.7615e+03	8.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0
7	-8.6239e+03	-7.7615e+03	-42000	0	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	0	0	0	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04
10	0	0	0	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

(2/5)

ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

Μητρώο περιστροφής (μετασχηματισμού) των επικόμβιων δράσεων/μετατοπίσεων του κόμβου 2:



$$[r^2] = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

Ένταξη του μητρώου περιστροφής του κόμβου 2 στο μητρώο περιστροφής του φορέα:

[illegible]

$$[R^2] =$$

BHMA 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (3/5)

ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

$$[\bar{K}_{mm}] = [R^2][\bar{K}_m][R^2]^T =$$

	1	2	3'	4'	5	6	7	8	9	10
1	5.0624e+04	7.7615e+03	0	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0
2	7.7615e+03	5.3652e+04	-2.3333e+04	-4.0415e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0
3'	0	-2.3333e+04	4.4659e+04	-2.5695e+03	-3.5877e+03	3.2290e+03	-3.6373e+04	0	0	0
4'	0	-4.0415e+04	-2.5695e+03	5.9617e+04	1.1034e+04	-9.9302e+03	2.1000e+04	0	0	0
5	-42000	0	-3.5877e+03	1.1034e+04	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0
6	0	0	3.2290e+03	-9.9302e+03	-7.7615e+03	8.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0
7	-8.6239e+03	-7.7615e+03	-3.6373e+04	2.1000e+04	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04
8	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04
9	0	0	0	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04
10	0	0	0	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (4/5)

iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες δράσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. $3'$ και $4'$.

$$\{\bar{P}_m\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{P}_{1'}^{(2)} \\ \bar{P}_{2'}^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{P}_1^{(5)} \\ \bar{P}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_{3'} \\ \bar{P}_{4'} \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ P \\ \bar{R}_{4'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (5/5)

iv) Τροποποίηση μετατοπίσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες μετατοπίσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. 3' και 4'.

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta}_1^{(1)} \\ \overline{\Delta}_2^{(1)} \\ \overline{\Delta}_{1'}^{(2)} \\ \overline{\Delta}_{2'}^{(2)} \\ \overline{\Delta}_1^{(3)} \\ \overline{\Delta}_2^{(3)} \\ \overline{\Delta}_1^{(4)} \\ \overline{\Delta}_2^{(4)} \\ \overline{\Delta}_1^{(5)} \\ \overline{\Delta}_2^{(5)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_{4'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.02 \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ 0 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix}$$

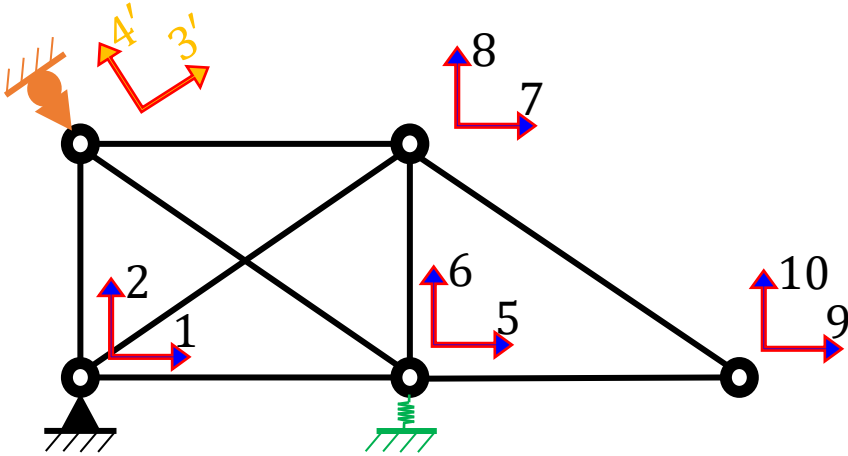
ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/6)

Στόχος μας είναι να φέρουμε τα διανύσματα/μητρώα που περιγράφουν τον φορέα μας σε μια μορφή όπου πρώτα θα εμφανίζονται οι ελεύθεροι β.ε. και μετά οι δεσμευμένοι.

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/6)



Μητρώο αναδιάταξης δικτύματος

$$\begin{array}{c}
 \text{Ελεύθεροι} \\
 \text{Free}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3' \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3' \\
 4' \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 9 \\
 10
 \end{array}$$

[V]

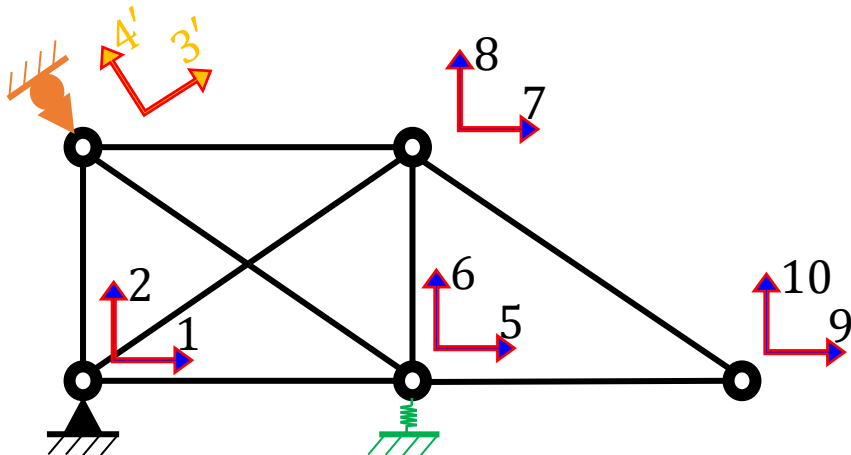
Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων δικτύματος:

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/6)

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων δικτυώματος:

$$\{\bar{P}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}_m\} \quad \{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\}$$



$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{3'} \\ \bar{P}_5 \\ \bar{P}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{P}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \hline \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2P \\ -4.330P \\ -2.5P \\ \hline \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{4'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{4'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \hline 0 \\ -0.02 \\ 0 \end{bmatrix}$$

BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(4/6)

Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\bar{K}_{mmm}] = [V][\bar{K}_{mm}][V]^T = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} =$$

	3'	5	6	7	8	9	10	1	2	4'
3'	4.4659e+04	-3.5877e+03	3.2290e+03	-3.6373e+04	0	0	0	0	-2.3333e+04	-2.5695e+03
5	-3.5877e+03	9.2624e+04	-7.7615e+03	0	0	-42000	0	-42000	0	1.1034e+04
6	3.2290e+03	-7.7615e+03	8.3652e+04	0	-4.6667e+04	0	0	0	0	-9.9302e+03
7	-3.6373e+04	0	0	6.7872e+04	-7.7615e+03	-1.7248e+04	1.5523e+04	-8.6239e+03	-7.7615e+03	2.1000e+04
8	0	0	-4.6667e+04	-7.7615e+03	6.7623e+04	1.5523e+04	-1.3971e+04	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0
9	0	-42000	0	-1.7248e+04	1.5523e+04	5.9248e+04	-1.5523e+04	0	0	0
10	0	0	0	1.5523e+04	-1.3971e+04	-1.5523e+04	1.3971e+04	0	0	0
1	0	-42000	0	-8.6239e+03	-7.7615e+03	0	0	5.0624e+04	7.7615e+03	0
2	-2.3333e+04	0	0	-7.7615e+03	-6.9853e+03	0	0	7.7615e+03	5.3652e+04	-4.0415e+04
4'	-2.5695e+03	1.1034e+04	-9.9302e+03	2.1000e+04	0	0	0	0	-4.0415e+04	5.9617e+04

$[\bar{K}_{ff}]$	$[\bar{K}_{fs}]$
$[\bar{K}_{sf}]$	$[\bar{K}_{ss}]$

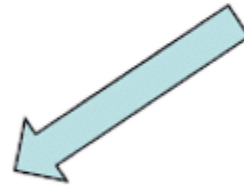
ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(5/6)

$$\begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \{\bar{P}_f\} &= [\bar{K}_{ff}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \{\bar{\Delta}_f\} &= [\bar{K}_{ff}]^{-1} \left(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\} \right) \\ \{\bar{P}_s\} &= [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\} \end{aligned}$$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(6/6)

Υπολογισμός μετατοπίσεων ελεύθερων β.ε.: $\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\})$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \end{Bmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline -0.0212 \\ \hline -0.0093 \\ \hline -0.0052 \\ \hline -0.0141 \\ \hline -0.0093 \\ \hline -0.0178 \\ \hline -0.0223 \\ \hline \end{array}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αυτή θα ήταν η λύση αν δεν είχαμε ενδιάμεσα φορτία...

Πάμε να δούμε πως τα αντιμετωπίζουμε κι αυτά ..

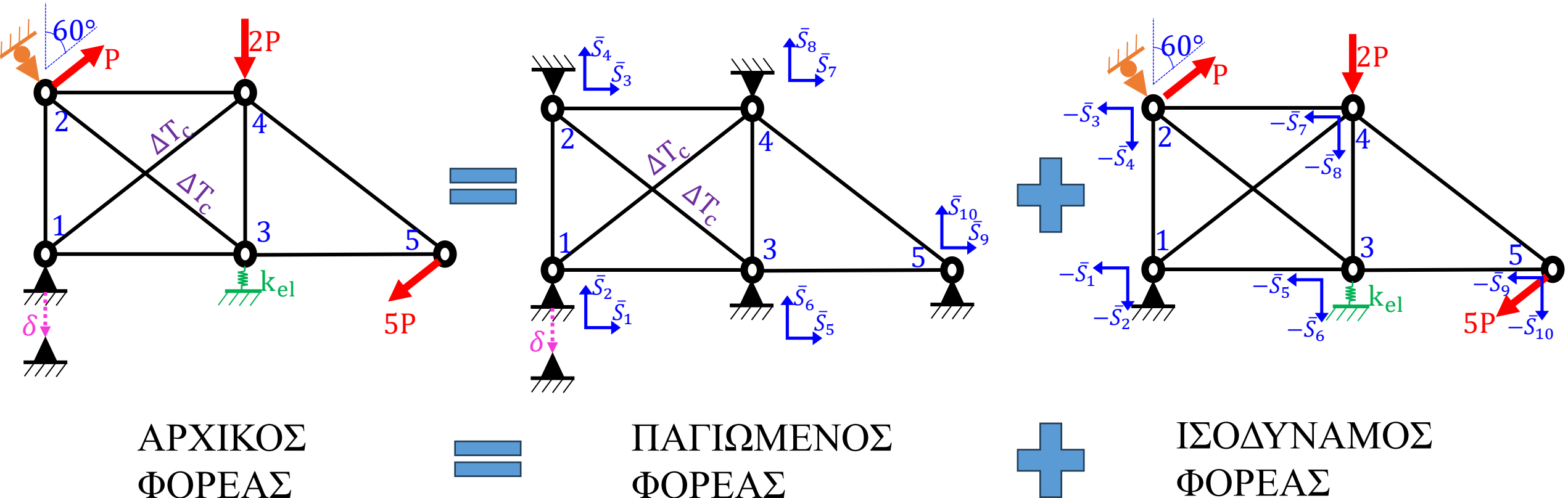


Υπολογισμός δράσεων κατά τους δεσμευμένους β.ε.: $\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\}$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{array}{|c|} \hline 430.7126 \\ \hline -403.2305 \\ \hline 515.0150 \\ \hline \end{array}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (1/8)

ι) Κατασκευή Παγιωμένων και Ισοδύναμου Φορέα

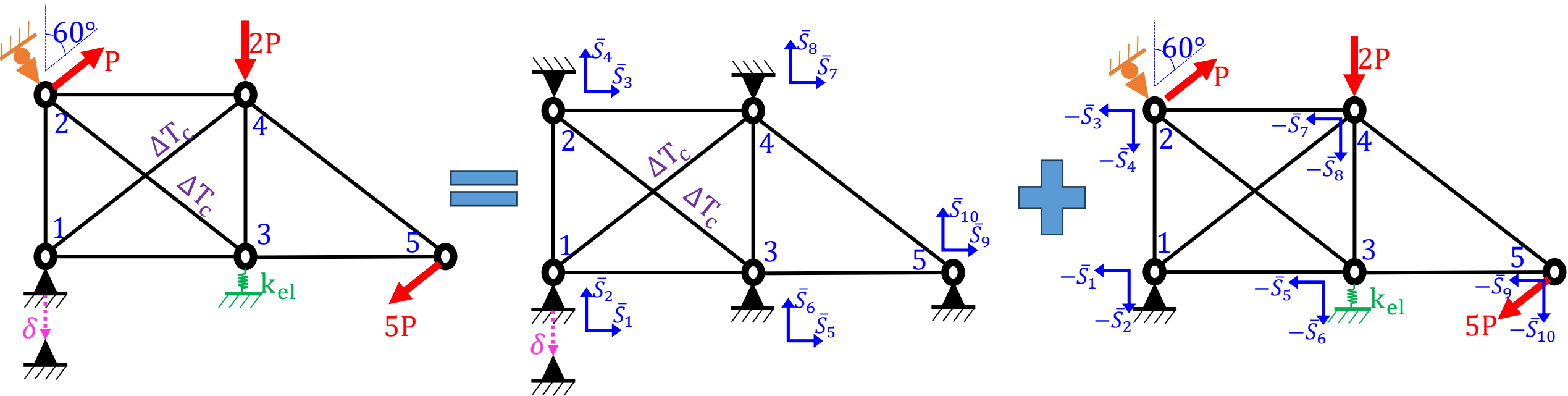


- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία (ΔT_c , δ)

- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις $\rightarrow$ ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (2/8)

ι) Κατασκευή **Παγιωμένου** και **Ισοδύναμου** Φορέα



• Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.



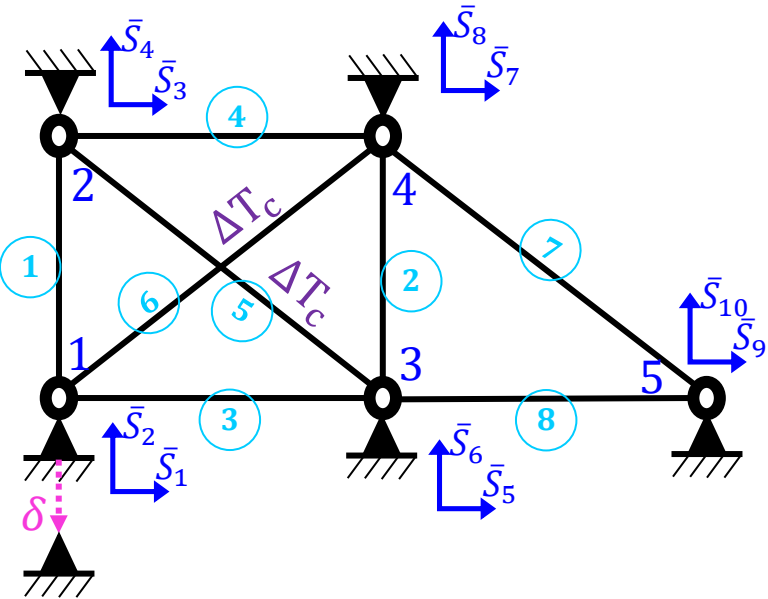
• Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.



• Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (3/8)

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών και υποχώρησης στήριξης



- Τα μέλη 5 και 6 υποβάλλονται σε κεντροβαρική θερμοκρασιακή μεταβολή $\Delta T_c = T - T_0$:

$$\{A_r^5\}_T = \begin{Bmatrix} \{A_r^{5j}\} \\ \{A_r^{5k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\Delta T_c E^5 A^5 \\ 0 \\ -a\Delta T_c E^5 A^5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.7500 \\ 0 \\ -15.7500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^6\}_T = \begin{Bmatrix} \{A_r^{6j}\} \\ \{A_r^{6k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a\Delta T_c E^6 A^6 \\ 0 \\ -a\Delta T_c E^6 A^6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15.7500 \\ 0 \\ -15.7500 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

! Προσοχή: λαμβάνω την υποχώρηση στήριξης ΜΙΑ φορά. Είτε στον παγιωμένο φορέα είτε απευθείας στο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του φορέα.

- Τα μέλη 1 και 6 εντείνονται από την υποχώρηση στήριξης: $(\delta^1 = 2cm)$, $(\delta^6 = 2 \sin \theta^6)$

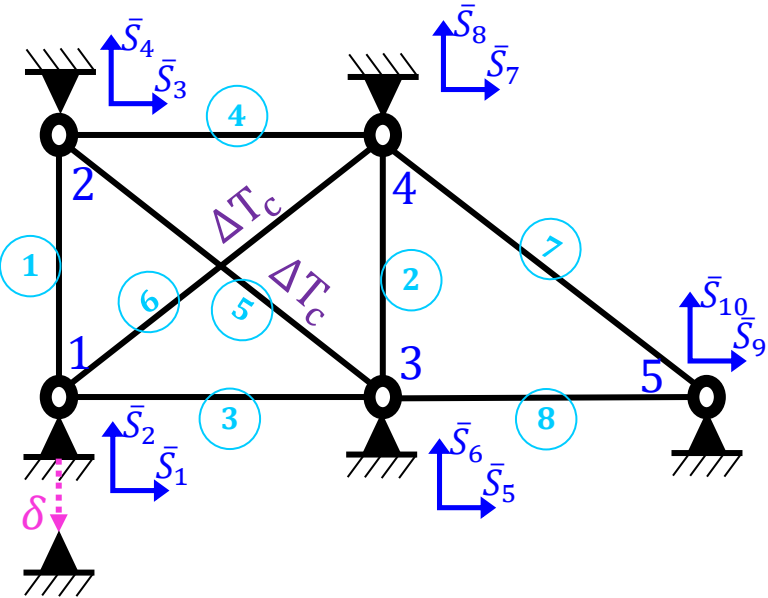
$$\{A_r^1\}_\delta = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^1 E^1 A^1 / L^1 \\ 0 \\ -\delta^1 E^1 A^1 / L^1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -933.3333 \\ 0 \\ 933.3333 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A_r^6\}_\delta = \begin{Bmatrix} \{A_r^{6j}\} \\ \{A_r^{6k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^6 E^6 A^6 / L^6 \\ 0 \\ -\delta^6 E^6 A^6 / L^6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -208.8398 \\ 0 \\ 208.8398 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/8)

iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα



- Οι συνολικές ακραίες δράσεις για τα μέλη 1, 5 και 6 είναι:

$$\{A_r^1\} = \{A_r^1\}_\delta$$

$$\{A_r^6\} = \{A_r^6\}_\delta + \{A_r^6\}_T =$$

-193.0898
0
193.0898
0

$$\{A_r^5\} = \{A_r^5\}_T$$

- Επομένως υπολογίζονται οι καθολικές ακραίες δράσεις ως: $\{\bar{A}_r^i\} = [\Lambda_{PT}^i]^T \{A_r^i\}$

$$\{\bar{A}_r^1\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -933.3333 \\ 0 \\ 933.3333 \end{bmatrix}$$

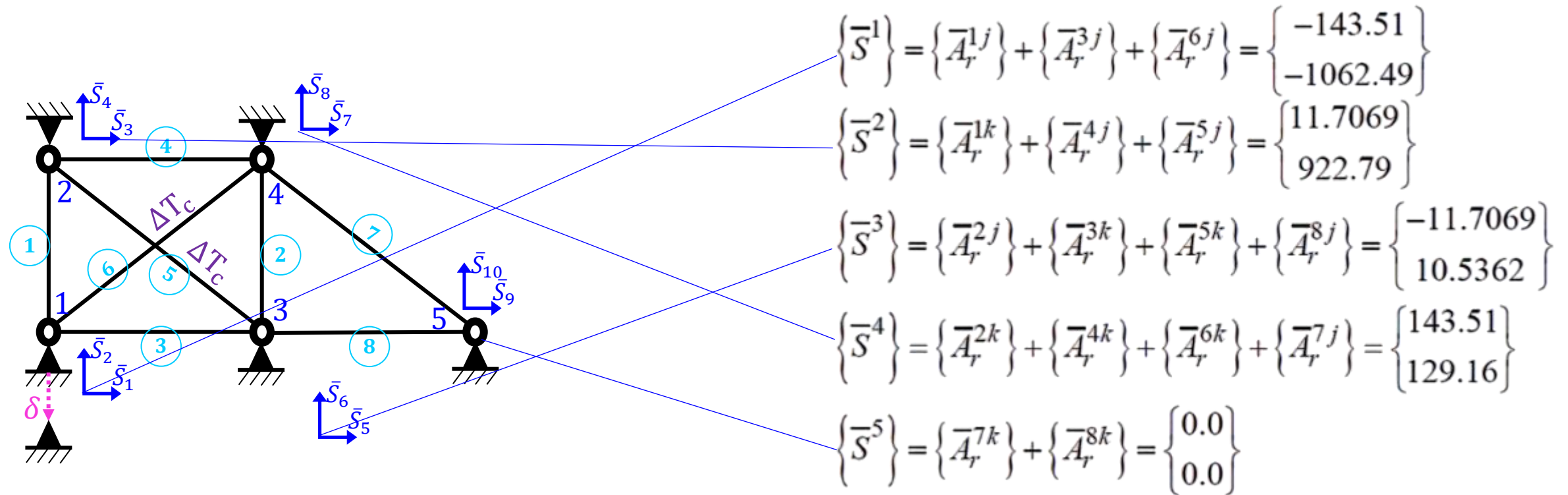
$$\{\bar{A}_r^5\} = \begin{bmatrix} 11.7069 \\ -10.5362 \\ -11.7069 \\ 10.5362 \end{bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^6\} = \begin{bmatrix} -143.5225 \\ -129.1703 \\ 143.5225 \\ 129.1703 \end{bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(4/8)

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης

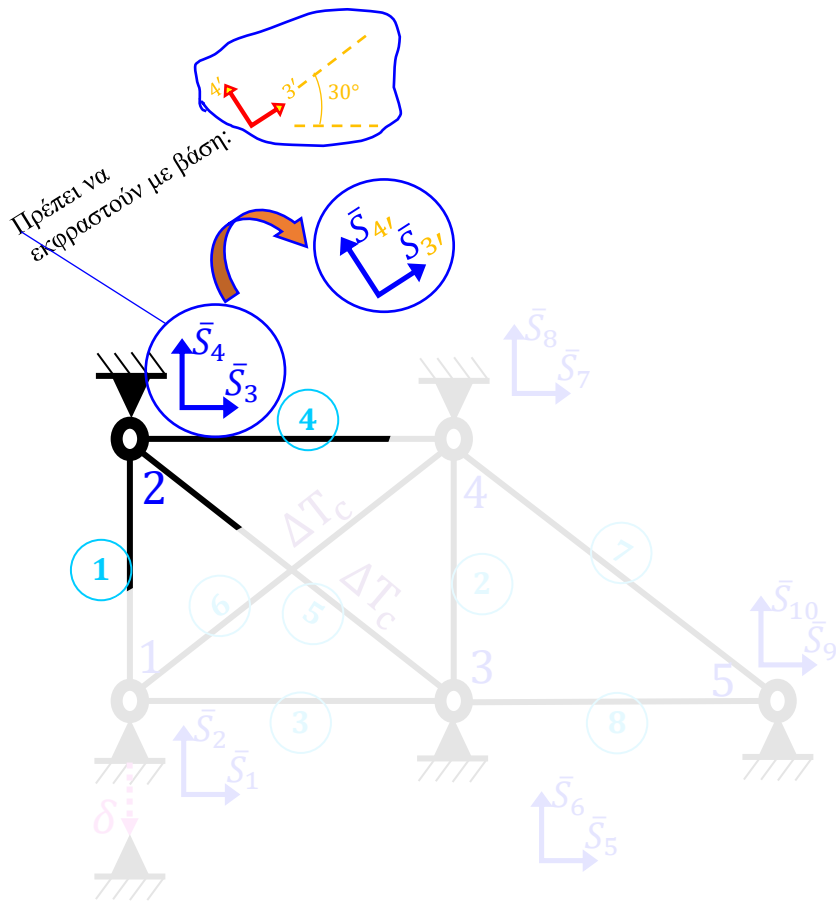


Οι δράσεις παγίωσης σε κάθε κόμβο του παγιωμένου φορέα είναι ίσες με το άθροισμα των καθολικών ακραίων δράσεων των άκρων των μελών που συντρέχουν στον εκάστοτε κόμβο.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(5/8)

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης



$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{1'}^{(2)} \\ \bar{S}_{2'}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{3'} \\ \bar{S}_{4'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1^{(2)} \\ \bar{S}_2^{(2)} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 11.7069 \\ 922.79 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 471.53 \\ 793.31 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(6/8)

vi) Τροποποίηση επικόμβιων δράσεων και μετατοπίσεων

- Το τελικό διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα προκύπτει από την αφαίρεση των δράσεων παγίωσης (με ότι τροποποιήσεις έχουν υποστεί) από τα επικόμβια φορτία του πραγματικού φορέα:

$$\{\bar{P}_{mm}\} = \{\bar{P}_{mm}^{nodal} - \bar{S}_{mm}\} = \begin{bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{bmatrix},$$

Λοξή στήριξη
Αναδιάταξη

$$\{\bar{P}_f\} =$$

-421.5370
11.7069
-10.5362
-143.5225
-229.1703
-216.5064
-125.0000

- Το τελικό διάνυσμα επικόμβιων μετατοπίσεων θα προκύψει ως:

$$\begin{bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_{4'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Μηδέν εφόσον έλαβα υπόψη την υποχώρηση στήριξης στον παγιωμένο φορέα!!

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (7/8)

vii) Υπολογισμός αγνωστων μετατοπίσεων και δράσεων

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\})$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 3' & -0.0210 \\ \hline 5 & -0.0091 \\ \hline 6 & -0.0053 \\ \hline 7 & -0.0138 \\ \hline 8 & -0.0092 \\ \hline 9 & -0.0176 \\ \hline 10 & -0.0224 \\ \hline \end{array} \quad \{\bar{\Delta}_m\} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline 2 & -0.0200 \\ \hline 3' & -0.0210 \\ \hline 4' & 0 \\ \hline 5 & -0.0091 \\ \hline 6 & -0.0053 \\ \hline 7 & -0.0138 \\ \hline 8 & -0.0092 \\ \hline 9 & -0.0176 \\ \hline 10 & -0.0224 \\ \hline \end{array}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{array}{c|c} & \\ \hline 1 & 428.5409 \\ \hline 2 & -401.4236 \\ \hline 4' & 510.6717 \\ \hline \end{array}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση δικτυώματος υποβαλλόμενο σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (8/8)

viii) Μεταφορά μετατοπίσεων λοξά στηριγμένου κόμβου στο καθολικό σύστημα

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}] \{\bar{\Delta}_s\})$$

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}] \{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}] \{\bar{\Delta}_s\}$$

$$\{\bar{\Delta}_f\} = \begin{array}{c|c} \text{3'} & -0.0210 \\ \hline \text{5} & -0.0091 \\ \hline \text{6} & -0.0053 \\ \hline \text{7} & -0.0138 \\ \hline \text{8} & -0.0092 \\ \hline \text{9} & -0.0176 \\ \hline \text{10} & -0.0224 \end{array}$$

$$\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{array}{c|c} \text{1} & 0 \\ \hline \text{2} & -0.0200 \\ \hline \text{3'} & -0.0210 \\ \hline \text{4'} & 0 \\ \hline \text{5} & -0.0091 \\ \hline \text{6} & -0.0053 \\ \hline \text{7} & -0.0138 \\ \hline \text{8} & -0.0092 \\ \hline \text{9} & -0.0176 \\ \hline \text{10} & -0.0224 \end{array}$$

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{array}{c|c} \text{1} & 428.5409 \\ \hline \text{2} & -401.4236 \\ \hline \text{4'} & 510.6717 \end{array}$$

Μετασχηματισμός
των στραμένων
β.ε. στους
αρχικούς

$$\{\bar{\Delta}\} = [R^2]^T \{\bar{\Delta}_m\} =$$

$$\begin{array}{c|c} \text{1} & 0 \\ \hline \text{2} & -0.0200 \\ \hline \text{3} & -0.0182 \\ \hline \text{4} & -0.0105 \\ \hline \text{5} & -0.0091 \\ \hline \text{6} & -0.0053 \\ \hline \text{7} & -0.0138 \\ \hline \text{8} & -0.0092 \\ \hline \text{9} & -0.0176 \\ \hline \text{10} & -0.0224 \end{array}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά Ενταπικά Μεγέθη Μελών Δικτυώματος

Οι ακραίες δράσεις κάθε μέλους υπολογίζονται ως:

$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] \{D^i\}$$
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] [\Lambda_{PT}^i] \{\bar{D}^i\}$$

τοπικές ακραίες δράσεις
παγιωμένου φορέα

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} -443.4977 \\ 0 \\ 443.4977 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^4\} = \begin{Bmatrix} -185.6380 \\ 0 \\ 185.6380 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^7\} = \begin{Bmatrix} -186.8559 \\ 0 \\ 186.8559 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 182.9258 \\ 0 \\ -182.9258 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^5\} = \begin{Bmatrix} -35.5130 \\ 0 \\ 35.5130 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^8\} = \begin{Bmatrix} 355.3952 \\ 0 \\ -355.3952 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 381.7919 \\ 0 \\ -381.7919 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^6\} = \begin{Bmatrix} 62.8944 \\ 0 \\ -62.8944 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά Ενταπικά Μεγέθη Μελών Δικτυώματος

Οι ακραίες δράσεις κάθε μέλους υπολογίζονται ως:

$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] \{D^i\}$$
$$\{A^i\} = \{A_r^i\} + [k^i] [\Lambda_{PT}^i] \{\bar{D}^i\}$$

τοπικές ακραίες δράσεις
παγιωμένου φορέα

$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} -443.4977 \\ 0 \\ 443.4977 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^4\} = \begin{Bmatrix} -185.6380 \\ 0 \\ 185.6380 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^7\} = \begin{Bmatrix} -186.8559 \\ 0 \\ 186.8559 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 182.9258 \\ 0 \\ -182.9258 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

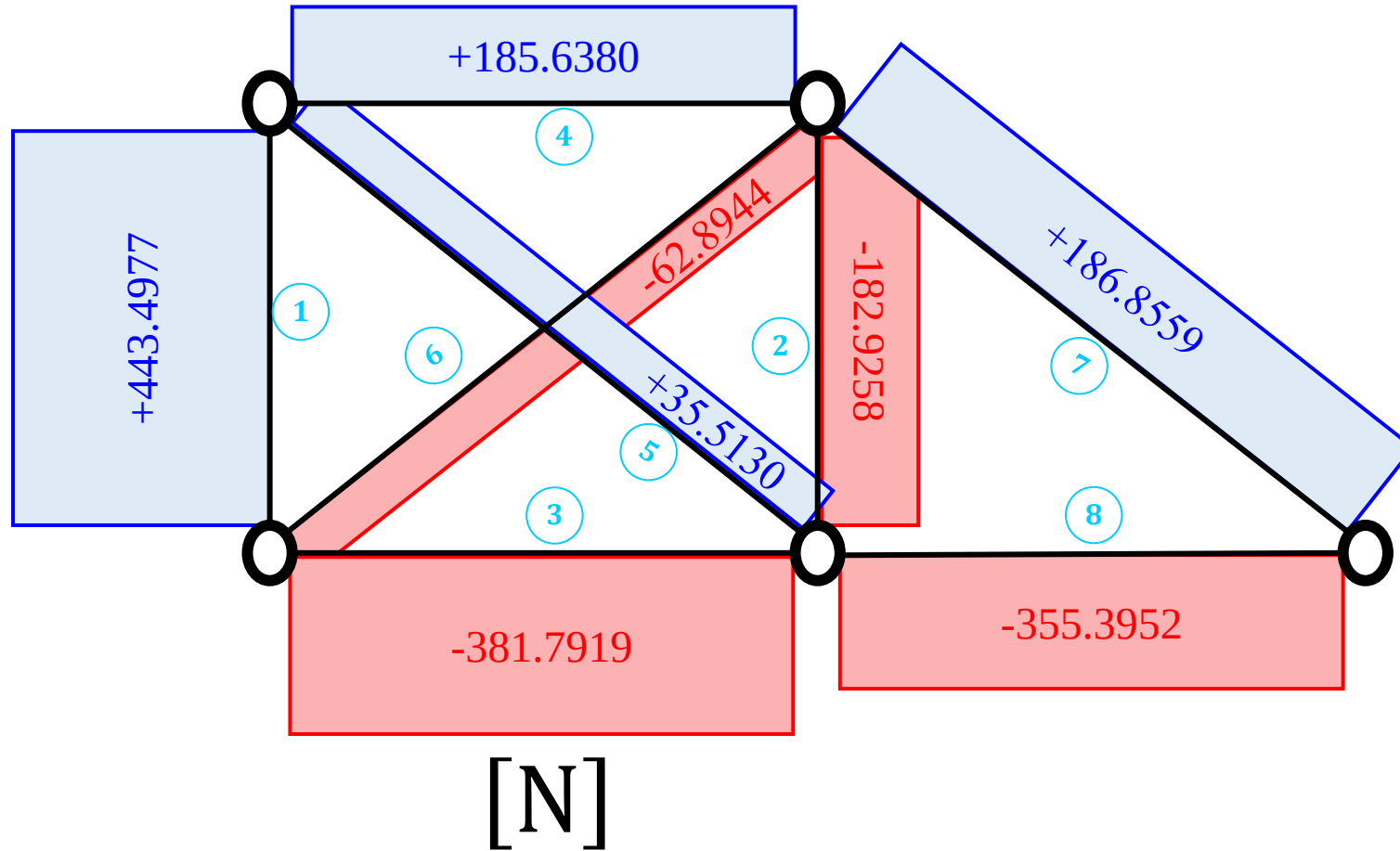
$$\{A^5\} = \begin{Bmatrix} -35.5130 \\ 0 \\ 35.5130 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^8\} = \begin{Bmatrix} 355.3952 \\ 0 \\ -355.3952 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 381.7919 \\ 0 \\ -381.7919 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^6\} = \begin{Bmatrix} 62.8944 \\ 0 \\ -62.8944 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά Ενταπικά Μεγέθη Μελών Δικτυώματος



$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} -443.4977 \\ 0 \\ 443.4977 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 182.9258 \\ 0 \\ -182.9258 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 381.7919 \\ 0 \\ -381.7919 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^4\} = \begin{Bmatrix} -185.6380 \\ 0 \\ 185.6380 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

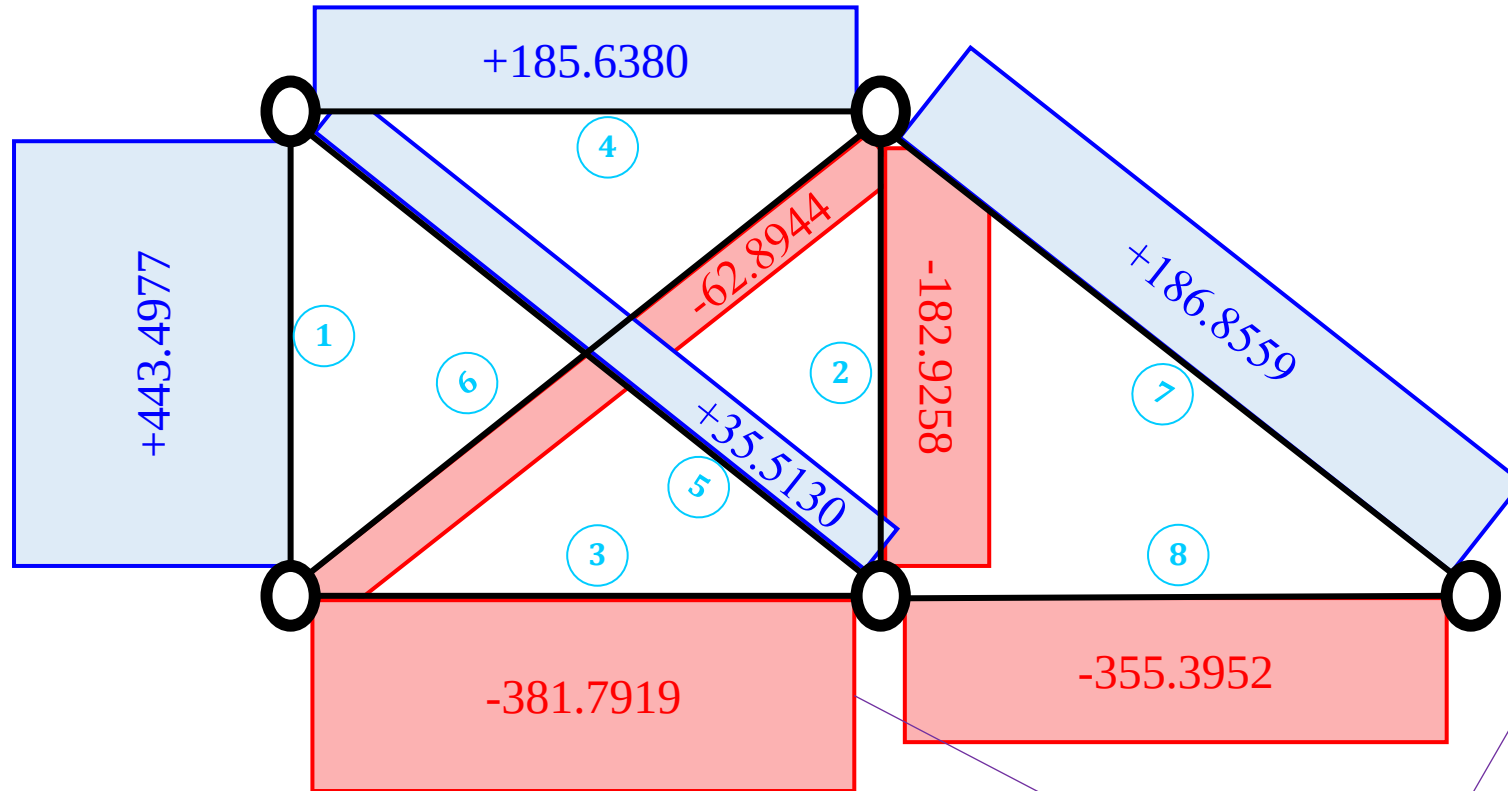
$$\{A^5\} = \begin{Bmatrix} -35.5130 \\ 0 \\ 35.5130 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^6\} = \begin{Bmatrix} 62.8944 \\ 0 \\ -62.8944 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^7\} = \begin{Bmatrix} -186.8559 \\ 0 \\ 186.8559 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^8\} = \begin{Bmatrix} 355.3952 \\ 0 \\ -355.3952 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά Εντατικά Μεγέθη Μελών Δικτυώματος



[N]

Τι συμβαίνει με τα
πρόσημα των
τοπικών ακραίων
δράσεων του μέλους
3 π.χ.



$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} -443.4977 \\ 0 \\ 443.4977 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 182.9258 \\ 0 \\ -182.9258 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^3\} = \begin{Bmatrix} 381.7919 \\ 0 \\ -381.7919 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^4\} = \begin{Bmatrix} -185.6380 \\ 0 \\ 185.6380 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^5\} = \begin{Bmatrix} -35.5130 \\ 0 \\ 35.5130 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^6\} = \begin{Bmatrix} 62.8944 \\ 0 \\ -62.8944 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^7\} = \begin{Bmatrix} -186.8559 \\ 0 \\ 186.8559 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{A^8\} = \begin{Bmatrix} 355.3952 \\ 0 \\ -355.3952 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

