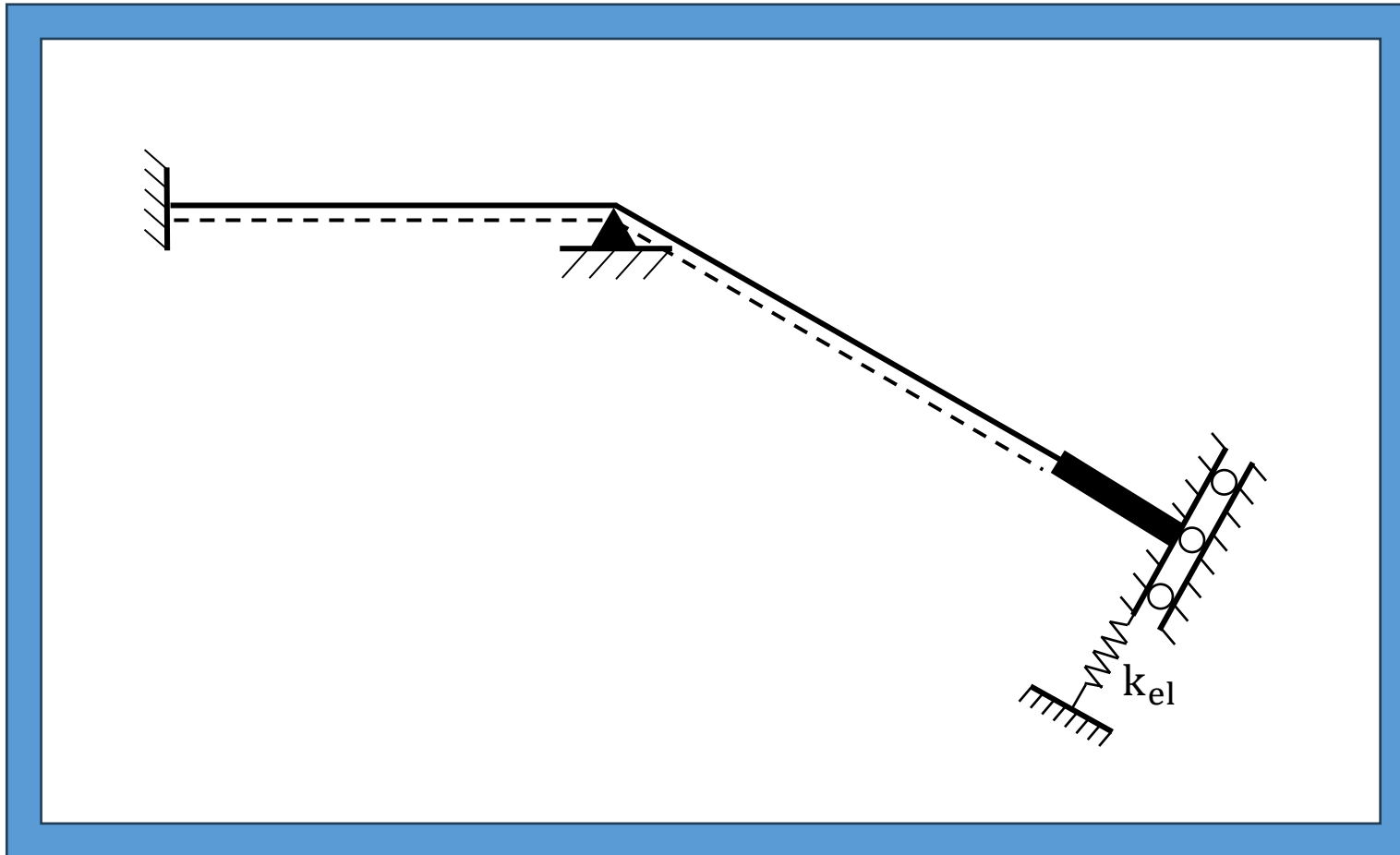




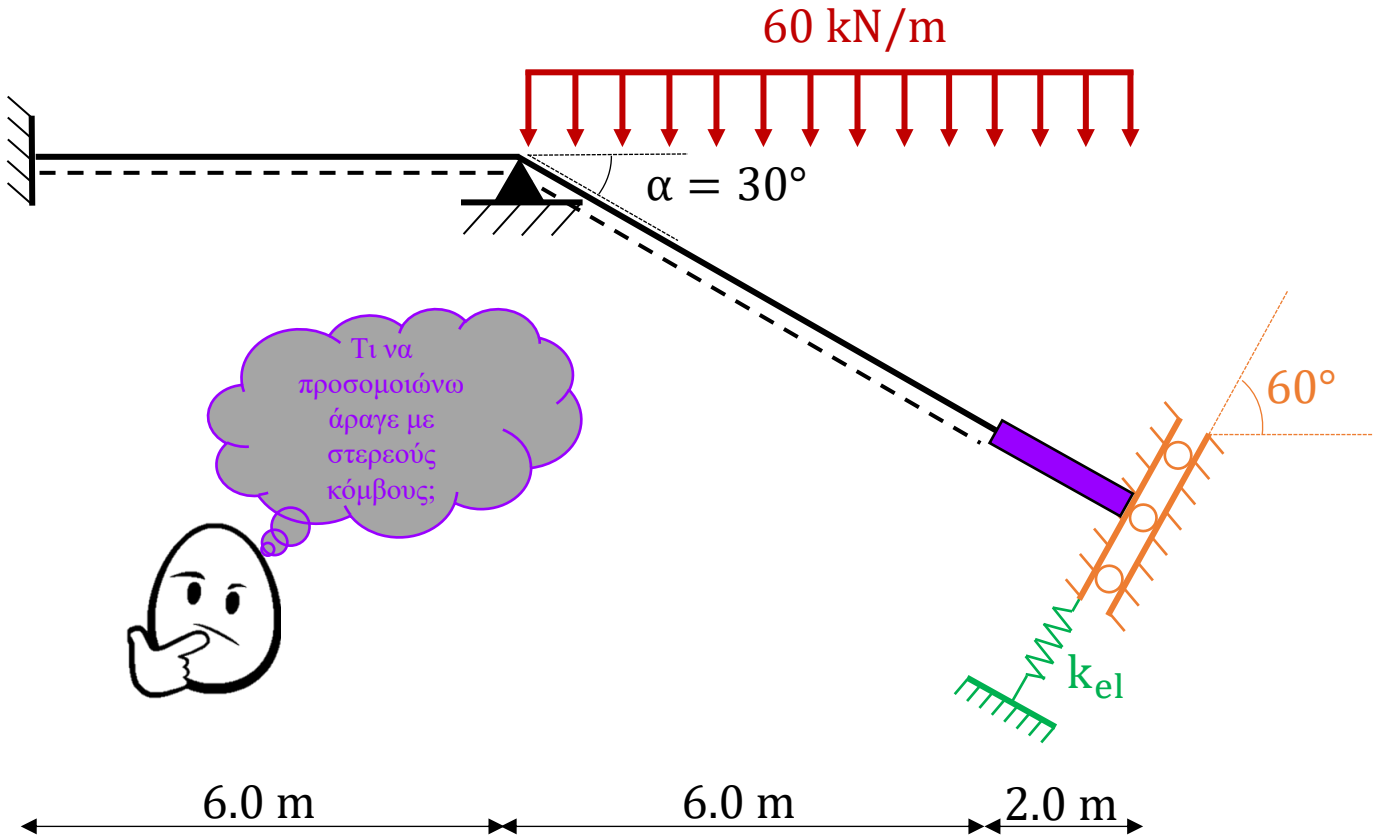
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης Επίπεδου Πλαισίου με Στερεό Κόμβο



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ & ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ	
ΑΣΚΗΣΗ	#3
ΗΜ/ΝΙΑ	30/05/2025
ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ	

Εξεταζόμενο Πλαίσιο



Σε εμπορικά λογισμικά, μπορεί αν συναντήσω τους στερεούς κόμβους ως:

- Rigid Region (ANSYS)
- Rigid Body Constraint (ABAQUS)
- Rigid Zone (SAP2000/ETABS)
- Rigid Links (RFEM)
- Rigid Offsets (Seismostruct)

Δεδομένα:

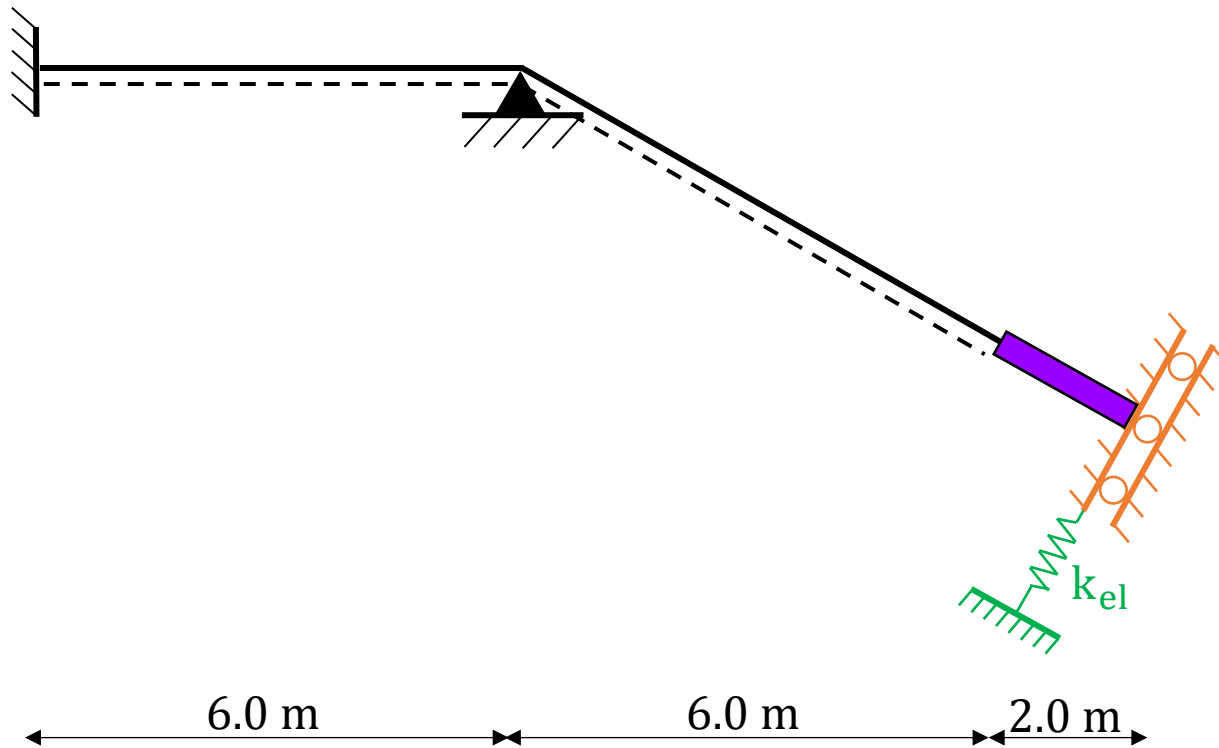
- $E = 2.1 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
- $A = 0.30 \times 0.80 = 0.24 \text{ m}^2$
- $I = 0.3 \times \frac{0.8^3}{12} = 0.0128 \text{ m}^4$
- $k_{el} = 24 \times 10^4 \text{ kN/m}$
- $q = 60 \text{ kN/m}$

Παρατηρώ:

- Ενδιάμεσα φορτία
- Λοξή στήριξη
- Ελαστική στήριξη
- Στερεό Κόμβο

Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

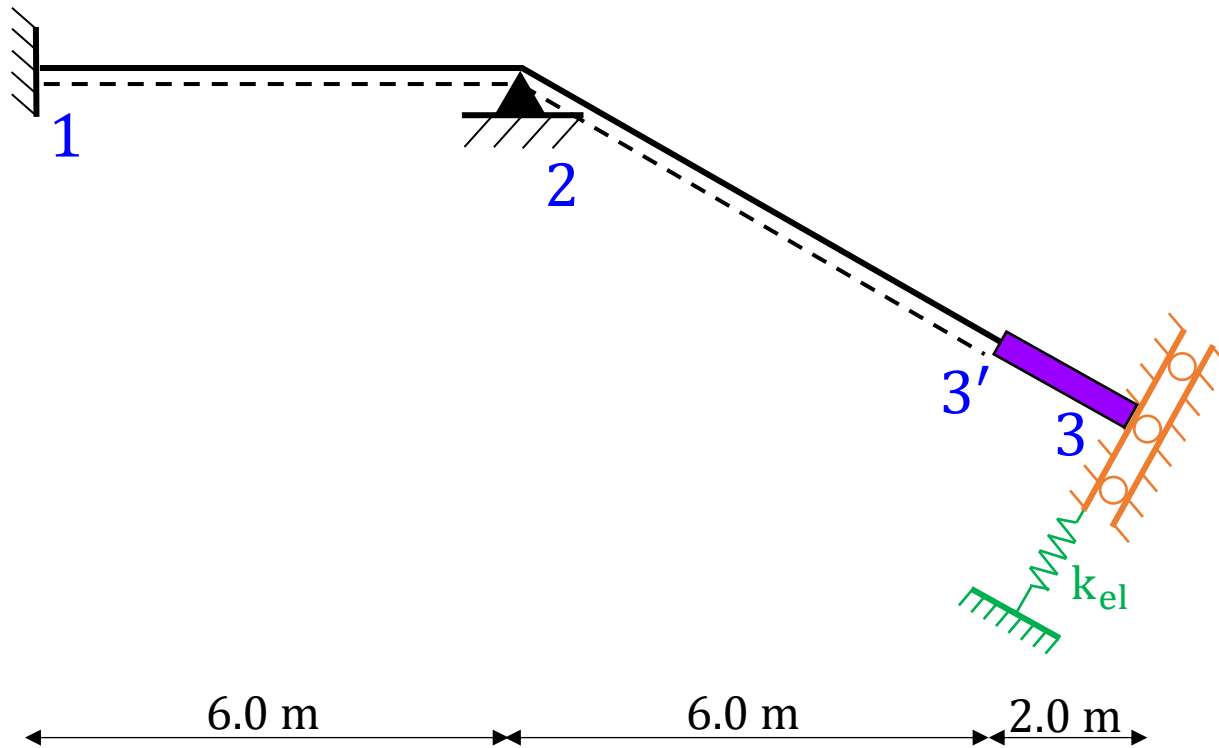
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



Παρατηρήσεις:

- Ορίζω κόμβο πέρατος του μέλους **2** τον κόμβο **3**. Εκεί θα προσδιορίσω τις επικόμβιες μετακινήσεις και δράσεις του φορέα.
- Ορίζω τον κόμβο **3'** που είναι ο κόμβος πέρατος του εύκαμπτου τμήματος του μέλους **2**.
- Επομένως το μέλος **2** αποτελείται από:
 - το εύκαμπτο τμήμα **2 – 3'**.
 - το άκαμπτο τμήμα **3' – 3**.

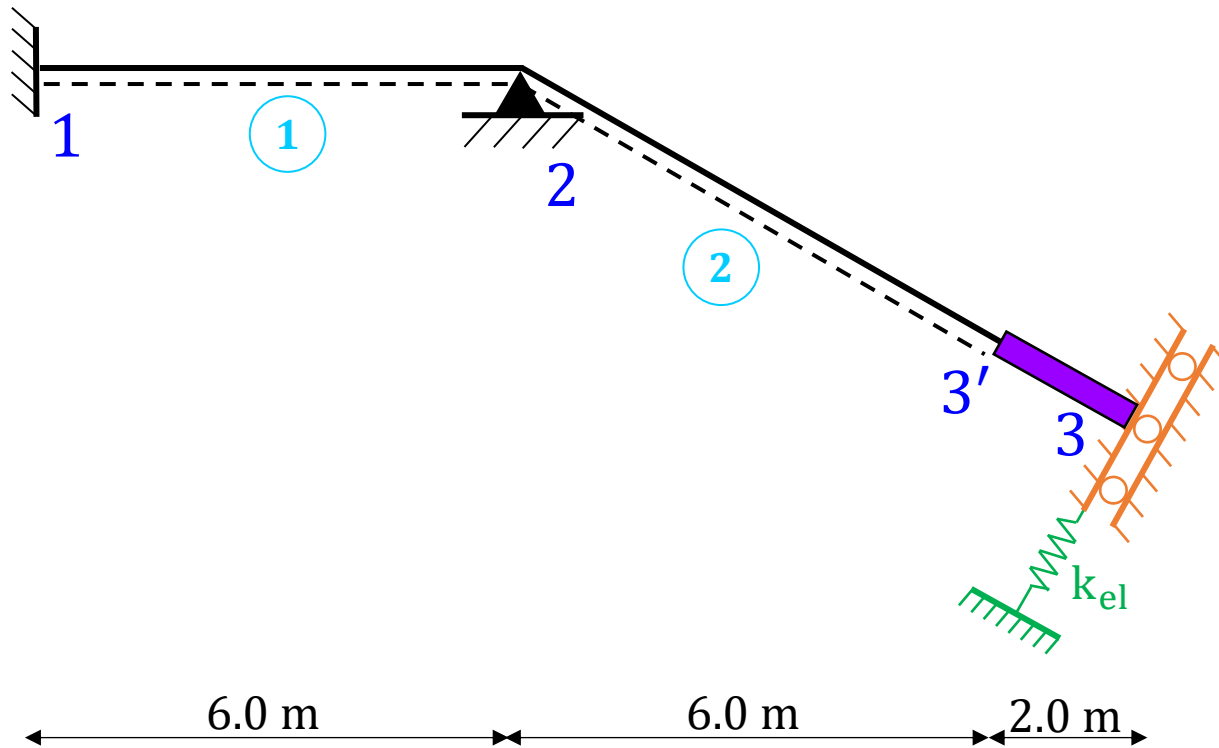
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



Παρατηρήσεις:

- Ορίζω κόμβο πέρατος του μέλους **2** τον κόμβο **3**. Εκεί θα προσδιορίσω τις επικόμβιες μετακινήσεις και δράσεις του φορέα.
- Ορίζω τον κόμβο **3'** που είναι ο κόμβος πέρατος του εύκαμπτου τμήματος του μέλους **2**.
- Επομένως το μέλος **2** αποτελείται από:
 - το εύκαμπτο τμήμα **2 – 3'**.
 - το άκαμπτο τμήμα **3' – 3**.

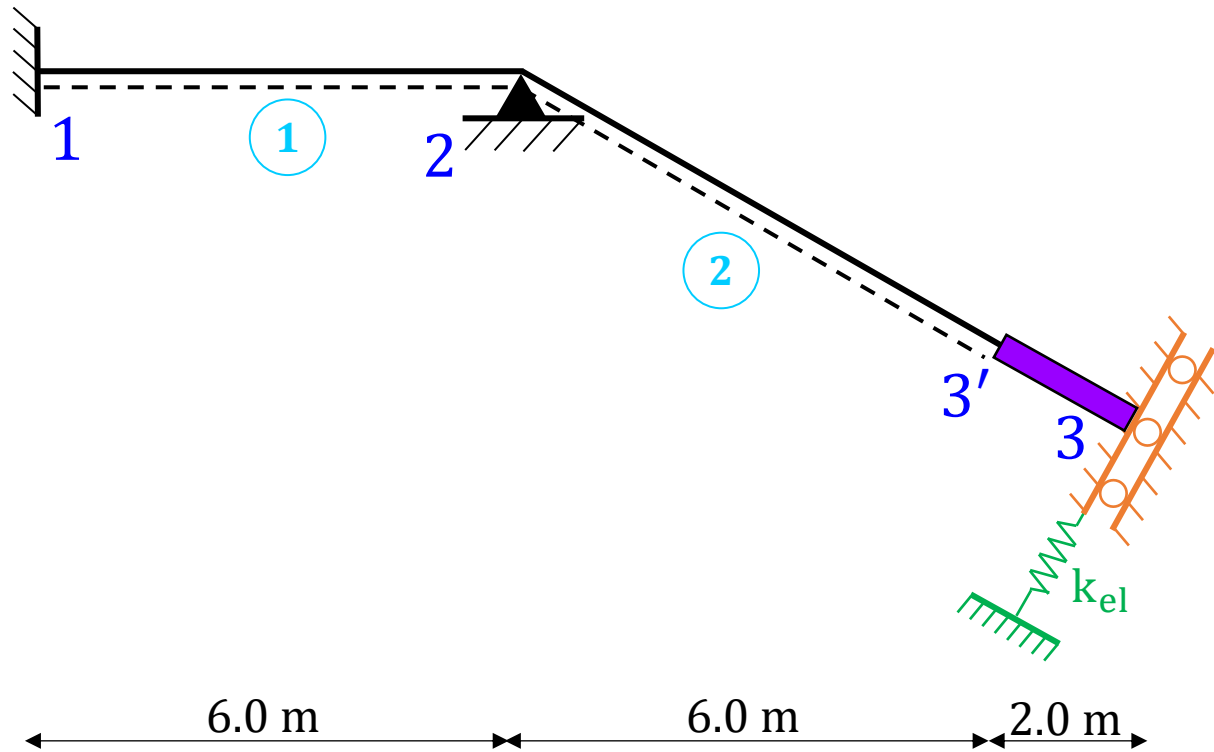
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



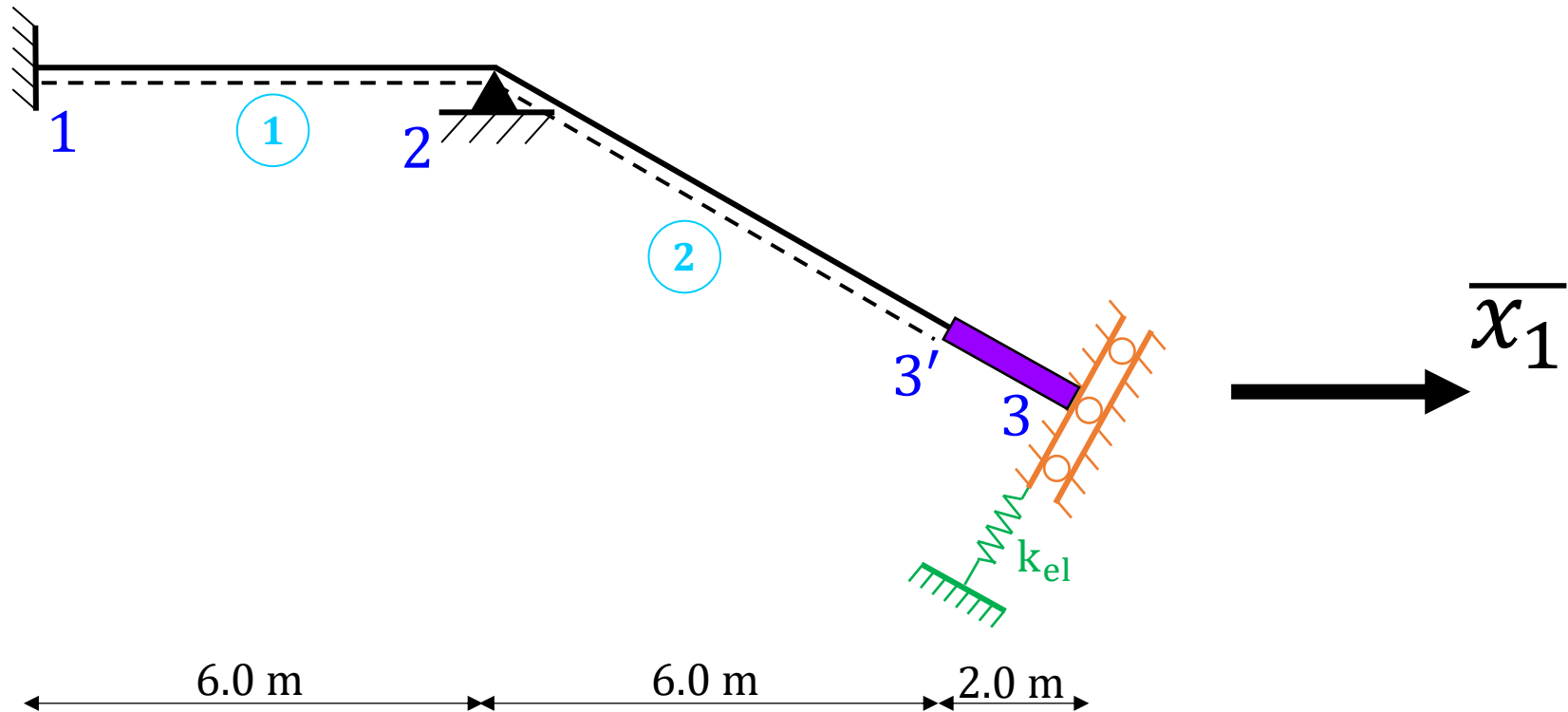
Παρατηρήσεις:

- Ορίζω κόμβο πέρατος του μέλους **2** τον κόμβο **3**. Εκεί θα προσδιορίσω τις επικόμβιες μετακινήσεις και δράσεις του φορέα.
- Ορίζω τον κόμβο **3'** που είναι ο κόμβος πέρατος του εύκαμπτου τμήματος του μέλους **2**.
- Επομένως το μέλος **2** αποτελείται από:
 - το εύκαμπτο τμήμα **2 – 3'**.
 - το άκαμπτο τμήμα **3' – 3**.

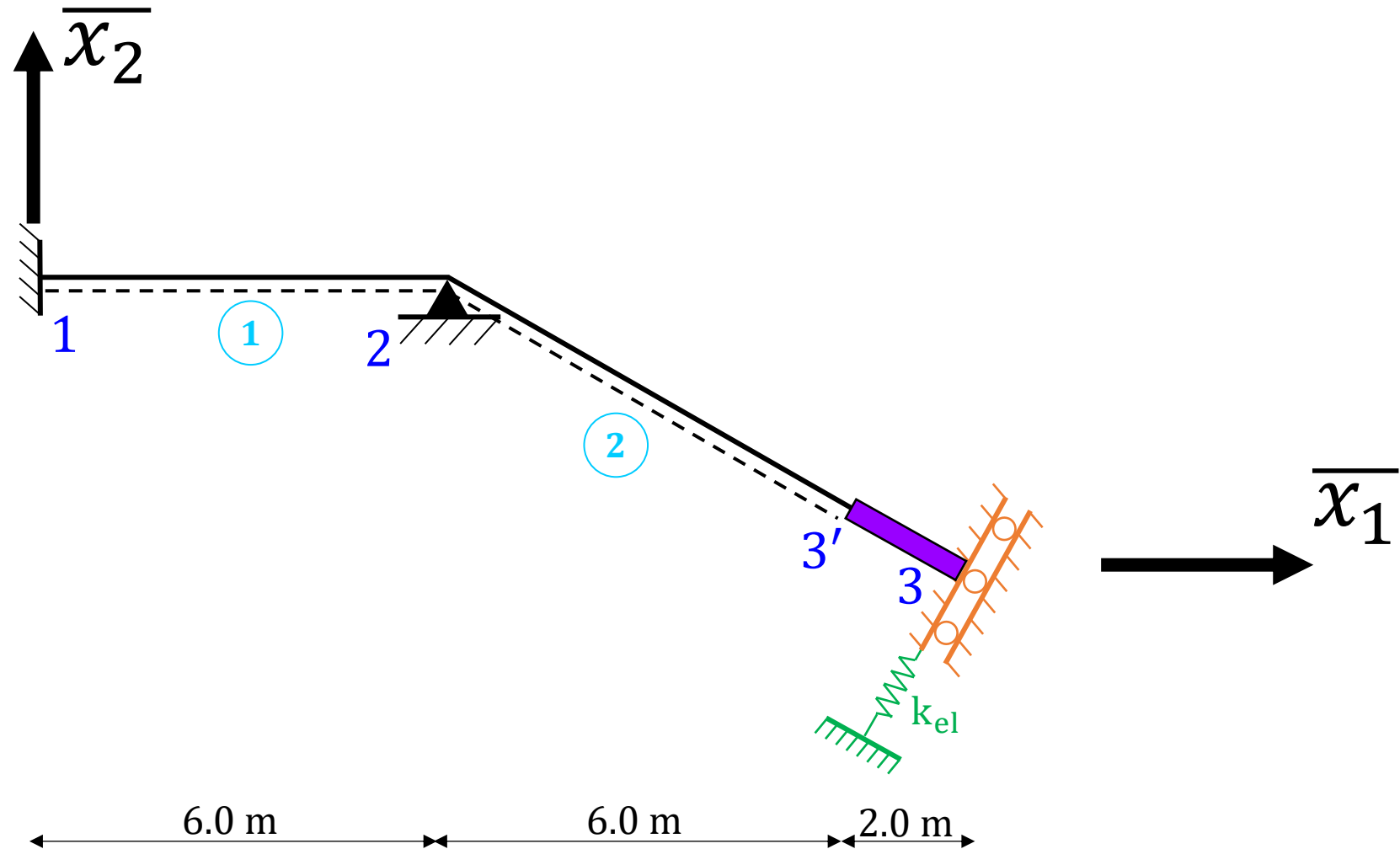
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων Ox_1x_2



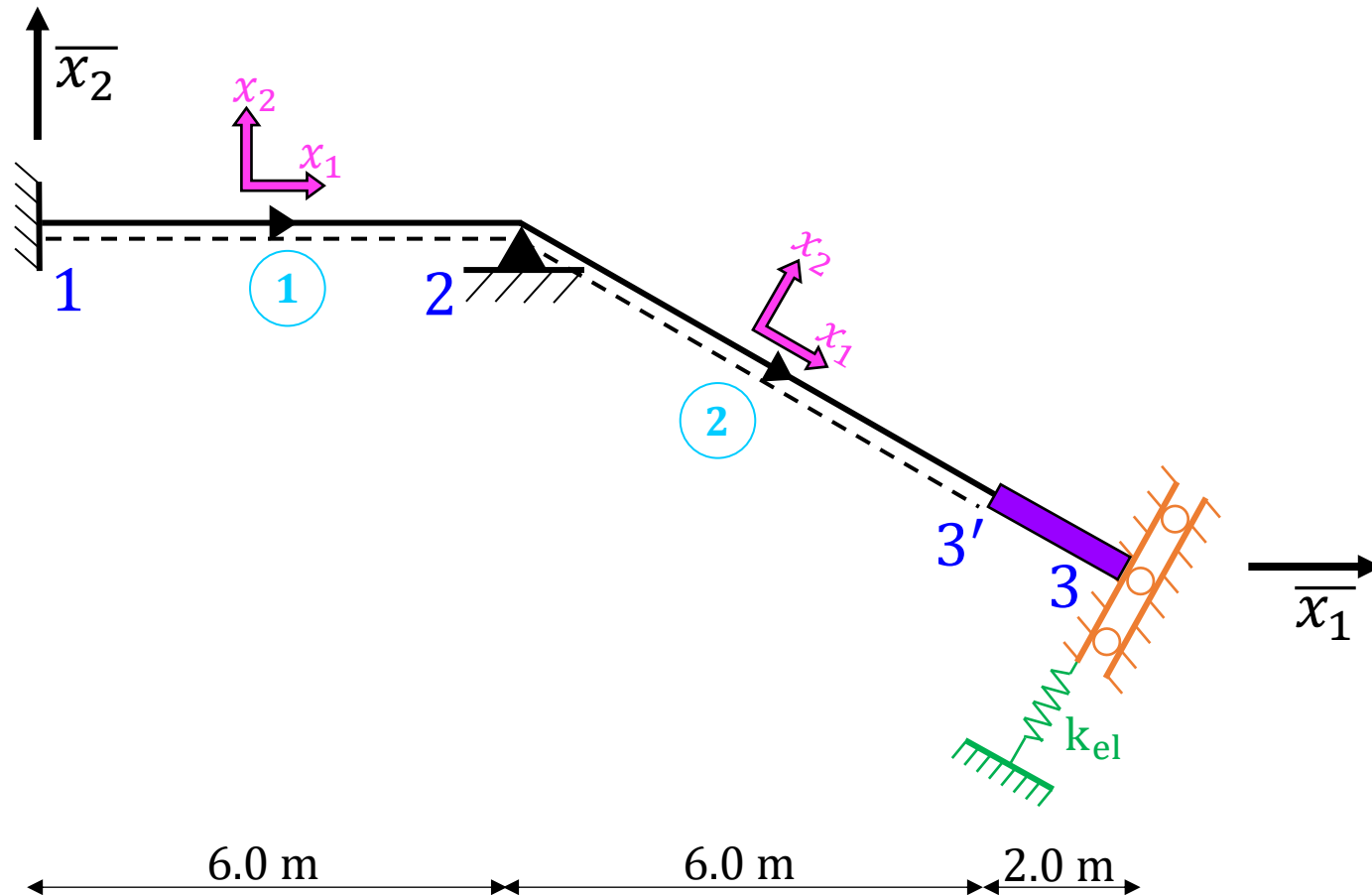
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x_1x_2}$



ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x}_1\overline{x}_2$

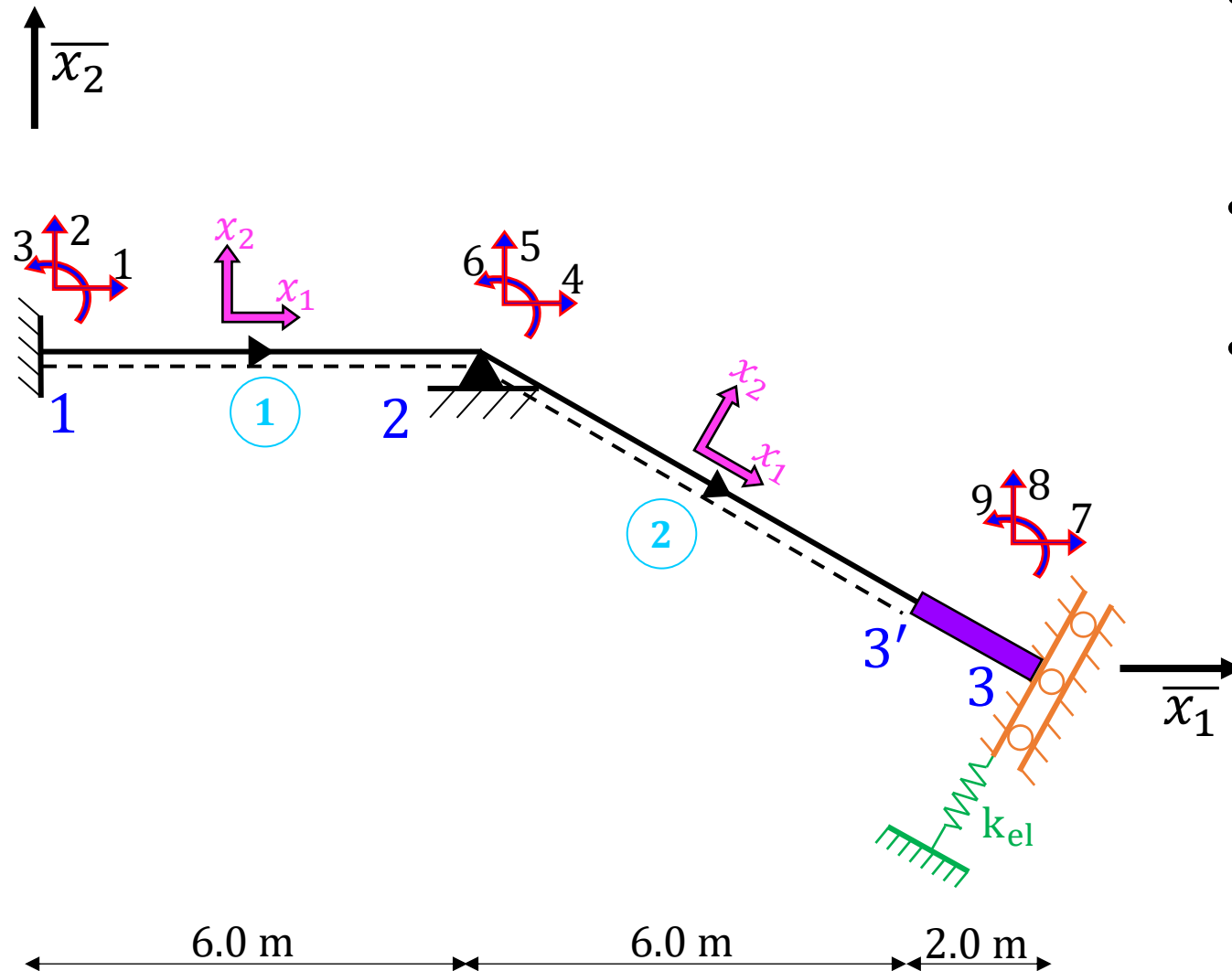


ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



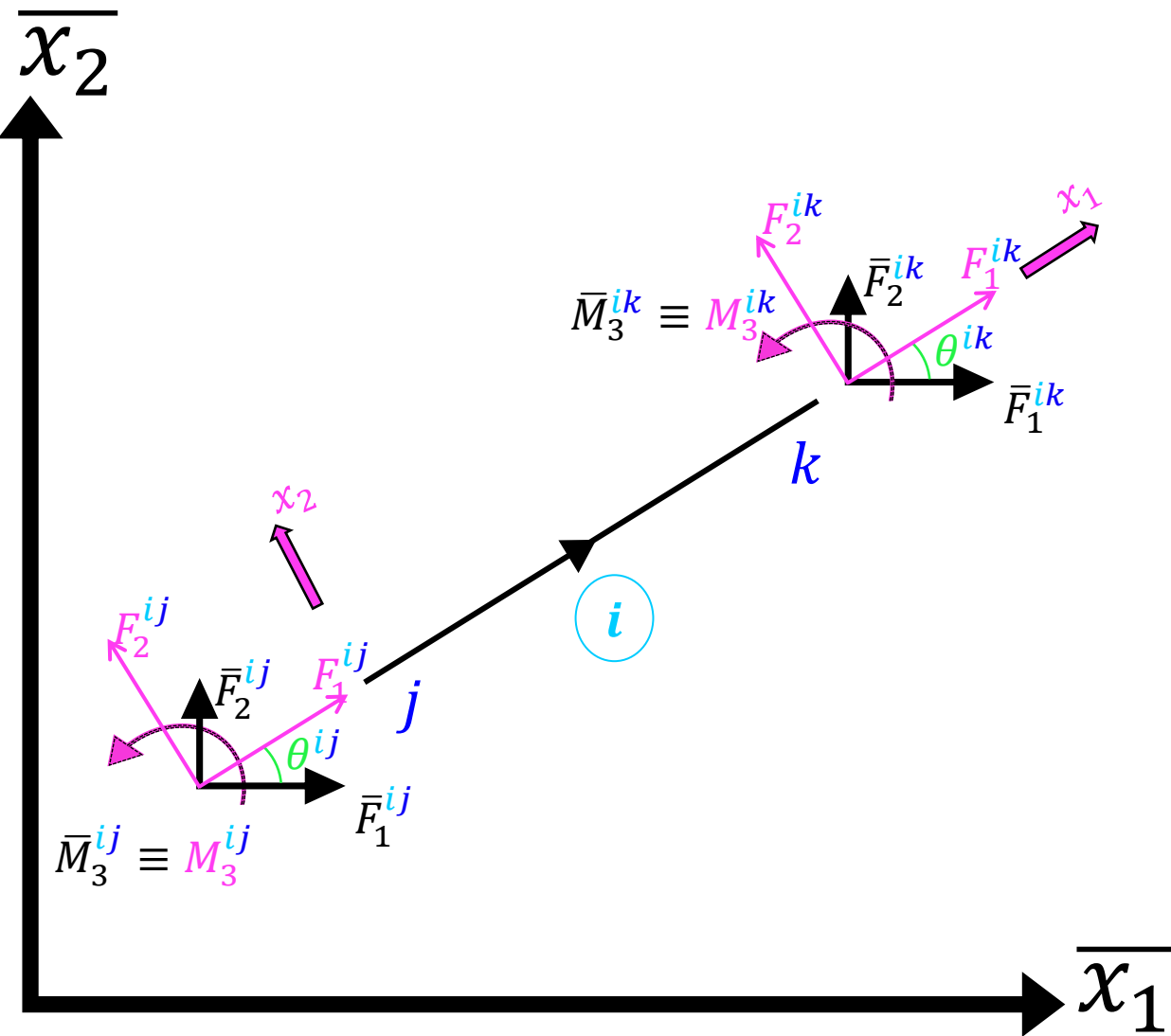
- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό !).
- Ός προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- Εφόσον γνωρίζουμε ότι κάθε κόμβος πλαισίου στο επίπεδο διαθέτει 3 β.ε., τότε οι β.ε. του φορέα θα είναι $3N$, όπου N ο αριθμός των κόμβων.

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)

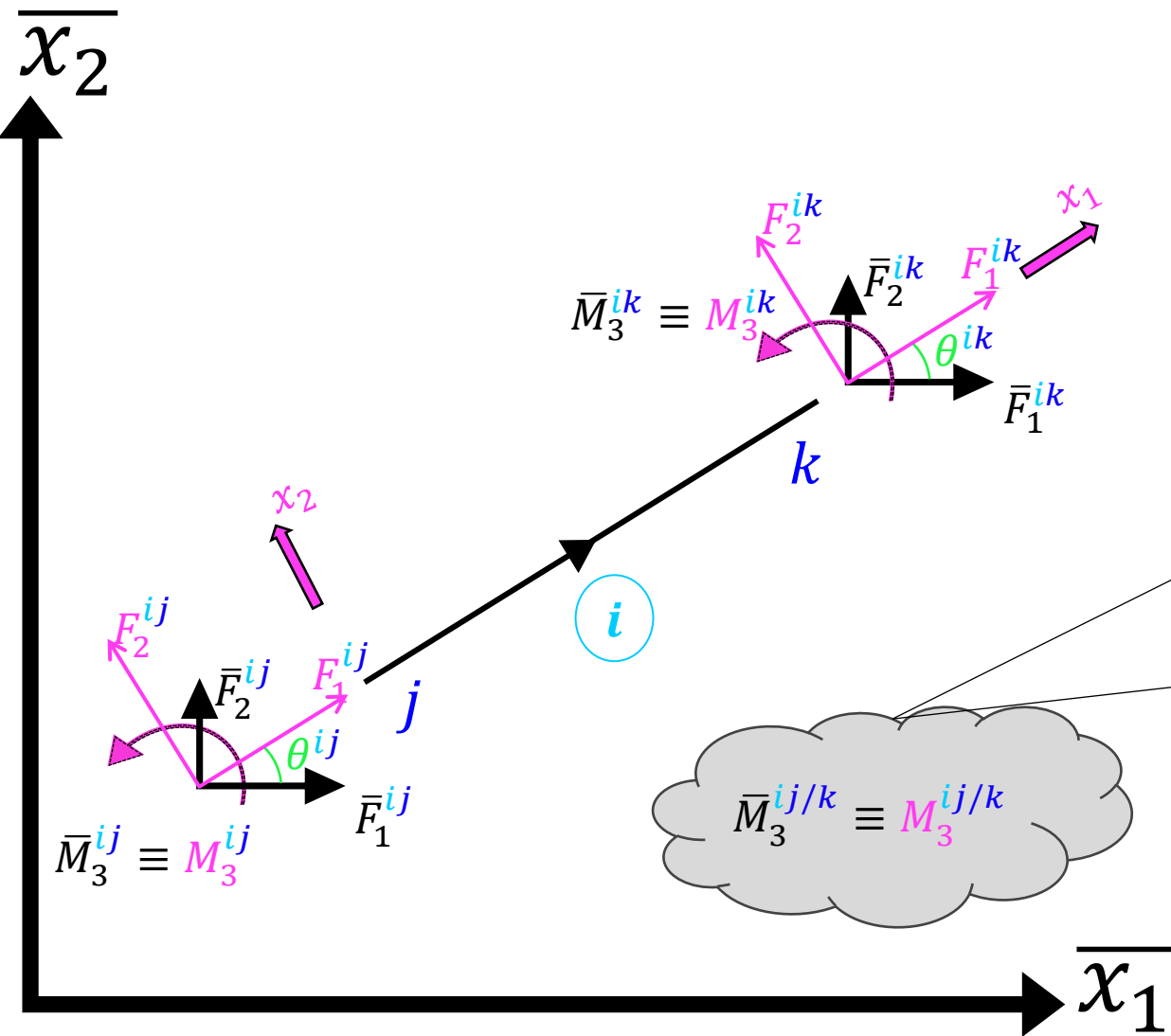


$$[\Lambda_{PF}^i] = \begin{bmatrix} [\Lambda_{PF}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\Lambda_{PF}^{ik}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta^{ij} & \sin \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta^{ij} & \cos \theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta^{ik} & \sin \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta^{ik} & \cos \theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :
 $\theta^{ij} = \theta^{ik}$
- Ισχύει: $[\Lambda_{PF}^i]^{-1} = [\Lambda_{PF}^i]^T$
- Ο καθολικός $\bar{x}_1$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(1/2)



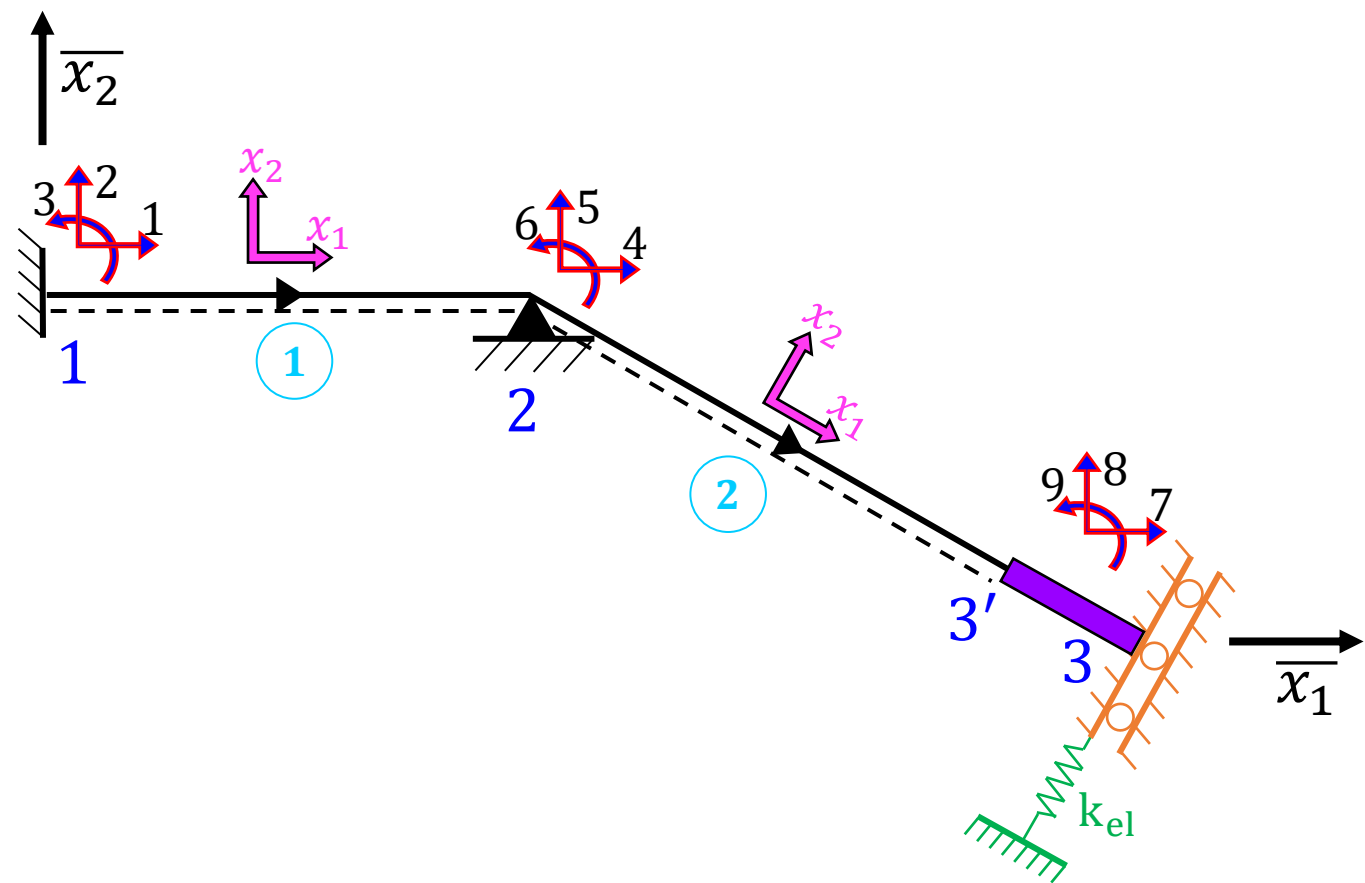
$$[\Lambda_{\text{PF}}^i] = \left[\begin{array}{c|c} [\Lambda_{\text{PF}}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ \hline [\mathbf{0}] & [\Lambda_{\text{PF}}^{ik}] \end{array} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta^{ij} & \sin\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta^{ij} & \cos\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cos\theta^{ik} & \sin\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta^{ik} & \cos\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :

$$\theta^{ij} = \theta^{ik}$$
- Ισχύει: $[\Lambda_{\text{PF}}^i]^{-1} = [\Lambda_{\text{PF}}^i]^T$
- Ο καθολικός $\overline{x_1}$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών ^(2/2)

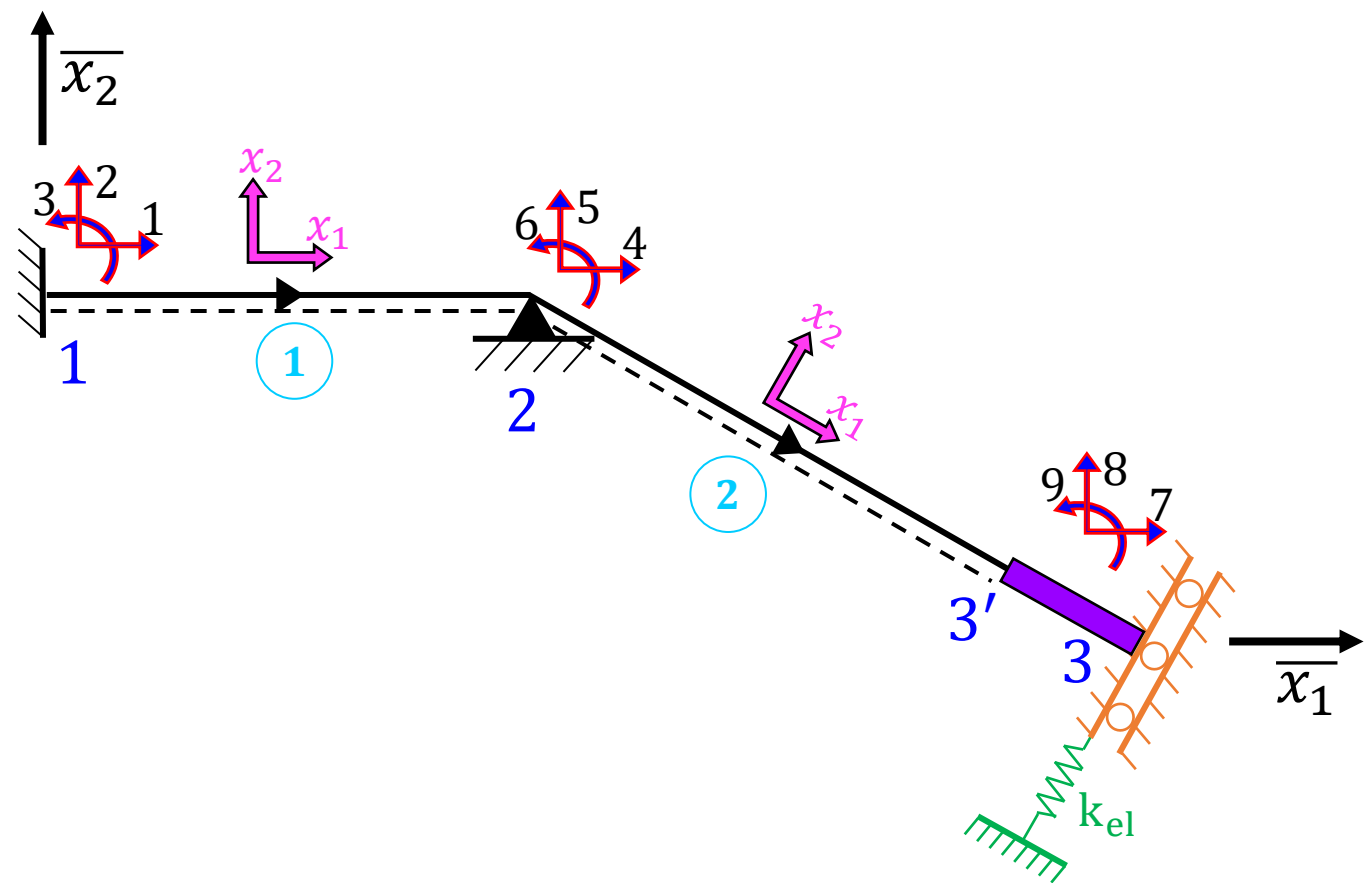


$$[\Lambda^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^2] = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5001 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0.5001 & 0.8660 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 0.8660 & -0.5001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0.5001 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Μέλος <i>i</i>	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1	0	1	0
2			

BHMA 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



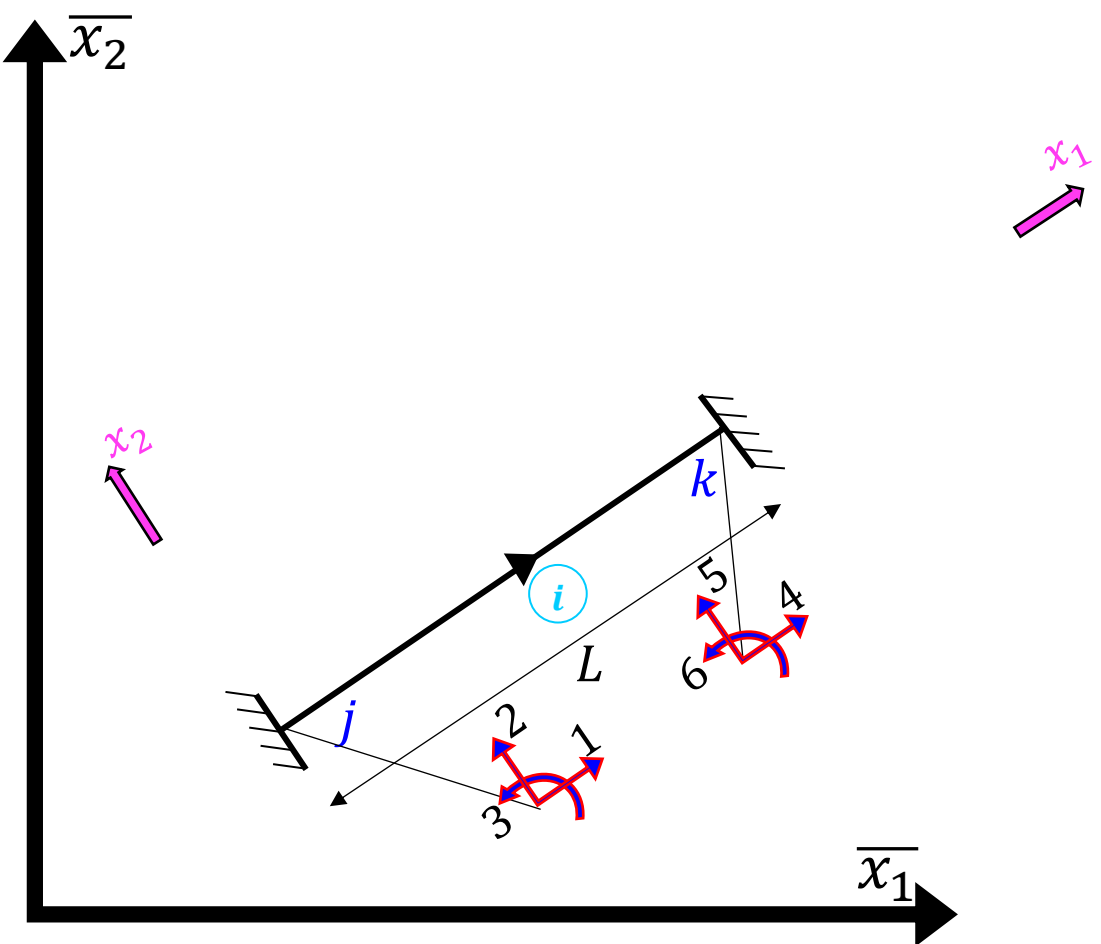
$$[\Lambda^1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\Lambda^2] = \begin{bmatrix} 0.8660 & -0.5001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5001 & 0.8660 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.8660 & -0.5001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5001 & 0.8660 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^i$	$\cos\theta^i$	$\sin\theta^i$
1	0	1	0
2	330	0.866	-0.5

BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



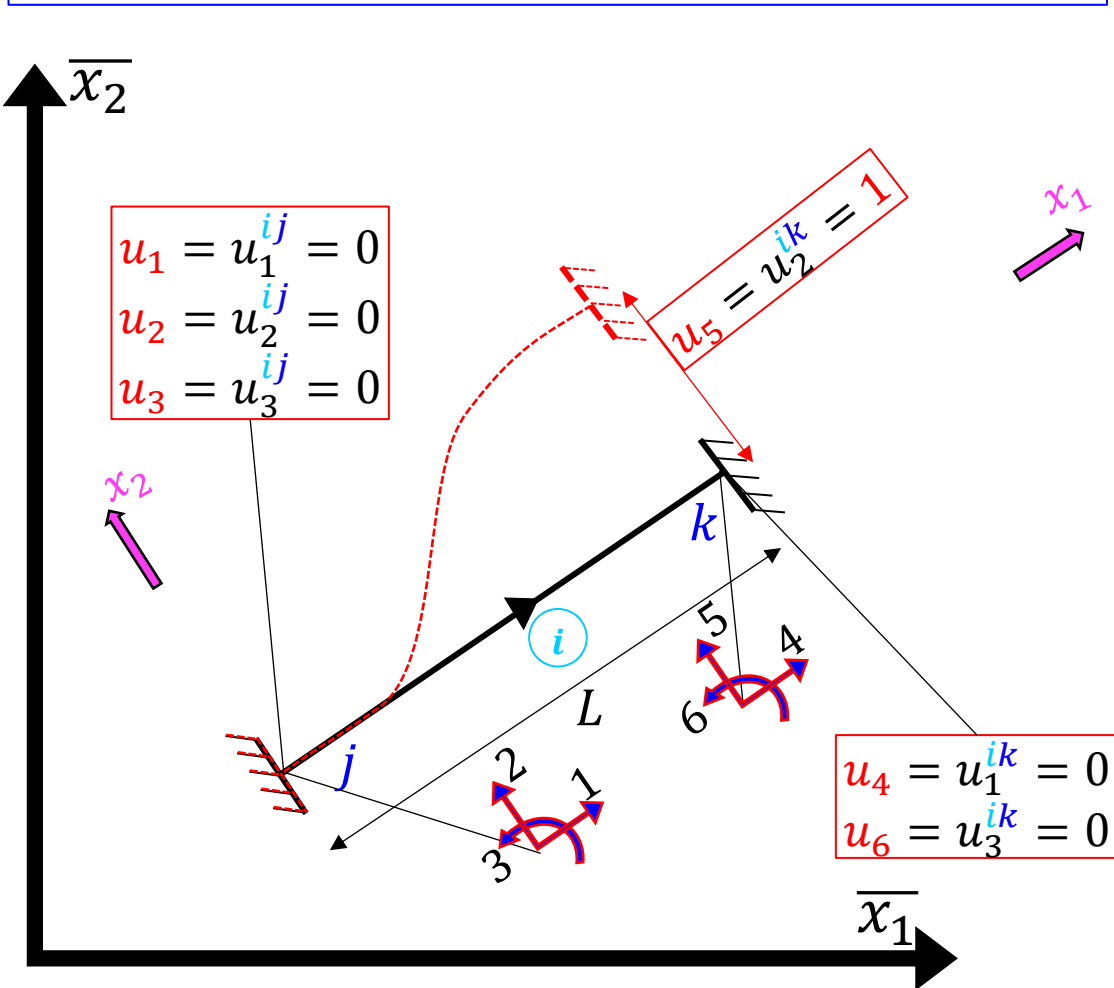
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



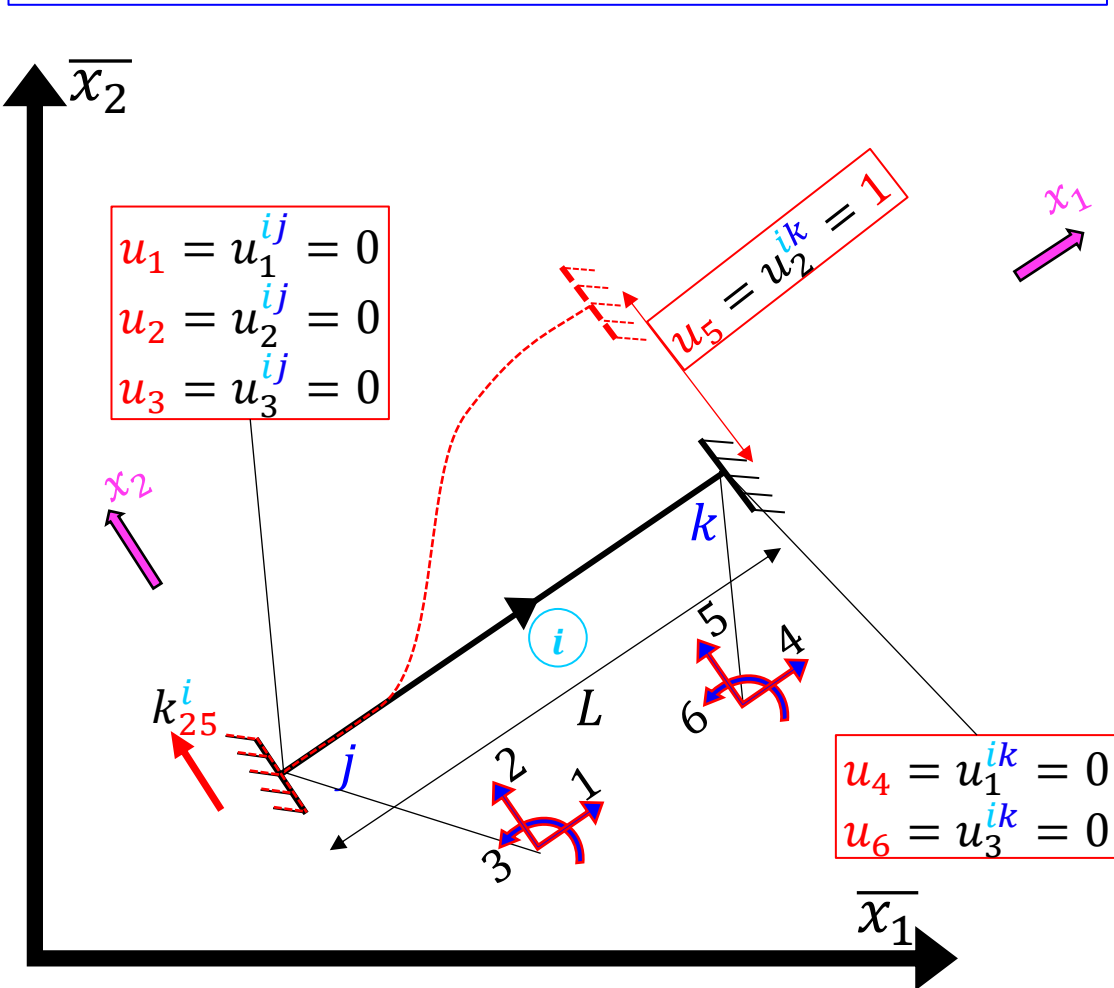
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



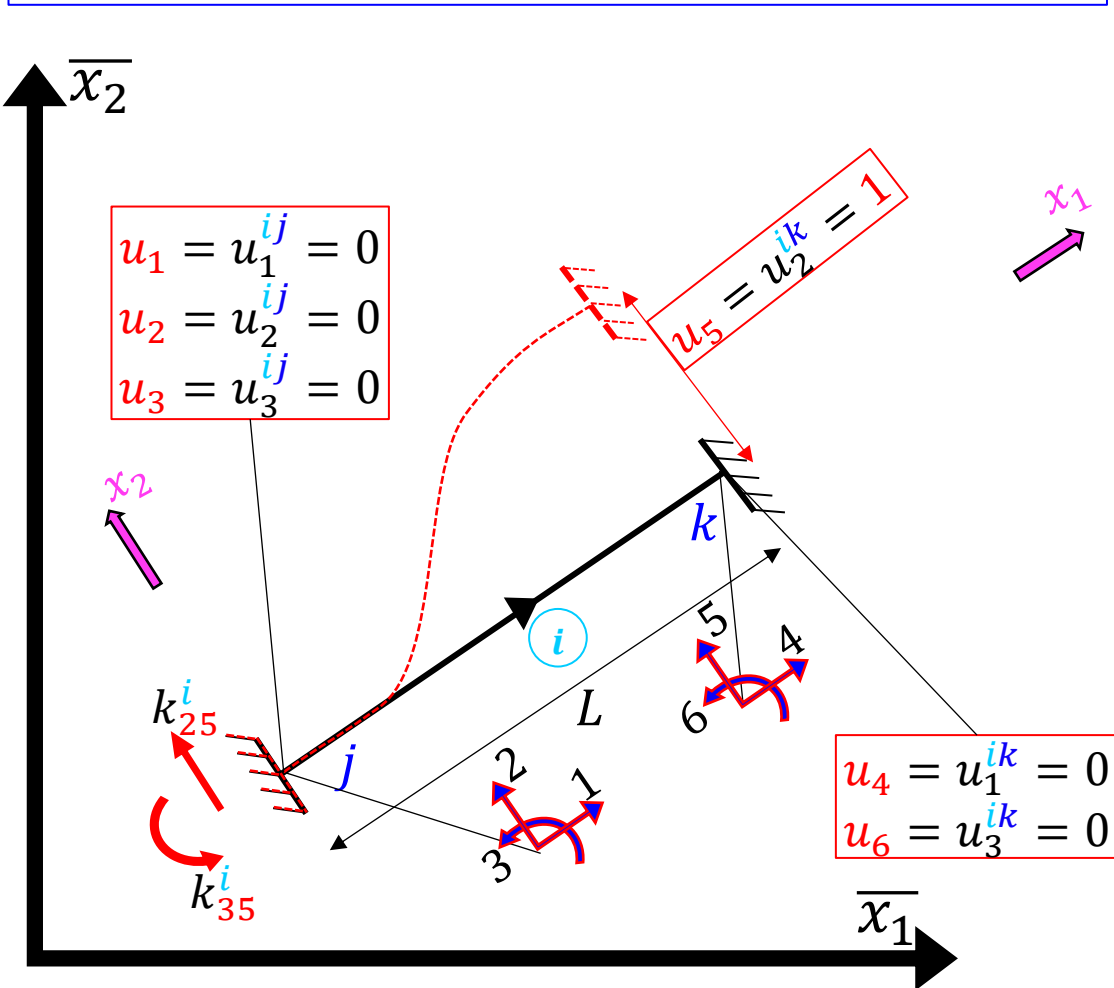
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



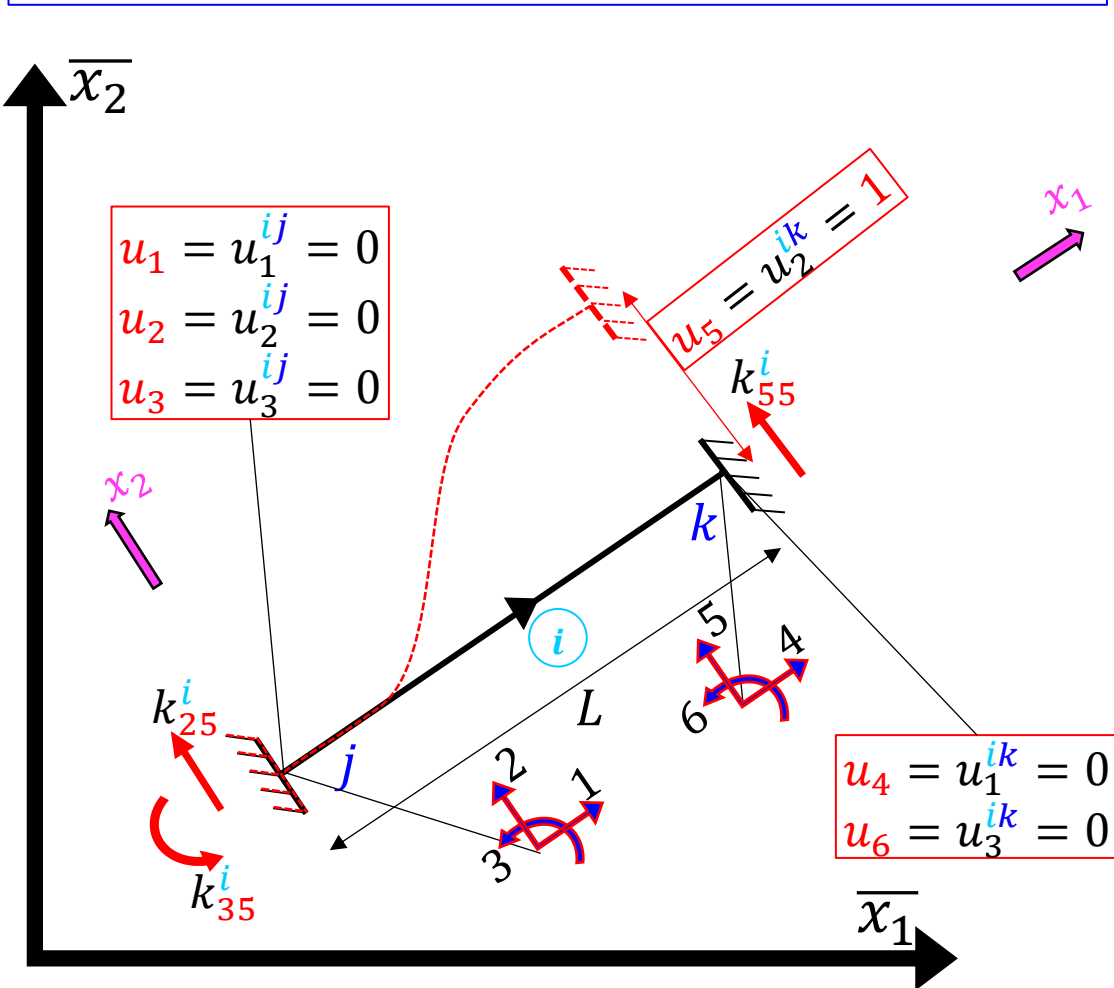
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



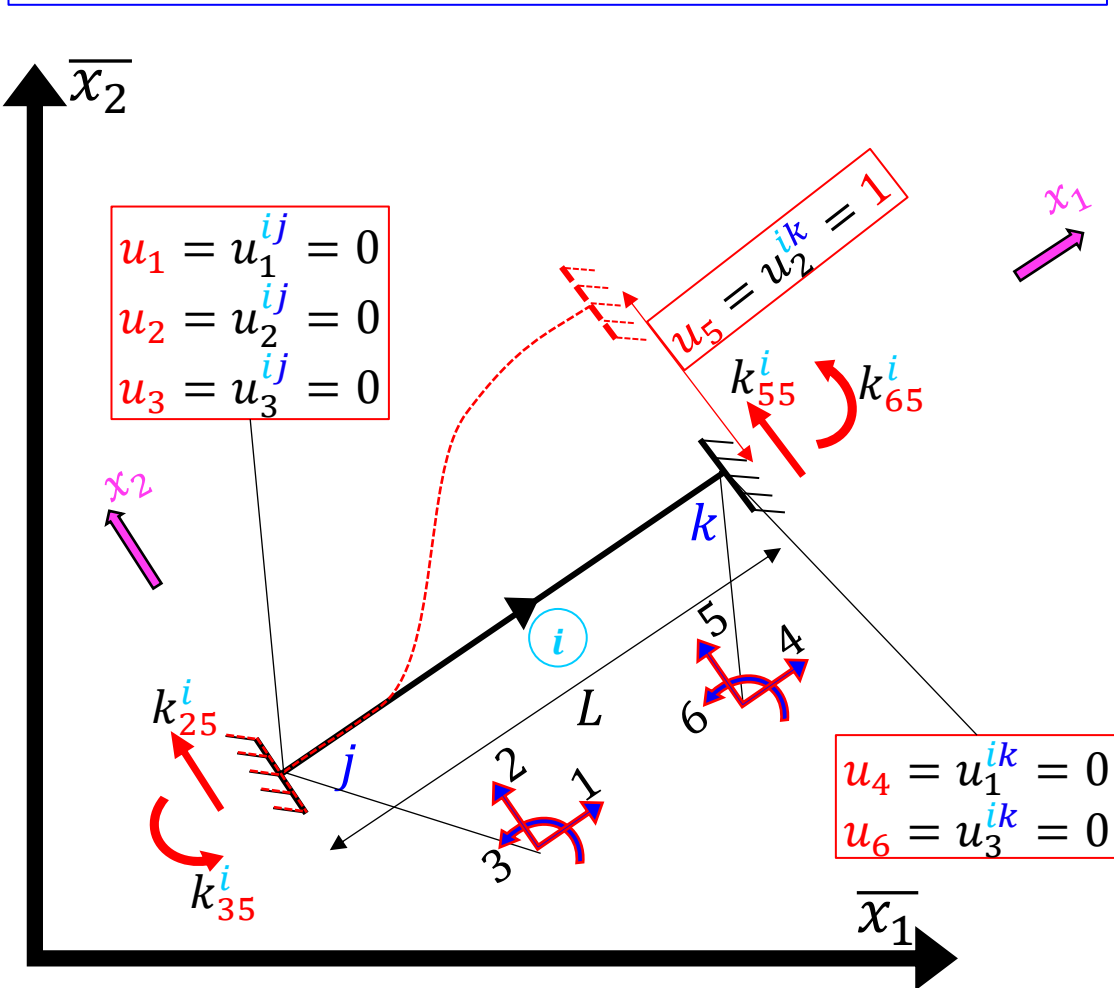
$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/3)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^i του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



$$[k^i] = \begin{bmatrix} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \text{---} & \text{---} \\ [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{bmatrix} =$$

**ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ
ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ
ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ**

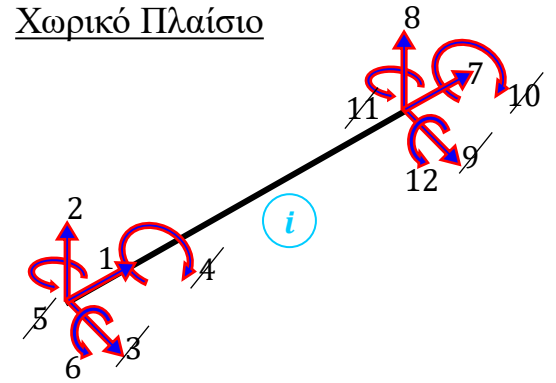
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_3	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I^i}{L^{i3}}$	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$
u_6	0	$\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{2E^i I^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I^i}{L^{i2}}$	$\frac{4E^i I^i}{L^i}$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

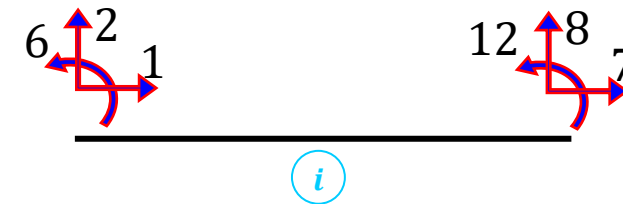
$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{matrix} \bigg| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



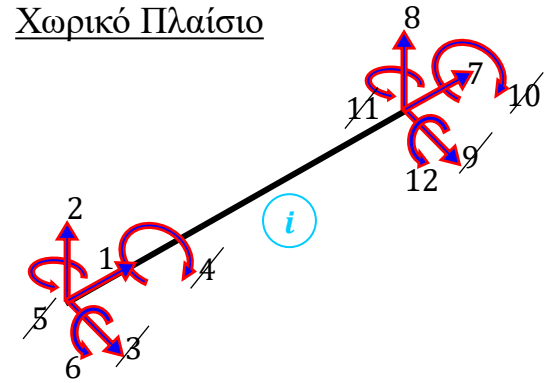
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$[k_{SF}^i] =$

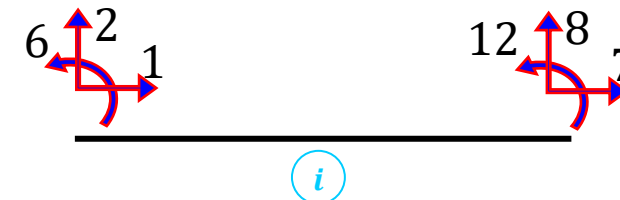
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο

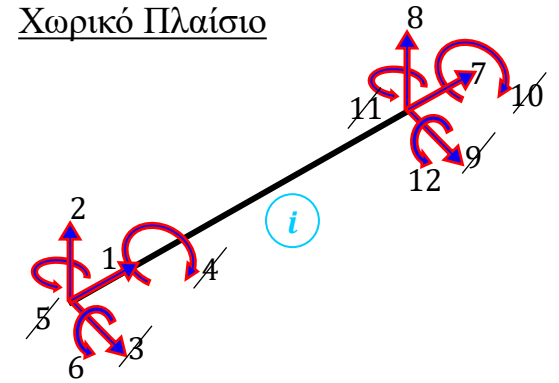


ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

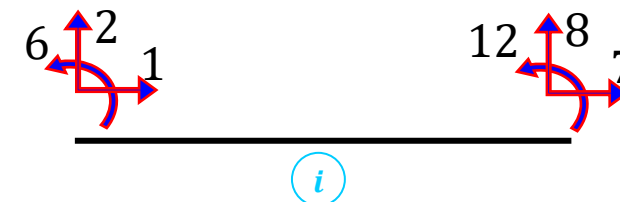
$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G^i I_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



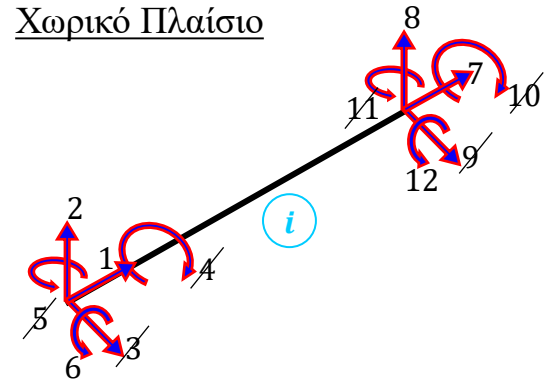
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$[k_{SF}^i] =$

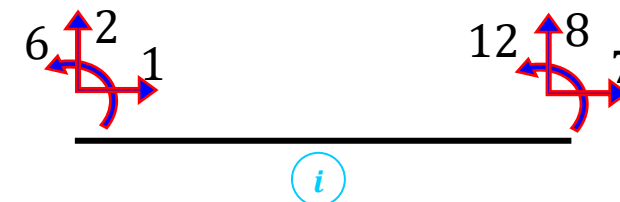
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i^3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i^3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$-\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i^2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο

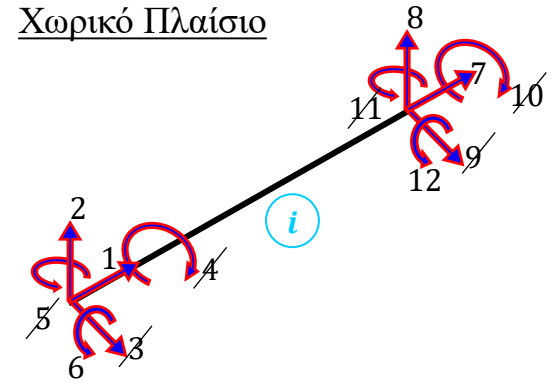


ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

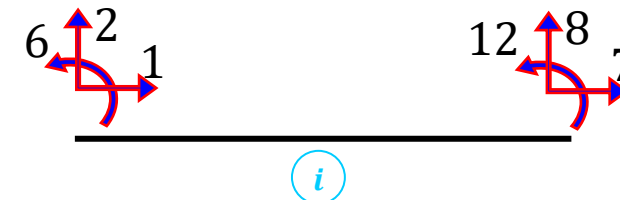
$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} & \begin{array}{cccccc} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ \hline \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} \end{array} \end{array} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο

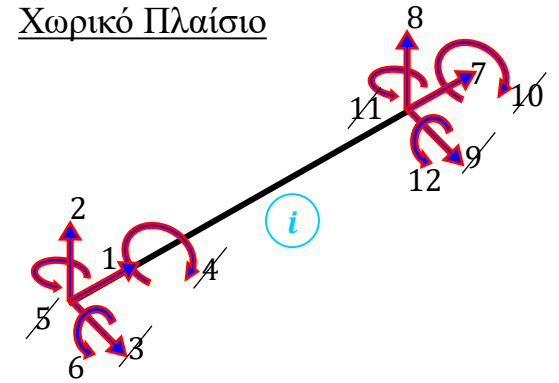


ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

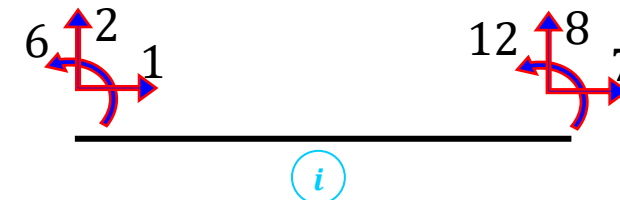
$$[k_{SF}^i] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & \frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{4E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & \frac{4E^i I_3^i}{L^i} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\ -\frac{E^i A^i}{L^i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} \\ 0 & 0 & -\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}} & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_1^i}{L^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}} & 0 & \frac{2E^i I_2^i}{L^i} & 0 \\ 0 & -\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E^i I_3^i}{L^i} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



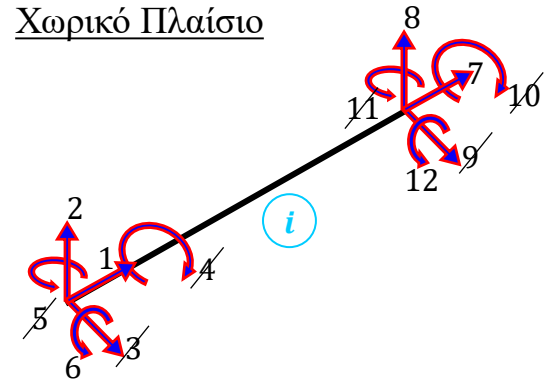
ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/3)

$[k_{SF}^i] =$

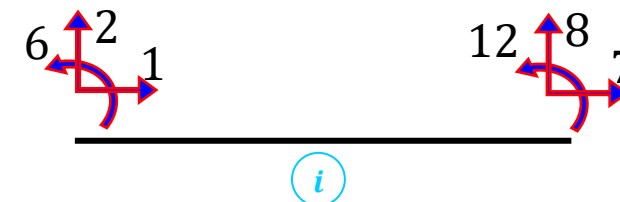
u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$
$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{E^i A^i}{L^i}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{12E^i I_3^i}{L^{i3}}$	0	0	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$
0	0	$-\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{12E^i I_2^i}{L^{i3}}$	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0
0	0	0	$-\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0	0	0	0	$\frac{G^i I_1^i}{L^i}$	0	0
0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{2E^i I_2^i}{L^i}$	0	0	0	$\frac{6E^i I_2^i}{L^{i2}}$	0	$\frac{4E^i I_2^i}{L^i}$	0
0	$\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{2E^i I_3^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^i I_3^i}{L^{i2}}$	0	0	0	$\frac{4E^i I_3^i}{L^i}$

Το μητρώο στιβαρότητας του επίπεδου πλαισίου προκύπτει από το μητρώο στιβαρότητας του χωρικού πλαισίου με διαγραφή των γραμμών/στηλών 3, 4, 5, 9, 10, 11.

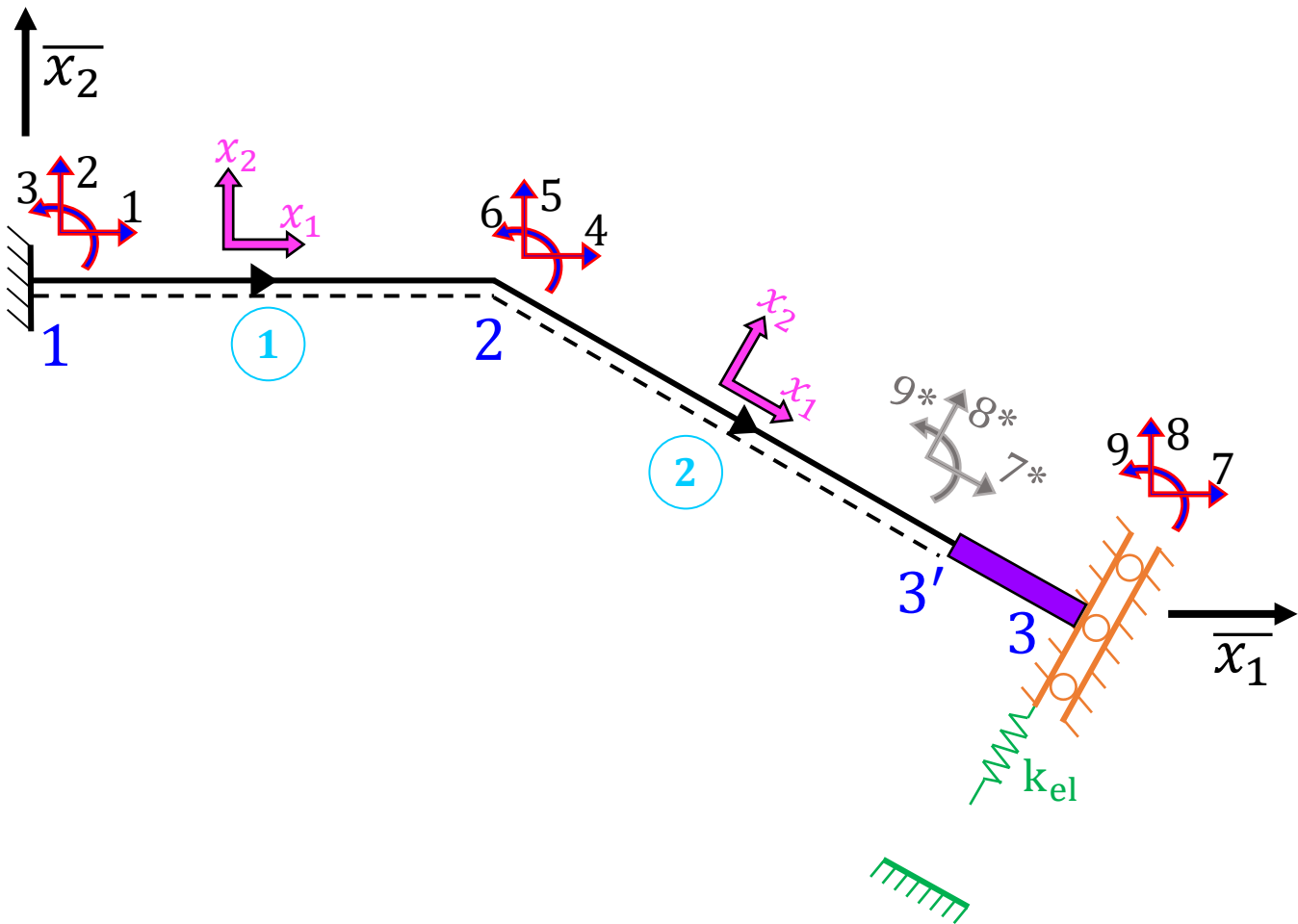
Χωρικό Πλαίσιο



Επίπεδο Πλαίσιο



BHMA 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (3/3)



$$[k^1] = \begin{bmatrix} 8.4000 & 0 & 0 & -8.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1493 & 0.4480 & 0 & -0.1493 & 0.4480 \\ 0 & 0.4480 & 1.7920 & 0 & -0.4480 & 0.8960 \\ -8.4000 & 0 & 0 & 8.4000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1493 & -0.4480 & 0 & 0.1493 & -0.4480 \\ 0 & 0.4480 & 0.8960 & 0 & -0.4480 & 1.7920 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[k^2] = \begin{bmatrix} 7.2740 & 0 & 0 & -7.2740 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0970 & 0.3359 & 0 & -0.0970 & 0.3359 \\ 0 & 0.3359 & 1.5518 & 0 & -0.3359 & 0.7759 \\ -7.2740 & 0 & 0 & 7.2740 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0970 & -0.3359 & 0 & 0.0970 & -0.3359 \\ 0 & 0.3359 & 0.7759 & 0 & -0.3359 & 1.5518 \end{bmatrix} \times 10^5$$

7* 8* 9*

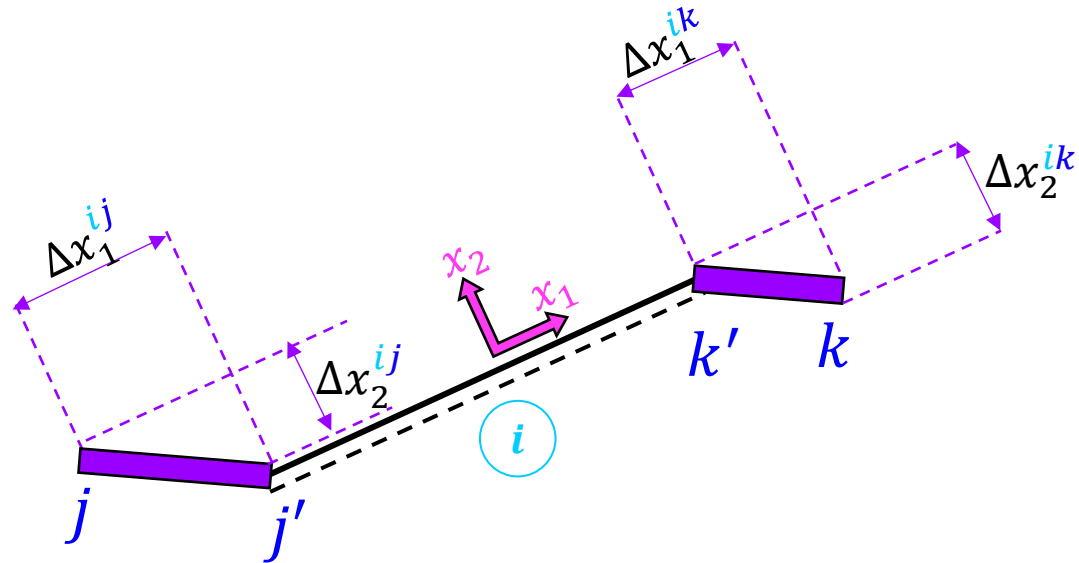
Μέλος i	E^i [kN/m ²]	A^i [m ²]	I^i [m ⁴]	L^i [m]
1	2.1×10^7	0.24	0.0128	6.0
2	2.1×10^7	0.24	0.0128	6.928



ΒΗΜΑ 6*: Τροποποίηση Τοπικών Μητρώων Στιβαρότητας Μελών λόγω Στερεού Κόμβου

(1/3)

Ορισμός εκκεντροτήτων σε μέλος επίπεδου πλαισίου:



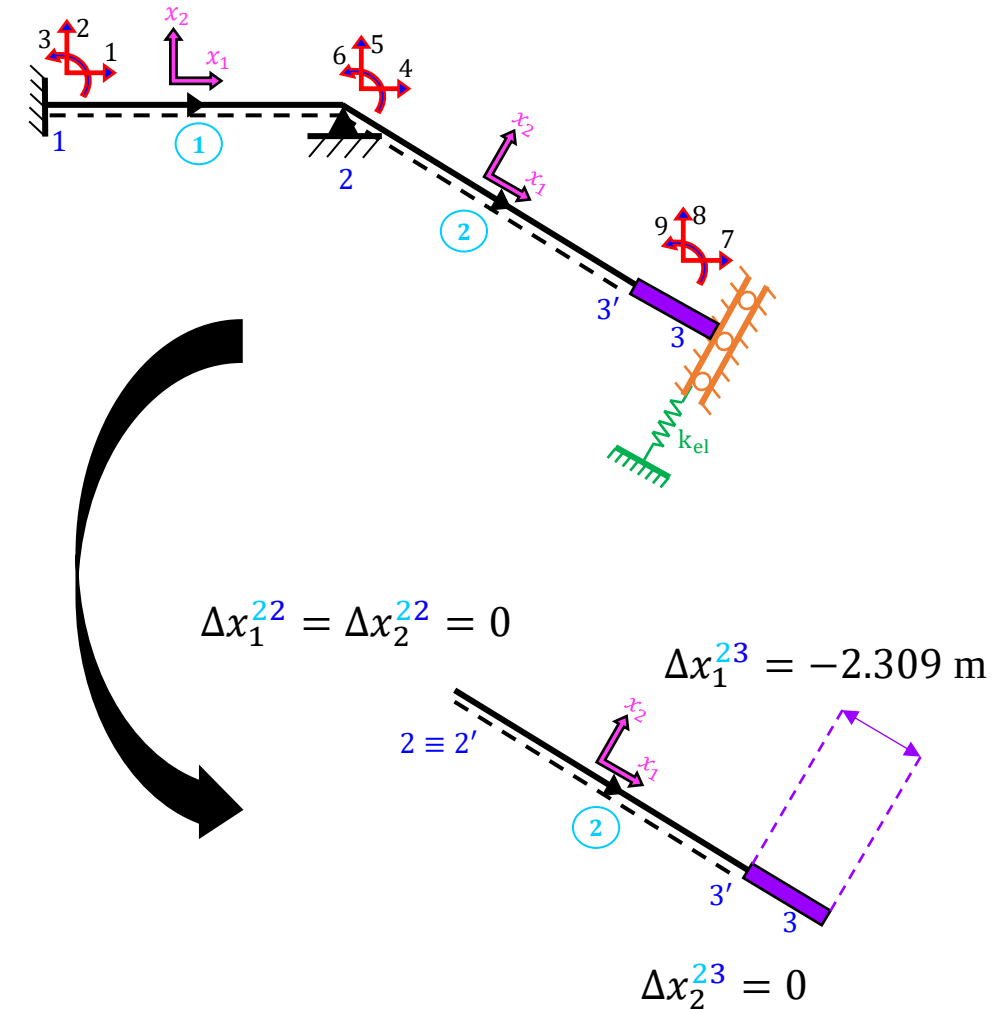
$$\Delta x_1^{ij} = x_1^{ij'} - x_1^{ij}$$

$$\Delta x_1^{ik} = x_1^{ik'} - x_1^{ik}$$

$$\Delta x_2^{ij} = x_2^{ij'} - x_2^{ij}$$

$$\Delta x_2^{ik} = x_2^{ik'} - x_2^{ik}$$

Στο παραδειγμα μας, για κάθε μέλος που έχει στερεό κόμβο υπολογίζω τις εκκεντρότητες:

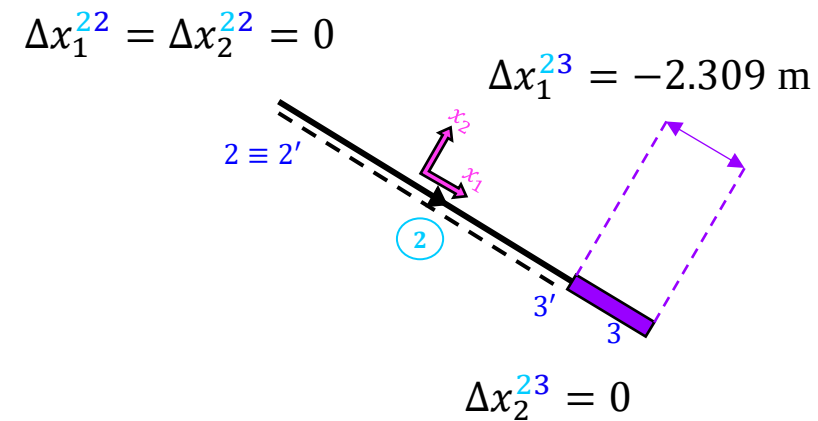


ΒΗΜΑ 6*: Τροποποίηση Τοπικών Μητρώων Στιβαρότητας Μελών λόγω Στερεού Κόμβου

(2/3)

Μητρώο εκκεντρότητας:

$$[e^i] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\Delta x_2^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta x_1^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\Delta x_2^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta x_1^{ik} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$



$$[e^2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.309 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

ΒΗΜΑ 6*: Τροποποίηση Τοπικών Μητρώων Στιβαρότητας Μελών λόγω Στερεού Κόμβου

(3/3)

Το τροποποιημένο μητρώο στιβαρότητας του μέλους 2 δίνεται ως:

$$[k_m^2] = [e^2]^T [k^2] [e^2] = \begin{bmatrix} 7.2740 & 0 & 0 & -7.2740 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0970 & 0.3359 & 0 & -0.0970 & 0.5598 \\ 0 & 0.3359 & 1.5518 & 0 & -0.3359 & 1.5516 \\ -7.2740 & 0 & 0 & 7.2740 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0970 & -0.3359 & 0 & 0.0970 & -0.5598 \\ 0 & 0.5598 & 1.5516 & 0 & -0.5598 & 3.6202 \end{bmatrix} \times 10^5$$

BHMA 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(1/2)

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε μέλους υπολογίζεται από τη σχέση: $[\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PF}^i]$

$$[\bar{k}^1] = \begin{bmatrix} 8.4000 & 0 & 0 & -8.4000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1493 & 0.4480 & 0 & -0.1493 & 0.4480 \\ 0 & 0.4480 & 1.7920 & 0 & -0.4480 & 0.8960 \\ -8.4000 & 0 & 0 & 8.4000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1493 & -0.4480 & 0 & 0.1493 & -0.4480 \\ 0 & 0.4480 & 0.8960 & 0 & -0.4480 & 1.7920 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[\bar{k}^2] = \begin{bmatrix} 5.4790 & -3.1081 & 0.1680 & -5.4790 & 3.1081 & 0.2800 \\ -3.1081 & 1.8919 & 0.2909 & 3.1081 & -1.8919 & 0.4848 \\ 0.1680 & 0.2909 & 1.5516 & -0.1680 & -0.2909 & 1.5516 \\ -5.4790 & 3.1081 & -0.1680 & 5.4790 & -3.1081 & -0.2800 \\ 3.1081 & -1.8919 & -0.2909 & -3.1081 & 1.8919 & -0.4848 \\ 0.2800 & 0.4848 & 1.5516 & -0.2800 & -0.4848 & 3.6202 \end{bmatrix} \times 10^5$$

Το τυχόν στοιχείο $\bar{k}_{mn}^i$ του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη καθολική ακραία δράση κατά τον **καθολικό** β.ε. m , όταν επιβληθεί ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ και ΜΟΝΑΔΙΚΗ ακραία μετακίνηση κατά τον **καθολικό** β.ε. n , δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων καθολικών β.ε. του μέλους.

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών ^(2/2)



Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **συμμετρικό**. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).

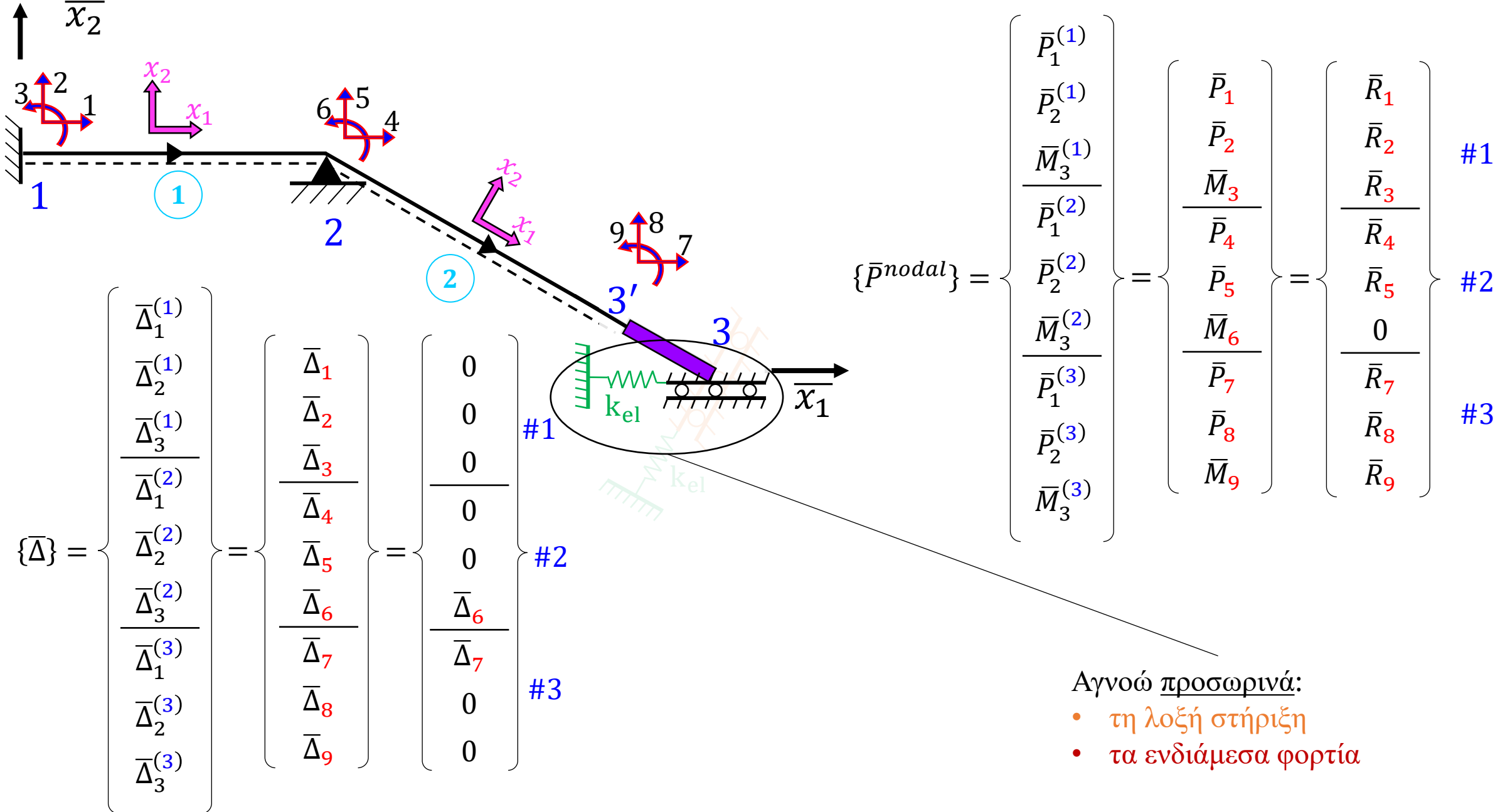


Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι **πάντα θετικά** (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$. Κατ'εξάιρεση, το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν και το αντίστοιχο καθολικό να εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις, αλλά αυτό γίνεται καθώς έχουμε θεωρήσει τέμνουσα δύναμη που (δεν ορίζεται), για να έχουμε «όμορφα και τετράγωνα» μητρώα.



Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι **μηδενική**. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις



ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις

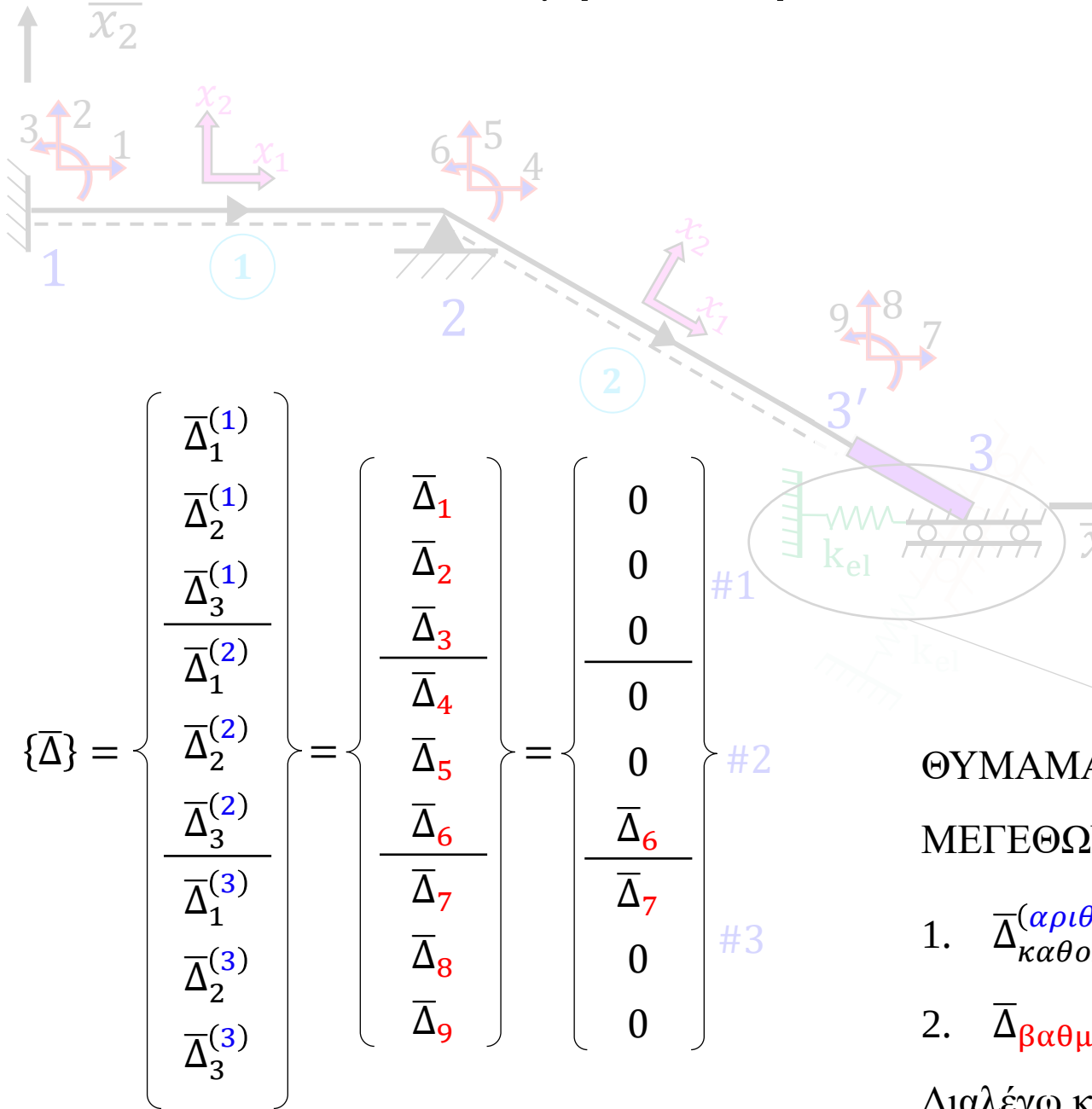


Diagram illustrating the assembly of the global stiffness matrix $\{\bar{\Delta}\}$ for a structure with three nodes (1, 2, 3) and their corresponding degrees of freedom (DOFs).

Global Stiffness Matrix Assembly:

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Node 1 is a fixed support, so all DOFs are constrained (0). Node 2 is a roller support, so the vertical DOF is constrained (0). Node 3 is a diagonal member end, so all DOFs are free.

Element Stiffness Matrices:

Element 1 (Node 1 to Node 2):

$$\bar{P}_1^{(1)} = \bar{P}_2^{(1)} = \bar{M}_3^{(1)} = \bar{P}_1^{(2)} = \bar{P}_2^{(2)} = \bar{M}_3^{(2)} = \bar{P}_1^{(3)} = \bar{P}_2^{(3)} = \bar{M}_3^{(3)}$$

Element 2 (Node 2 to Node 3):

$$\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = \bar{M}_3 = \bar{P}_4 = \bar{P}_5 = \bar{M}_6 = \bar{P}_7 = \bar{P}_8 = \bar{M}_9$$

Element 3 (Node 3 to Node 1):

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = \bar{R}_3 = \bar{R}_4 = \bar{R}_5 = 0 = \bar{R}_7 = \bar{R}_8 = \bar{R}_9$$

Global Stiffness Matrix Partitioning:

$$\{\bar{P}^{nodal}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ 0 \\ \bar{R}_7 \\ \bar{R}_8 \\ \bar{R}_9 \end{Bmatrix}$$

ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΔΥΟ ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ($\bar{P}$, $\bar{\Delta}$, $\bar{S}$, κλπ.):

- $\bar{\Delta}^{(\text{αριθμός κόμβου})}$ καθολικός άξονας
- $\bar{\Delta}_{\text{βαθμός ελευθερίας}}$

Διαλέγω και παίρνω ☺

Αγνοώ προσωρινά:

- τη λοξή στήριξη
- τα ενδιάμεσα φορτία

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα ^(1/4)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με

$$\text{τη βοήθεια της σχέσης: } [\bar{k}^i] = [\Lambda_{PF}^i]^T [k^i] [\Lambda_{PF}^i],$$

$$\text{με τη μορφή: } [\bar{k}^i] = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}^i] & [\bar{k}_{jk}^i] \\ [\bar{k}_{kj}^i] & [\bar{k}_{kk}^i] \end{bmatrix}, \text{ επιμερίζοντας δηλαδή το μητρώο αυτό}$$

σε 4 **υπομητρώα** διάστασης 3x3.

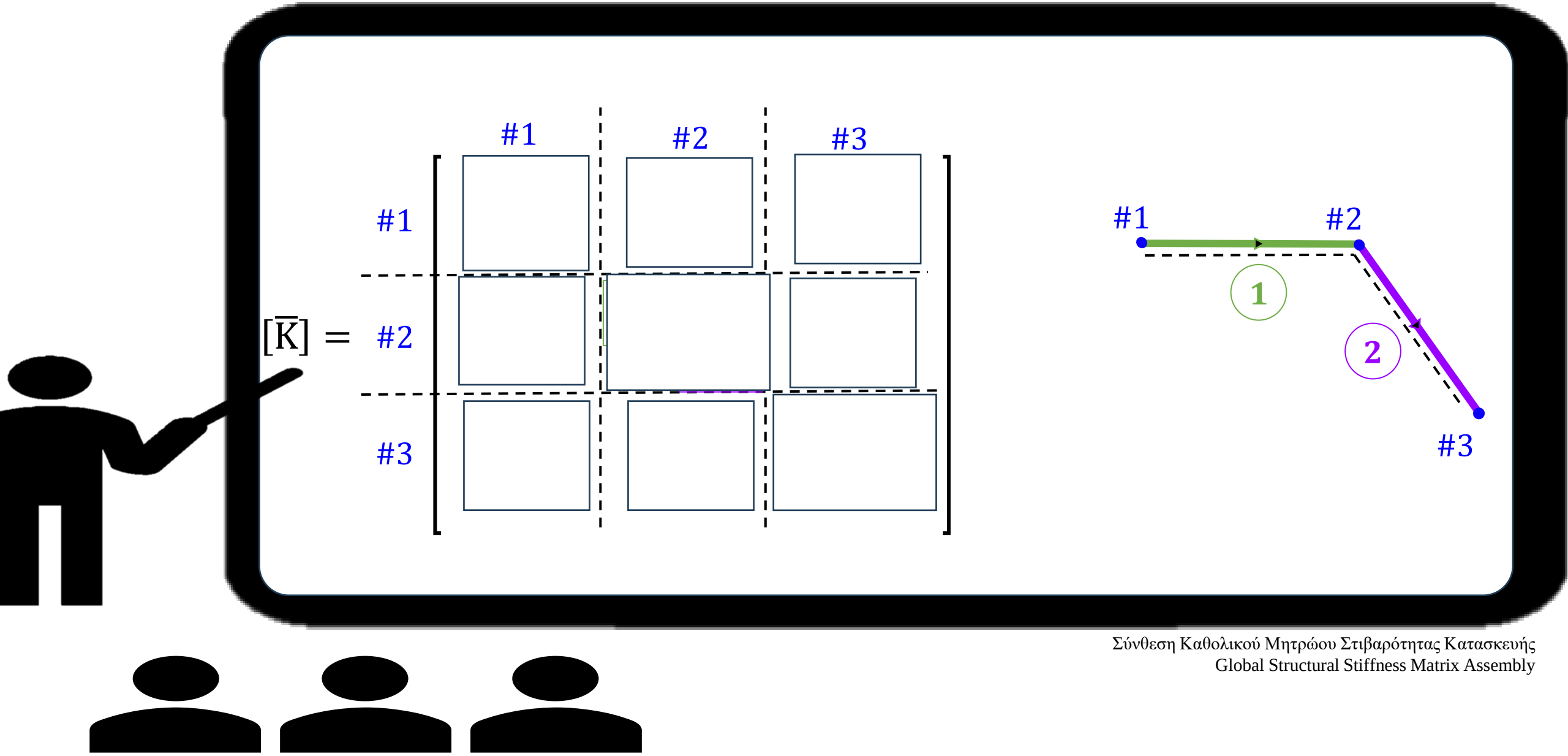
2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί **για όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/4)

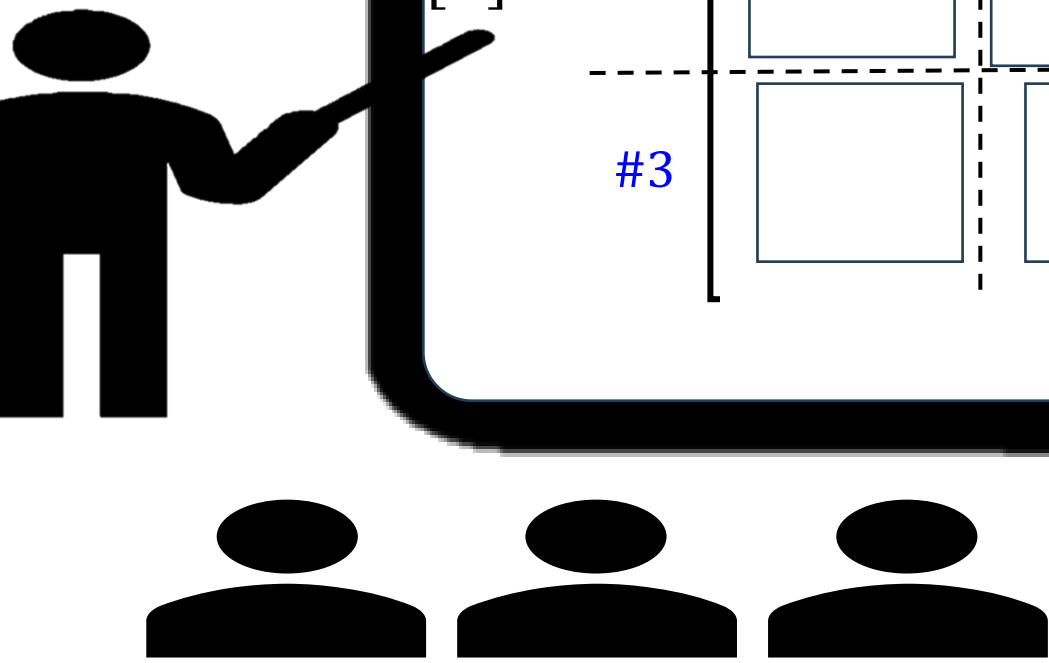
Πως μεταφέρονται τα καθολικά υπομητρώα μέλους $[\bar{k}_{jj}^i]$, $[\bar{k}_{jk}^i]$, $[\bar{k}_{kj}^i]$, $[\bar{k}_{kk}^i]$ στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα:

1. Το $[\bar{k}_{jj}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
2. Το $[\bar{k}_{jk}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.
3. Το $[\bar{k}_{kj}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
4. Το $[\bar{k}_{kk}^i]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



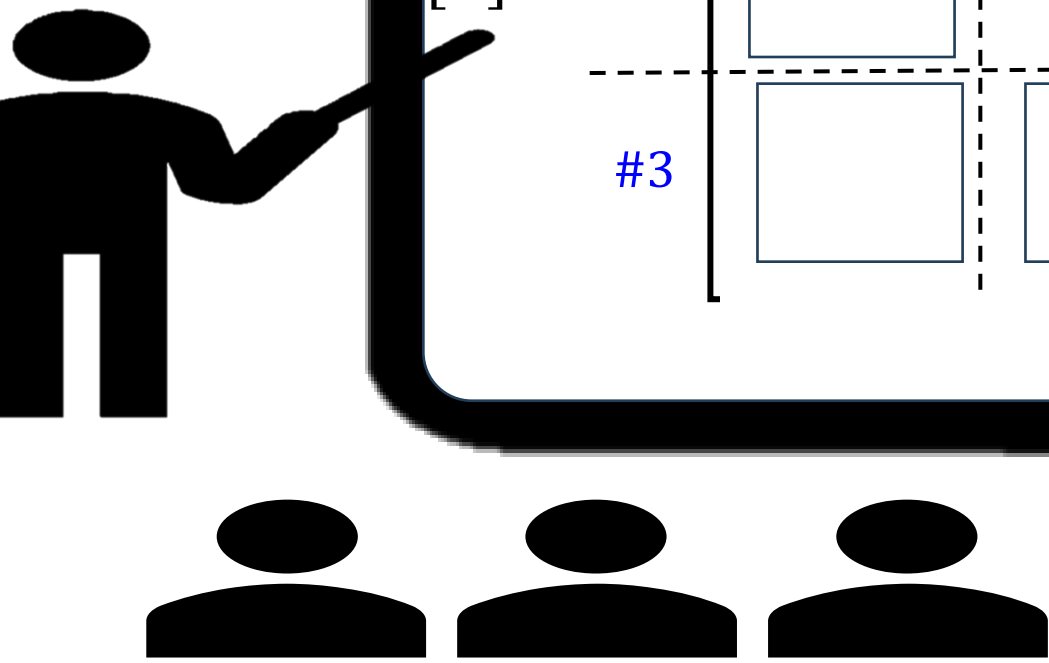
The diagram illustrates the assembly of the global structural stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a three-degree-of-freedom system. The matrix is shown as a 3x3 block matrix, partitioned by dashed lines into a 3x3 grid of sub-matrices. The columns are labeled #1, #2, and #3 at the top. The rows are labeled #1, #2, and #3 on the left. The top-left sub-matrix, representing the stiffness of element 1, is highlighted with a green border and contains the term $[\bar{k}_{jj}^1]$. To the right of the matrix, a schematic diagram shows three nodes: #1, #2, and #3. Node #1 is connected to node #2 by a horizontal green line with an arrow pointing right, labeled with a green circle containing the number 1. Node #2 is connected to node #3 by a diagonal purple line with an arrow pointing down-right, labeled with a purple circle containing the number 2. Dashed lines extend from node #1 to the right and from node #2 to the left and down-right.

$[\bar{K}] =$

	#1	#2	#3
#1	$[\bar{k}_{jj}^1]$		
#2			
#3			

Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



The diagram illustrates the assembly of the global structural stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a three-degree-of-freedom system. The matrix is shown as a 3x3 block matrix with rows and columns indexed by node numbers #1, #2, and #3. The diagonal blocks represent the element stiffness matrices for each member.

The matrix structure is:

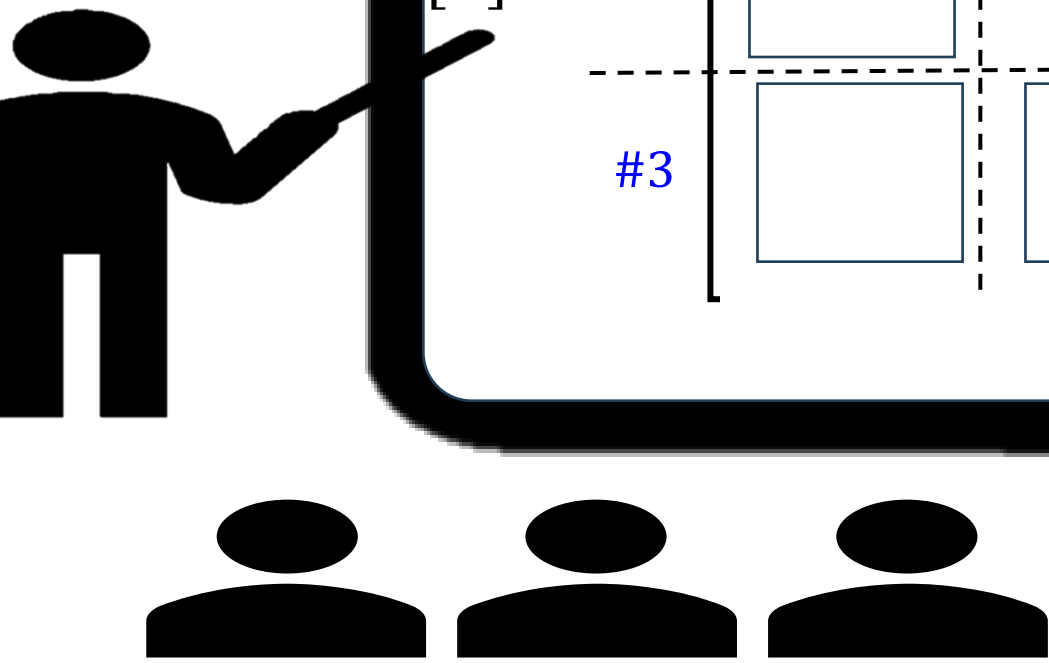
$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \text{#1} & & \\ & \text{#2} & \\ & & \text{#3} \end{bmatrix}$$

The diagonal blocks are:

- Block (1,1): $[\bar{k}_{jj}^1]$ (green box)
- Block (2,2): $[\bar{k}_{kk}^1]$ (green box) + $[\bar{k}_{jj}^2]$ (purple box)
- Block (3,3): (empty box)

The diagram also shows a structural model with three nodes (#1, #2, #3) and two members. Member 1 (green) connects node #1 to node #2. Member 2 (purple) connects node #2 to node #3. The nodes are labeled #1, #2, and #3. The members are labeled 1 and 2.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

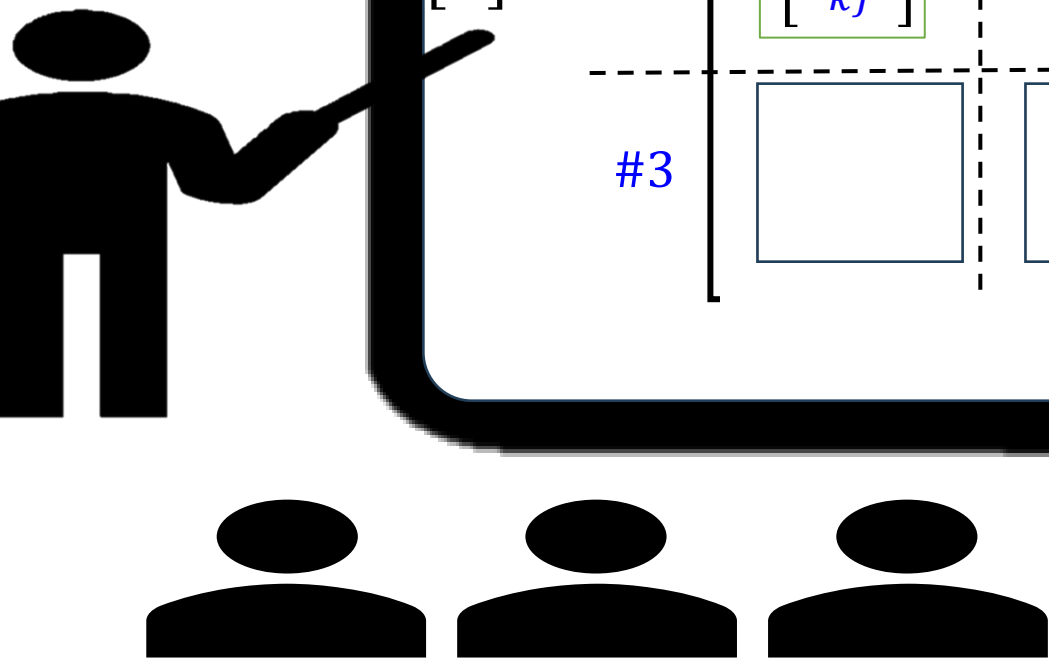


The whiteboard displays the assembly of the global stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a three-degree-of-freedom system. The matrix is shown as a 3x3 block matrix with rows and columns indexed by node numbers #1, #2, and #3. The diagonal blocks represent the element stiffness matrices, which are being added to the global matrix. The first element connects nodes #1 and #2, and the second element connects nodes #2 and #3.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \text{\#1} & & \\ & \text{\#2} & \\ & & \text{\#3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{[\bar{k}_{jj}^1]} & & \\ & \boxed{[\bar{k}_{kk}^1]} + \boxed{[\bar{k}_{jj}^2]} & \\ & & \boxed{[\bar{k}_{kk}^2]} \end{bmatrix}$$

To the right of the matrix, a diagram illustrates the two elements. Element 1 is a horizontal bar between nodes #1 and #2, and Element 2 is a diagonal member between nodes #2 and #3. The nodes are marked with blue dots and labeled #1, #2, and #3. The elements are labeled with circled numbers 1 and 2.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

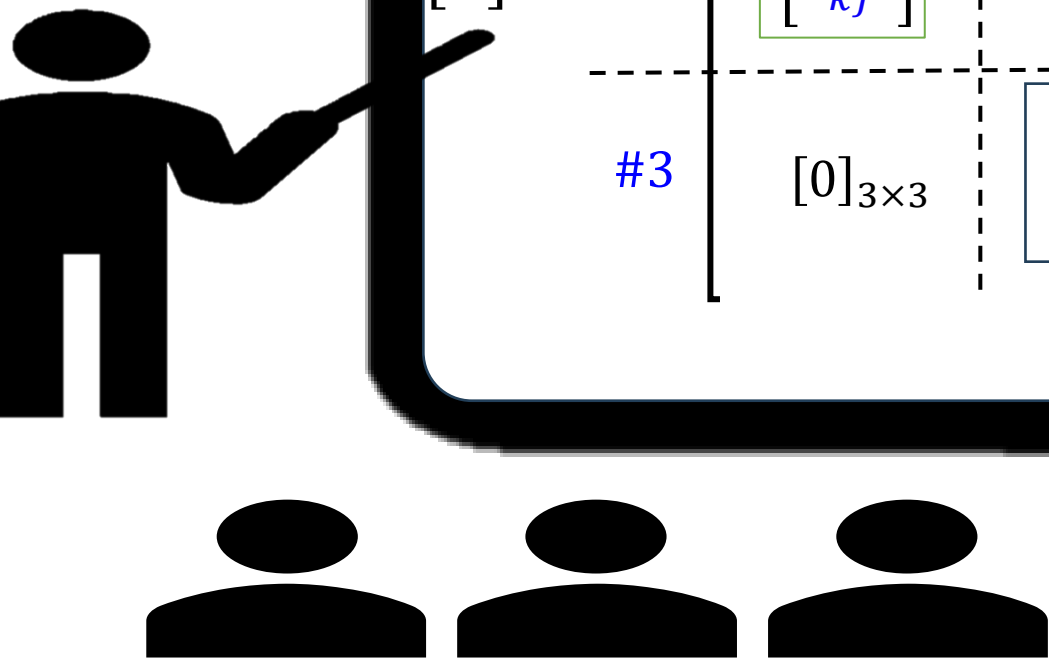


The whiteboard displays the assembly of the global stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a three-degree-of-freedom system. The matrix is shown as a 3x3 block matrix with rows and columns indexed by node numbers #1, #2, and #3. The blocks represent the contribution of individual elements to the global matrix.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \text{\#1} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \\ \text{\#2} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \\ + \\ \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \\ \text{\#3} & \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

To the right of the matrix, a diagram illustrates the structure. It shows three nodes: #1, #2, and #3. A green line with an arrow connects node #1 to node #2, labeled with a green circle containing the number 1. A purple line with an arrow connects node #2 to node #3, labeled with a purple circle containing the number 2. Dashed lines indicate the global coordinate system for each element.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

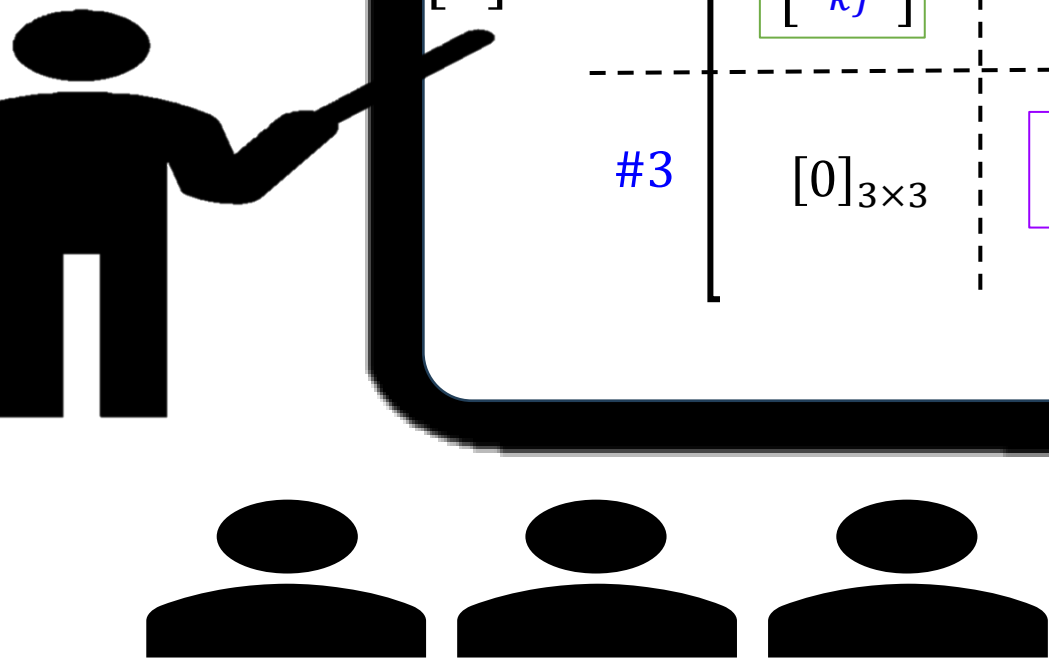


The whiteboard displays the assembly of the global stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a three-degree-of-freedom system. The matrix is partitioned by element and node.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \text{\#1} & \text{\#2} & \text{\#3} \\ \text{\#1} & \boxed{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}} & \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}}} & \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}}} \\ \text{\#2} & \boxed{\begin{bmatrix} \bar{k}_{kj}^1 \end{bmatrix}} & \boxed{\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^1 \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^2 \end{bmatrix}} & \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}}} \\ \text{\#3} & [0]_{3 \times 3} & \boxed{\phantom{\begin{bmatrix} \bar{k}_{jj}^1 \end{bmatrix}}} & \boxed{\begin{bmatrix} \bar{k}_{kk}^2 \end{bmatrix}} \end{bmatrix}$$

To the right, a diagram shows the structure with nodes #1, #2, and #3. Element 1 (green) connects nodes #1 and #2. Element 2 (purple) connects nodes #2 and #3. Dashed lines indicate the global coordinate system.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

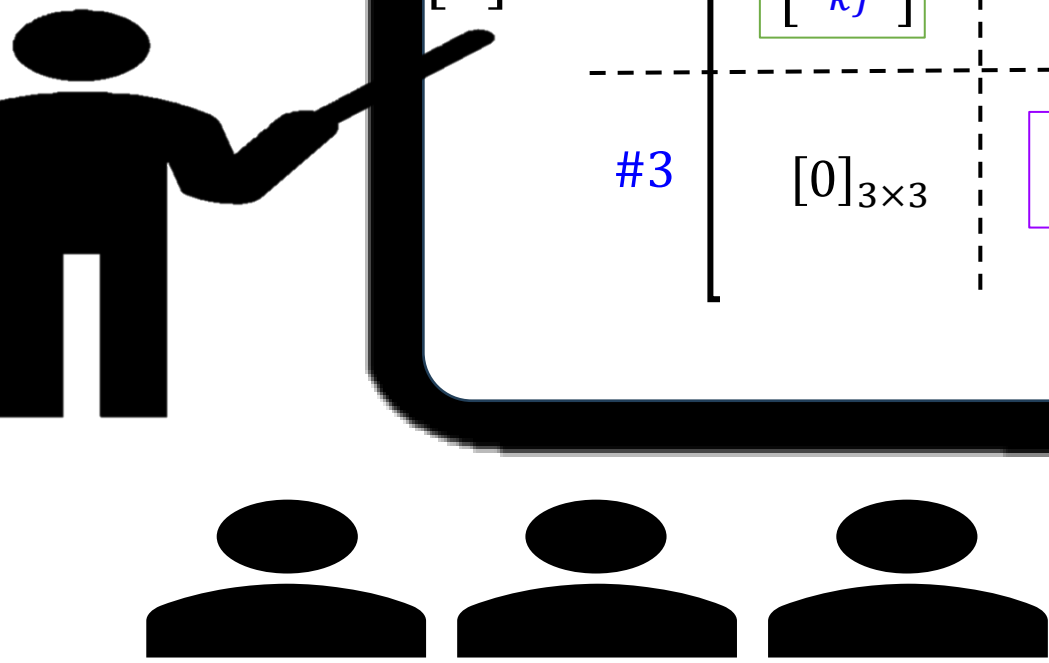


The whiteboard displays the assembly of the global stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a 3-degree-of-freedom system. The matrix is partitioned by element and node.

$$[\bar{K}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{\#1} & \text{\#2} & \text{\#3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \boxed{[\bar{k}_{jj}^1]} & \boxed{[\bar{k}_{kj}^1]} & [0]_{3 \times 3} \\ \boxed{[\bar{k}_{kj}^1]} + \boxed{[\bar{k}_{jj}^2]} & \boxed{[\bar{k}_{kk}^2]} & \boxed{[\bar{k}_{kk}^2]} \\ \boxed{[\bar{k}_{kj}^2]} & \boxed{[\bar{k}_{kk}^2]} & \boxed{[\bar{k}_{kk}^2]} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

The diagram on the right illustrates the structure of the frame. It shows three nodes: #1, #2, and #3. A horizontal member connects node #1 and node #2, labeled with a green circle '1'. A diagonal member connects node #2 and node #3, labeled with a purple circle '2'. Dashed lines indicate the global coordinate system for each member.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



The whiteboard displays the assembly of the global stiffness matrix $[\bar{K}]$ for a 3-degree-of-freedom system. The matrix is partitioned by element and node.

$$[\bar{K}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{\#1} & \text{\#2} & \text{\#3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{\#1} \\ \text{\#2} \\ \text{\#3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{teal}{1}} \\ \bar{k}_{jj} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{teal}{1}} \\ \bar{k}_{jk} \end{matrix}} & [0]_{3 \times 3} \\ \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{teal}{1}} \\ \bar{k}_{kj} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{teal}{1}} \\ \bar{k}_{kk} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{violet}{2}} \\ \bar{k}_{jj} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{violet}{2}} \\ \bar{k}_{jk} \end{matrix}} \\ [0]_{3 \times 3} & \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{violet}{2}} \\ \bar{k}_{kj} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \text{\textcolor{violet}{2}} \\ \bar{k}_{kk} \end{matrix}} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

To the right, a diagram shows the structure with nodes #1, #2, and #3. Element 1 (green) connects nodes #1 and #2. Element 2 (purple) connects nodes #2 and #3. Dashed lines indicate the global coordinate system.

BHMA 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (4/4)

#1

1

2

3

#2

4

5

6

#3

7

8

9

#1

1

2

3

4

5

6

7

8

9

0.8400	0	0	-0.8400	0	0	0	0	0
0	0.0149	0.0448	0	-0.0149	0.0448	0	0	0
0	0.0448	0.1792	0	-0.0448	0.0896	0	0	0
-0.8400	0	0	1.3879	-0.3108	0.0168	-0.5479	0.3108	0.0280
0	-0.0149	-0.0448	-0.3108	0.2041	-0.0157	0.3108	-0.1892	0.0485
0	0.0448	0.0896	0.0168	-0.0157	0.3344	-0.0168	-0.0291	0.1552
0	0	0	-0.5479	0.3108	-0.0168	0.5479	-0.3108	-0.0280
0	0	0	0.3108	-0.1892	-0.0291	-0.3108	0.1892	-0.0485
0	0	0	0.0280	0.0485	0.1552	-0.0280	-0.0485	0.3620

$\times 10^6$

(2/5)

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

Το τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα λόγω λοξής στήριξης του κόμβου 3 δίνεται ως:

$$[\bar{K}_m] = [R^3][\bar{K}][R^3]^T =$$

			#1			#2			#3			
			1	2	3	4	5	6	7'	8'	9'	
#1	1		0.8400	0	0	-0.8400	0	0	0	0	0	$\times 10^6$
	2		0	0.0149	0.0448	0	-0.0149	0.0448	0	0	0	
	3		0	0.0448	0.1792	0	-0.0448	0.0896	0	0	0	
#2	4		-0.8400	0	0	1.3879	-0.3108	0.0168	-0.0048	0.6299	0.0280	
	5		0	-0.0149	-0.0448	-0.3108	0.2041	-0.0157	-0.0084	-0.3638	0.0485	
	6		0	0.0448	0.0896	0.0168	-0.0157	0.3344	-0.0336	0.0000	0.1552	
#3	7'		0	0	0	-0.0048	-0.0084	-0.0336	0.0097	0.0001	-0.0560	
	8'		0	0	0	0.6299	-0.3638	0.0000	0.0001	0.7274	0.0000	
	9'		0	0	0	0.0280	0.0485	0.1552	-0.0560	0.0000	0.3620	

1^η Τροποποίηση Δυσκαμψίας

BHMA 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (3/5)

ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

Το υπομητρώ του καθολικού μητρώου του φορέα που αντιστοιχεί στον κόμβο 3 θα τροποποιηθεί ως εξής:

$$[\bar{K}_{\#3,\#3}] = [\bar{k}_{kk}^2] + \begin{bmatrix} k_{el} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

με: $k_{el} = 24 \times 10^4 \text{ kN/m}$

Επομένως το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα τροποποιείται ως:

$[\bar{K}_{mm}] =$

		1	2	3	4	5	6	7'	8'	9'
		#1				#2			#3	
#1	1	0.8400	0	0	-0.8400	0	0	0	0	0
	2	0	0.0149	0.0448	0	-0.0149	0.0448	0	0	0
	3	0	0.0448	0.1792	0	-0.0448	0.0896	0	0	0
#2	4	-0.8400	0	0	1.3879	-0.3108	0.0168	-0.0048	0.6299	0.0280
	5	0	-0.0149	-0.0448	-0.3108	0.2041	-0.0157	-0.0084	-0.3638	0.0485
	6	0	0.0448	0.0896	0.0168	-0.0157	0.3344	-0.0336	0.0000	0.1552
#3	7'	0	0	0	-0.0048	-0.0084	-0.0336	0.0097	0.0001	-0.0560
	8'	0	0	0	0.6299	-0.3638	0.0000	0.0001	0.7274	0.0000
	9'	0	0	0	0.0280	0.0485	0.1552	-0.0560	0.0000	0.3620

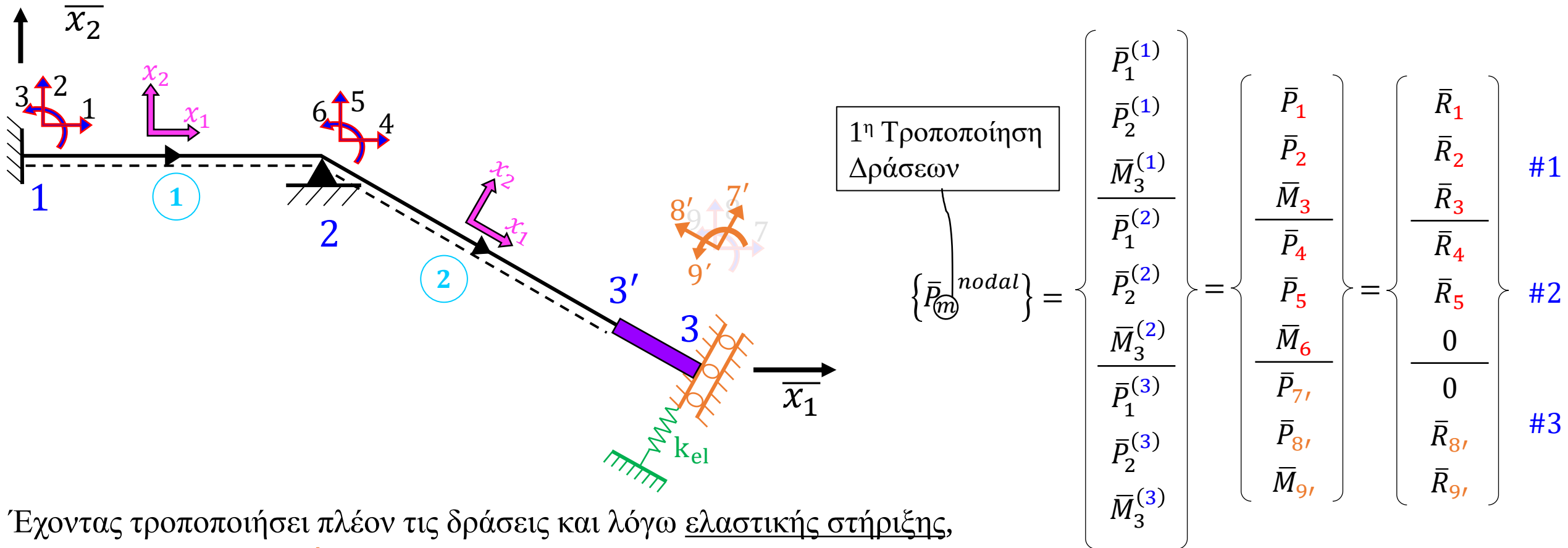
$\times 10^6$

2^η Τροποποίηση Δυσκαμψίας

BHMA 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (4/5)

iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες δράσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. **7'**, **8'** και **9'** ($\equiv 9$).



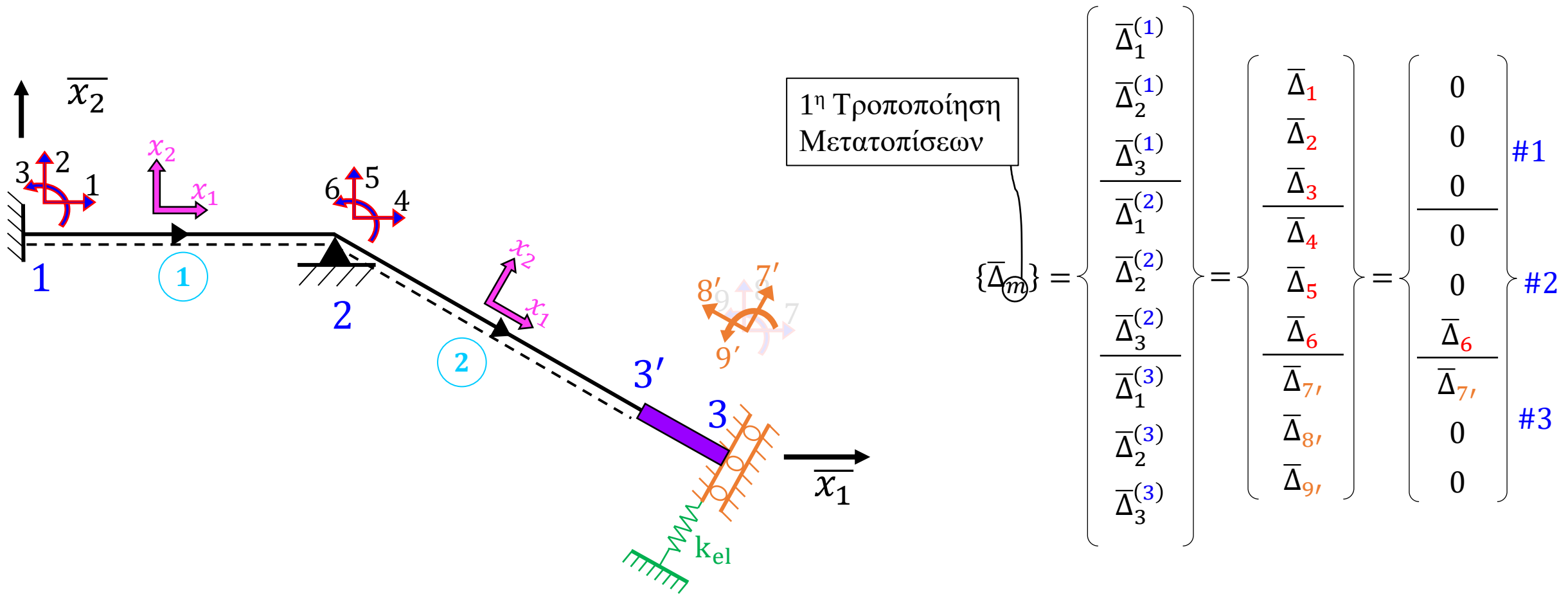
Έχοντας τροποποιήσει πλέον τις δράσεις και λόγω ελαστικής στήριξης, παρατηρώ πως ο β.ε. **7'** θεωρείται ελεύθερος (δεν έχω αντίδραση) και το άγνωστο μέγεθος θα είναι η μετακίνηση $\bar{\Delta}_{7'}$.

Προσοχή! Δεν ξεχνάω τα **ενδιάμεσα φορτία**! Θα τα λάβουμε υπόψη μετά.

BHMA 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (5/5)

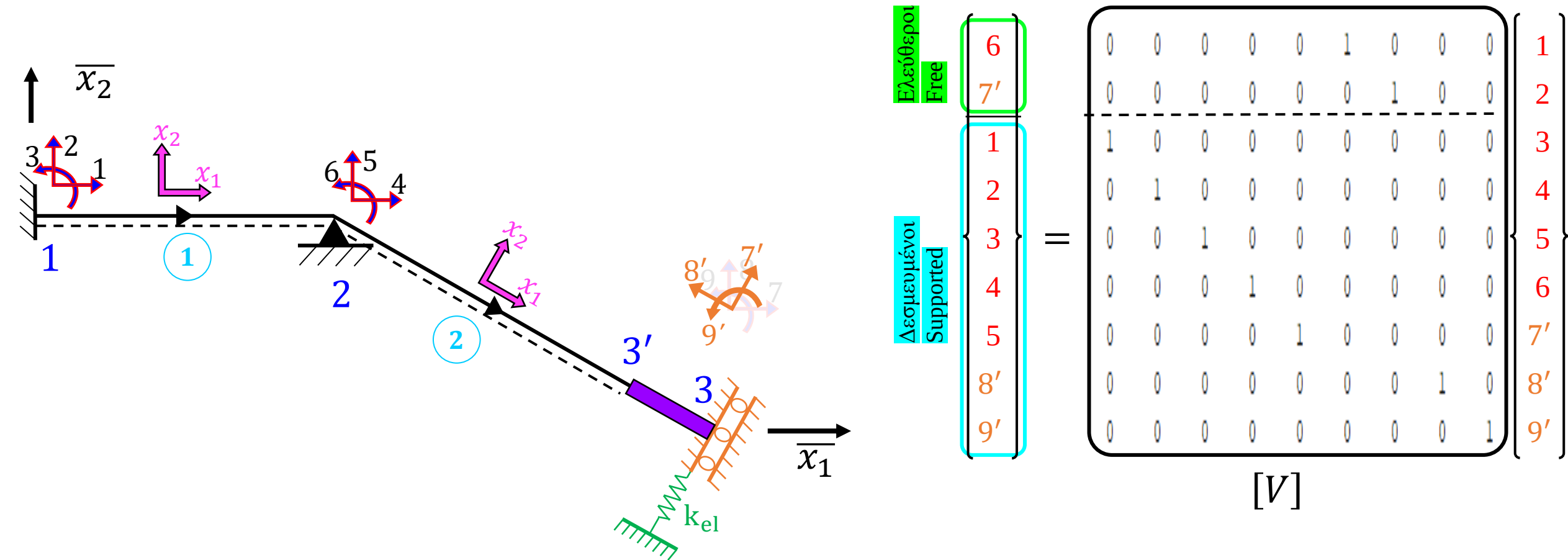
iv) Τροποποίηση μετακινήσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες μετακινήσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. $7'$, $8'$ και $9'$ ($\equiv 9$).



ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

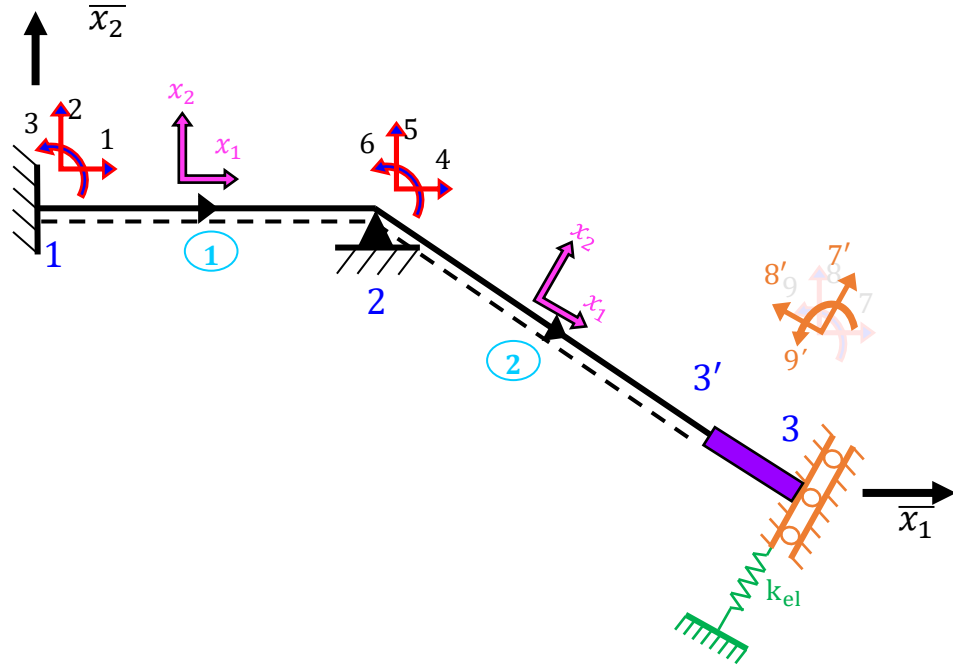
(1/4)



BHMA 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/4)

Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων :



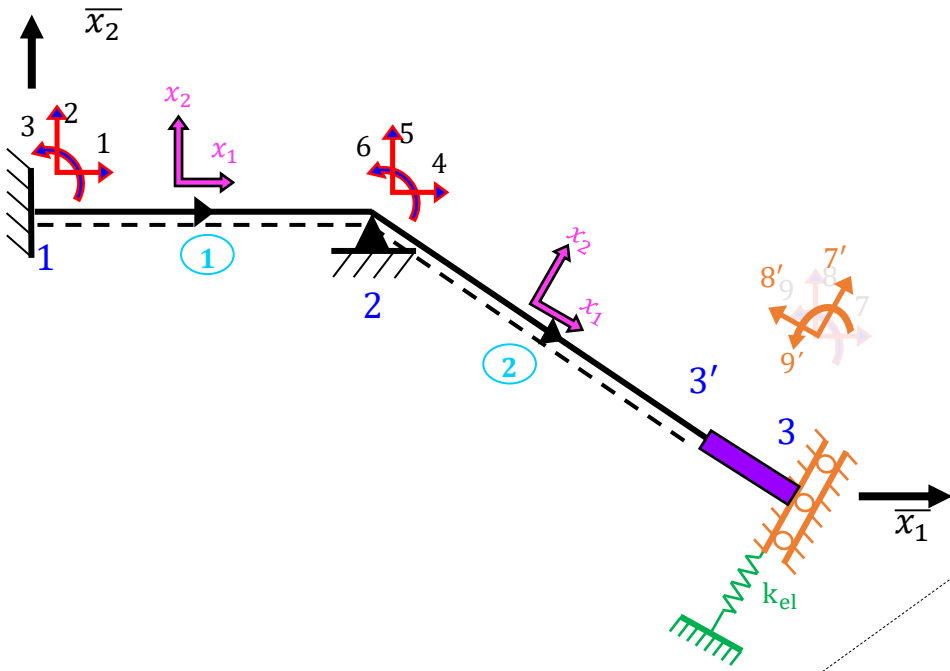
$$\{\bar{P}^{nodal}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}^{nodal}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_{8'} \\ \bar{R}_{9'} \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_{7'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2η Τροποποίηση
Δράσεων και
Μετακινήσεων

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/4)



Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\bar{K}_{mmm}] = [V][\bar{K}_{mm}][V]^T =$$

3^η Τροποποίηση
Δυσκαμψίας

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

	#1		3	#2			#3		
	1	2		4	5	6	7'	8'	9'
1	0.3344	-0.0336	0	0.0448	0.0896	0.0168	-0.0157	0.0000	0.1552
#1 2	-0.0336	0.2497	0	0	0	-0.0048	-0.0084	0.0001	-0.0560
3	0	0	0.8400	0	0	-0.8400	0	0	0
4	0.0448	0	0	0.0149	0.0448	0	-0.0149	0	0
#2 5	0.0896	0	0	0.0448	0.1792	0	-0.0448	0	0
6	0.0168	-0.0048	-0.8400	0	0	1.3879	-0.3108	0.6299	0.0280
7'	-0.0157	-0.0084	0	-0.0149	-0.0448	-0.3108	0.2041	-0.3638	0.0485
#3 8'	0.0000	0.0001	0	0	0	0.6299	-0.3638	0.7274	0.0000
9'	0.1552	-0.0560	0	0	0	0.0280	0.0485	0.0000	0.3620

$\times 10^6$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω αναδιάταξης και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(4/4)

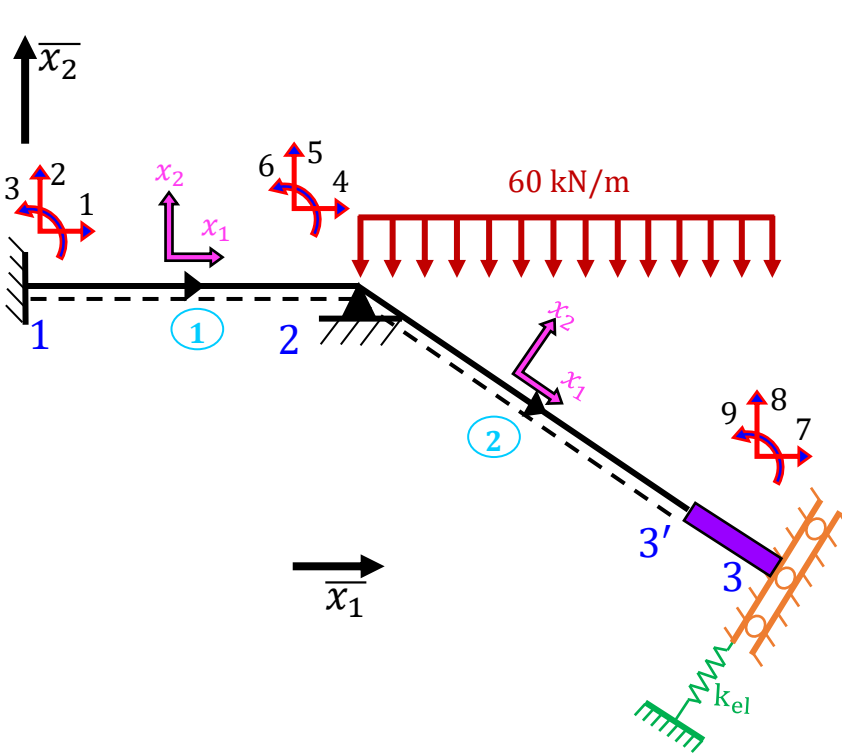
Εάν είχα μόνο επικόμβια φορτία, σε αυτό το στάδιο θα μπορούσα πλέον να επιλύσω εξίσωση ισορροπίας (σχέση στιβαρότητας) και να υπολογίσω τα άγνωστα μεγέθη:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1. \text{ Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.} \\ \bar{\Delta}_f = [\bar{K}_{ff}]^{-1} (\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) \\ 2. \text{ Επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε.} \\ \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} \end{array} \right.$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(1/12)

i) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα

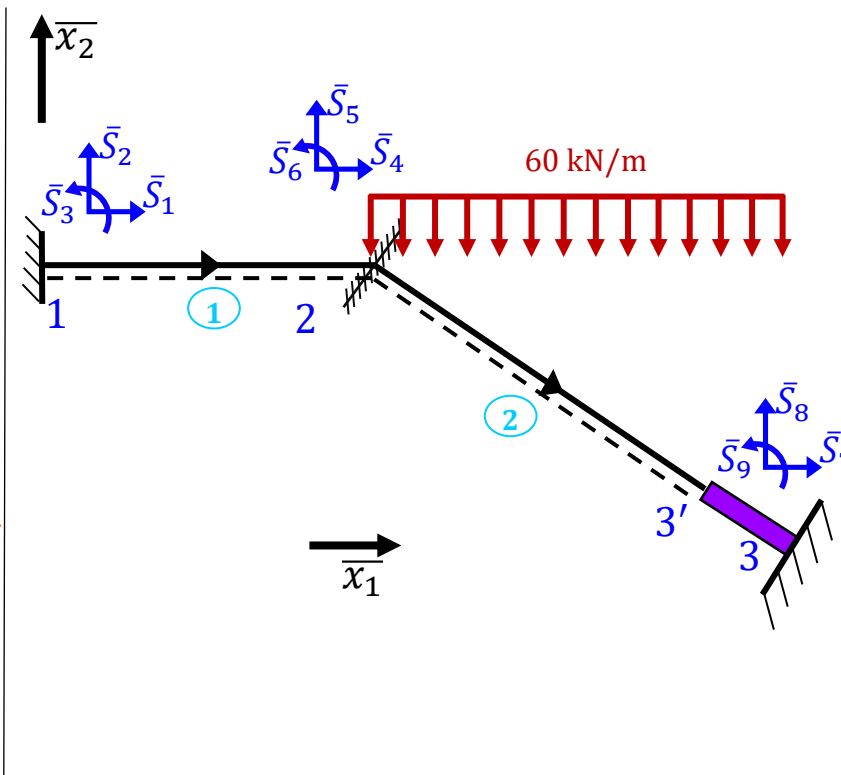


ΑΡΧΙΚΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ



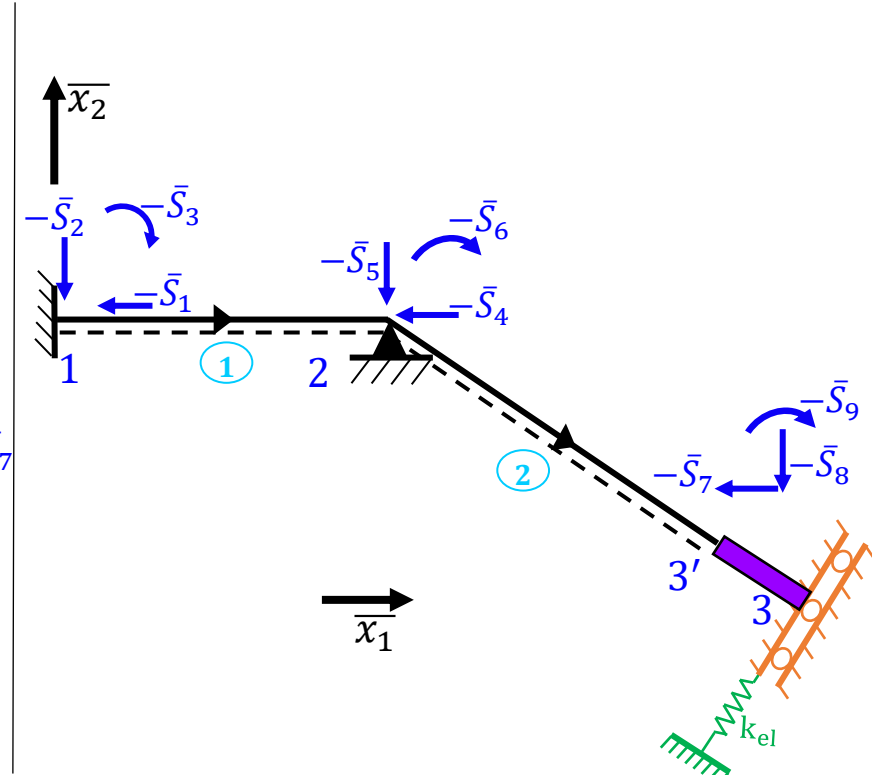
ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία



ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ
ΦΟΡΕΑΣ

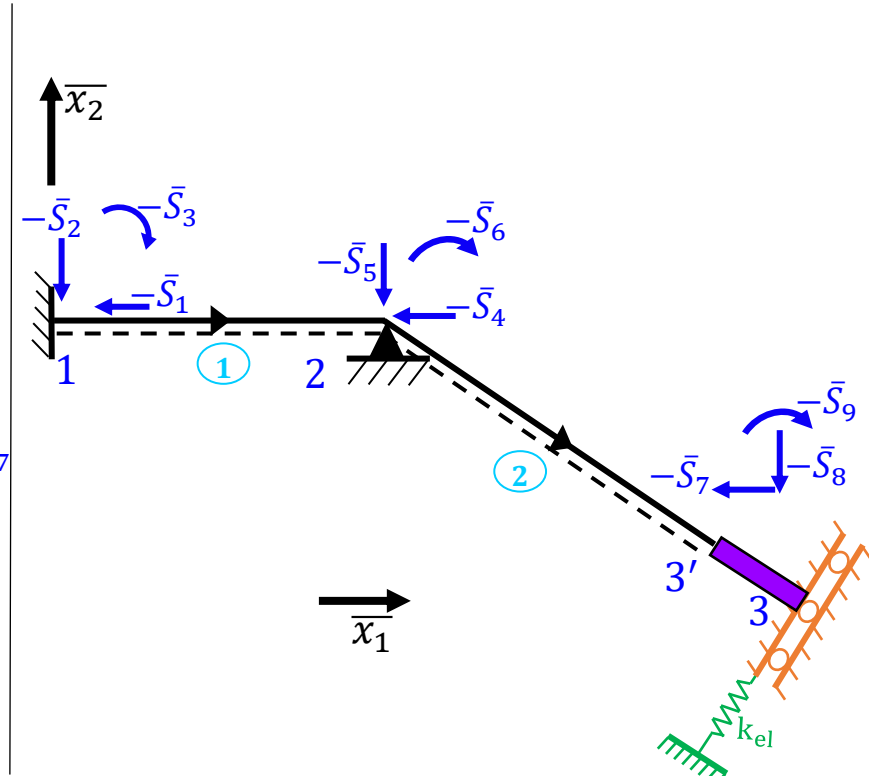
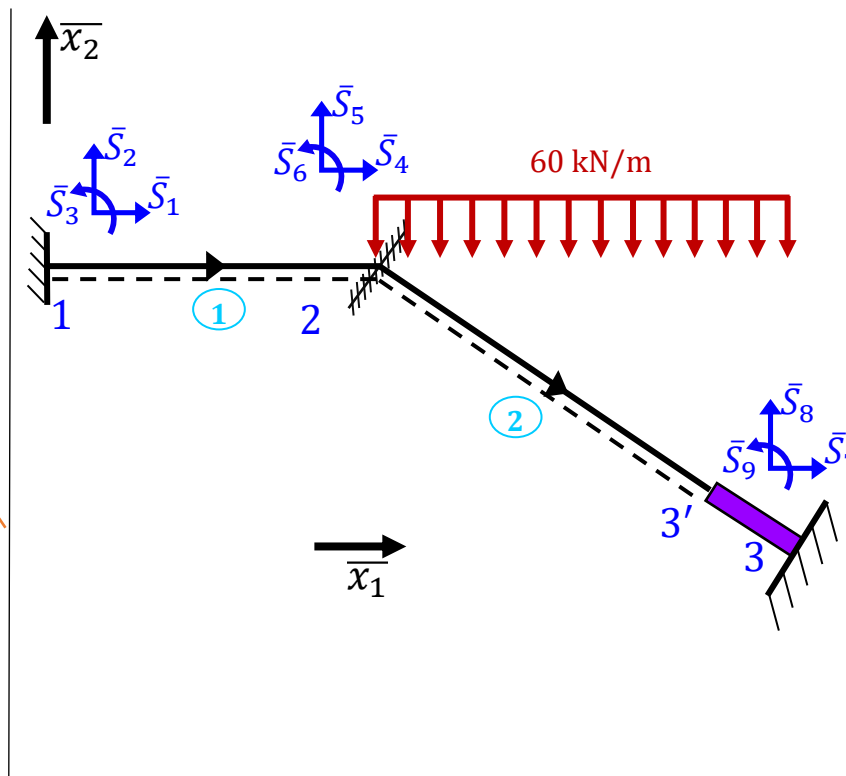
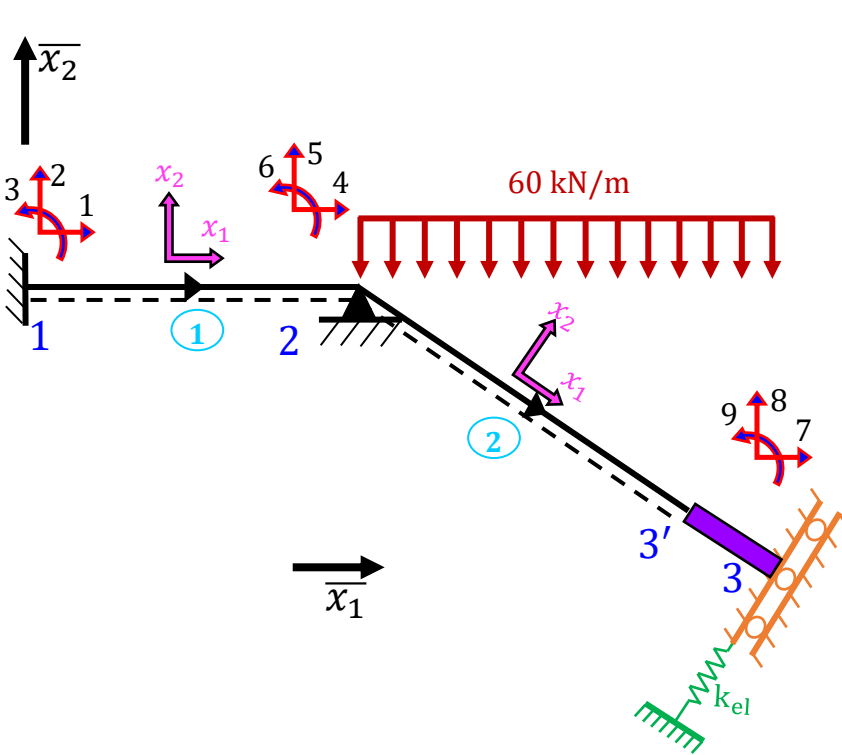
- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις → ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης



ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/12)

i) Κατασκευή Παγιωμένου και Ισοδύναμου Φορέα

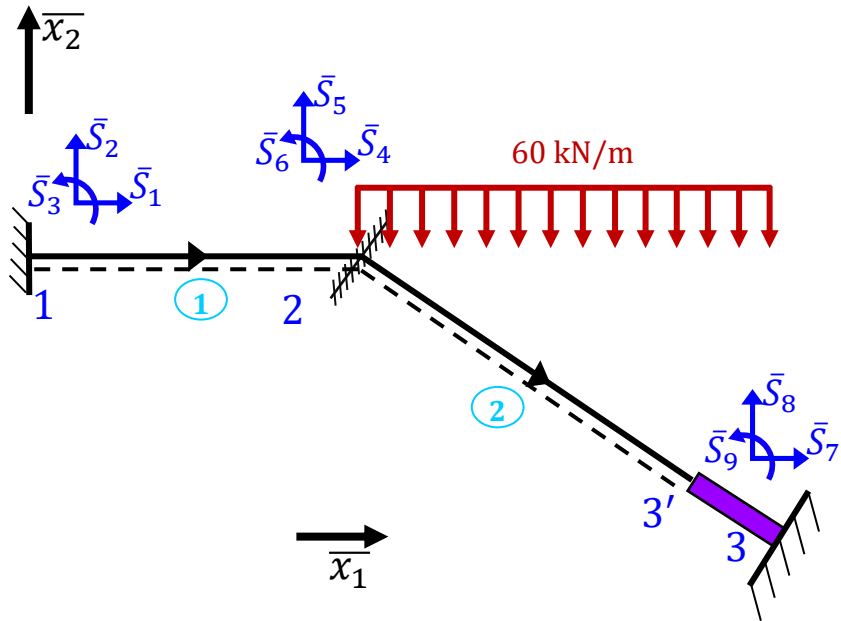


- Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/12)

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων



Μέλος	1	2
Φόρτιση		
Ενδιάμεσο Φορτίο	✗	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

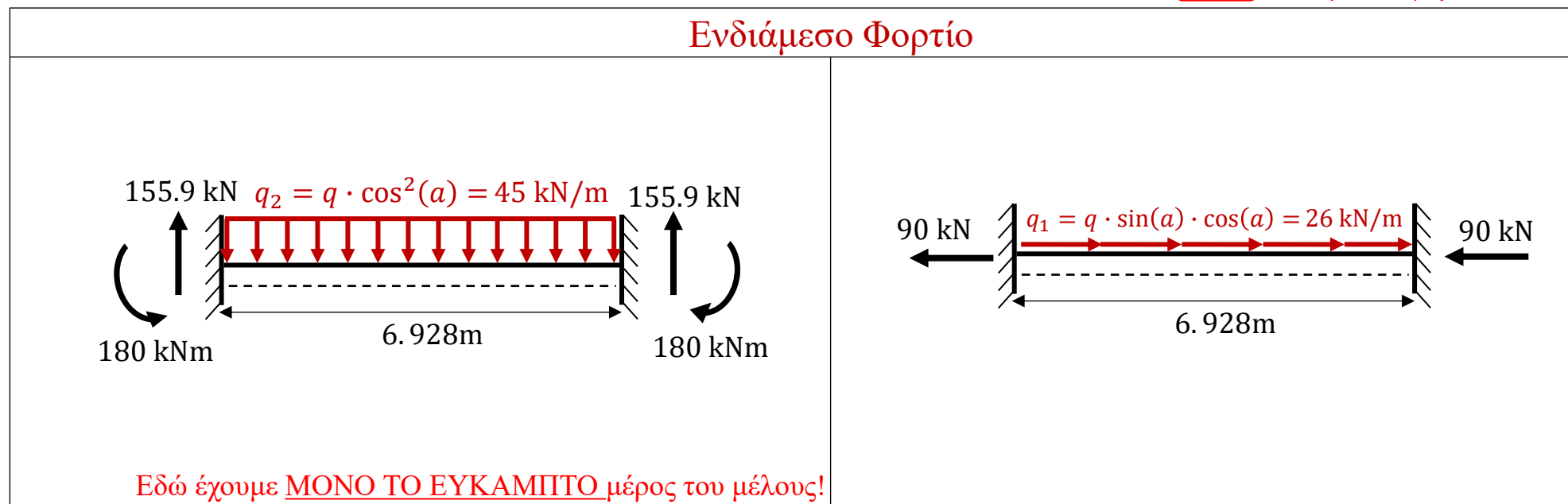
ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:

α) *ενδιάμεσων φορτίων*

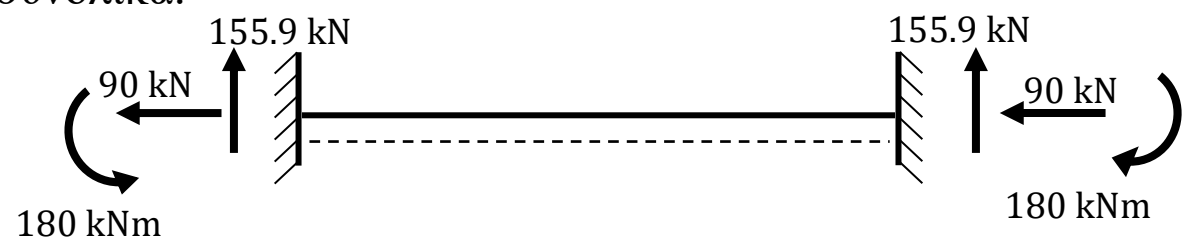
 Δες παράρτημα για υπενθύμιση ανάλυσης κεκλιμένου φορτίου.

ΜΕΛΟΣ 2

Ενδιάμεσο Φορτίο



Άρα
συνολικά:



$$\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 155.9 \\ 180 \\ -90 \\ 155.9 \\ -180 \end{Bmatrix}$$

Το μέλος 1 είναι αφόρτιστο!



$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Μέλος \ Φόρτιση	1	2
Ενδιάμεσο Φορτίο	✗	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✗	✗
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών (5/12)

iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα

Το μέλος 2 θέλει λίγη προσοχή.

Χρειάζεται να:

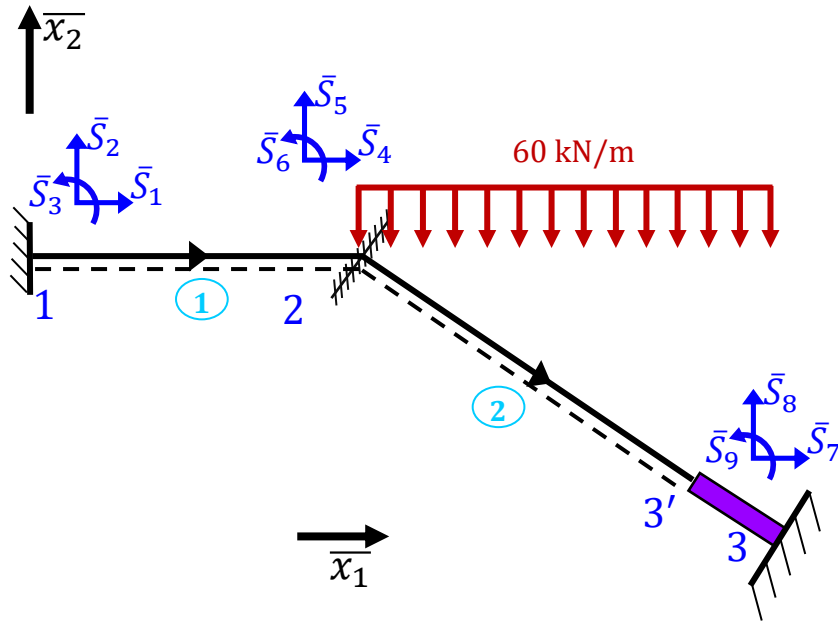
- Μεταφερθούν οι τοπικές ακραίες δράσεις παγίωσης από τον κόμβο 3' στον 3.
- Να στραφούν από το τοπικό στο καθολικό σύστημα

Αυτά γίνονται με την ακόλουθη σχέση:

$$\{\bar{A}_r^2\} = [\Lambda_{PF}^2]^T [e^2]^T \{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 180 \\ 180 \\ 0.02 \\ 180 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

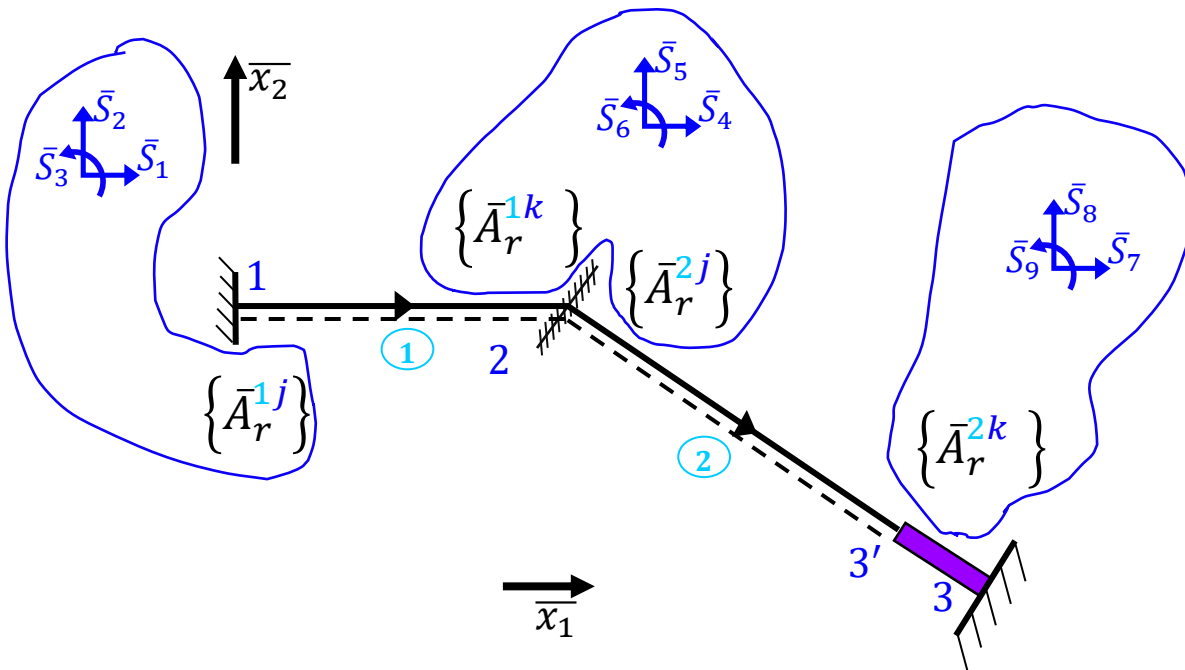
ΣΠΟΙΛΕΡ ΑΛΕΡΤ! Μετά θα πρέπει οι δράσεις παγίωσης του κόμβου 3 να στραφούν πάλι λόγω λοξής στήριξης... ☹

$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{PF}^1]^T \{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

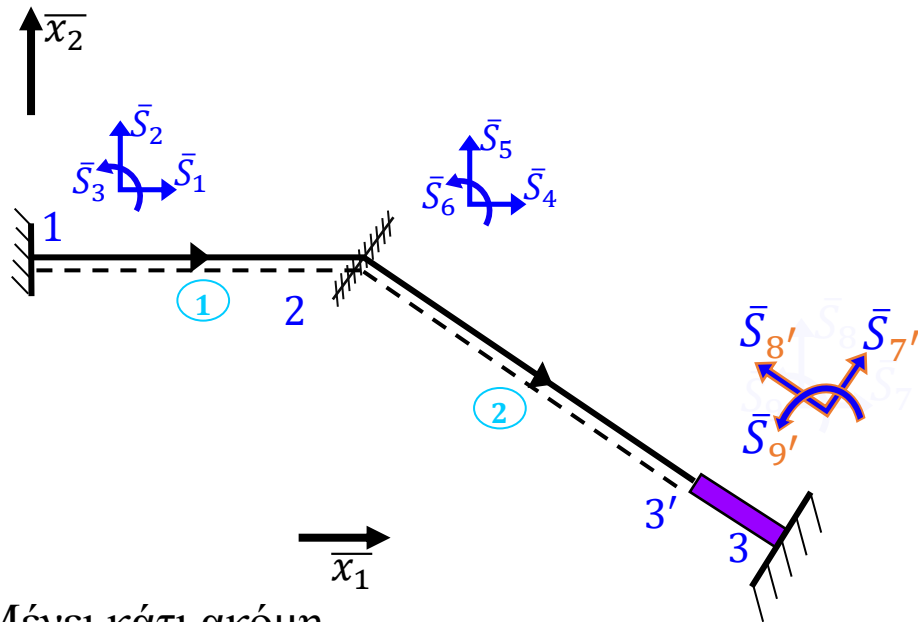
$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 180 \\ 180 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 180 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(7/12)

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης

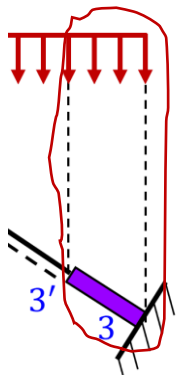


Τροποποιούμε τώρα τις δράσεις παγίωσης στον κόμβο 3 λόγω λοξής στήριξης.

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{Bmatrix} 0.02 \\ 180 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

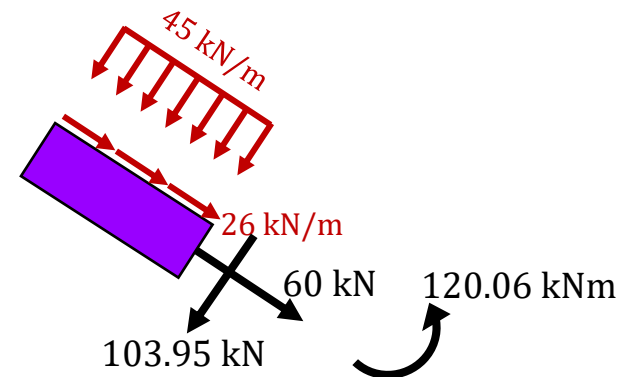
$$\{\bar{S}_m^{(3)}\} = [r^3]\{\bar{S}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 155.9 \\ 90 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

Μένει κάτι ακόμη...



Με το μέρος του κατανεμημένου φορτίου που ασκείται πάνω στον στερεό κόμβο δεν ασχοληθήκαμε. Αφού το κομμάτι αυτό είναι άκαμπτο, τότε οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω του θα μεταφερθούν αυτούσιες στον κόμβο 3.

📖 Δες παράρτημα για υπενθύμιση.



Αυτές οι δυνάμεις θα προστεθούν στο διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα !

Για τα προσημά τους, κοιτάω την φορά τους σε σχέση με τους στραμμένους βαθμούς ελευθερίας του κόμβου.

(8/12)

The diagram illustrates a two-link mechanism. Link 1 is a horizontal bar of length \$l_1\$ pivoted at its left end to a fixed wall. Link 2 is a bar of length \$l_2\$ pivoted at its right end to Link 1 and at its left end to a fixed wall. The mechanism is shown in a deformed state, with the links forming an angle. The coordinate system \$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\$ is defined with \$\bar{x}_1\$ horizontal and \$\bar{x}_2\$ vertical. The forces \$\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3\$ are shown at the left pivot, \$\bar{S}_4, \bar{S}_5, \bar{S}_6\$ at the joint, and \$\bar{S}_7, \bar{S}_8, \bar{S}_9\$ at the right pivot. The links are labeled 1 and 2, and the pivots are labeled 1, 2, and 3. The right pivot is also labeled 3'.

Τροποποιούμε τώρα τις δράσεις παγίωσης στον κόμβο 3 λόγω λοξής στήριξης.

$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 180 \\ -539.97 \end{pmatrix}$$

$$\{\bar{S}_m^{(3)}\} = [r^3]\{\bar{S}^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 155.9 \\ 90 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

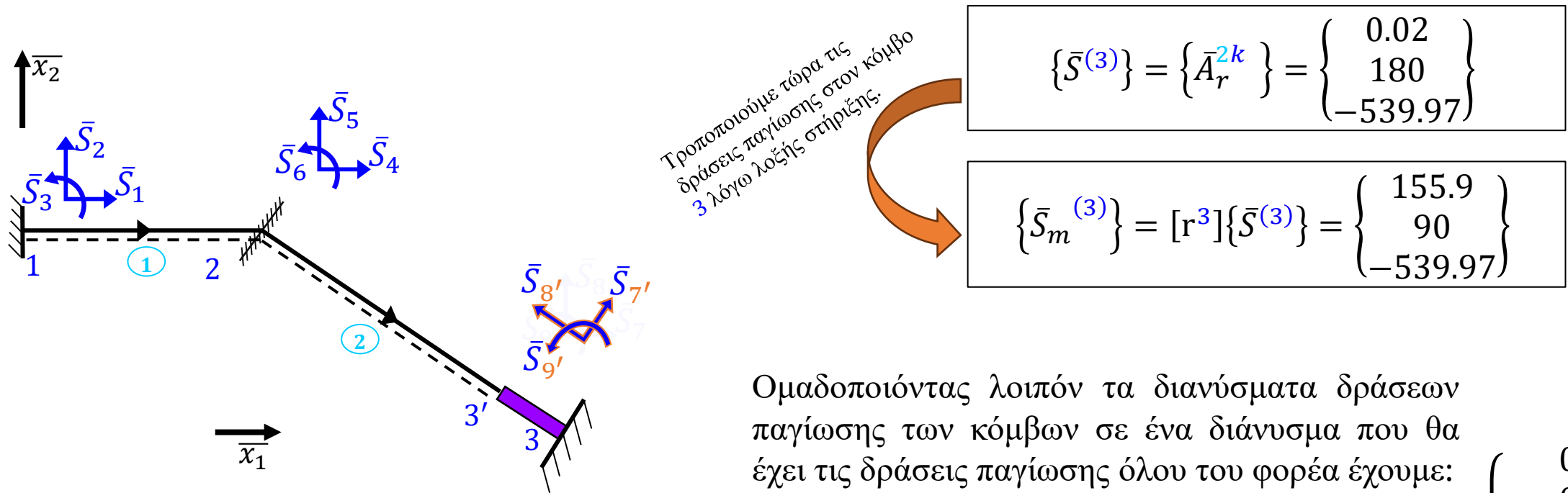
Ομαδοποιώντας λοιπόν τα διανύσματα δράσεων παγίωσης των κόμβων σε ένα διάνυσμα που θα έχει τις δράσεις παγίωσης όλου του φορέα έχουμε:

$$\{\bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{S}^{(1)}\} \\ \{\bar{S}^{(2)}\} \\ \{\bar{S}_m^{(3)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.02 \\ 180 \\ 180 \\ 155.9 \\ 90 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(8/12)

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης



Ανακεφαλαίωση:

Έως εδώ οι δράσεις παγίωσης του κόμβου 3 έχουν:

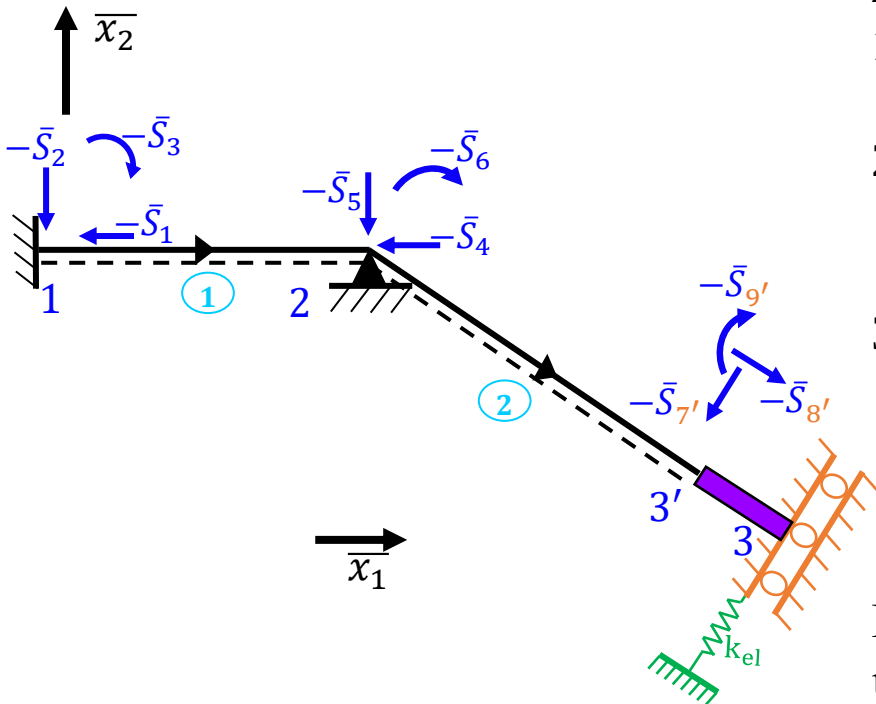
1. Μεταφερθεί από τον 3' στον κόμβο 3.
2. Στραφεί στο καθολικό σύστημα.
3. Στραφεί λόγω λοξής στήριξης.

$$\{\bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{S}^{(1)}\} \\ \{\bar{S}^{(2)}\} \\ \{\bar{S}_m^{(3)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.02 \\ 180 \\ 180 \\ 155.9 \\ 90 \\ -539.97 \end{Bmatrix}$$

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(9/12)

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (1/2)



Στον ισοδύναμο φορέα ασκούνται:

1. Οι επικόμβιες δράσεις του πραγματικού φορέα (με ότι τροποποιήσεις έχουν υποστεί): $\{\bar{P}^{nodal}_{mm}\}$
2. Οι ισοδύναμες δράσεις που είναι **ίσες και αντίθετες** από τις δράσεις παγίωσης (με ότι τροποποιήσεις έχουν υποστεί): $-\{\bar{S}_m\}$
3. Ειδικά στο συγκεκριμένο παράδειγμα, που έχουμε φορτίο πάνω στην άκαμπτη ζώνη, οι **δυνάμεις** που μεταφερθήκαν από την άκαμπτη ζώνη στον κόμβο 3

Επομένως, το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα δίδεται ως:

$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}^{nodal}_m\} - \{\bar{S}_m\}$$

και με την τροποποίηση λόγω αναδιάταξης:

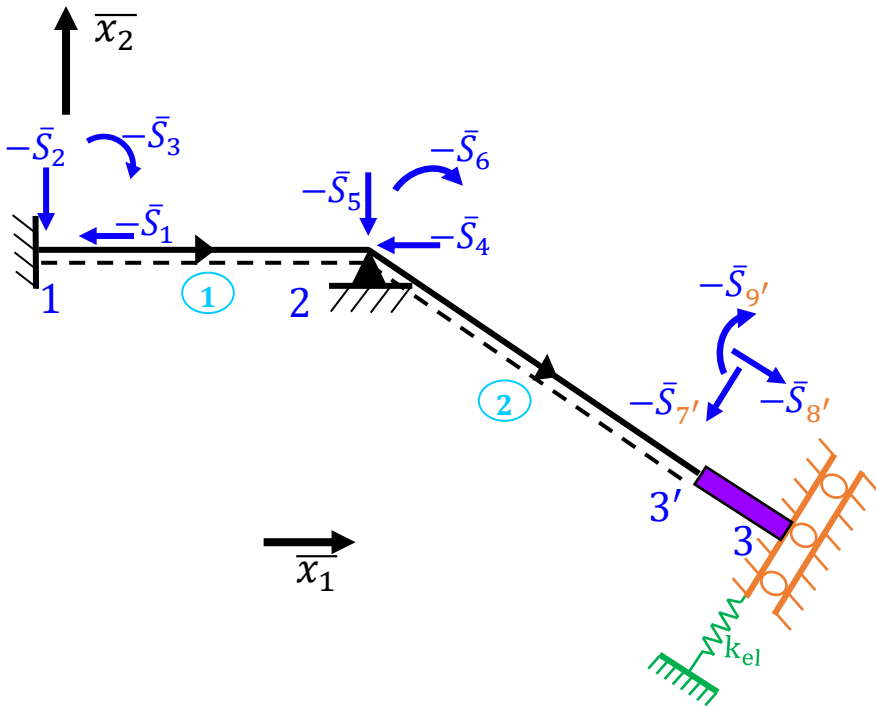
$$\{\bar{P}_{mm}\} = \{\bar{P}^{nodal}_{mm}\} - \{\bar{S}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix}$$

0 - 180
0 - 155.9 - 103.95
$\bar{R}_1 - 0$
$\bar{R}_2 - 0$
$\bar{R}_3 - 0$
$\bar{R}_4 - 0.02$
$\bar{R}_5 - 180$
$\bar{R}_{8'} - 90 - 60$
$\bar{R}_{9'} + 539.97 + 120$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(10/12)

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων **ισοδύναμου** φορέα (2/2)



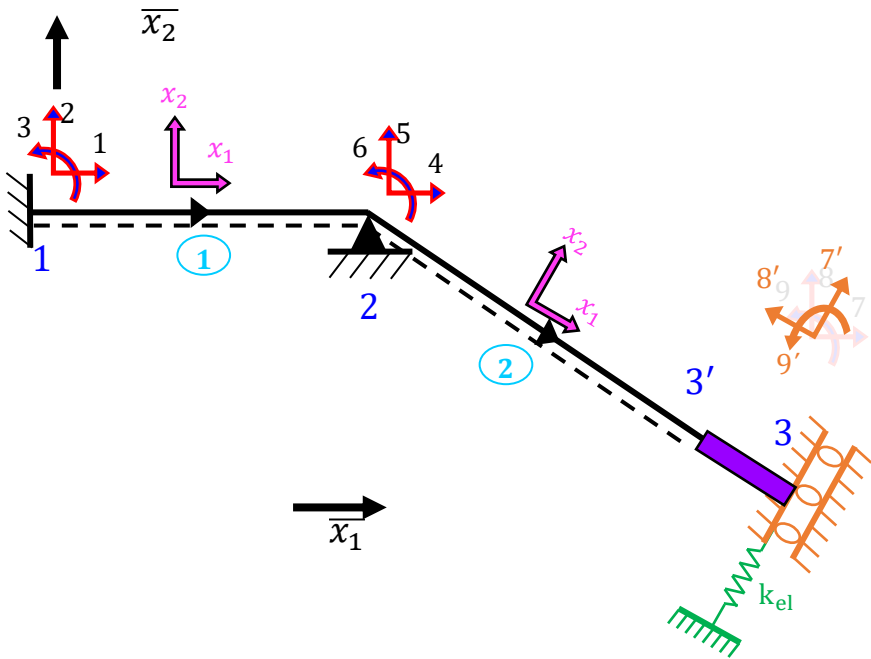
Το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα ταυτίζεται με αυτό του αρχικού φορέα:

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_{7'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιαμέση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(11/12)

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων



Οι επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε. υπολογίζονται ως:

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1}(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_{7'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.5176 \\ 11.2827 \end{Bmatrix} \times 10^{-4}$$

Οι επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε. υπολογίζονται ως:

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.1988 \\ -58.3977 \\ -5.5581 \\ 19.7586 \\ -0.0933 \\ -37.9601 \end{Bmatrix}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Για να υπολογίσω τις αντιδράσεις στις στηρίξεις:

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 - 0 \\ \bar{R}_2 - 0 \\ \bar{R}_3 - 0 \\ \bar{R}_4 - 0.02 \\ \bar{R}_5 - 180 \\ \bar{R}_{8'} - 90 - 60 \\ \bar{R}_{9'} + 539.97 + 120 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{R}_1 \\ \bar{R}_2 \\ \bar{R}_3 \\ \bar{R}_4 \\ \bar{R}_5 \\ \bar{R}_{8'} \\ \bar{R}_{9'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.1988 \\ -58.3977 \\ -5.5381 \\ 199.7742 \\ 149.8968 \\ -697.9598 \end{Bmatrix}$$

BHMA 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(12/12)

viii) Μεταφορά των μετακινήσεων της λοξής στήριξης στο καθολικό σύστημα

Πρακτικά πρέπει να αρχίσουμε να αναιρούμε τις διάφορες τροποποιήσεις που κάναμε προκειμένου να διατυπώσουμε τα μεγέθη που αφορούν τον φορέα στο καθολικό σύστημα.

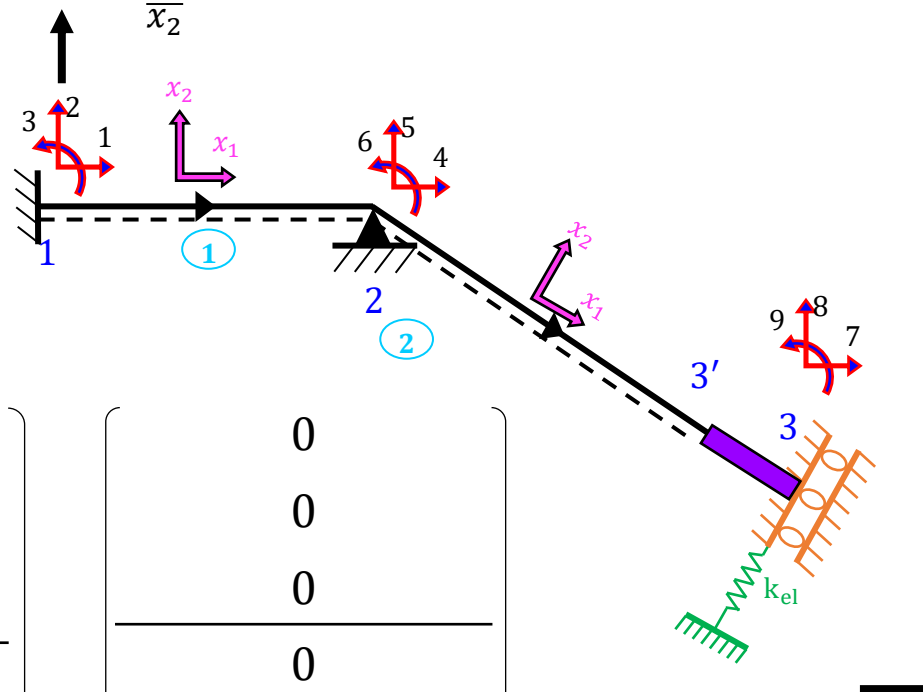
Με γνωστό πλέον το $\{\bar{\Delta}_f\}$, το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων προ-αναδιάταξης είναι:

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V]^T \{\bar{\Delta}_{mm}\}, \text{ όπου } \{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix}.$$

Έπειτα αναιρώ τη στροφή των β.ε. του κόμβου 3:

$$\{\bar{\Delta}\} = [R^3]^T \{\bar{\Delta}_m\}$$

Επιστρέψαμε λοιπόν στη μορφή που έχει το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων στο BHMA 8.


$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6.5176e-04 \\ -5.6413e-04 \\ -9.7711e-04 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

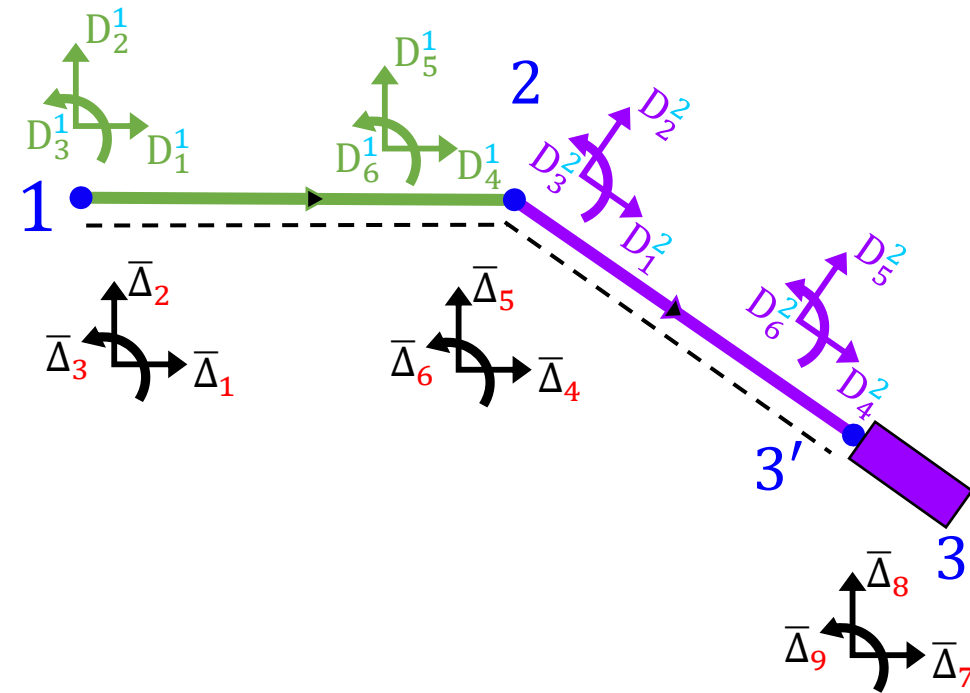
ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

(1/4)

Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

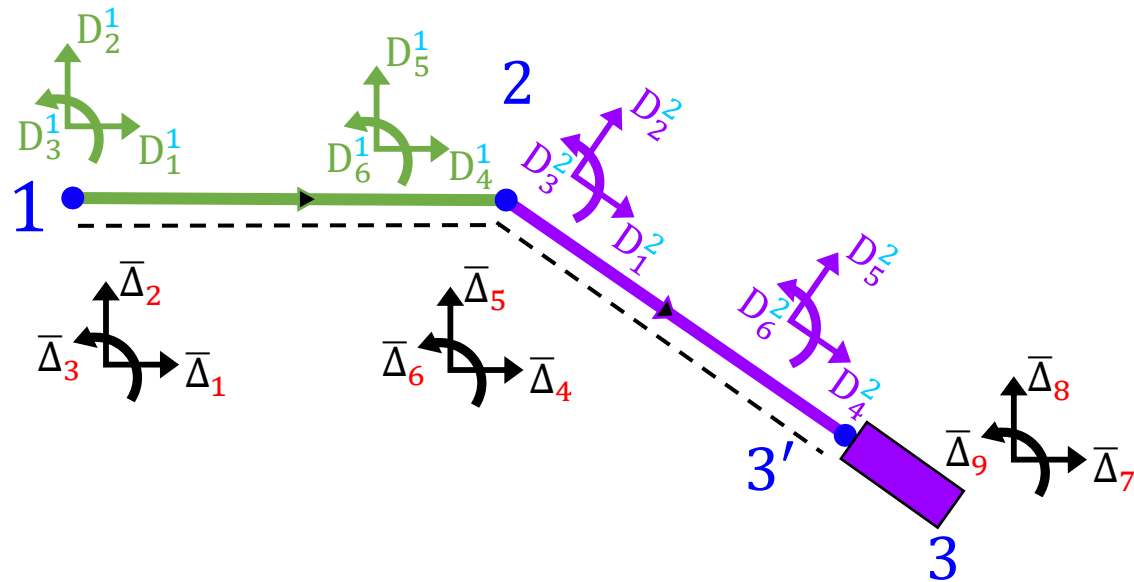
- Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.
- Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda_{PF}^i] \{\bar{D}^i\}$.
- Υπολογίζω τις τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους i με επαλληλία του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα:

$$\{A^i\} = \underbrace{\{A_r^i\}}_{\text{παγιωμένος}} + \underbrace{[k^i] \{D^i\}}_{\text{ισοδύναμος}}$$



ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

(2/4)



Για το μέλος 1 τα πράγματα είναι σχετικά απλά 😊 :

$$\{D^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.6518e-03 \end{Bmatrix} \quad \{A^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.1989 \\ -58.3977 \\ 0 \\ 29.1989 \\ -116.7955 \end{Bmatrix}$$

Για το μέλος 2 τα πράγματα είναι λίγο πιο περίπλοκα 😬 :

Σκέφτομαι... Θέλω να βρω εντατικά μεγέθη. Προφανώς αυτά δεν αφορούν στο άκαμπτο μέρος του του μέλους. Επομένως θα πρέπει να:

- Βρω τις καθολικές μετατοπίσεις του κόμβου 3
- Να τις μεταφέρω (με το μητρώο εκκεντρότητας) στον κόμβο 3'
- Να τις μετασχηματίσω στο τοπικό σύστημα του μέλους
- Να υπολογίσω τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους

Όλα αυτά κάπως έτσι:

$$\{D^2\} = [\Lambda^2][e^2]\{\bar{D}^2\}$$

$$\{D^2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.6518e-03 \\ 1.2669e-07 \\ -0.0011 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{A^2\} = \begin{Bmatrix} -90.0999 \\ 144.9435 \\ 116.7955 \\ -89.9156 \\ 166.8526 \\ -192.6972 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

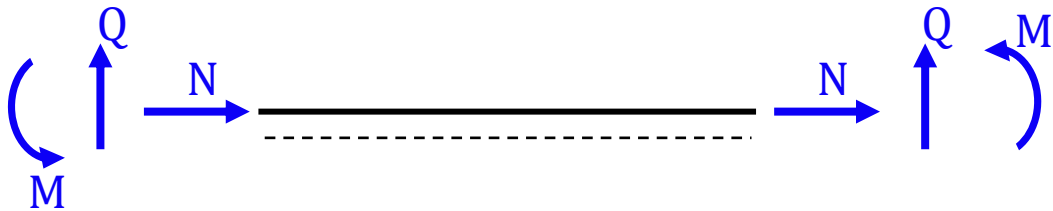
(3/4)

Τώρα μένει να χαράξω τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών.

Πρώτα θα πρέπει να θυμηθώ τη κλασική σύμβαση της στατικής για τα εντατικά μεγέθη (η οποία διαφέρει από τη σύμβαση που θεωρούμε στη μητρική στατική για τους βαθμούς ελευθερίας).

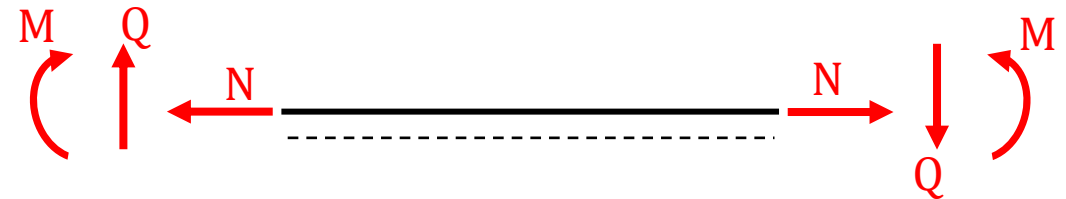
Σύμβαση Μητρικής Στατικής

Θετικές φορές



Κλασική Σύμβαση Στατικής

Θετικές φορές

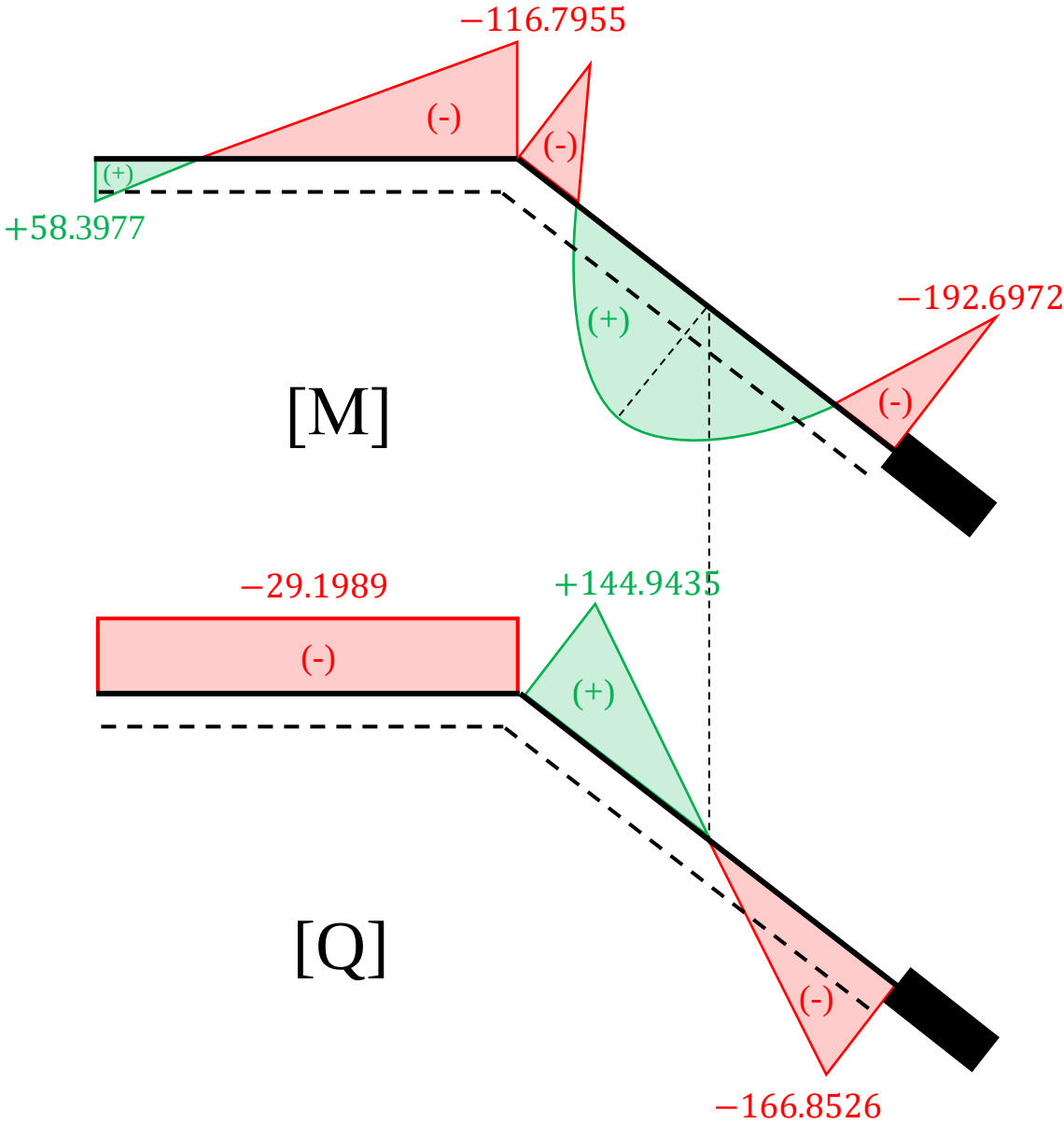


Επομένως ένα διάνυσμα τοπικών ακραίων δράσεων μέλους που έχει αυτή τη μορφή:

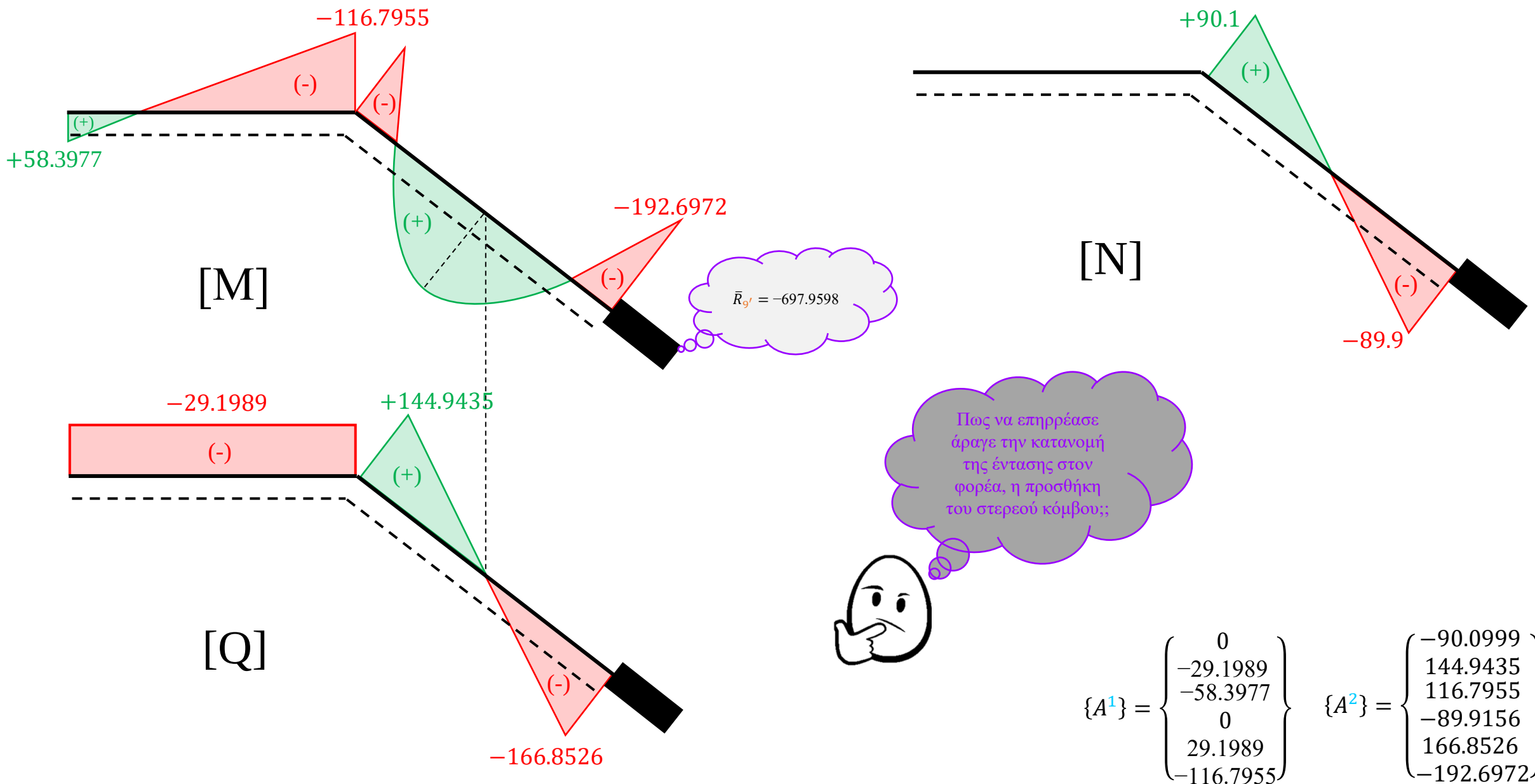
$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix}$$

Με τη κλασική σύμβαση της στατικής αποκτά αυτά τα πρόσημα:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$



$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -29.1989 \\ -58.3977 \\ 0 \\ 29.1989 \\ -116.7955 \end{Bmatrix} \quad \{A^2\} = \begin{Bmatrix} -90.0999 \\ 144.9435 \\ 116.7955 \\ -89.9156 \\ 166.8526 \\ -192.6972 \end{Bmatrix}$$

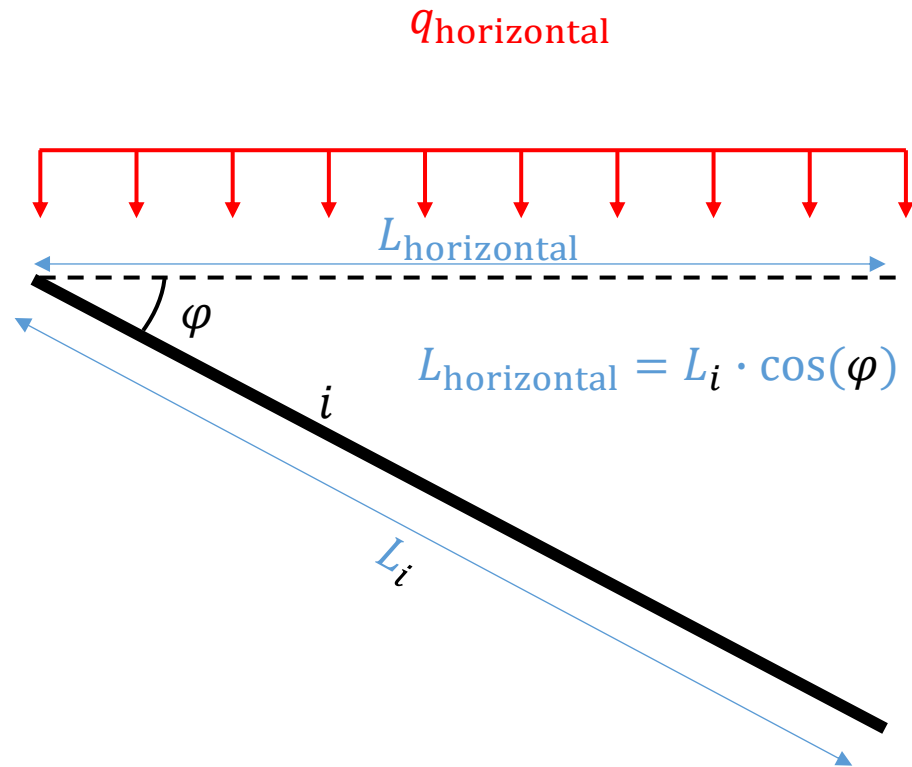


Παράρτημα

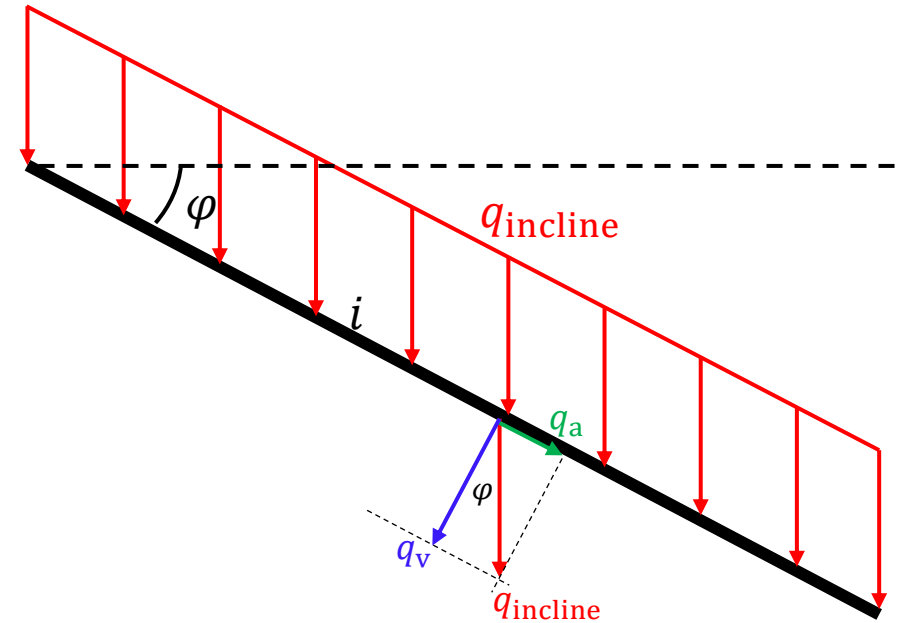
Για λόγους πληρότητας, στο παράρτημα αυτό υπενθυμίζονται:

- A. Η ανάλυση ενός κατανεμημένου φορτίου, που ασκείται σε κεκλιμένο μέλος, σε συνιστώσες.
- B. Οι ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών, για ορισμένες περιπτώσεις ενδιάμεσων δράσεων.
- Γ. Η μεταφορά των δυνάμεων που ασκούνται στην άκαμπτη ζώνη σε κόμβο της κατασκευής.

A. Ανάλυση κατανεμημένου φορτίου σε συνιστώσες



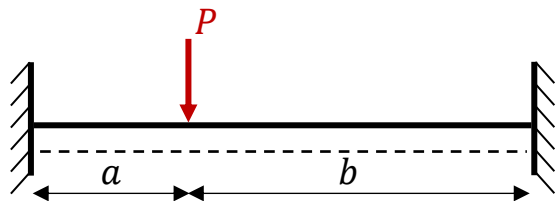
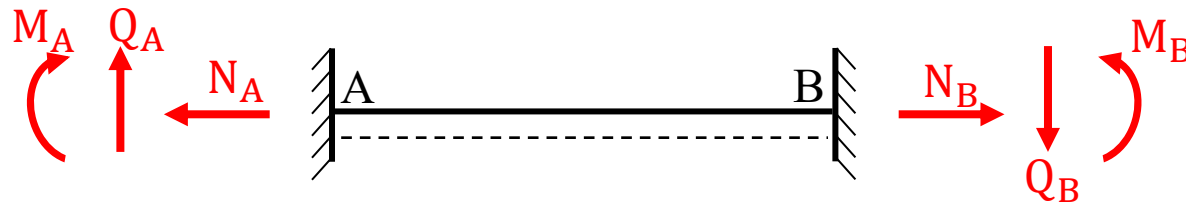
The load must be distributed along the actual length of the element



$$\begin{aligned}
 q_{\text{horizontal}} \cdot L_{\text{horizontal}} &= q_{\text{incline}} \cdot L_i \\
 \Rightarrow q_{\text{horizontal}} \cdot \cancel{L_i} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}} \cdot \cancel{L_i} \\
 \Rightarrow \boxed{q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi) &= q_{\text{incline}}}
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} q_v &= q_{\text{incline}} \cdot \cos(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \cos(\varphi) \\ q_a &= q_{\text{incline}} \cdot \sin(\varphi) = [q_{\text{horizontal}} \cdot \cos(\varphi)] \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

B. Ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών

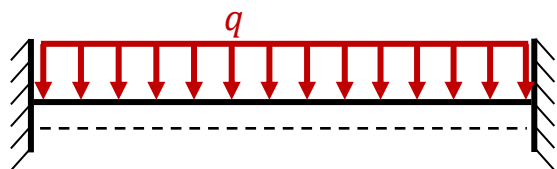


$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$$

$$Q_A = \frac{Pb^2}{L^2} \left(3 - \frac{2b}{L} \right)$$

$$M_B = -\frac{Pab^2}{L^2}$$

$$Q_B = -\frac{Pa^2}{L^2} \left(3 - \frac{2a}{L} \right)$$

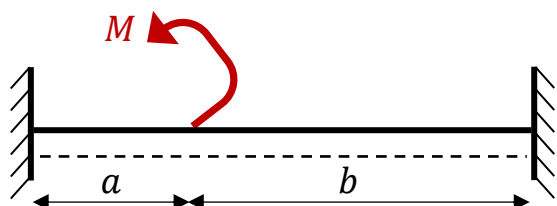


$$M_A = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_A = \frac{qL}{2}$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{12}$$

$$Q_B = -\frac{qL}{2}$$



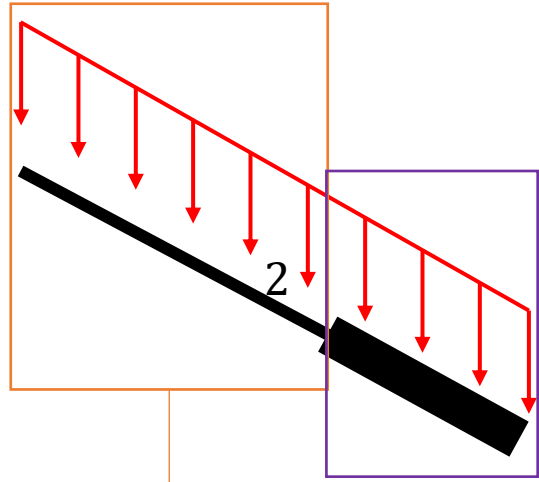
$$M_A = -\frac{Mb}{L} \left(2 - \frac{3b}{L} \right)$$

$$Q_A = \frac{6Mab}{L^3}$$

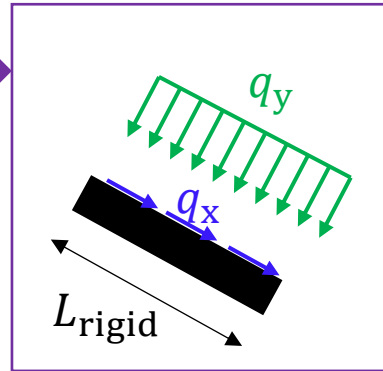
$$M_B = \frac{Ma}{L} \left(2 - \frac{3a}{L} \right)$$

$$Q_B = \frac{6Mab}{L^3}$$

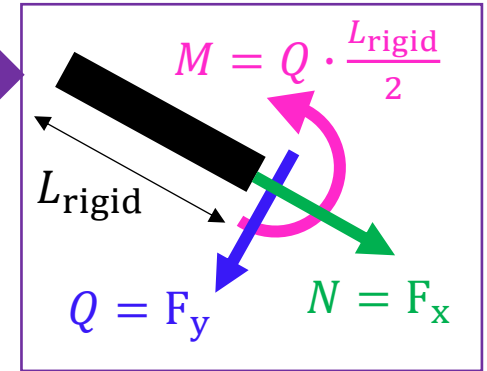
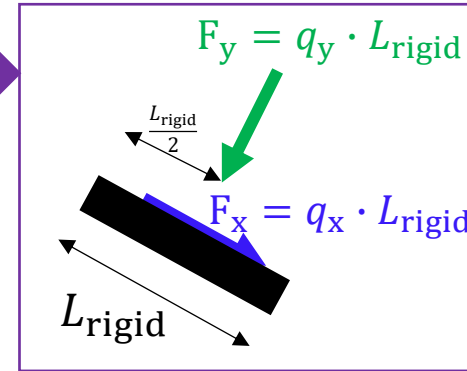
Γ. Μεταφορά δυνάμεων άκαμπτης ζώνης σε κόμβο



Το μέρος του φορτίου που ασκείται στο εύκαμπτο μέρος του μέλους το λάβαμε υπόψη στις δράσεις παγίωσης.



Υπολογίζω συνισταμένες



Μεταφέρω τις δυνάμεις στο άκρο της στερεάς ζώνης.
Από τη μηχανική θυμάμαι ότι:

- Οι ροπές μεταφέρονται αυτούσιες.
- Οι δυνάμεις μεταφέρονται ΜΑΖΙ με τις ροπές που δημιουργούν ως προς το σημείο στο οποίο μεταφέρονται.

Συγκεκριμένα εδώ:

- Η F_x μεταφέρεται αλλά δεν παράγει ροπή ως προς το άκρο καθώς ασκείται κεντροβαρικά.
- Η F_y μεταφέρεται και παράγει και την M .