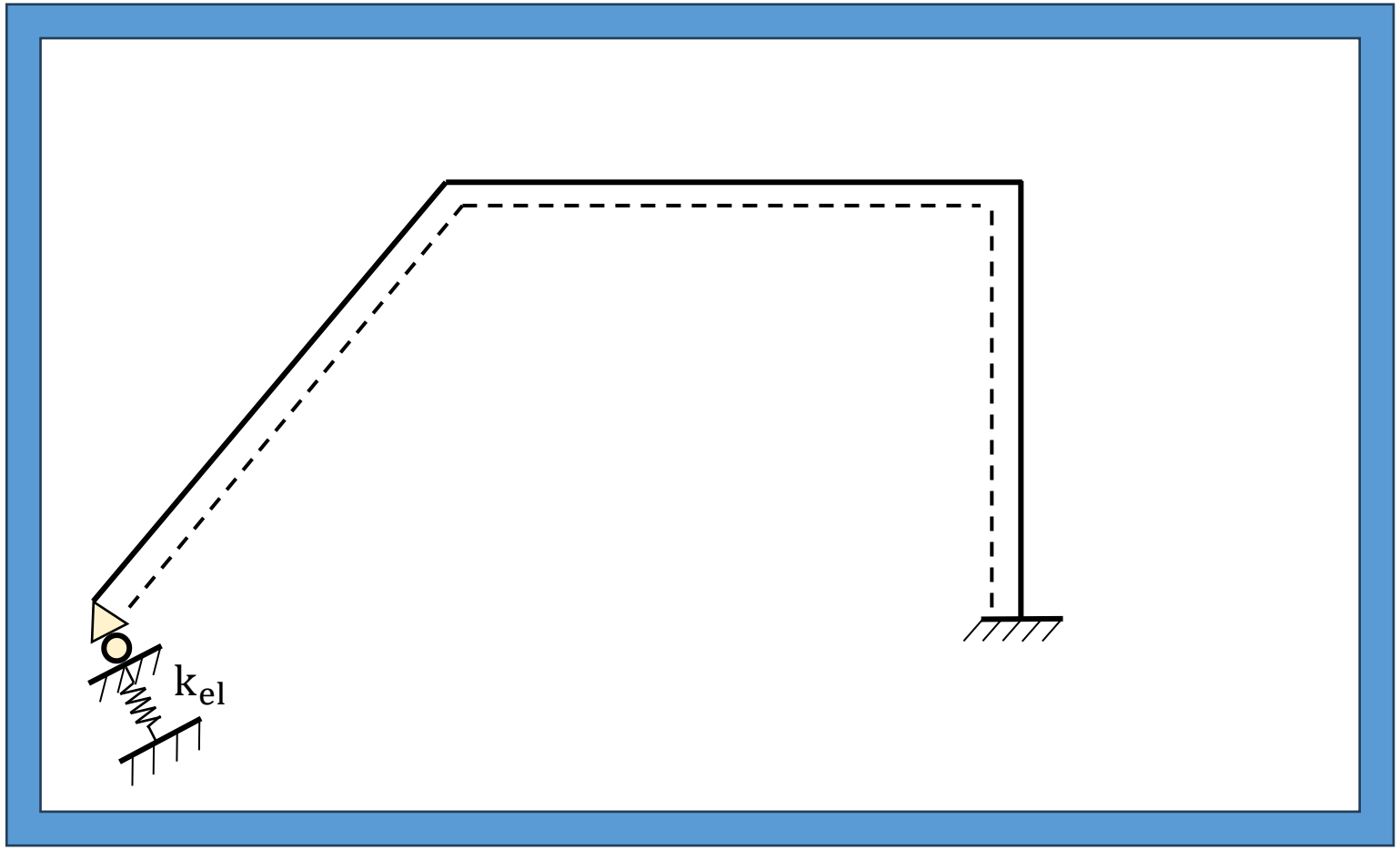
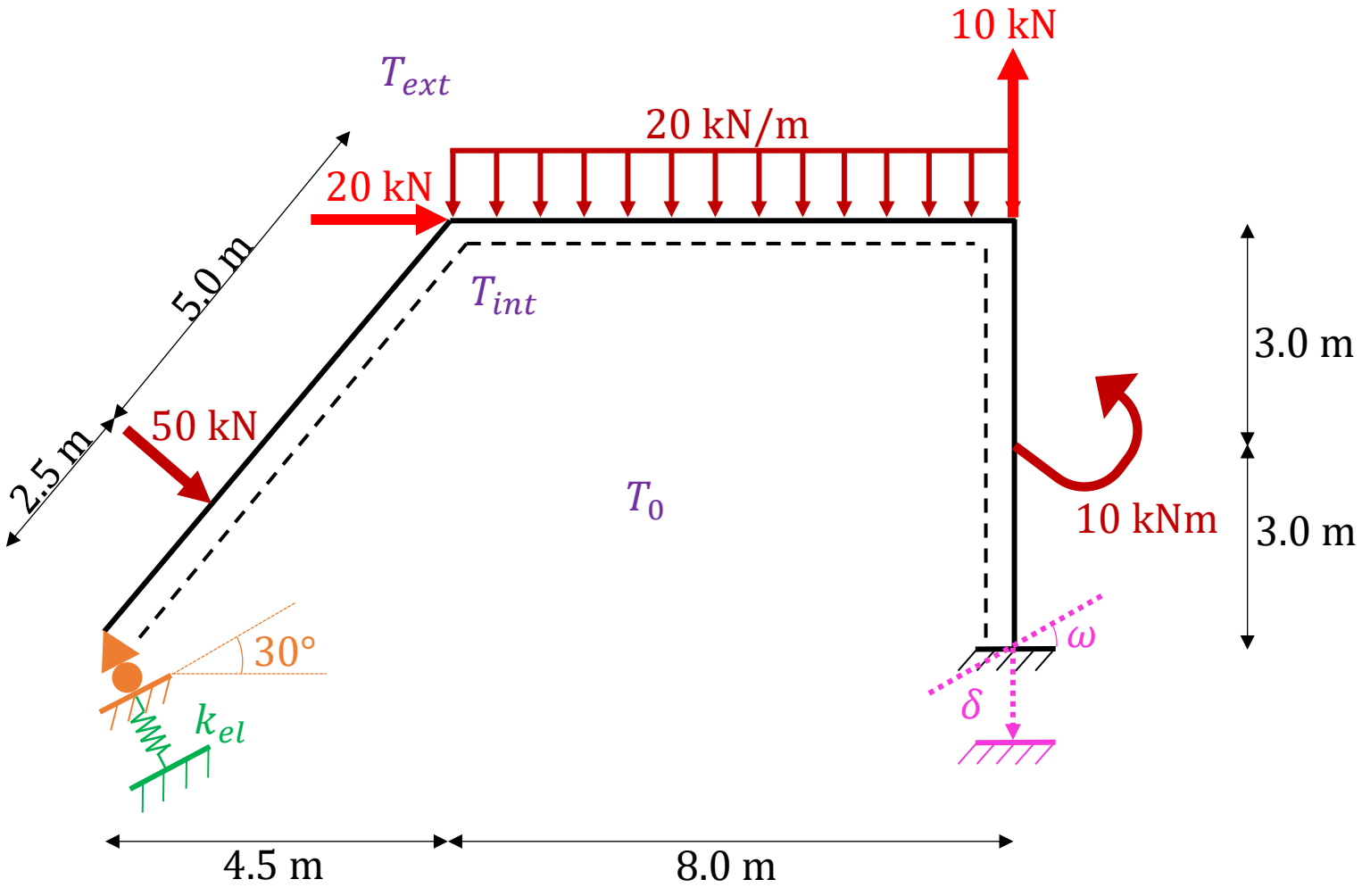
Αριθμητικό Παράδειγμα Επίλυσης Επίπεδου Πλαισίου

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Πολιτικών Μηχανικών



ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ & ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΡΑΒΔΩΤΟΥΣ ΦΟΡΕΙΣ	
ΑΣΚΗΣΗ	#2
ΗΜ/ΝΙΑ	02/04/2025
ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ ΠΙΣΣΑΣ	

Εξεταζόμενο Πλαίσιο

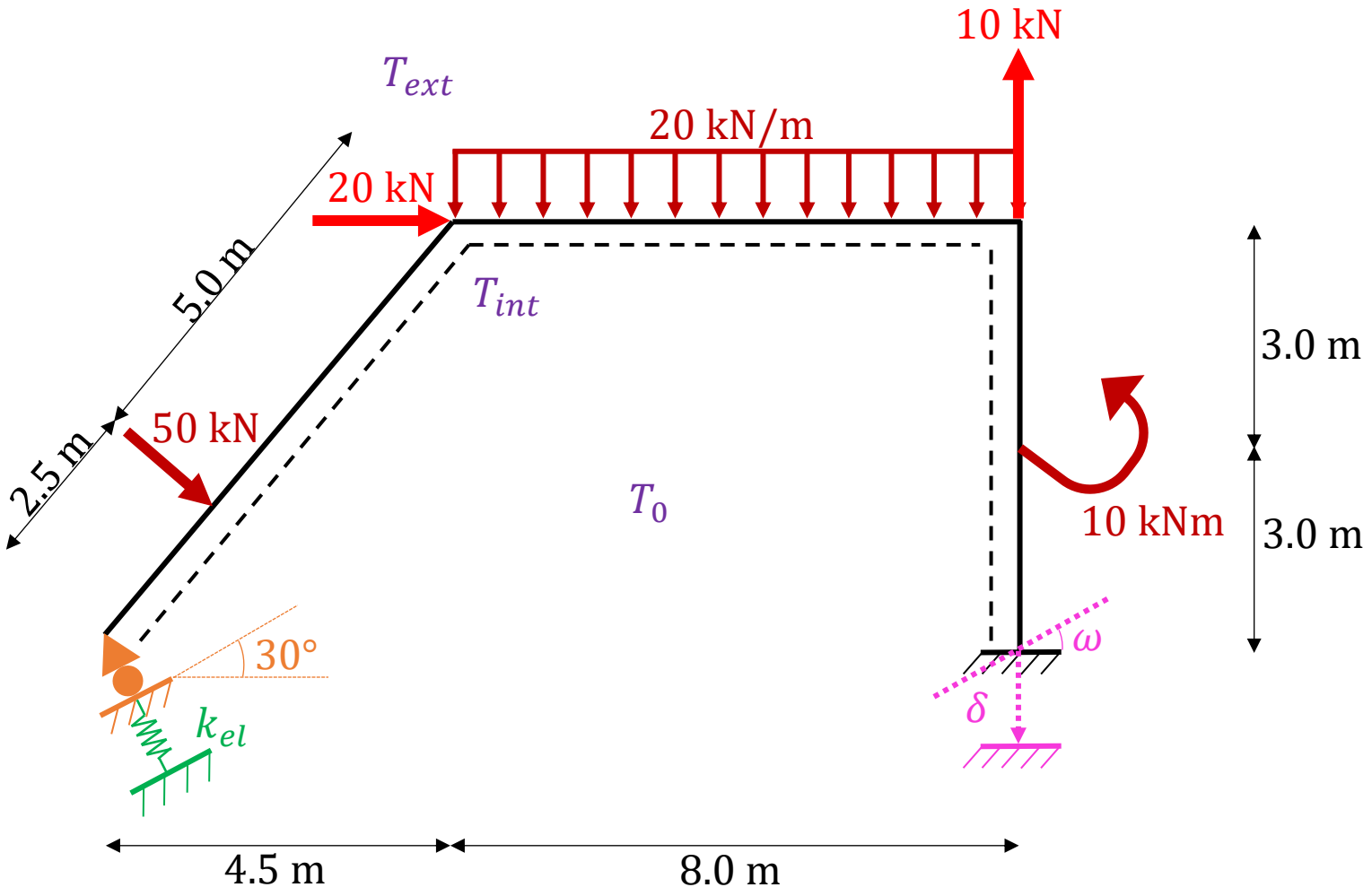


Δεδομένα:

- $E = 2.1 \times 10^7$ kN/m^2
- $A = 0.12$ m^2
- $h = 0.45$ m (ύψος διατομής)
- $I = 0.0016$ m^4
- $T_{int} = 20$°C
- $T_{ext} = 10$°C
- $T_0 = 10$°C
- $\delta = 1$ cm
- $\omega = 10^{-2}$ rad
- $k_{el} = 0.5EI$ kN/m
- $P = 50$ kN
- $q = 20$ kN/m
- $\alpha = 10^{-5}$ °C^{-1}

Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

Εξεταζόμενο Πλαίσιο

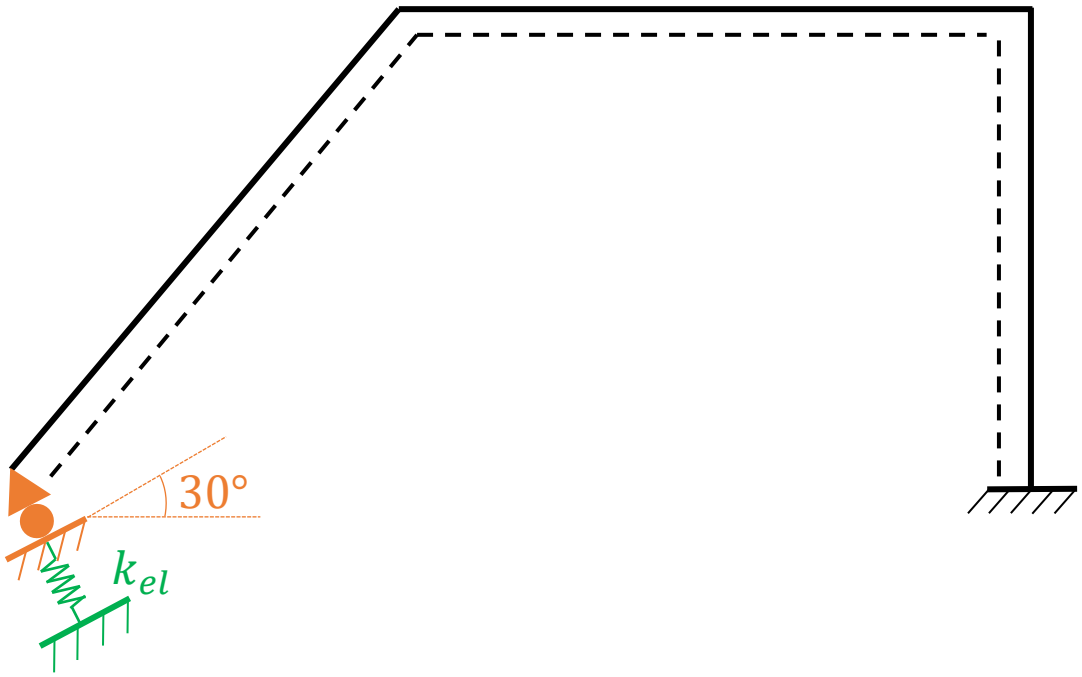


Παρατηρώ:

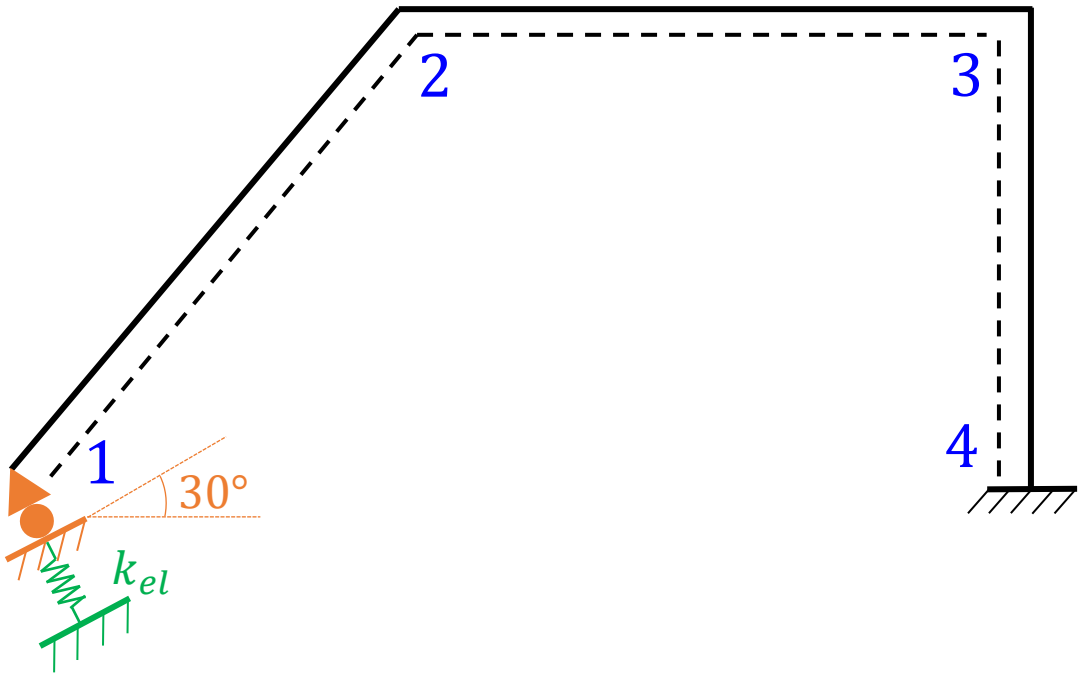
- Επικόμβια φορτία
- Ενδιάμεσα φορτία
- Λοξή στήριξη
- Ελαστική στήριξη
- Υποχώρηση στήριξης
- Θερμοκρασιακή μεταβολή

Τα μέλη του πλαισίου είναι κατασκευασμένα από ομογενές και ισότροπο υλικό.

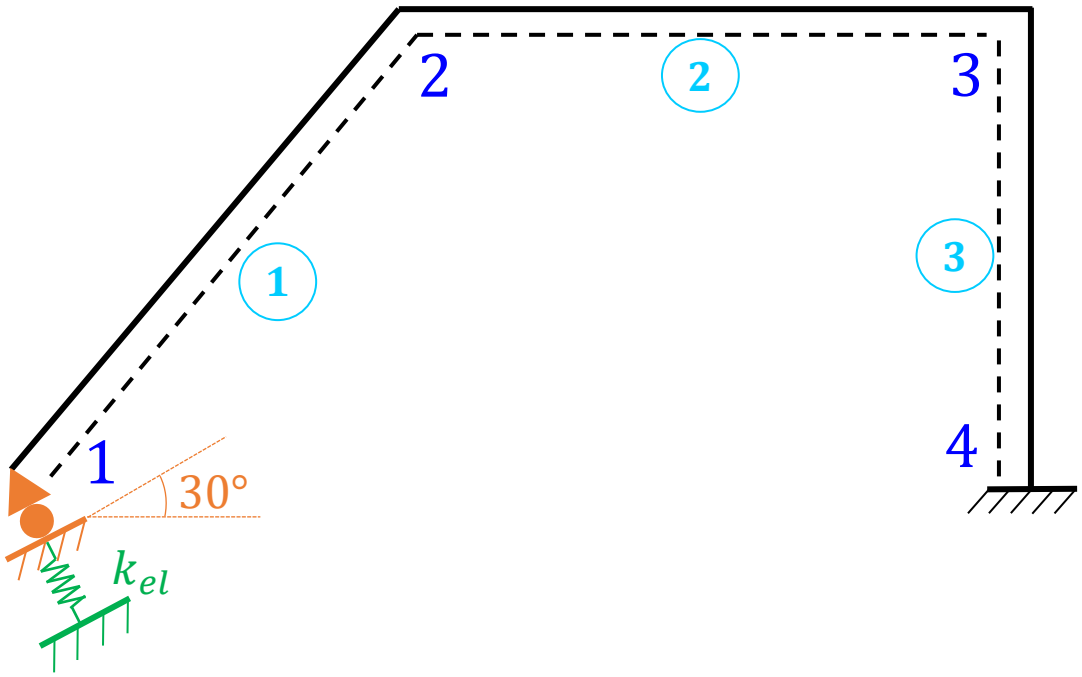
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



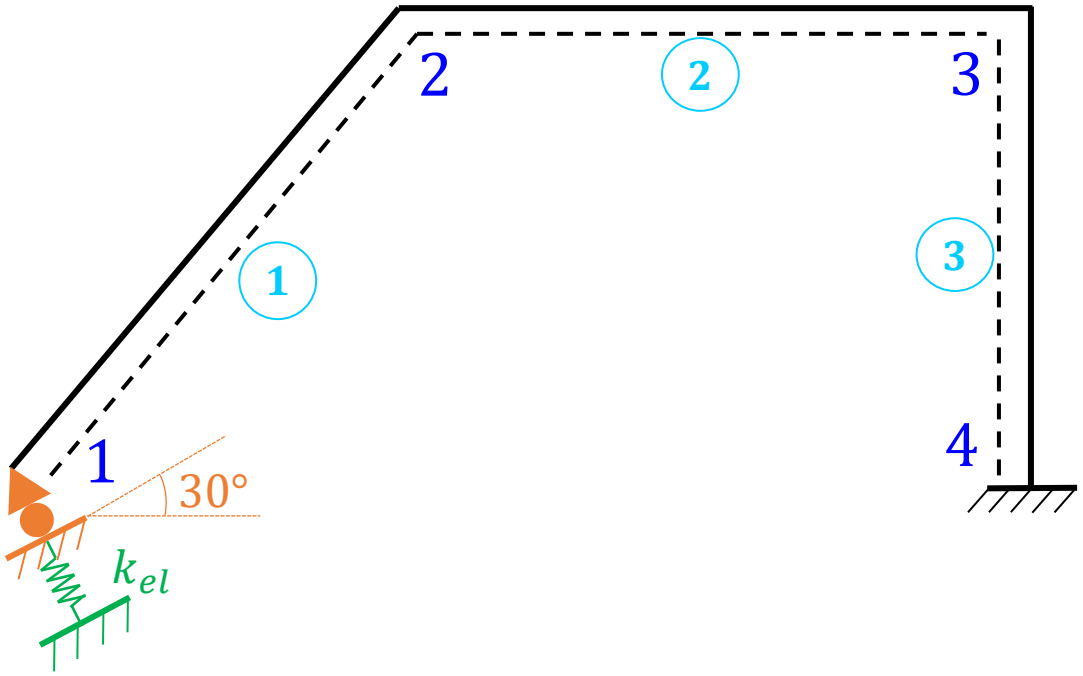
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



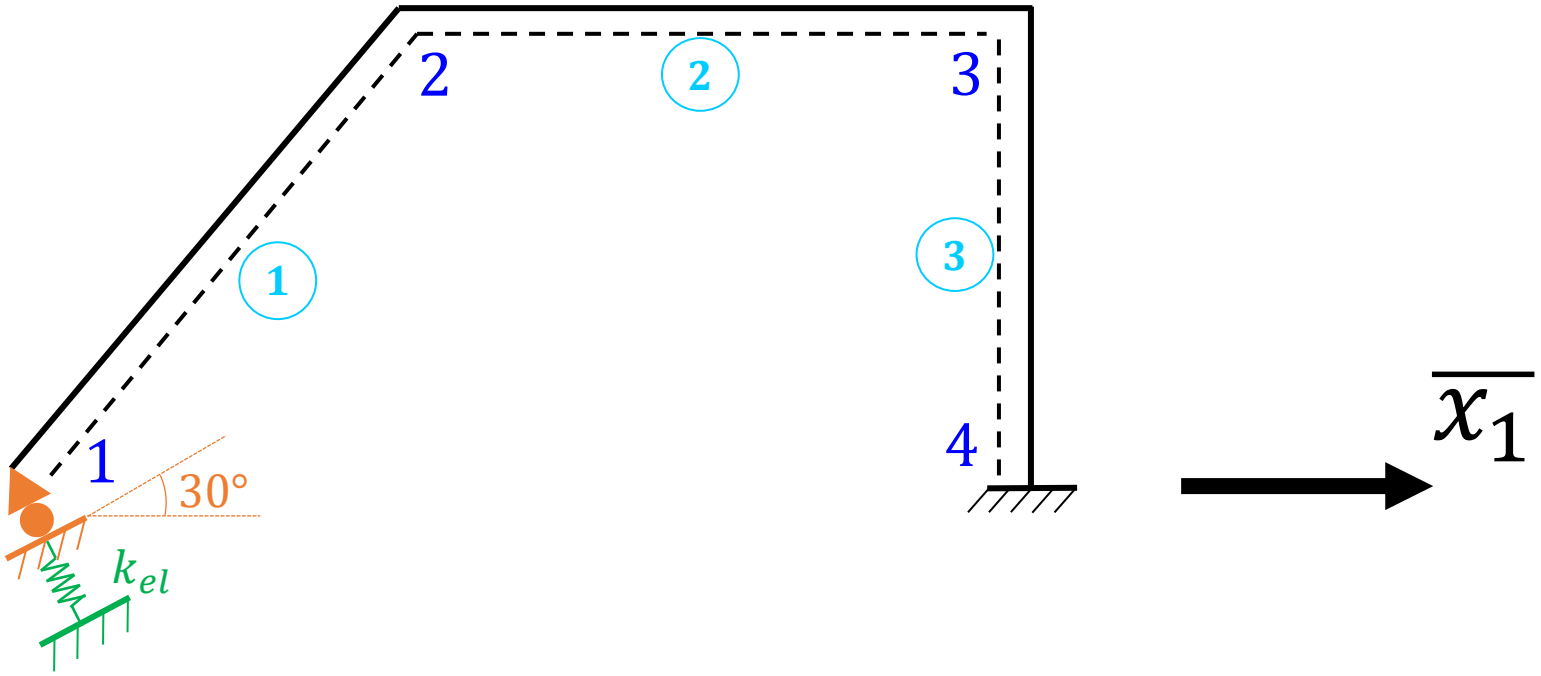
ΒΗΜΑ 1: Αρίθμηση Κόμβων και Μελών



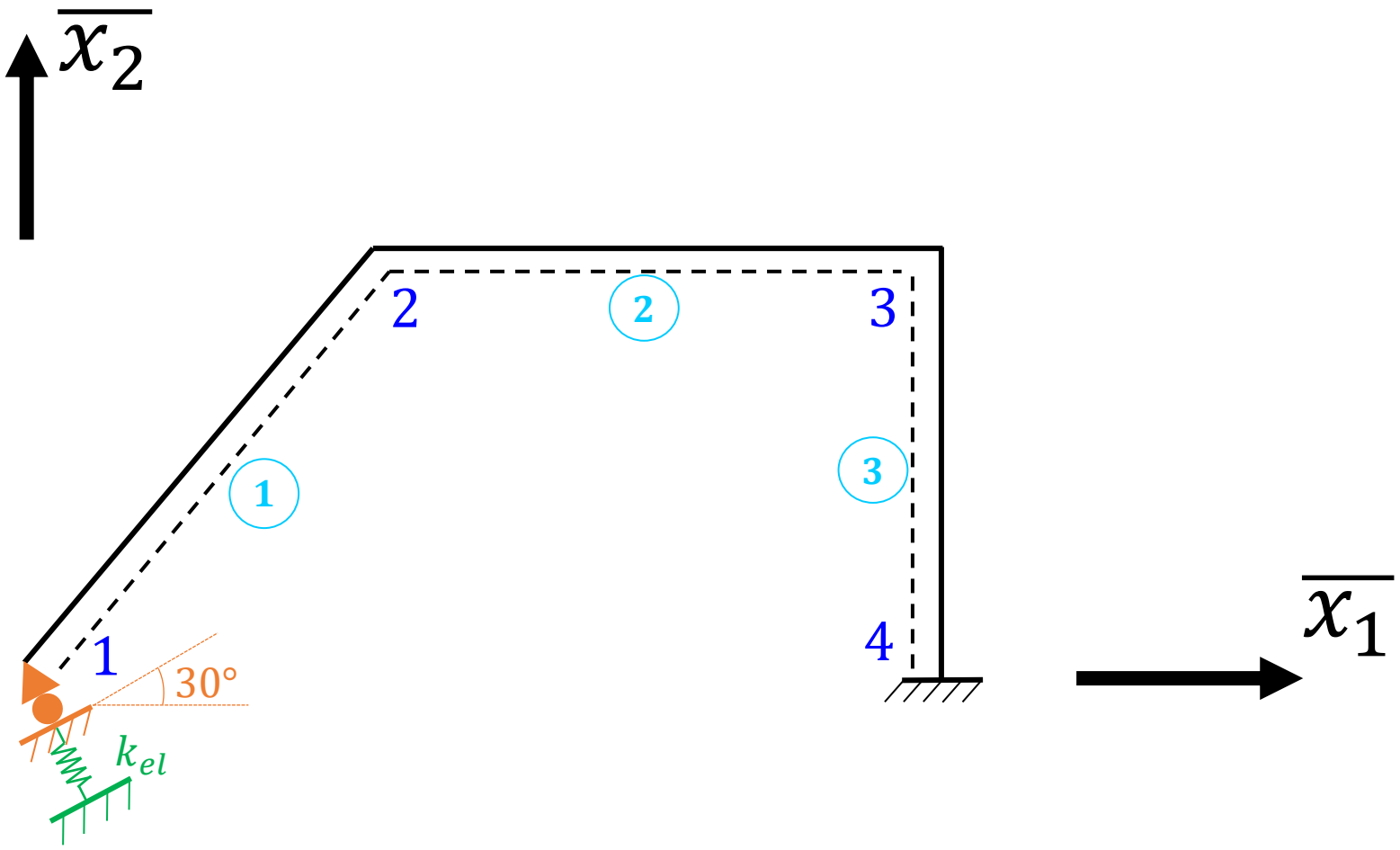
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x_1 x_2}$



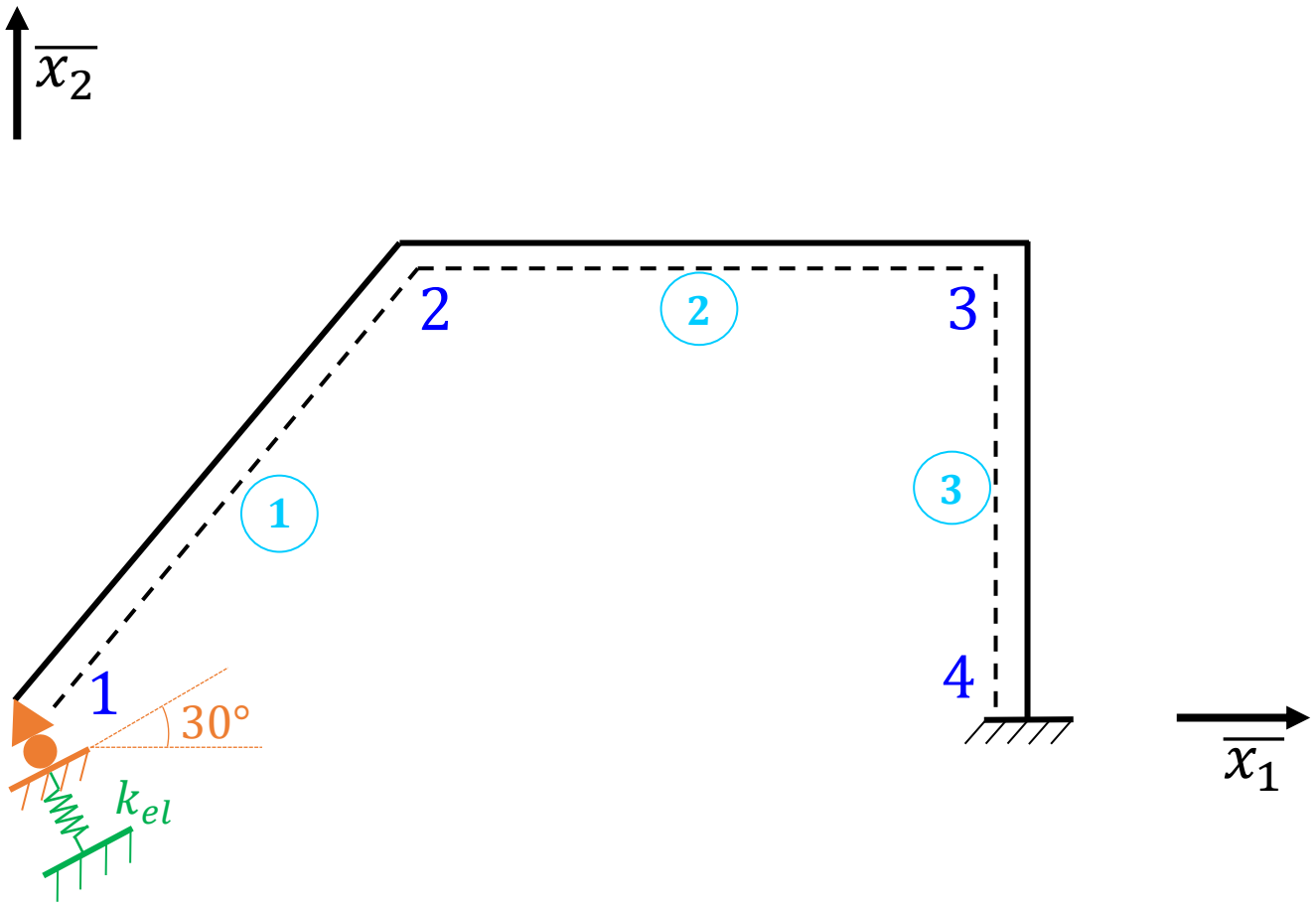
ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x_1 x_2}$



ΒΗΜΑ 2: Επιλογή Καθολικού Συστήματος Αξόνων $O\overline{x_1 x_2}$

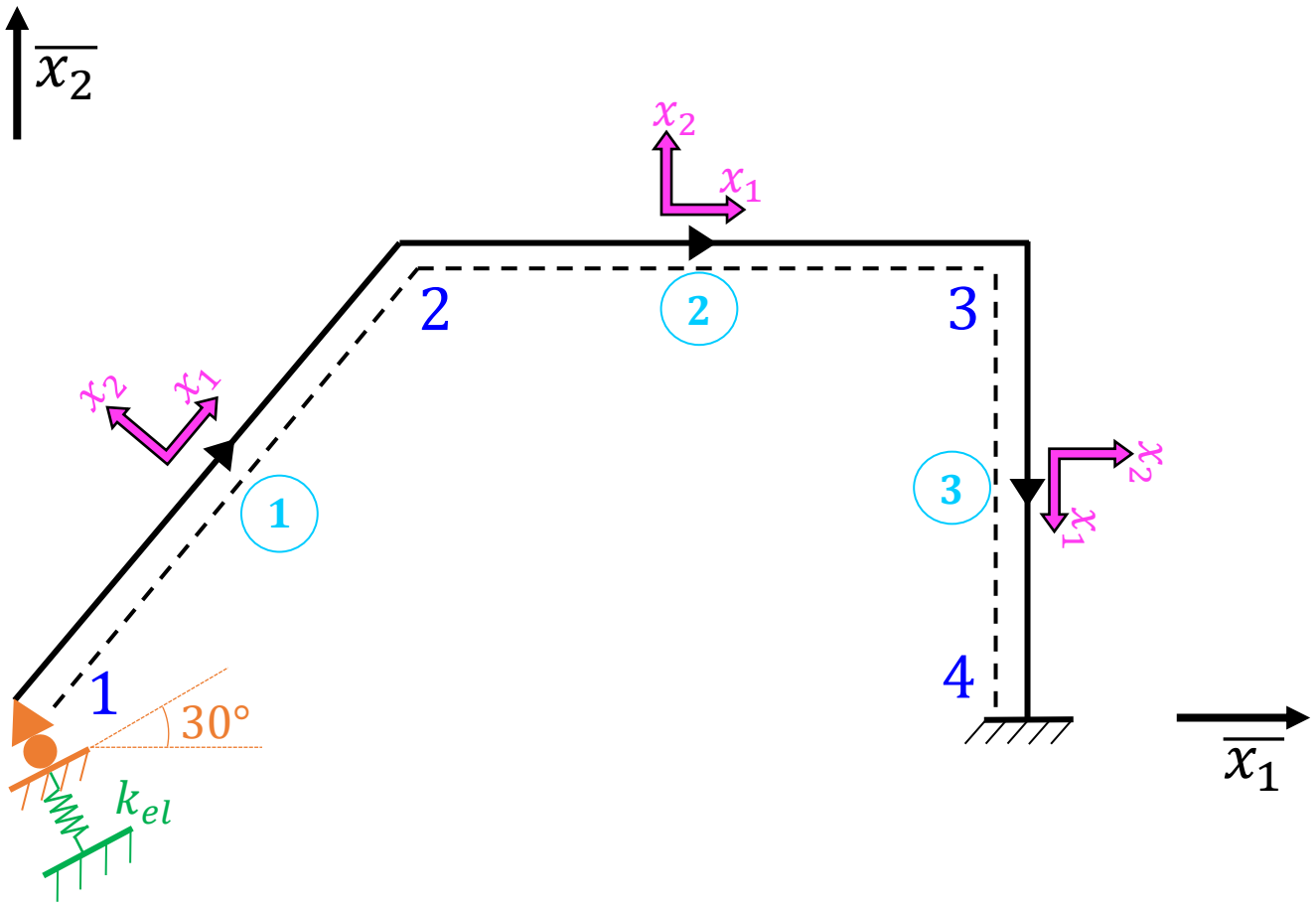


ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



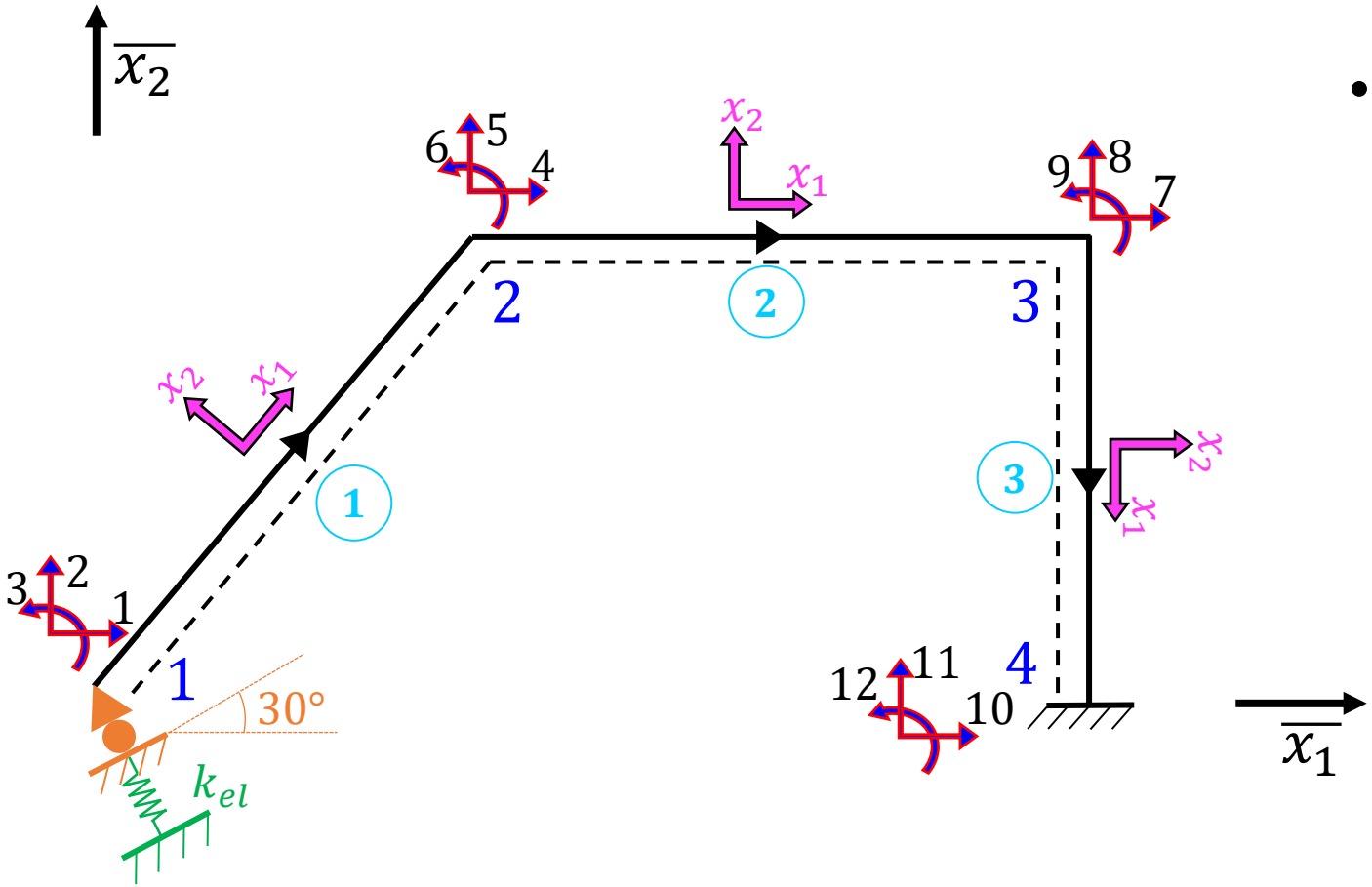
- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό !).
- Ως προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

ΒΗΜΑ 3: Επιλογή Τοπικών Συστημάτων Αξόνων Ox_1x_2



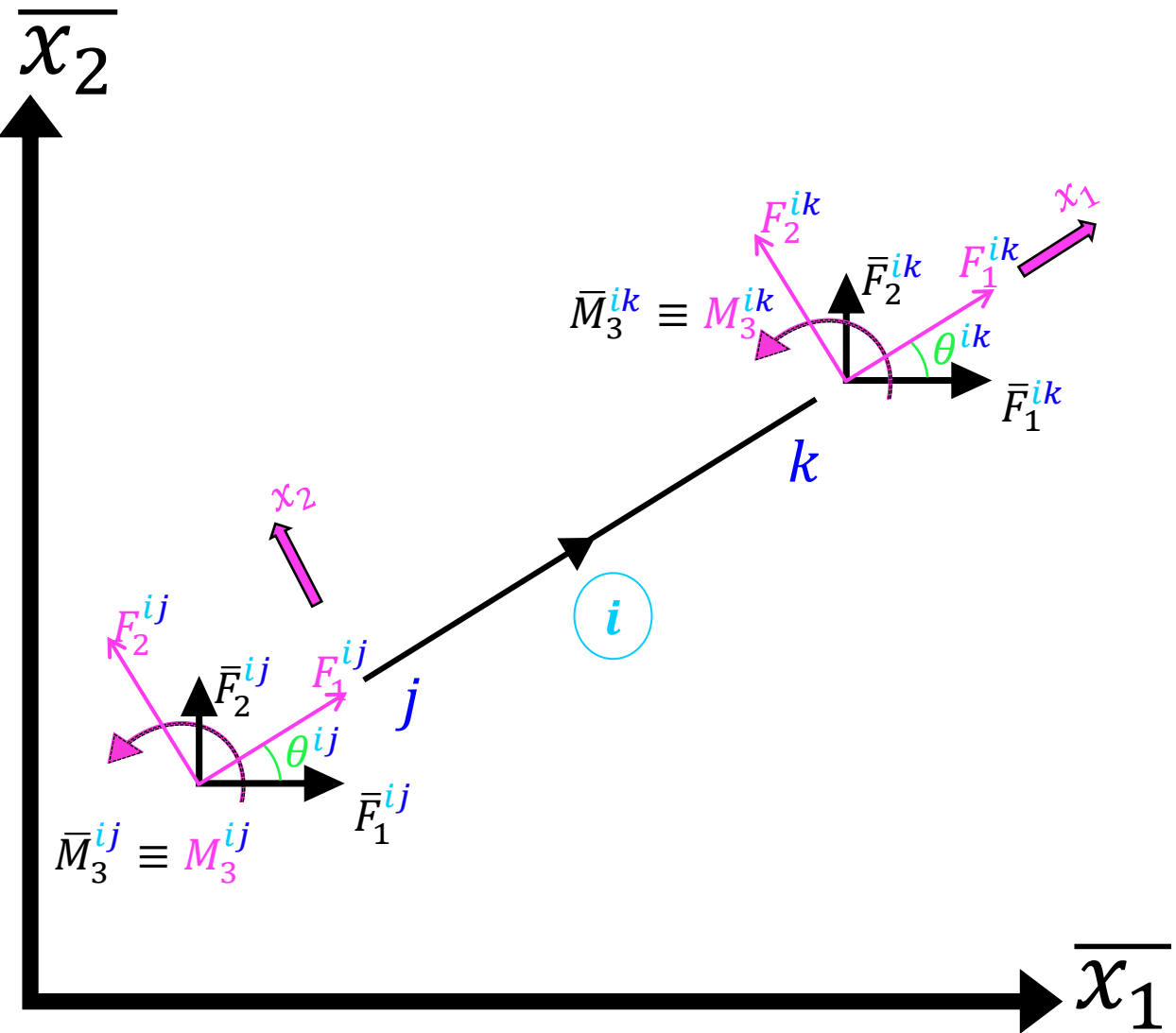
- Επιλέγω τοπικό σύστημα για ΌΛΑ τα μέλη.
- Ο x_1 είναι ο διαμήκης άξονας του μέλους (από κόμβο με μικρότερο σε κόμβο με μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό !).
- Ως προς το τοπικό σύστημα ορίζονται τα κινηματικά και τα εσωτερικά εντατικά μεγέθη κάθε μέλους.

ΒΗΜΑ 4: Καθορισμός Βαθμών Ελευθερίας Κίνησης των Κόμβων



- Καθορίζονται οι βαθμοί ελευθερίας (β.ε) κίνησης των κόμβων (το λέμε και *κινηματική αοριστία*).
- Σε αυτό το βήμα αμελούμε τον τρόπο στήριξης του φορέα.
- Εφόσον γνωρίζουμε ότι κάθε κόμβος πλαισίου στο επίπεδο διαθέτει 3 β.ε., τότε οι β.ε. του φορέα θα είναι 3N, όπου N ο αριθμός των κόμβων.

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (1/2)



$$[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}] = \left[\begin{array}{c:c} [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ \hdashline [\mathbf{0}] & [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{ik}] \end{array}\right] =$$

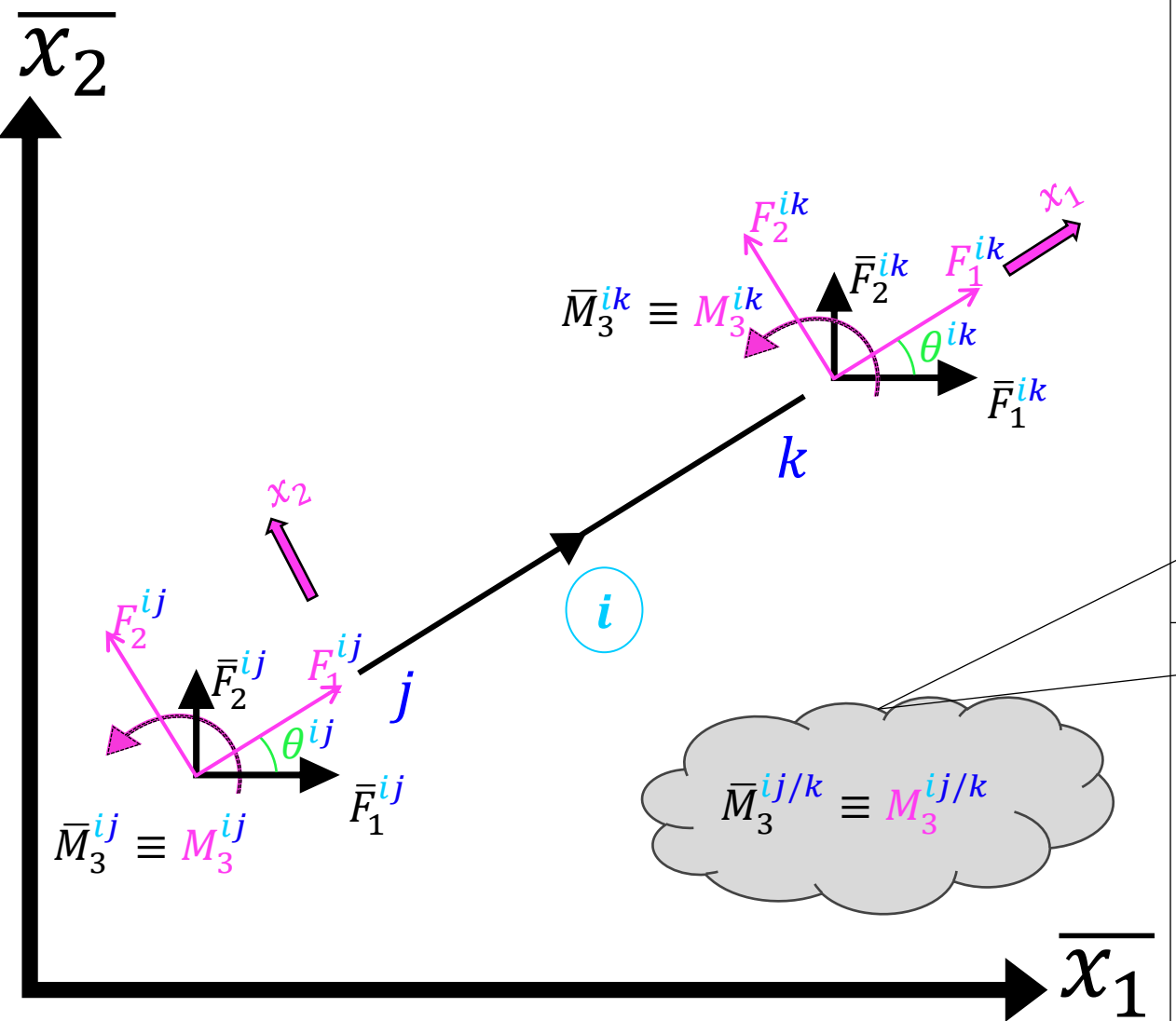
$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} cos\theta^{ij} & sin\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin\theta^{ij} & cos\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & cos\theta^{ik} & sin\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\theta^{ik} & cos\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :

$$\theta^{ij} = \theta^{ik}$$

- Ισχύει: $[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}]^{-1} = [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}]^{T}$
- Ο καθολικός $\overline{x_1}$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (1/2)



$$[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}] = \left[\begin{array}{c:c} [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{ij}] & [\mathbf{0}] \\ \hdashline [\mathbf{0}] & [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{ik}] \end{array}\right] =$$

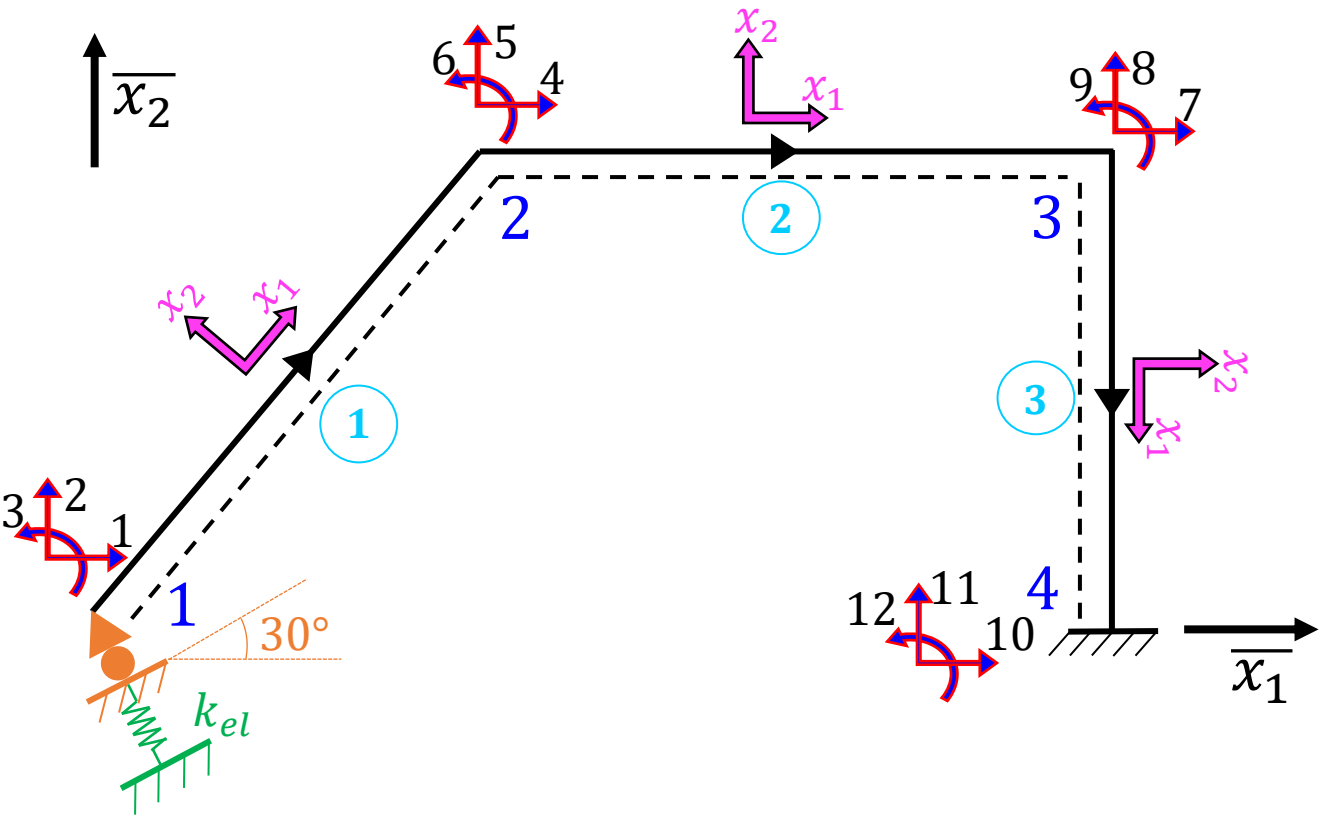
$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} cos\theta^{ij} & sin\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sin\theta^{ij} & cos\theta^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & cos\theta^{ik} & sin\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\theta^{ik} & cos\theta^{ik} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Προφανώς για ευθύγραμμα μέλη ισχύει :

$$\theta^{ij} = \theta^{ik}$$

- Ισχύει: $[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}]^{-1} = [\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}]^{T}$
- Ο καθολικός $\overline{x_1}$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να «βρει» τον τοπικό x_1

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



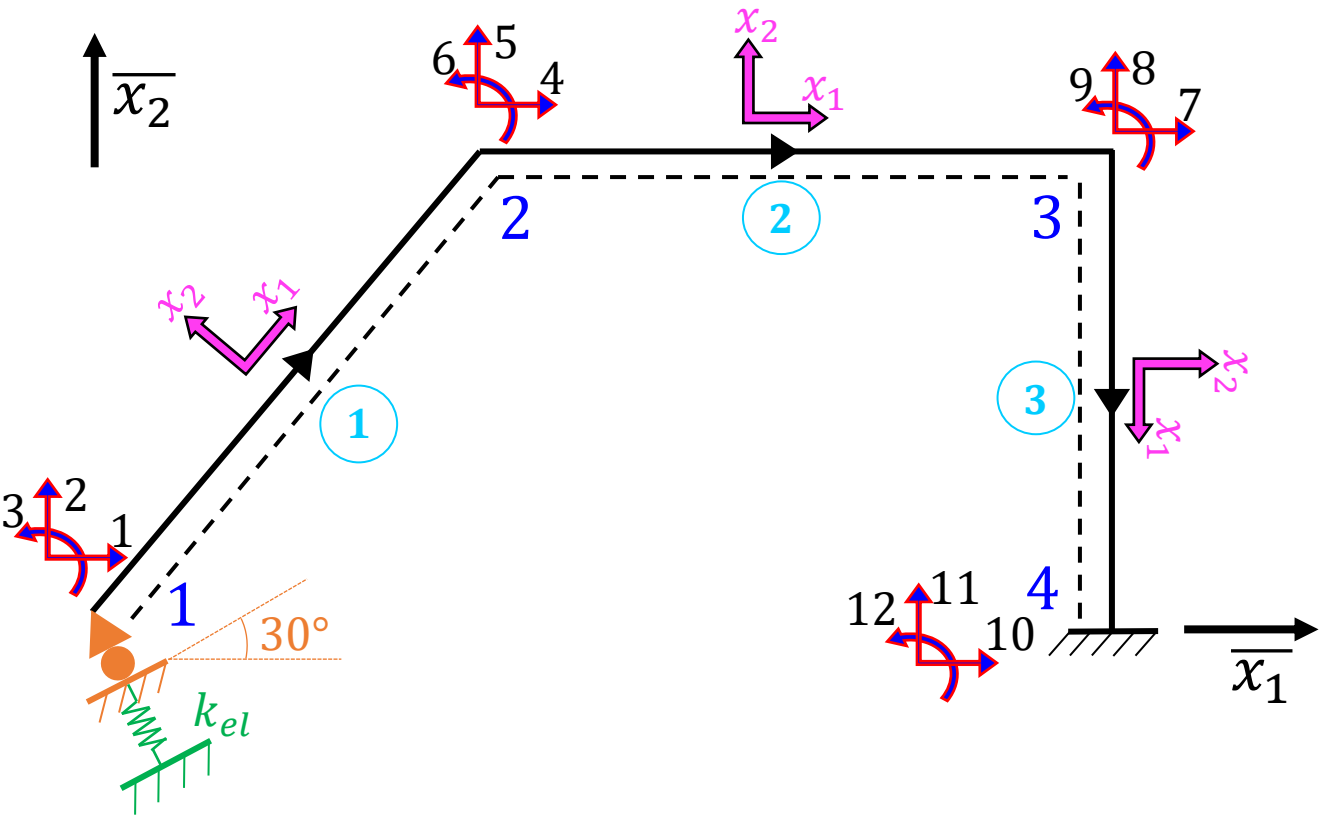
$$[\Lambda^1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8000 & 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.6000 & 0.8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8000 & 0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$[\Lambda^2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[\Lambda^3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^{i}$	$cos\theta^{i}$	$sin\theta^{i}$
1	53.13	0.6	0.8
2			
3			

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



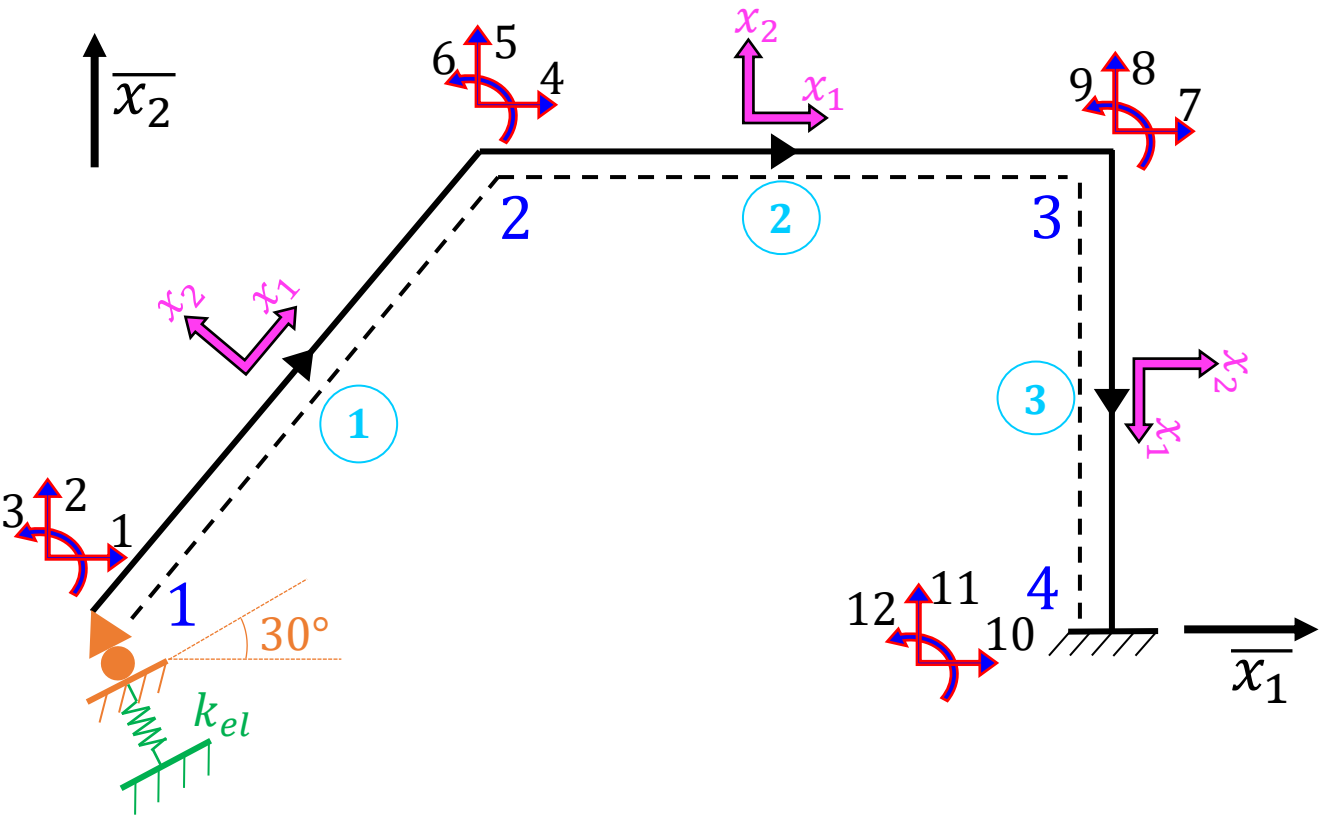
$$[\Lambda^1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8000 & 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.6000 & 0.8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8000 & 0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

$$[\Lambda^2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[\Lambda^3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^{i}$	$cos\theta^{i}$	$sin\theta^{i}$
1	53.13	0.6	0.8
2	0	1	0
3			

ΒΗΜΑ 5: Μητρώα Μετασχηματισμού Μελών (2/2)



$$[\Lambda^1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.6000 & 0.8000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.8000 & 0.6000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0.6000 & 0.8000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.8000 & 0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{array}\right]$$

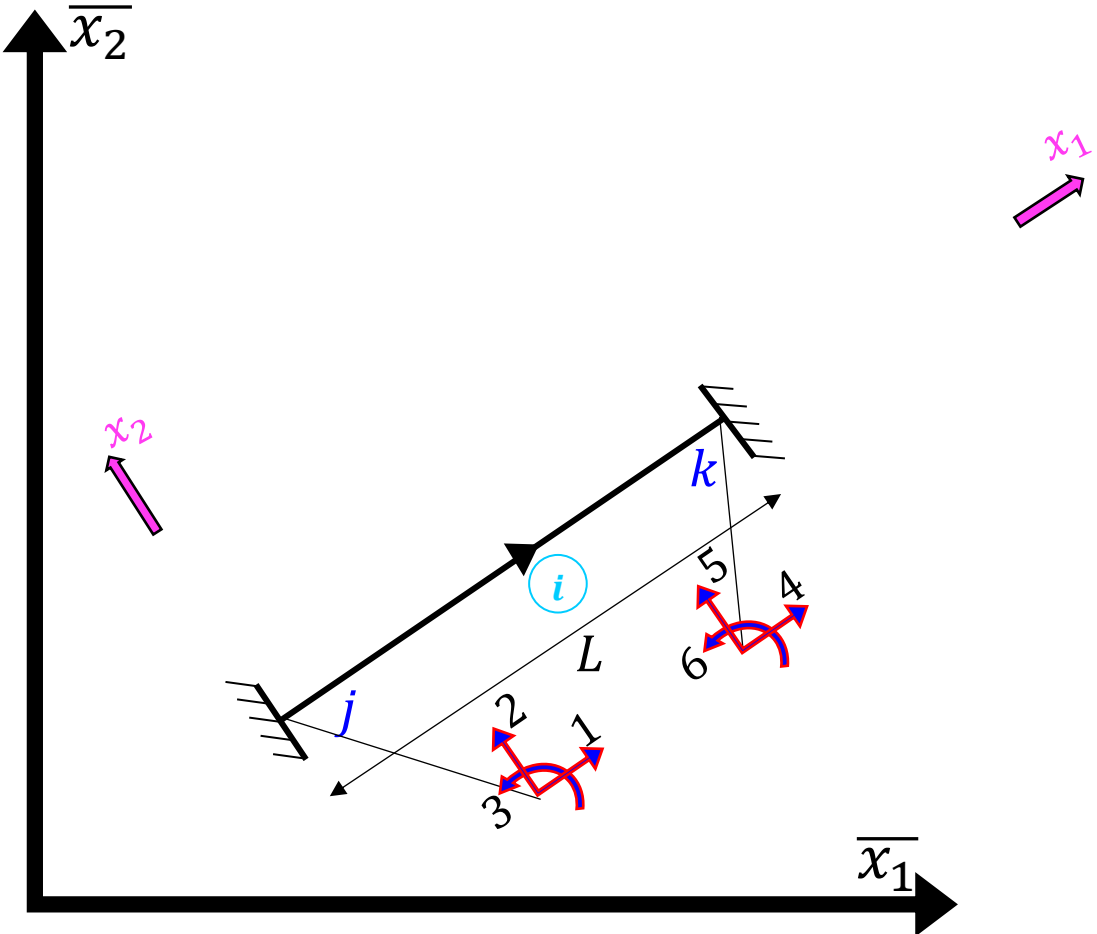
$$[\Lambda^2] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$[\Lambda^3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Μέλος i	$\theta^{ij} = \theta^{ik} = \theta^{i}$	$cos\theta^{i}$	$sin\theta^{i}$
1	53.13	0.6	0.8
2	0	1	0
3	270	0	-1

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



$$[k^i] = \left[\begin{array}{c:c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hdashline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

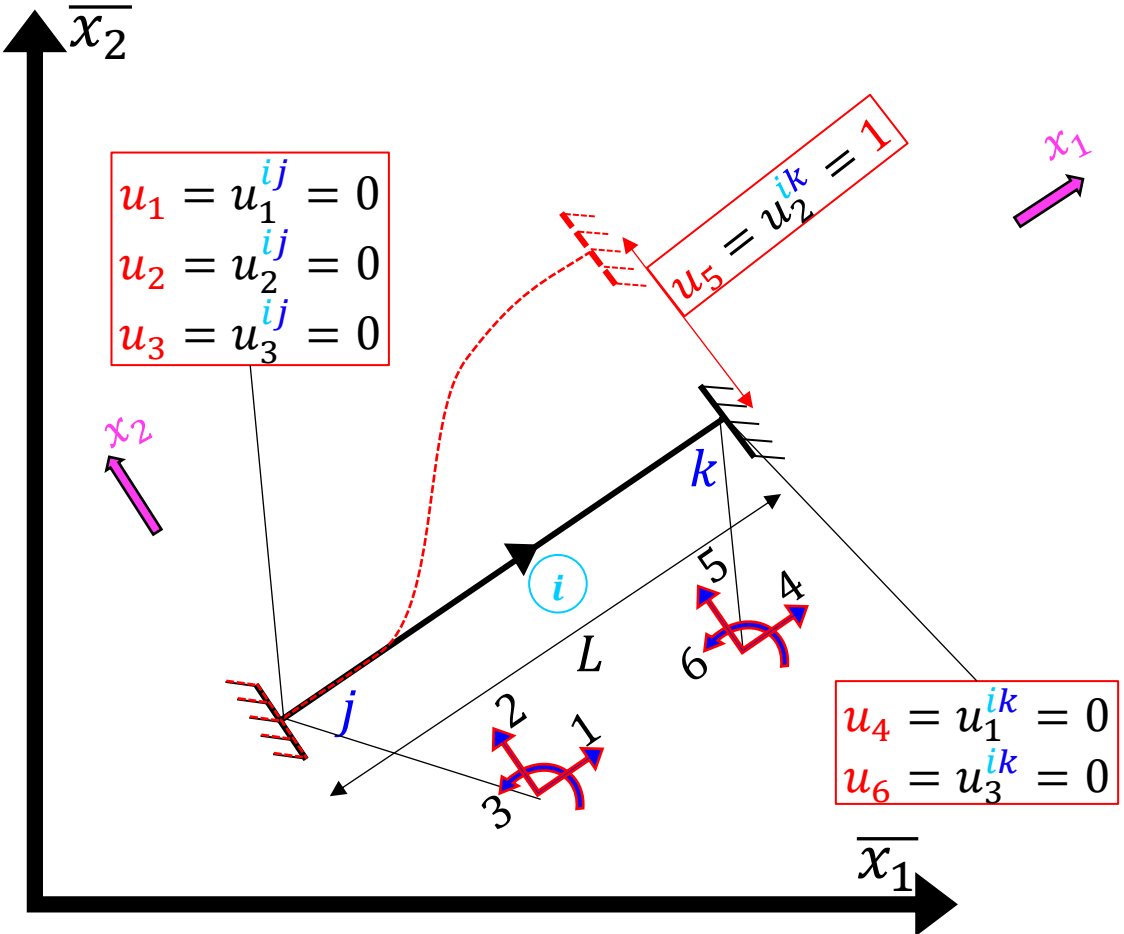
ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$=$$

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
u_1	$\frac{E^iA^i}{L^i}$	0	0	$-\frac{E^iA^i}{L^i}$	0	0
u_2	0	$\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}}$	$\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	0	$-\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}}$	$\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$
u_3	0	$\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	$\frac{4E^iI^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	$\frac{2E^iI^i}{L^i}$
u_4	$-\frac{E^iA^i}{L^i}$	0	0	$\frac{E^iA^i}{L^i}$	0	0
u_5	0	$-\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}}$	$-\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	0	$\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}}$	$-\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$
u_6	0	$\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	$\frac{2E^iI^i}{L^i}$	0	$-\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}}$	$\frac{4E^iI^i}{L^i}$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



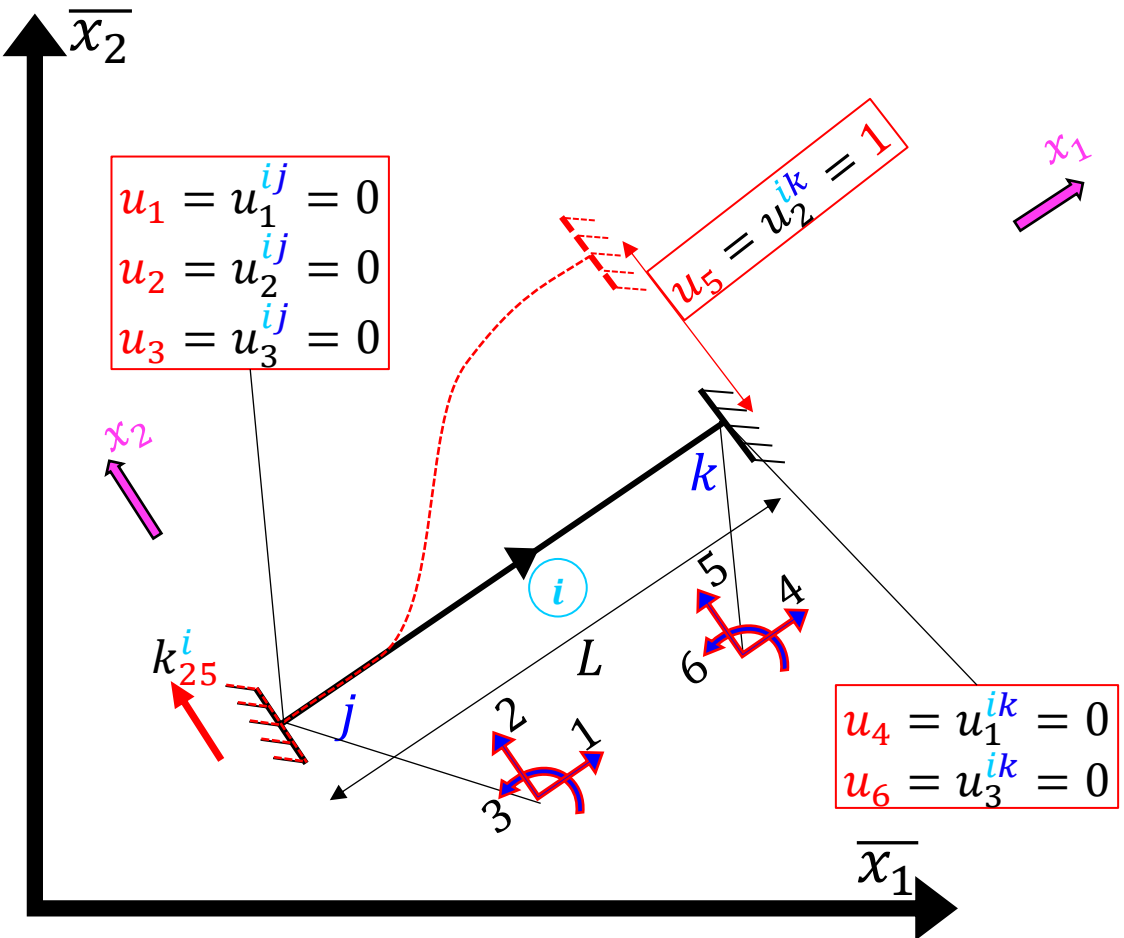
$$[k^i] = \left[\begin{array}{c:c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hdashline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\hline
u_1 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_3 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\
u_4 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_5 & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_6 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i}
\end{array}$$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



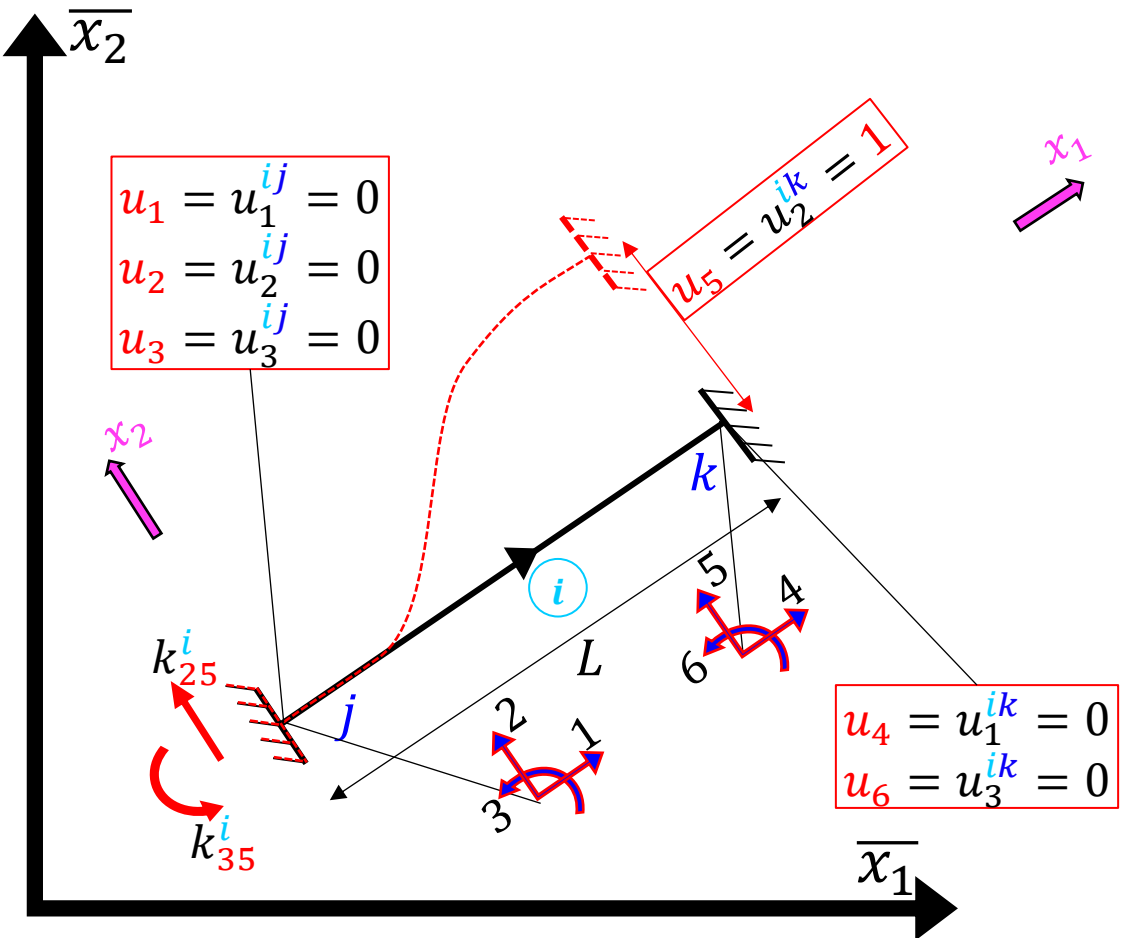
$$[k^i] = \left[\begin{array}{c:c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hdashline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\hline
u_1 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_3 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\
u_4 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_5 & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_6 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i}
\end{array}$$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



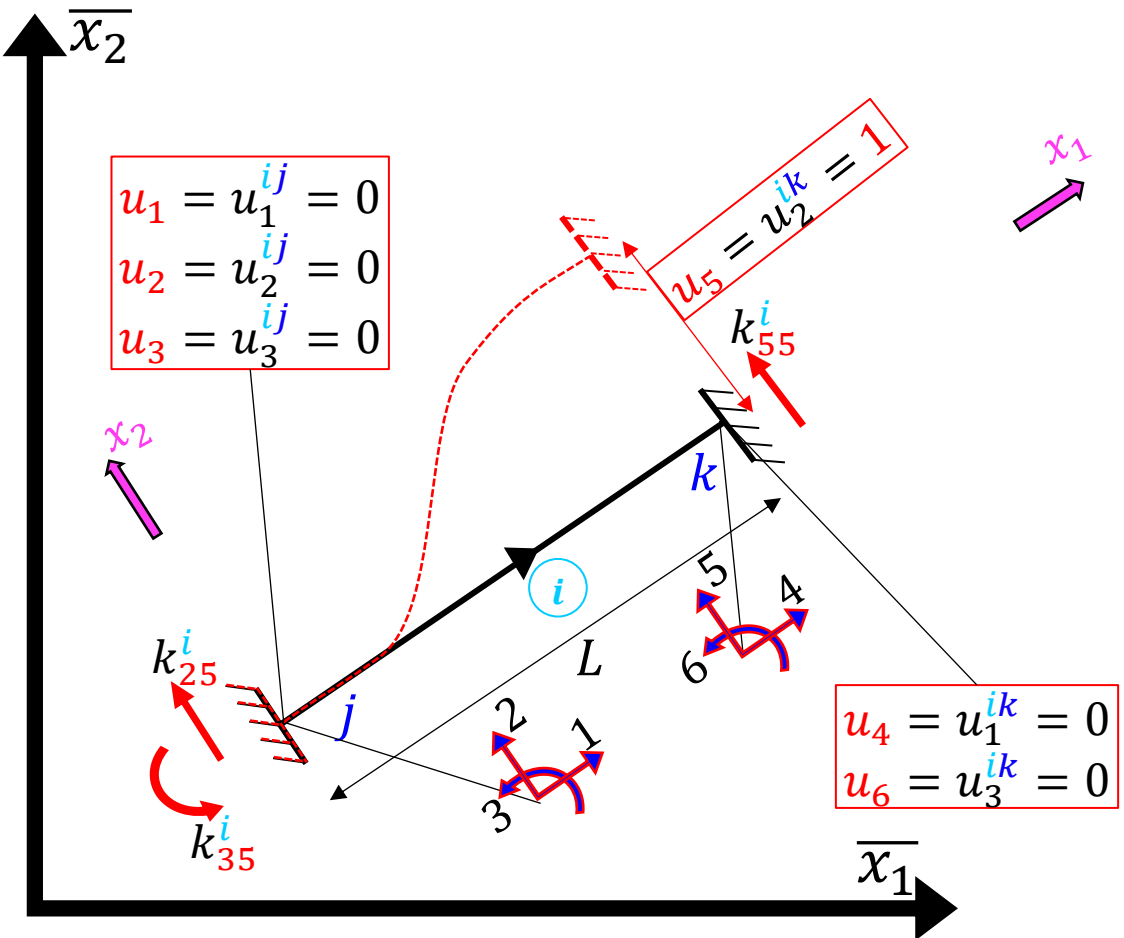
$$[k^i] = \left[\begin{array}{c:c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hdashline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\hline
u_1 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_3 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\
u_4 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_5 & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_6 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i}
\end{array}$$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.



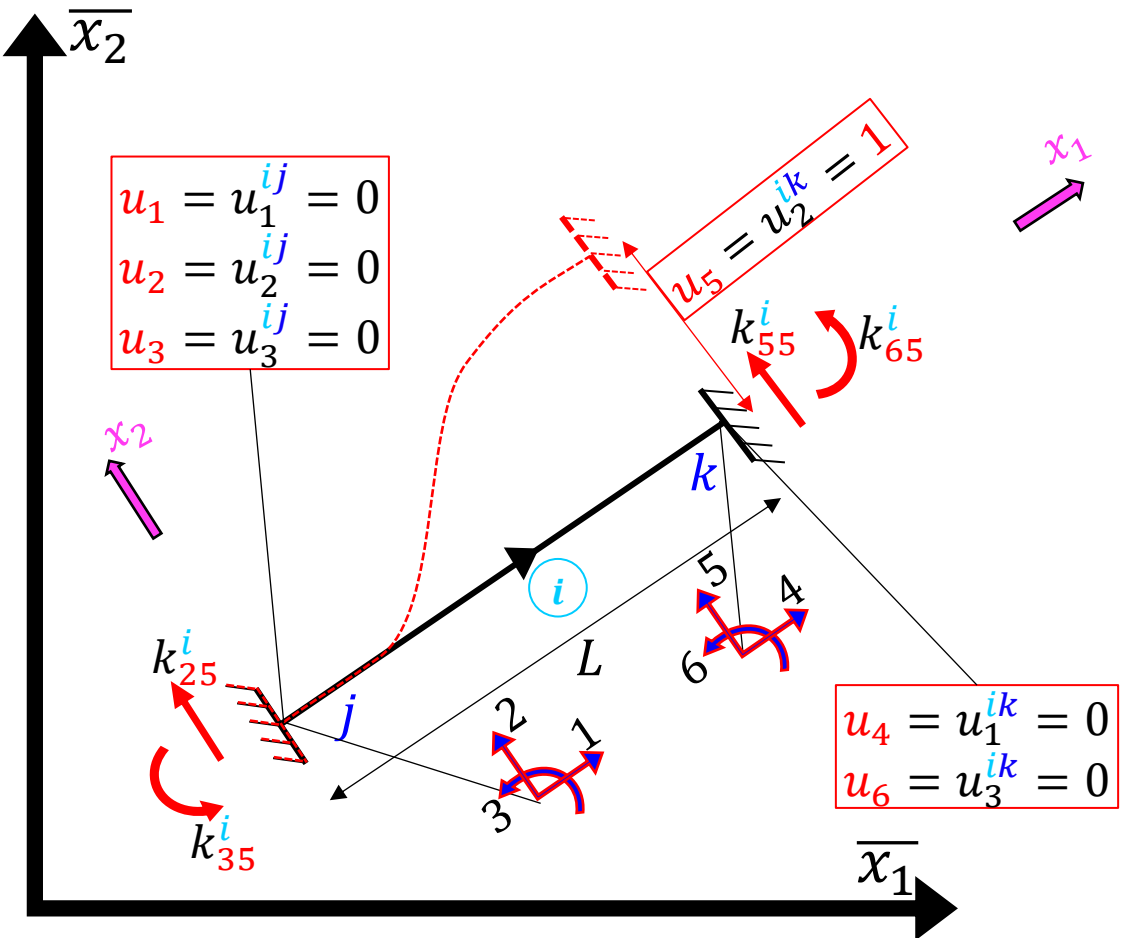
$$[k^i] = \left[\begin{array}{c:c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hdashline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\hline
u_1 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_3 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\
u_4 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_5 & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_6 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i}
\end{array}$$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το τυχόν στοιχείο k_{mn}^{i} του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη τοπική ακραία δράση κατά τον **τοπικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **τοπικό** β.ε. n του μέλους i, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων τοπικών β.ε. του μέλους.

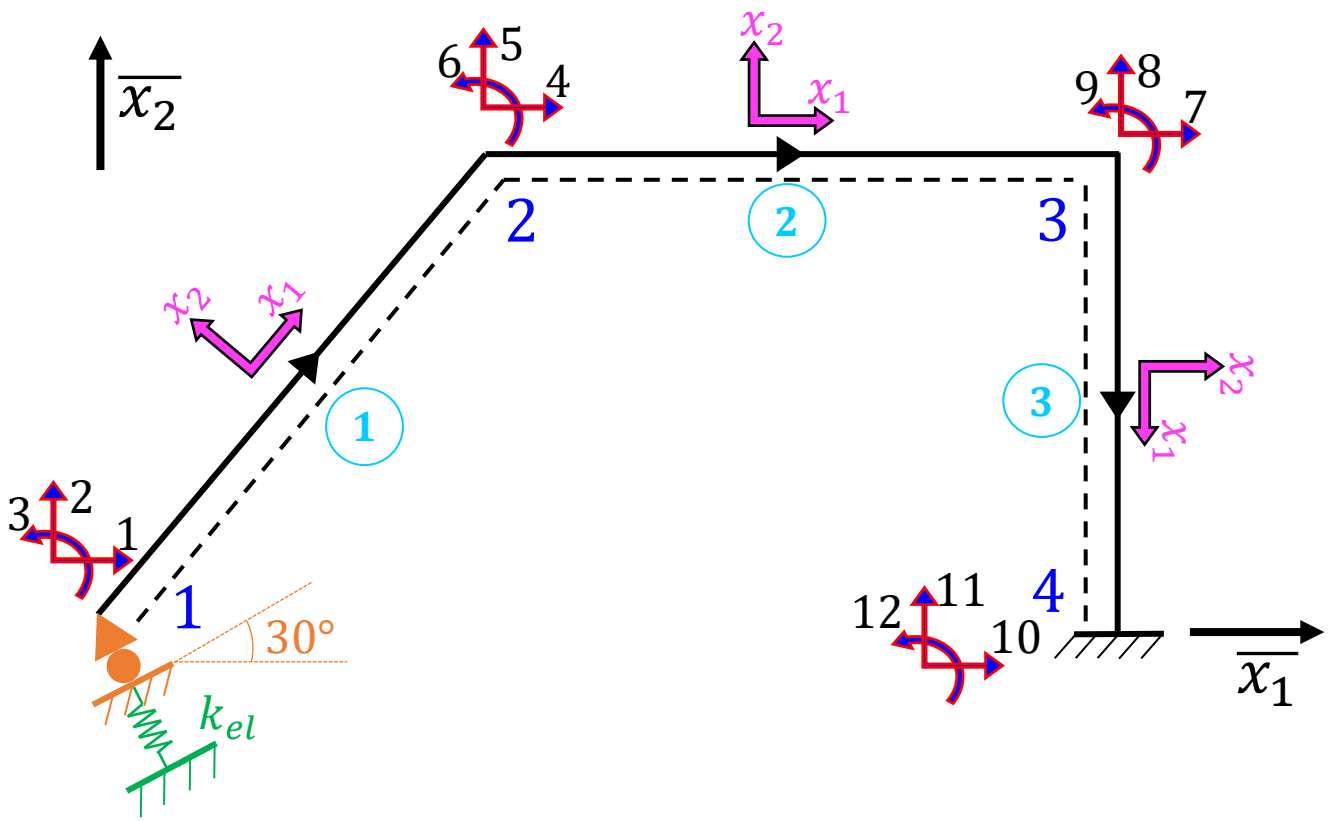


$$[k^i] = \left[\begin{array}{c|c} [k_{jj}^i] & [k_{jk}^i] \\ \hline [k_{kj}^i] & [k_{kk}^i] \end{array}\right] =$$

ΤΟΠΙΚΟ ΜΗΤΡΩΟ ΣΤΙΒΑΡΟΤΗΤΑΣ ΜΕΛΟΥΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΛΑΙΣΙΟΥ

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
\hline
u_1 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_2 & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_3 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} \\
\hline
u_4 & -\frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 & \frac{E^iA^i}{L^i} & 0 & 0 \\
u_5 & 0 & -\frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & 0 & \frac{12E^iI^i}{L^{i^3}} & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} \\
u_6 & 0 & \frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{2E^iI^i}{L^i} & 0 & -\frac{6E^iI^i}{L^{i^2}} & \frac{4E^iI^i}{L^i}
\end{array}$$

ΒΗΜΑ 6: Τοπικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/2)



Μέλος i	E^i [kN/m²]	A^i [m²]	I^i [m⁴]	L^i [m]
1	2.1×10^7	0.12	0.0016	7.5
2	2.1×10^7	0.12	0.0016	8.5
3	2.1×10^7	0.12	0.0016	6.0

$$[k^1] = \begin{bmatrix} 3.3600 & 0 & 0 & -3.3600 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0096 & 0.0358 & 0 & -0.0096 & 0.0358 \\ 0 & 0.0358 & 0.1792 & 0 & -0.0358 & 0.0896 \\ -3.3600 & 0 & 0 & 3.3600 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0096 & -0.0358 & 0 & 0.0096 & -0.0358 \\ 0 & 0.0358 & 0.0896 & 0 & -0.0358 & 0.1792 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[k^2] = \begin{bmatrix} 3.1500 & 0 & 0 & -3.1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0079 & 0.0315 & 0 & -0.0079 & 0.0315 \\ 0 & 0.0315 & 0.1680 & 0 & -0.0315 & 0.0840 \\ -3.1500 & 0 & 0 & 3.1500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0079 & -0.0315 & 0 & 0.0079 & -0.0315 \\ 0 & 0.0315 & 0.0840 & 0 & -0.0315 & 0.1680 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$[k^3] = \begin{bmatrix} 4.2000 & 0 & 0 & -4.2000 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0187 & 0.0560 & 0 & -0.0187 & 0.0560 \\ 0 & 0.0560 & 0.2240 & 0 & -0.0560 & 0.1120 \\ -4.2000 & 0 & 0 & 4.2000 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0187 & -0.0560 & 0 & 0.0187 & -0.0560 \\ 0 & 0.0560 & 0.1120 & 0 & -0.0560 & 0.2240 \end{bmatrix} \times 10^5$$

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (1/2)

Το καθολικό μητρώο στιβαρότητας κάθε μέλους υπολογίζεται από τη σχέση: $\left[\bar{k}^{i}\right] = \left[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}\right]^{T}\left[k^{i}\right]\left[\Lambda_{\mathrm{PF}}^{i}\right]$

$$\left[\bar{k}^{1}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1.2157 & 1.6082 & -0.0287 & -1.2157 & -1.6082 & -0.0287 \\ 1.6082 & 2.1538 & 0.0215 & -1.6082 & -2.1538 & 0.0215 \\ -0.0287 & 0.0215 & 0.1792 & 0.0287 & -0.0215 & 0.0896 \\ \hline -1.2157 & -1.6082 & 0.0287 & 1.2157 & 1.6082 & 0.0287 \\ -1.6082 & -2.1538 & -0.0215 & 1.6082 & 2.1538 & -0.0215 \\ -0.0287 & 0.0215 & 0.0896 & 0.0287 & -0.0215 & 0.1792 \end{array}\right] \times 10^{5}$$

$$\left[\bar{k}^{2}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3.1500 & 0 & 0 & -3.1500 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0079 & 0.0315 & 0 & -0.0079 & 0.0315 \\ 0 & 0.0315 & 0.1680 & 0 & -0.0315 & 0.0840 \\ \hline -3.1500 & 0 & 0 & 3.1500 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0079 & -0.0315 & 0 & 0.0079 & -0.0315 \\ 0 & 0.0315 & 0.0840 & 0 & -0.0315 & 0.1680 \end{array}\right] \times 10^{5}$$

$$\left[\bar{k}^{3}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.0187 & 0 & 0.0560 & -0.0187 & 0 & 0.0560 \\ 0 & 4.2000 & 0 & 0 & -4.2000 & 0 \\ 0.0560 & 0 & 0.2240 & -0.0560 & 0 & 0.1120 \\ \hline -0.0187 & 0 & -0.0560 & 0.0187 & 0 & -0.0560 \\ 0 & -4.2000 & 0 & 0 & 4.2000 & 0 \\ 0.0560 & 0 & 0.1120 & -0.0560 & 0 & 0.2240 \end{array}\right] \times 10^{5}$$

Το τυχόν στοιχείο $\bar{k}_{mn}^{i}$ του καθολικού μητρώου στιβαρότητας του μέλους i δηλώνει την αναπτυσσόμενη καθολική ακραία δράση κατά τον **καθολικό** β.ε. m, όταν επιβληθεί <u>ΜΟΝΑΔΙΑΙΑ</u> και <u>ΜΟΝΑΔΙΚΗ</u> ακραία μετακίνηση κατά τον **καθολικό** β.ε. n, δηλαδή με ταυτόχρονο μηδενισμό όλων των υπόλοιπων καθολικών β.ε. του μέλους.

ΒΗΜΑ 7: Καθολικά Μητρώα Στιβαρότητας Μελών (2/2)

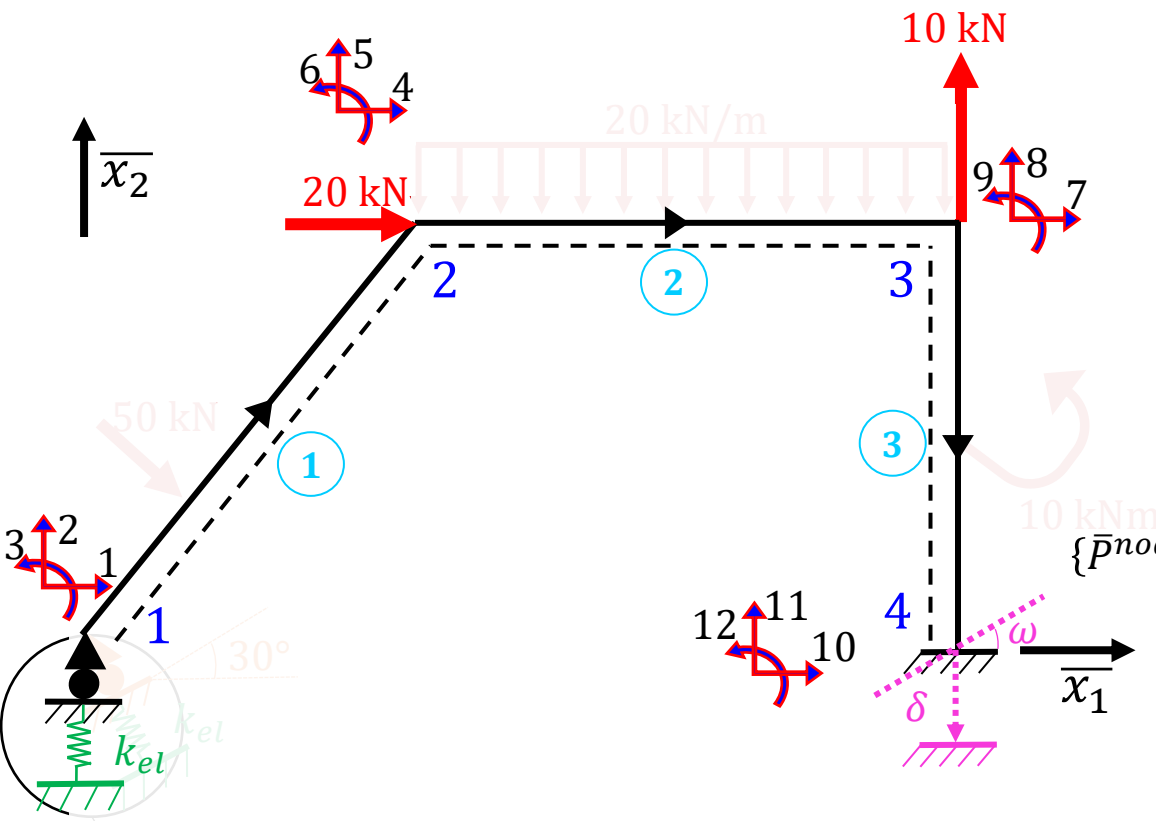
Θυμηθείτε και σωθείτε!

- Κάθε μητρώο στιβαρότητας είναι **<u>συμμετρικό</u>**. Η ιδιότητα αυτή επιβεβαιώνεται από την αρχή της αμοιβαιότητας των έργων (Betti-Maxwell).

- Τα διαγώνια στοιχεία ενός μητρώου στιβαρότητας είναι **<u>πάντα θετικά</u>** (και μη μηδενικά): $k_{mm} > 0$. Κατ'εξαίρεση, το τοπικό μητρώο στιβαρότητας μέλους δικτυώματος και πιθανόν και το αντίστοιχο καθολικό να εμφανίζει μηδενικά στοιχεία σε διαγώνιες θέσεις, αλλά αυτό γίνεται καθώς έχουμε θεωρήσει τέμνουσα δύναμη που (δεν ορίζεται), για να έχουμε «όμορφα και τετράγωνα» μητρώα.

- Η ορίζουσα του μητρώου στιβαρότητας είναι **<u>μηδενική</u>**. Το φυσικό νόημα της ιδιότητας αυτής γίνεται αντιληπτό από το γεγονός ότι κατά τη μόρφωση του μητρώου στιβαρότητας στοιχείου ή φορέα, δεν λαμβάνεται υπόψη ο τρόπος στήριξης αυτού (στερεό σώμα).

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις



$$\{\bar{P}^{nodal}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \#1 \\ \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \#4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \#1 \\ \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \#4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Δεν έχω αποφασίσει ακόμα πως θα τα μεταχειριστώ

Αγνοώ <u>προσωρινά</u>:

- τη λοξή στήριξη
- τα ενδιάμεσα φορτία

Υπό την <u>προσωρινή</u> <u>παραδοχή</u> για τη λοξή στήριξη, για τα μεγέθη αυτά θα ίσχυε και:

$$\bar{P}_2 = k_{el}\bar{\Delta}_6$$

ΒΗΜΑ 8: Επικόμβιες Δράσεις και Μετατοπίσεις

ΘΥΜΑΜΑΙ ΟΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΝ <u>ΔΥΟ</u> ΤΡΟΠΟΙ ΓΡΑΦΗΣ ΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ($\bar{P}$, $\bar{\Delta}$, $\bar{S}$, $\kappa\lambda\pi.$):

1. $\bar{\Delta}^{(\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \kappa\acute{o}\mu\beta o\upsilon)}_{\kappa\alpha\theta o\lambda\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\varsigma}$

2. $\bar{\Delta}_{\beta\alpha\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \epsilon\lambda\epsilon\upsilon\theta\epsilon\rho\acute{\iota}\alpha\varsigma}$

Διαλέγω και παίρνω ☺

$$\{\bar{P}^{nodal}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1^{(1)} \\ \bar{P}_2^{(1)} \\ \bar{M}_3^{(1)} \\ \bar{P}_1^{(2)} \\ \bar{P}_2^{(2)} \\ \bar{M}_3^{(2)} \\ \bar{P}_1^{(3)} \\ \bar{P}_2^{(3)} \\ \bar{M}_3^{(3)} \\ \bar{P}_1^{(4)} \\ \bar{P}_2^{(4)} \\ \bar{M}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{M}_3 \\ \bar{P}_4 \\ \bar{P}_5 \\ \bar{M}_6 \\ \bar{P}_7 \\ \bar{P}_8 \\ \bar{M}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{R}_2 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \#1 \\ \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \#4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1^{(1)} \\ \bar{\Delta}_2^{(1)} \\ \bar{\Delta}_3^{(1)} \\ \bar{\Delta}_1^{(2)} \\ \bar{\Delta}_2^{(2)} \\ \bar{\Delta}_3^{(2)} \\ \bar{\Delta}_1^{(3)} \\ \bar{\Delta}_2^{(3)} \\ \bar{\Delta}_3^{(3)} \\ \bar{\Delta}_1^{(4)} \\ \bar{\Delta}_2^{(4)} \\ \bar{\Delta}_3^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ -0.01 \\ 0.01 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \#1 \\ \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \#4 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Δεν έχω αποφασίσει ακόμα πως θα τα μεταχειριστώ

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (1/4)

Η **σύνθεση** του καθολικού μητρώου στιβαρότητας $[\bar{K}]$ του επίπεδου πλαισίου βασίζεται στις εξισώσεις ισορροπίας των κόμβων του (λαμβάνοντας υπόψη το συμβιβαστό των μετακινήσεων τους). Για τη σύνθεση αυτή ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

1. Για κάθε μέλος δικτυώματος υπολογίζεται το καθολικό μητρώο στιβαρότητας με τη βοήθεια της σχέσης: $[\bar{k}^i] = [\Lambda^i_{\mathrm{PF}}]^T [k^i][\Lambda^i_{\mathrm{PF}}]$,

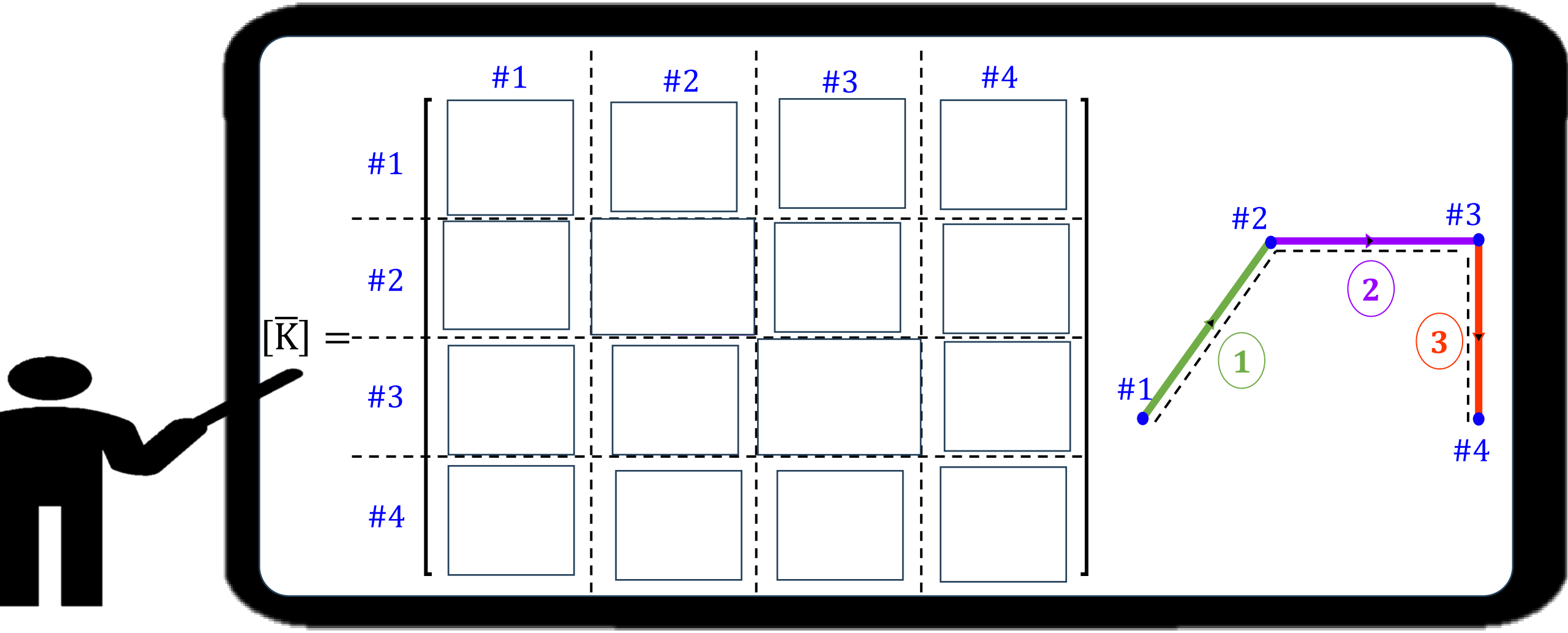
   με τη μορφή: $[\bar{k}^i] = \begin{bmatrix} [\bar{k}_{jj}{}^i] & [\bar{k}_{jk}{}^i] \\ [\bar{k}_{kj}{}^i] & [\bar{k}_{kk}{}^i] \end{bmatrix}$, επιμερίζοντας δηλαδή το μητρώο αυτό σε 4 **υπομητρώα** διάστασης 3x3.
2. Κάθε ένα από τα 4 **υπομητρώα** του μέλους μεταφέρεται στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα.
3. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ολοκληρωθεί **για όλα τα μέλη** του πλαισίου, με την παρατήρηση ότι σε περίπτωση που στην ίδια θέση καταλήξουν περισσότερα του ενός μητρώα, αυτά αθροίζονται.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (2/4)

Πως μεταφέρονται τα καθολικά υπομητρώα μέλους $\left[\bar{k}_{jj}{}^{i}\right]$, $\left[\bar{k}_{jk}{}^{i}\right]$, $\left[\bar{k}_{kj}{}^{i}\right]$, $\left[\bar{k}_{kk}{}^{i}\right]$ στο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα:

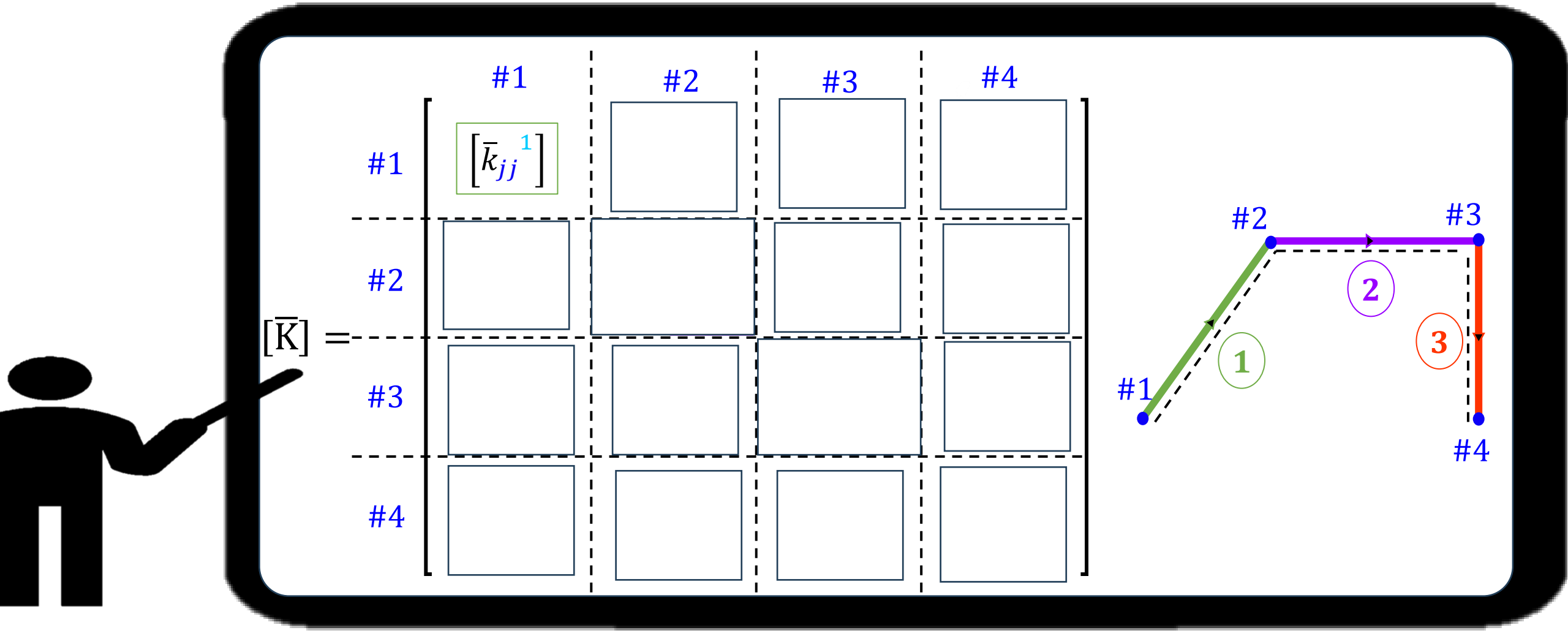
1. Το $\left[\bar{k}_{jj}{}^{i}\right]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβο αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
2. Το $\left[\bar{k}_{jk}{}^{i}\right]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβο αρχής και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.
3. Το $\left[\bar{k}_{kj}{}^{i}\right]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβο πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου αρχής του μέλους.
4. Το $\left[\bar{k}_{kk}{}^{i}\right]$ τοποθετείται στη γραμμή με αριθμό τον αριθμό του κόμβο πέρατος και στήλη με αριθμό τον αριθμό του κόμβου πέρατος του μέλους.

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



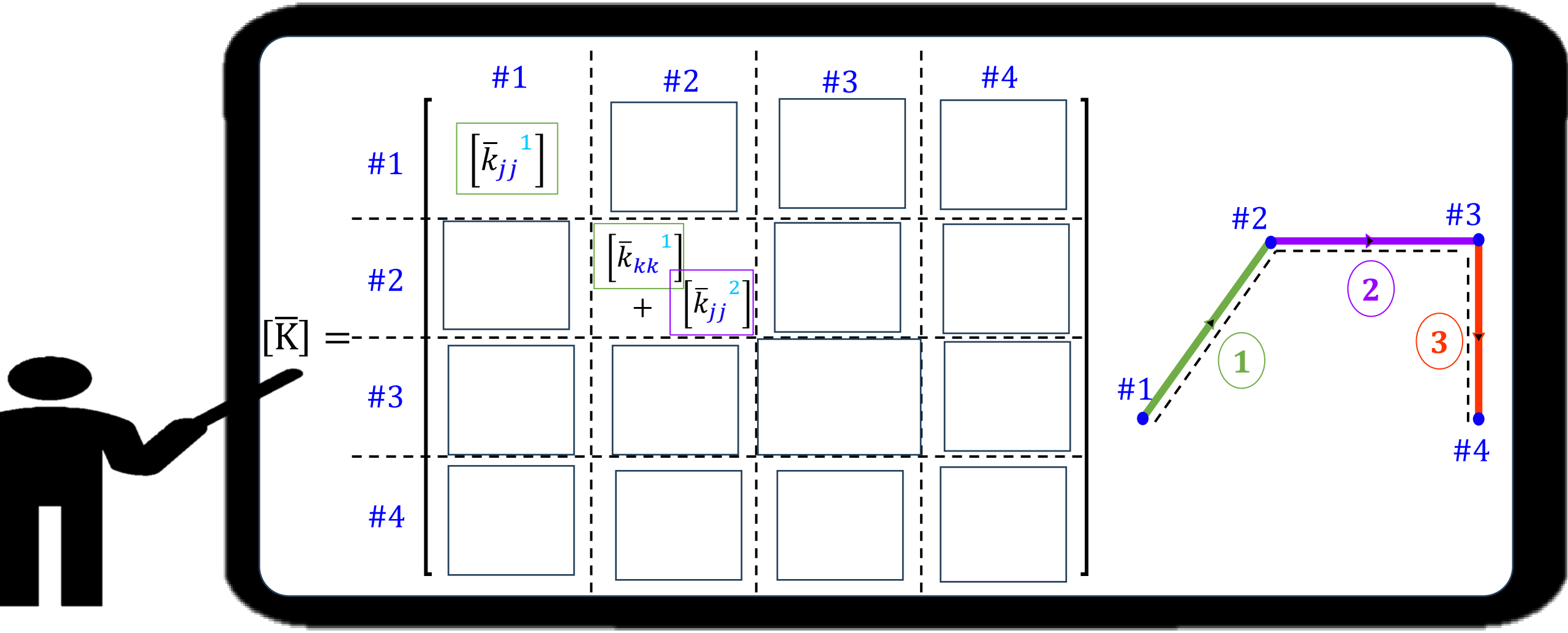
Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

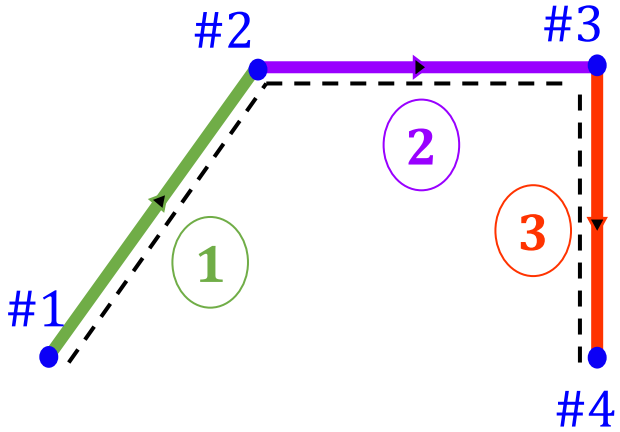
ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

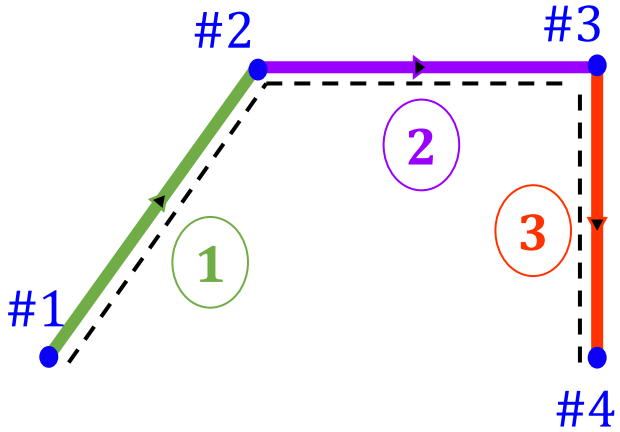
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|cccc}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\#2 & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\#3 & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\#4 & & & &
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

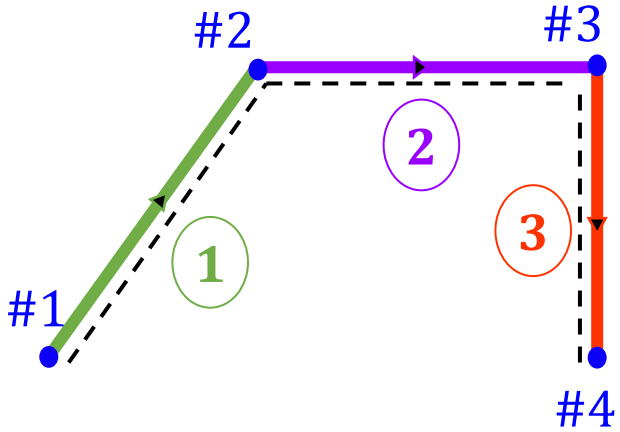
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|cccc}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\#2 & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\#3 & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\#4 & & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

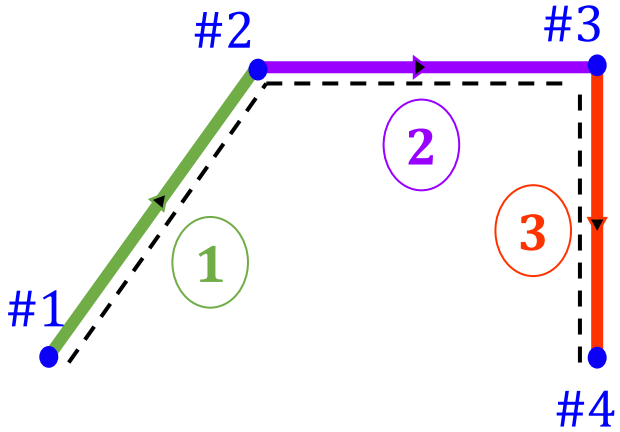
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|cccc}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\#2 & \left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\#3 & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\#4 & & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

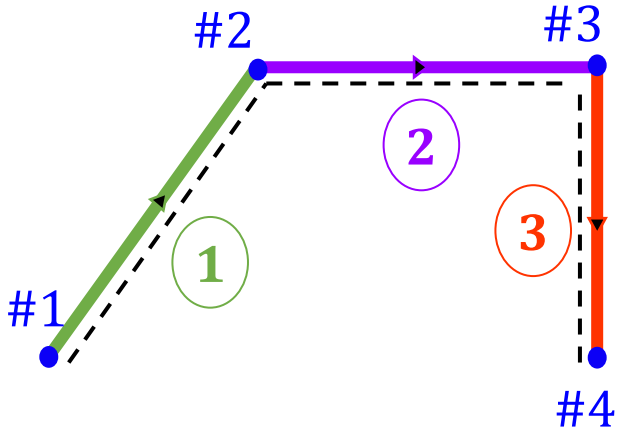
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} \#1 \\ \#2 \\ \#3 \\ \#4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
[\bar{k}_{jj}{}^{1}] & & & \\
[\bar{k}_{kj}{}^{1}] & [\bar{k}_{kk}{}^{1}] + [\bar{k}_{jj}{}^{2}] & & \\
[0]_{3\times3} & & [\bar{k}_{kk}{}^{2}] + [\bar{k}_{jj}{}^{3}] & \\
 & & & [\bar{k}_{kk}{}^{3}]
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

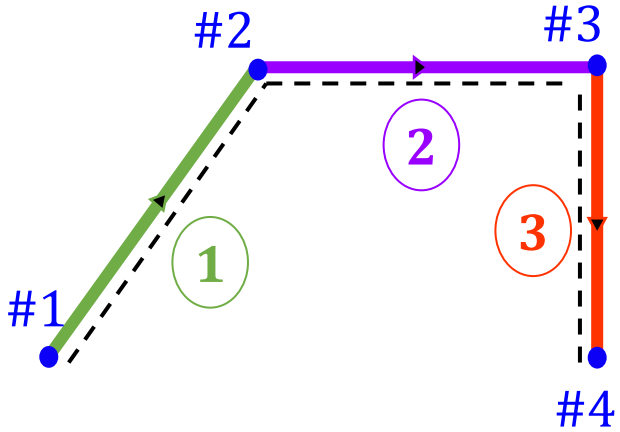
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|cccc}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\#2 & \left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\#3 & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\#4 & & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

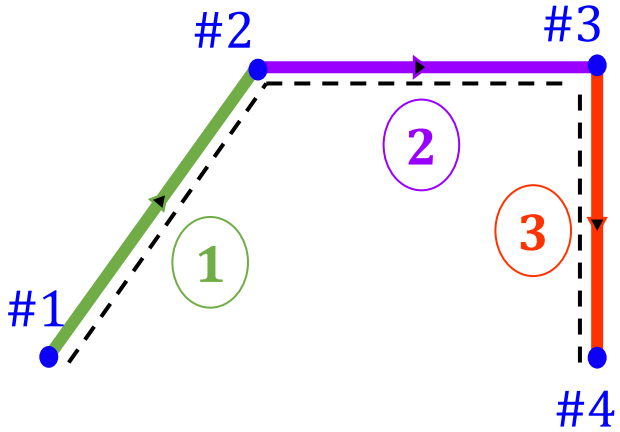
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\hline
\#2 & \left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\hline
\#3 & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\hline
\#4 & [0]_{3\times3} & & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

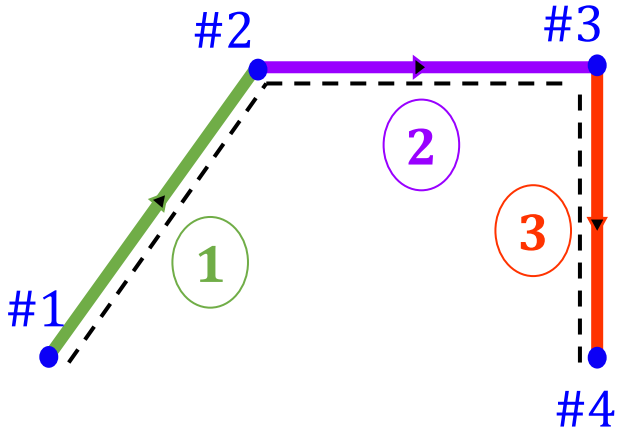
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|c|c|c|c}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\hline
\#2 & \left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\hline
\#3 & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\hline
\#4 & [0]_{3\times3} & [0]_{3\times3} & & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

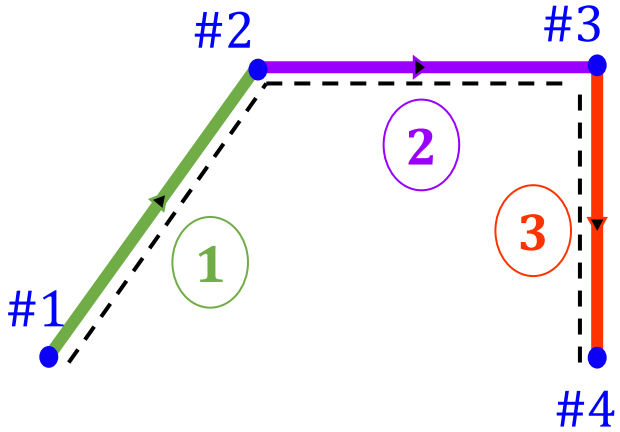
$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \\
\hline
\#1 & \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & & & \\
\hline
\#2 & \left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & & \\
\hline
\#3 & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \\
\hline
\#4 & [0]_{3\times3} & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{3}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right] \\
\hline
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (3/4)

$$
[\bar{K}] = \begin{array}{c} \\ \#1 \\ \#2 \\ \#3 \\ \#4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \#1 & \#2 & \#3 & \#4 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
\left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{jk}{}^{1}\right] & [0]_{3\times3} & [0]_{3\times3} \\
\left[\bar{k}_{kj}{}^{1}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{1}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{jk}{}^{2}\right] & [0]_{3\times3} \\
[0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{2}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{2}\right] + \left[\bar{k}_{jj}{}^{3}\right] & \left[\bar{k}_{jk}{}^{3}\right] \\
[0]_{3\times3} & [0]_{3\times3} & \left[\bar{k}_{kj}{}^{3}\right] & \left[\bar{k}_{kk}{}^{3}\right]
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Σύνθεση Καθολικού Μητρώου Στιβαρότητας Κατασκευής
Global Structural Stiffness Matrix Assembly

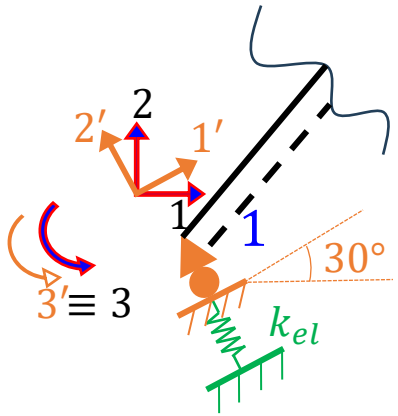
ΒΗΜΑ 9: Καθολικό Μητρώο Στιβαρότητας Φορέα (4/4)

$$[\bar{K}] = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccccccccc} \#1 & & & \#2 & & & \#3 & & & \#4 & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{array}{c} \#1 \\ \#2 \\ \#3 \\ \#4 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{bmatrix} 1.2157 & 1.6082 & -0.0287 & -1.2157 & -1.6082 & -0.0287 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.6082 & 2.1538 & 0.0215 & -1.6082 & -2.1538 & 0.0215 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0287 & 0.0215 & 0.1792 & 0.0287 & -0.0215 & 0.0896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.2157 & -1.6082 & 0.0287 & 4.3657 & 1.6082 & 0.0287 & -3.1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.6082 & -2.1538 & -0.0215 & 1.6082 & 2.1617 & 0.0100 & 0 & -0.0079 & 0.0315 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0287 & 0.0215 & 0.0896 & 0.0287 & 0.0100 & 0.3472 & 0 & -0.0315 & 0.0840 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.1500 & 0 & 0 & 3.1687 & 0 & 0.0560 & -0.0187 & 0 & 0.0560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0079 & -0.0315 & 0 & 4.2079 & -0.0315 & 0 & -4.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0315 & 0.0840 & 0.0560 & -0.0315 & 0.3920 & -0.0560 & 0 & 0.1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0187 & 0 & -0.0560 & 0.0187 & 0 & -0.0560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.2000 & 0 & 0 & 4.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0560 & 0 & 0.1120 & -0.0560 & 0 & 0.2240 \end{bmatrix} \end{array} \times 10^5$$

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (1/5)

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

Μητρώο περιστροφής (μετασχηματισμού) των επικόμβιων δράσεων/μετατοπίσεων του κόμβου 1:



$$[r^1] = \begin{bmatrix} \cos 30° & \sin 30° & 0 \\ -\sin 30° & \cos 30° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ένταξη του μητρώου περιστροφής του κόμβου 2 στο μητρώο περιστροφής του φορέα:

$$[R^1] = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \#1 & & & \#2 & & & \#3 & & & \#4 & & \\ 1' & 2' & 3' & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{array}{c} \#1 \\ \#2 \\ \#3 \\ \#4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8660 & 0.5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5000 & 0.8660 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \end{array}$$

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (2/5)

i) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω λοξής στήριξης

Το τροποποιημένο καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα λόγω λοξής στήριξης του κόμβου 1 δίνεται ως:

$$[\bar{K}_m] = [R^1][\bar{K}][R^1]^T = \times 10^5$$

1η Τροποποίηση Δυσκαμψίας

		#1			#2			#3			#4		
		1′	2′	3′	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#1	1′	2.8430	1.2103	-0.0141	-1.8569	-2.4697	-0.0141	0	0	0	0	0	0
	2′	1.2103	0.5266	0.0330	-0.7849	-1.0612	0.0330	0	0	0	0	0	0
	3′	-0.0141	0.0330	0.1792	0.0287	-0.0215	0.0896	0	0	0	0	0	0
#2	4	-1.8569	-0.7849	0.0287	4.3657	1.6082	0.0287	-3.1500	0	0	0	0	0
	5	-2.4697	-1.0612	-0.0215	1.6082	2.1617	0.0100	0	-0.0079	0.0315	0	0	0
	6	-0.0141	0.0330	0.0896	0.0287	0.0100	0.3472	0	-0.0315	0.0840	0	0	0
#3	7	0	0	0	-3.1500	0	0	3.1687	0	0.0560	-0.0187	0	0.0560
	8	0	0	0	0	-0.0079	-0.0315	0	4.2079	-0.0315	0	-4.2000	0
	9	0	0	0	0	0.0315	0.0840	0.0560	-0.0315	0.3920	-0.0560	0	0.1120
#4	10	0	0	0	0	0	0	-0.0187	0	-0.0560	0.0187	0	-0.0560
	11	0	0	0	0	0	0	0	-4.2000	0	0	4.2000	0
	12	0	0	0	0	0	0	0.0560	0	0.1120	-0.0560	0	0.2240

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (3/5)

ii) Τροποποίηση μητρώου στιβαρότητας λόγω ελαστικής στήριξης

Το υπομητρώο του καθολικού μητρώου του φορέα που αντιστοιχεί στον κόμβο 1 θα τροποποιηθεί ως εξής:

$$[\bar{\mathrm{K}}_{\#1,\#1}] = \left[\bar{k}_{jj}{}^{1}\right] + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{el} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1' \\ 2' \\ 3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1' & 2' & 3' \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bar{k}_{1'1'}{}^{1} & \bar{k}_{1'2'}{}^{1} & \bar{k}_{1'3'}{}^{1} \\ \bar{k}_{2'1'}{}^{1} & \bar{k}_{2'2'}{}^{1} + k_{el} & \bar{k}_{2'3'}{}^{1} \\ \bar{k}_{3'1'}{}^{1} & \bar{k}_{3'2'}{}^{1} & \bar{k}_{3'3'}{}^{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

με: $k_{el} = 0.5EI = 0.5 \times 2.1 \times 10^7 \times 0.0016 = 16800\ \mathrm{kN/m}$

Επομένως το καθολικό μητρώο στιβαρότητας του φορέα τροποποιείται ως:

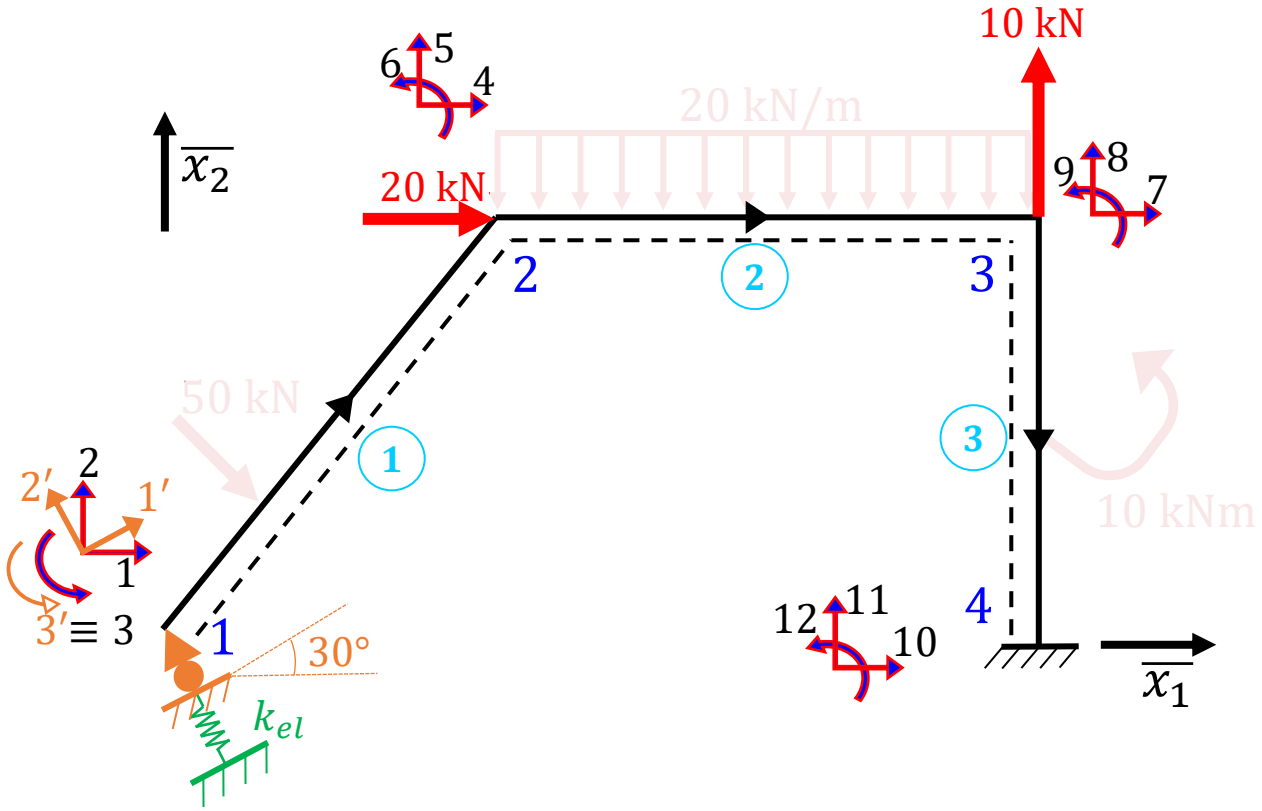
$$[\bar{\mathrm{K}}_{mm}] = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} \#1 & & & \#2 & & & \#3 & & & \#4 & & \\ 1' & 2' & 3' & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{array} \\ \begin{array}{c} \#1 \\ \\ \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \\ \\ \#4 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{bmatrix} 2.8430 & 1.2103 & -0.0141 & -1.8569 & -2.4697 & -0.0141 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2103 & 0.6946 & 0.0330 & -0.7849 & -1.0612 & 0.0330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0330 & 0.1792 & 0.0287 & -0.0215 & 0.0896 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.8569 & -0.7849 & 0.0287 & 4.3657 & 1.6082 & 0.0287 & -3.1500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.4697 & -1.0612 & -0.0215 & 1.6082 & 2.1617 & 0.0100 & 0 & -0.0079 & 0.0315 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0141 & 0.0330 & 0.0896 & 0.0287 & 0.0100 & 0.3472 & 0 & -0.0315 & 0.0840 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.1500 & 0 & 0 & 3.1687 & 0 & 0.0560 & -0.0187 & 0 & 0.0560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0079 & -0.0315 & 0 & 4.2079 & -0.0315 & 0 & -4.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0315 & 0.0840 & 0.0560 & -0.0315 & 0.3920 & -0.0560 & 0 & 0.1120 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0187 & 0 & -0.0560 & 0.0187 & 0 & -0.0560 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.2000 & 0 & 0 & 4.2000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0560 & 0 & 0.1120 & -0.0560 & 0 & 0.2240 \end{bmatrix} \end{array} \times 10^5$$

2η Τροποποίηση Δυσκαμψίας

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (4/5)

iii) Τροποποίηση δράσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες δράσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. $1'$, $2'$ και $3'(\equiv 3)$.



1η Τροποποίηση Δράσεων

$$\{\bar{P}^{nodal}_{m}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}^{(1)}_{1'} \\ \bar{P}^{(1)}_{2'} \\ \bar{M}^{(1)}_{3'} \\ \hline \bar{P}^{(2)}_{1} \\ \bar{P}^{(2)}_{2} \\ \bar{M}^{(2)}_{3} \\ \hline \bar{P}^{(3)}_{1} \\ \bar{P}^{(3)}_{2} \\ \bar{M}^{(3)}_{3} \\ \hline \bar{P}^{(4)}_{1} \\ \bar{P}^{(4)}_{2} \\ \bar{M}^{(4)}_{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_{1'} \\ \bar{P}_{2'} \\ \bar{M}_{3'} \\ \hline \bar{P}_{4} \\ \bar{P}_{5} \\ \bar{M}_{6} \\ \hline \bar{P}_{7} \\ \bar{P}_{8} \\ \bar{M}_{9} \\ \hline \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{M}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 20 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 10 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \#1 \\ \\ \#2 \\ \\ \\ \#3 \\ \\ \\ \#4 \\ \\ \end{matrix}$$

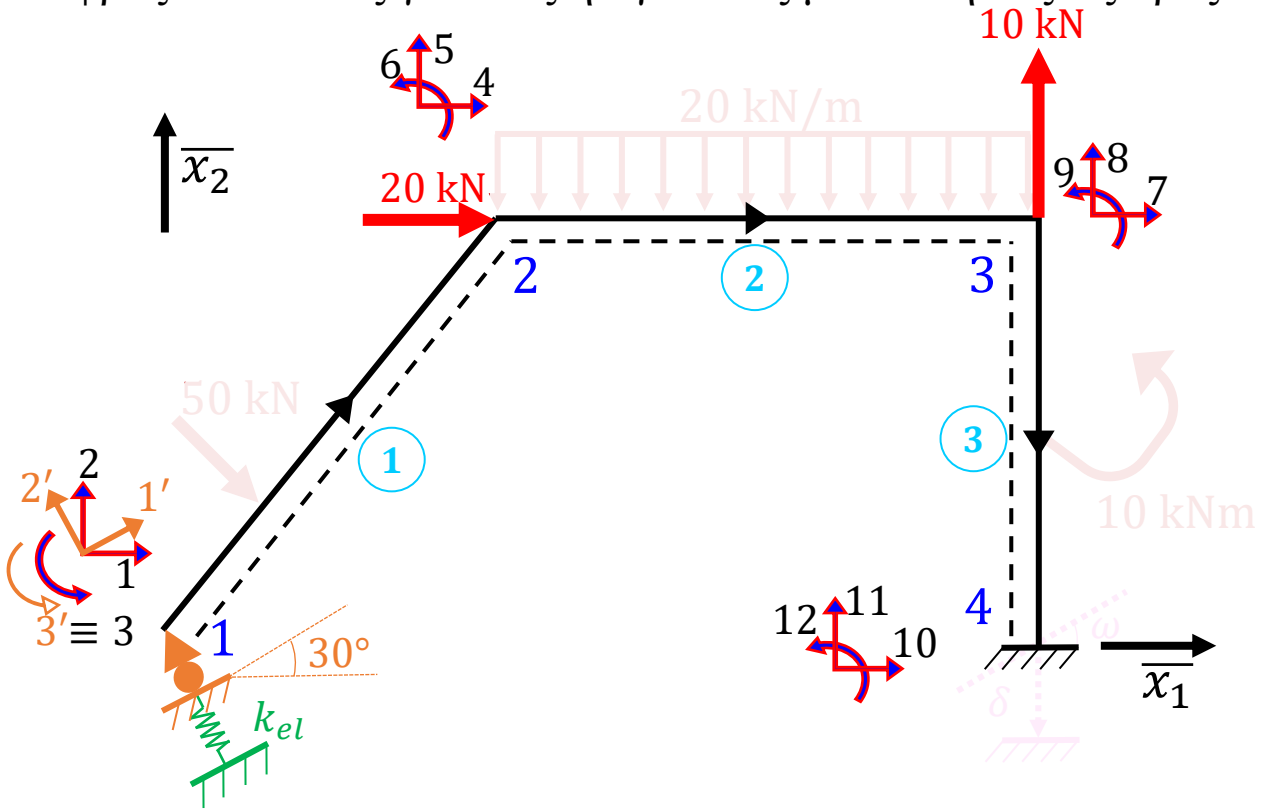
Έχοντας τροποποιήσει πλέον τις δράσεις και λόγω ελαστικής στήριξης, παρατηρώ πως ο β.ε. $2'$ θεωρείται ελεύθερος (δεν έχω αντίδραση) και το άγνωστο μέγεθος θα είναι η μετακίνηση $\bar{\Delta}_{2'}$.

Προσοχή! Δεν ξεχνάω τα ενδιάμεσα φορτία! Θα τα λάβουμε υπόψη μετά.

ΒΗΜΑ 10: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας (5/5)

iv) Τροποποίηση μετακινήσεων λόγω ελαστικής και λοξής στήριξης

Εκφράζω πλέον τις γνωστές ή άγνωστες μετακινήσεις ως προς τους στραμμένους β.ε. $1'$, $2'$ και $3'(\equiv 3)$.



1η Τροποποίηση Μετακινήσεων

$$\{\overline{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta}_{1'}^{(1)} \\ \overline{\Delta}_{2'}^{(1)} \\ \overline{\Delta}_{3'}^{(1)} \\ \hline \overline{\Delta}_{1}^{(2)} \\ \overline{\Delta}_{2}^{(2)} \\ \overline{\Delta}_{3}^{(2)} \\ \hline \overline{\Delta}_{1}^{(3)} \\ \overline{\Delta}_{2}^{(3)} \\ \overline{\Delta}_{3}^{(3)} \\ \hline \overline{\Delta}_{1}^{(4)} \\ \overline{\Delta}_{2}^{(4)} \\ \overline{\Delta}_{3}^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta}_{1'} \\ \overline{\Delta}_{2'} \\ \overline{\Delta}_{3'} \\ \hline \overline{\Delta}_{4} \\ \overline{\Delta}_{5} \\ \overline{\Delta}_{6} \\ \hline \overline{\Delta}_{7} \\ \overline{\Delta}_{8} \\ \overline{\Delta}_{9} \\ \hline \overline{\Delta}_{10} \\ \overline{\Delta}_{11} \\ \overline{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overline{\Delta}_{1'} \\ \overline{\Delta}_{2'} \\ \overline{\Delta}_{3'} \\ \hline \overline{\Delta}_{4} \\ \overline{\Delta}_{5} \\ \overline{\Delta}_{6} \\ \hline \overline{\Delta}_{7} \\ \overline{\Delta}_{8} \\ \overline{\Delta}_{9} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \#1 \\ \\ \#2 \\ \\ \#3 \\ \\ \#4 \end{matrix}$$

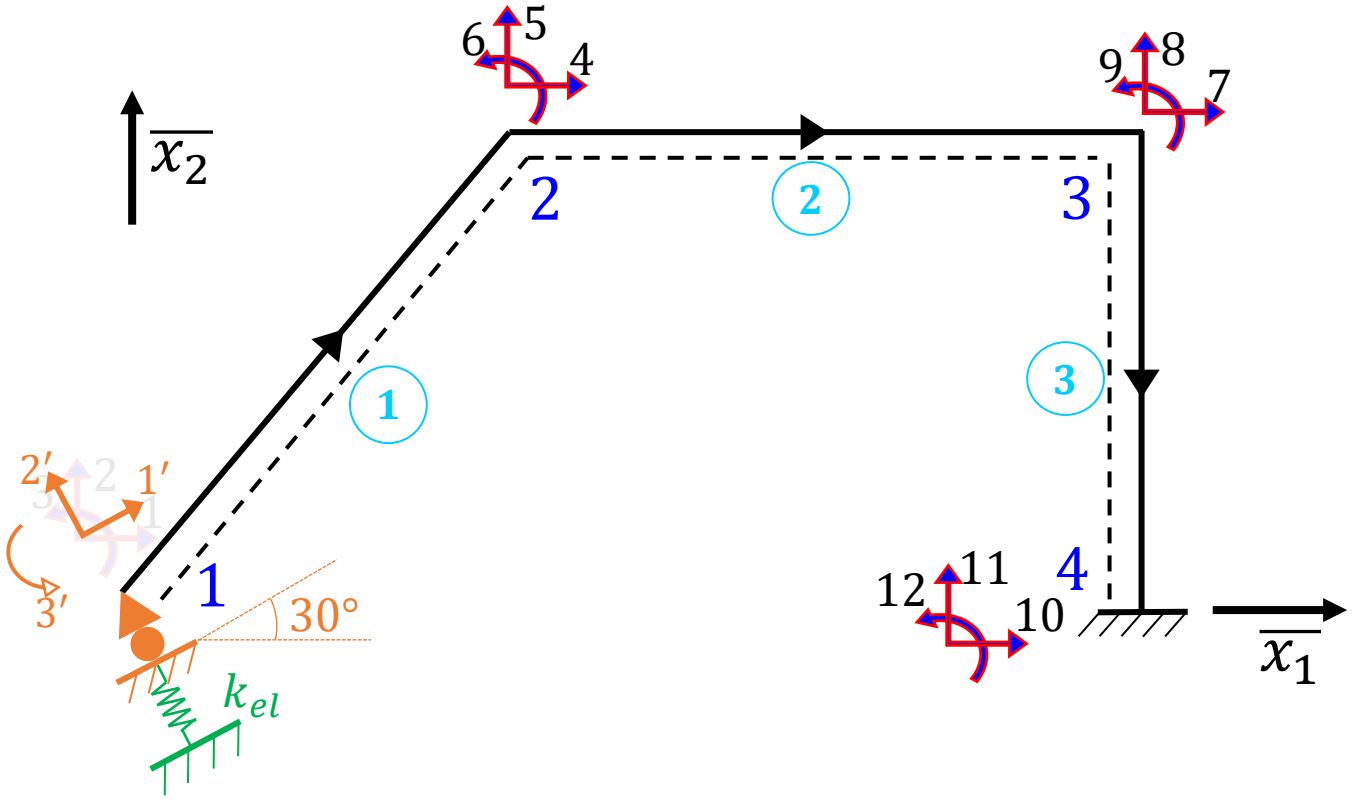
Έχοντας τροποποιήσει πλέον και τις μετακινήσεις, παρατηρώ πως η μετακίνηση $\overline{\Delta}_{2'}$ είναι άγνωστη.

Προσοχή! Τις υποχωρήσεις στήριξης:

- είτε θα τις λάβω υπόψη ως γνωστές μετακινήσεις στο $\{\overline{\Delta}_m\}$.
- είτε θα τις λάβω υπόψη ως ενδιάμεσες φορτίσεις μέσω δράσεων παγίωσης (στη συνέχεια).

ΕΔΩ τις θεωρώ ενδιάμεσες φορτίσεις, επομένως $\overline{\Delta}_{11} = \overline{\Delta}_{12} = 0$

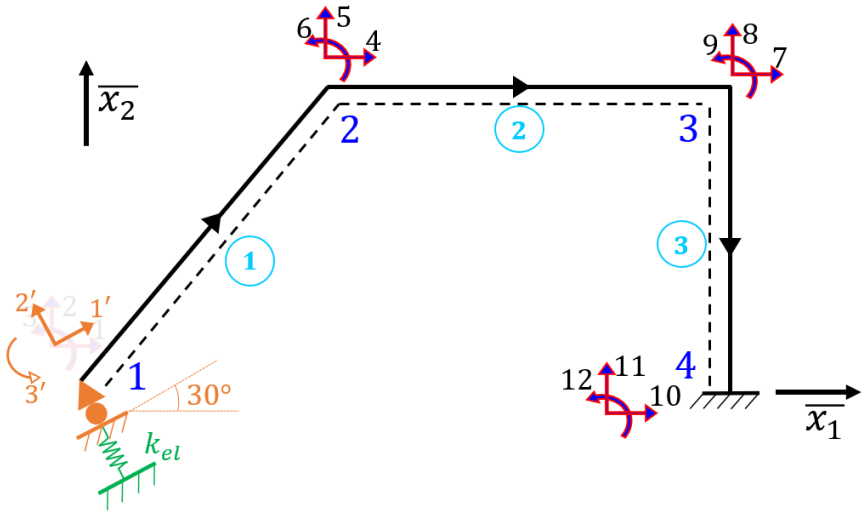
ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω **αναδιάταξης** και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών



$$
\begin{array}{l}
\text{Ελεύθεροι / Free} \\
\text{Δεσμευμένοι / Supported}
\end{array}
\begin{Bmatrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}
=
\underbrace{\left[\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]}_{[V]}
\begin{Bmatrix} 1' \\ 2' \\ 3' \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}
$$

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω **αναδιάταξης** και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(2/4)



Τροποποιημένα (λόγω αναδιάταξης) διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων :

$$\{\bar{P}^{nodal}{}_{mm}\} = [V]\{\bar{P}^{nodal}{}_{m}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \hline \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ \hline \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix}$$

Ελεύθεροι Free

Δεσμευμένοι Supported

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = [V]\{\bar{\Delta}_m\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \hline \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

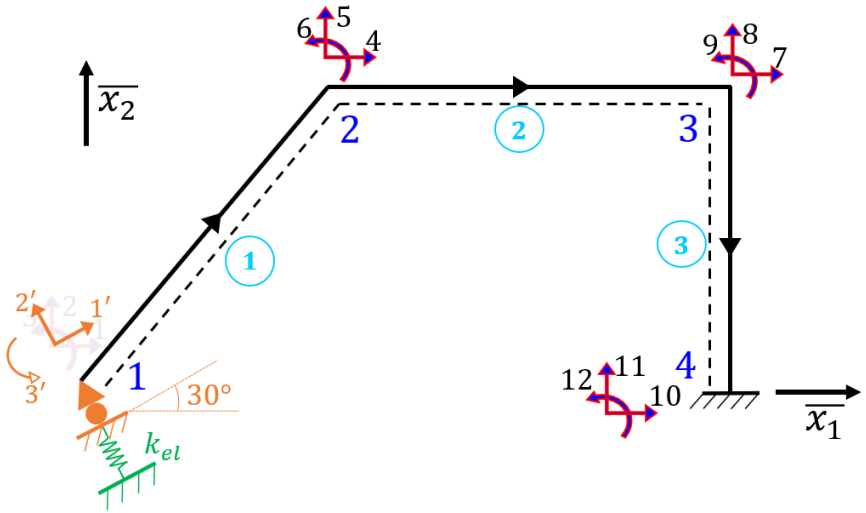
Ελεύθεροι Free

Δεσμευμένοι Supported

2η Τροποποίηση Δράσεων και Μετακινήσεων

ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω **αναδιάταξης** και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

(3/4)



Τροποποιημένο (λόγω αναδιάταξης) καθολικό μητρώο στιβαρότητας φορέα:

$$[\overline{K}_{mmm}] = [V][\overline{K}_{mm}][V]^T = \times 10^5$$

		#1			#2			#3			#4		
		1′	2′	3′	4	5	6	7	8	9	10	11	12
#1	1′	2.8430	1.2103	-0.0141	-1.8569	-2.4697	-0.0141	0	0	0	0	0	0
	2′	1.2103	0.6946	0.0330	-0.7849	-1.0612	0.0330	0	0	0	0	0	0
	3′	-0.0141	0.0330	0.1792	0.0287	-0.0215	0.0896	0	0	0	0	0	0
#2	4	-1.8569	-0.7849	0.0287	4.3657	1.6082	0.0287	-3.1500	0	0	0	0	0
	5	-2.4697	-1.0612	-0.0215	1.6082	2.1617	0.0100	0	-0.0079	0.0315	0	0	0
	6	-0.0141	0.0330	0.0896	0.0287	0.0100	0.3472	0	-0.0315	0.0840	0	0	0
#3	7	0	0	0	-3.1500	0	0	3.1687	0	0.0560	-0.0187	0	0.0560
	8	0	0	0	0	-0.0079	-0.0315	0	4.2079	-0.0315	0	-4.2000	0
	9	0	0	0	0	0.0315	0.0840	0.0560	-0.0315	0.3920	-0.0560	0	0.1120
#4	10	0	0	0	0	0	0	-0.0187	0	-0.0560	0.0187	0	-0.0560
	11	0	0	0	0	0	0	0	-4.2000	0	0	4.2000	0
	12	0	0	0	0	0	0	0.0560	0	0.1120	-0.0560	0	0.2240

3η Τροποποίηση Δυσκαμψίας

$$\begin{bmatrix} [\overline{K}_{ff}] & [\overline{K}_{fs}] \\ [\overline{K}_{sf}] & [\overline{K}_{ss}] \end{bmatrix}$$

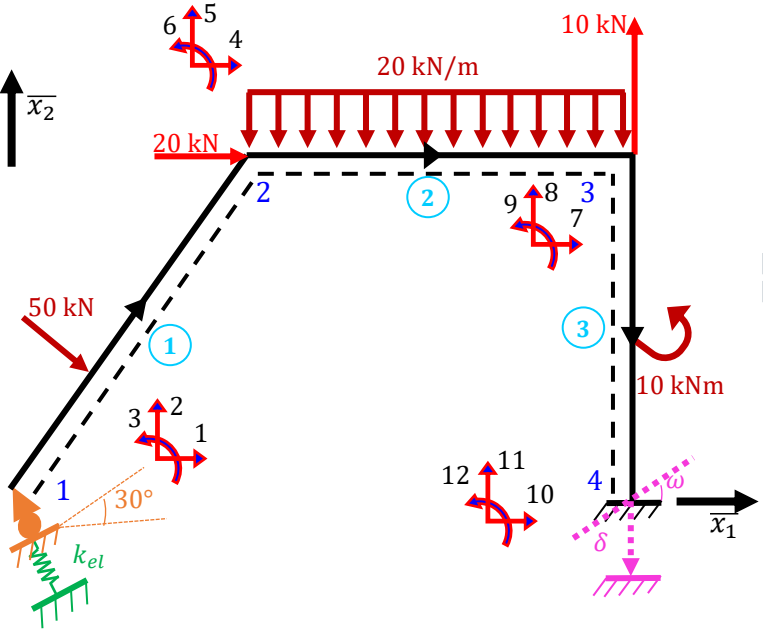
*ΒΗΜΑ 11: Τροποποίηση Σχέσης Στιβαρότητας λόγω **αναδιάταξης** και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών*

Εάν είχα μόνο επικόμβια φορτία, σε αυτό το στάδιο θα μπορούσα πλέον να επιλύσω εξίσωση ισορροπίας (σχέση στιβαρότητας) και να υπολογίσω τα άγνωστα μεγέθη:

$$\begin{Bmatrix} \bar{P}_f \\ \bar{P}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ff}] & [\bar{K}_{fs}] \\ [\bar{K}_{sf}] & [\bar{K}_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_f \\ \bar{\Delta}_s \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{1. Επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε.} \\ \bar{\Delta}_f = [\bar{K}_{ff}]^{-1}\left(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}\right) \\ \text{2. Επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε.} \\ \{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} \end{cases}$$

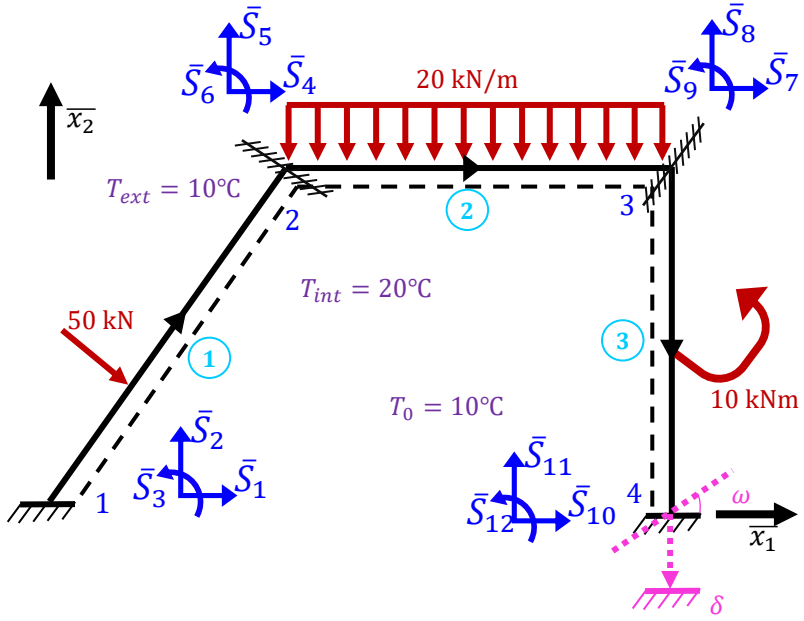
ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

i) Κατασκευή **Παγιωμένου** και **Ισοδύναμου** Φορέα



ΑΡΧΙΚΟΣ ΦΟΡΕΑΣ

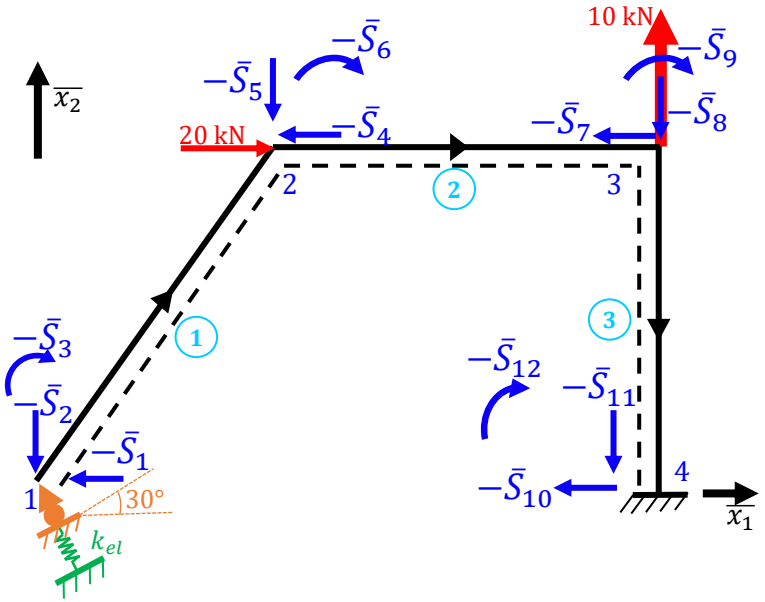
=



ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΣ ΦΟΡΕΑΣ

- Μηδενικές μετατοπίσεις κόμβων
- Δράσεις παγίωσης κόμβων
- Ενδιάμεσα φορτία

+

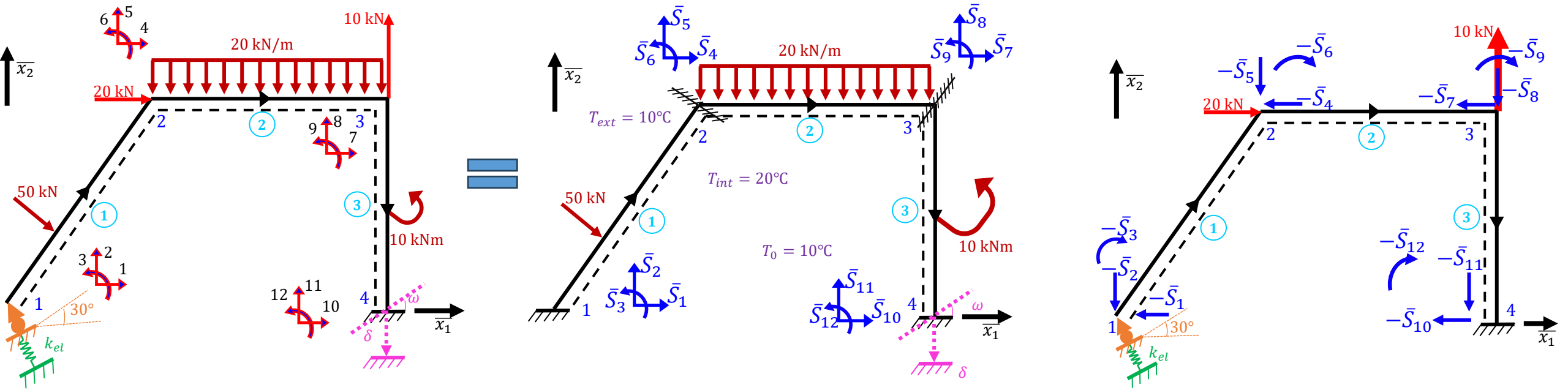


ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΣ ΦΟΡΕΑΣ

- Επικόμβια φορτία αρχικού φορέα
- Ισοδύναμες δράσεις → ίσες και αντίθετες από τις δράσεις παγίωσης

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

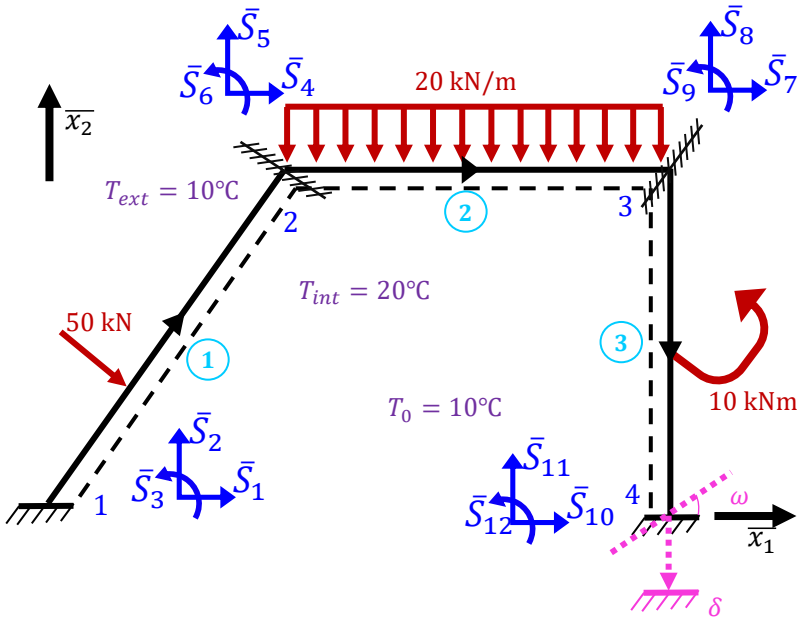
i) Κατασκευή **Παγιωμένου** και **Ισοδύναμου** Φορέα



- Οι άγνωστες επικόμβιες **μετατοπίσεις** του πραγματικού (αρχικού) φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **αντιδράσεις** του πραγματικού φορέα ταυτίζονται με αυτές του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.
- Οι άγνωστες **εσωτερικές δράσεις** των μελών του πραγματικού φορέα προκύπτουν ως επαλληλία των αντίστοιχων δράσεων του ΠΑΓΙΩΜΕΝΟΥ και του ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ φορέα.

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων, β) θερμοκρασιακής μεταβολής, (γ) υποχώρησης στήριξης)



Φόρτιση \ Μέλος	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✓	✓	✓
Υποχώρηση Στήριξης	✗	✗	✓

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων, β) θερμοκρασιακής μεταβολής, γ) υποχώρησης στήριξης

Θυμηθείτε και σωθείτε !

- Δράσεις παγίωσης αμφίπακτης
- Ένταση από θερμοκρασιακή μεταβολή

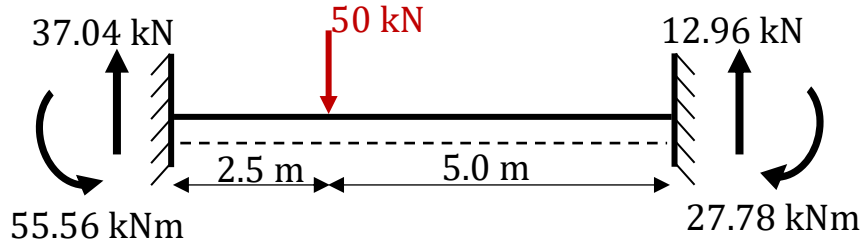
Δείτε το παράρτημα στο τέλος για απόδειξη των σχέσεων

Τα κεκλιμένα μέλη τα απεικονίζω οριζόντια. Έτσι κι αλλιώς σε τοπικό σύστημα είμαι, αμφίπακτα είναι, άρα όπως θέλω μπορώ να τα «δω».

Φόρτιση \ Μέλος	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✓	✓	✓
Υποχώρηση Στήριξης	×	×	✓

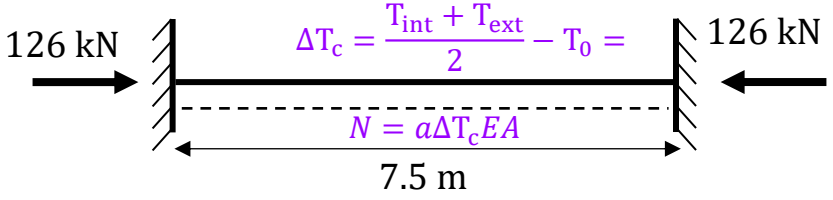
ΜΕΛΟΣ 1

Ενδιάμεσο Φορτίο

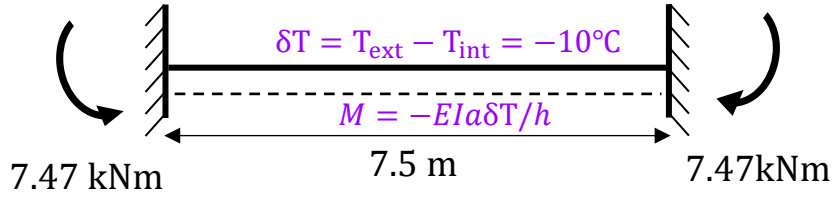


Θερμοκρασιακή Μεταβολή

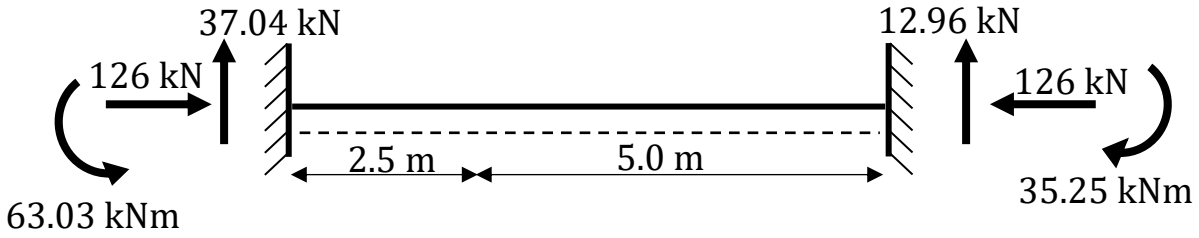
Αξονική Καταπόνηση



Καμπτική Καταπόνηση



Άρα συνολικά:



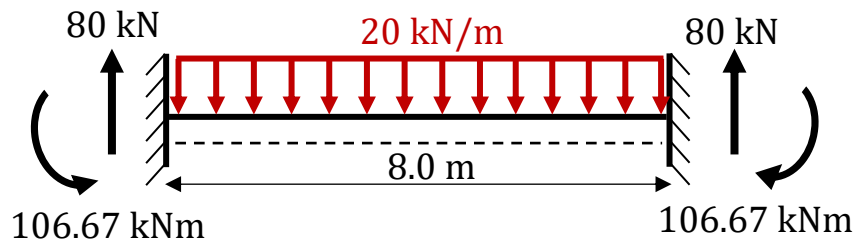
$$\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{1j}\} \\ \{A_r^{1k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 37.04 \\ 63.03 \\ -126 \\ 12.96 \\ -35.25 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων, β) θερμοκρασιακής μεταβολής, γ) υποχώρησης στήριξης

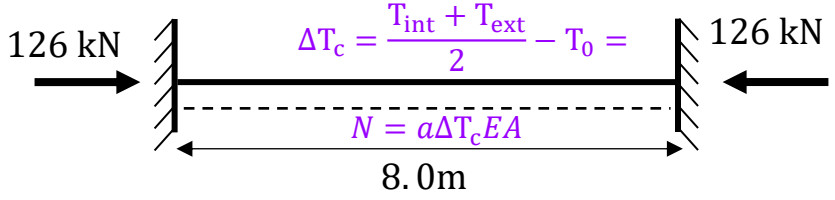
ΜΕΛΟΣ 2

Ενδιάμεσο Φορτίο

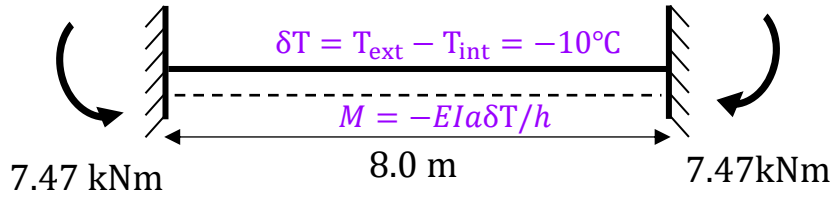


Θερμοκρασιακή Μεταβολή

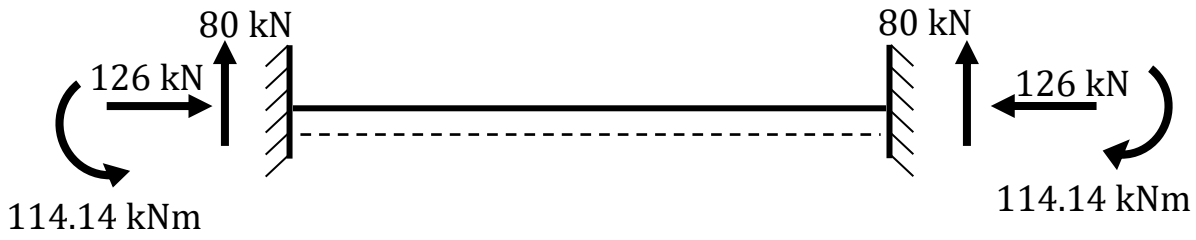
Αξονική Καταπόνηση



Καμπτική Καταπόνηση



Άρα συνολικά:



$$\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{2j}\} \\ \{A_r^{2k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{Bmatrix}$$

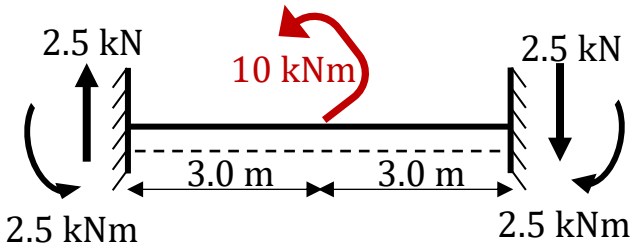
Φόρτιση \ Μέλος	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✓	✓	✓
Υποχώρηση Στήριξης	×	×	✓

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων, β) θερμοκρασιακής μεταβολής, γ) υποχώρησης στήριξης

ΜΕΛΟΣ 3

Ενδιάμεσο Φορτίο

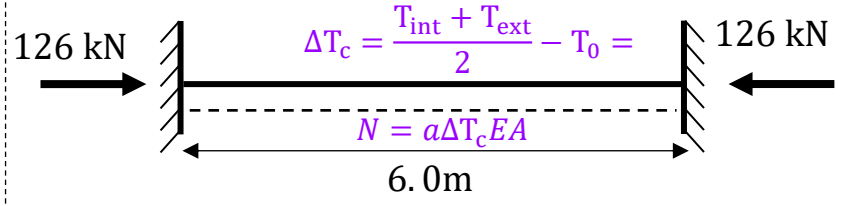


Τα κεκλιμένα μέλη τα απεικονίζω οριζόντια. Έτσι κι αλλιώς σε τοπικό σύστημα είμαι, αμφίπακτα είναι, άρα όπως θέλω μπορώ να τα «δω».

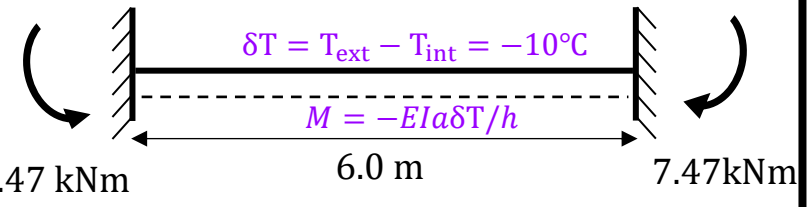
Φόρτιση \ Μέλος	1	2	3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✓	✓	✓
Υποχώρηση Στήριξης	×	×	✓

Θερμοκρασιακή Μεταβολή

Αξονική Καταπόνηση

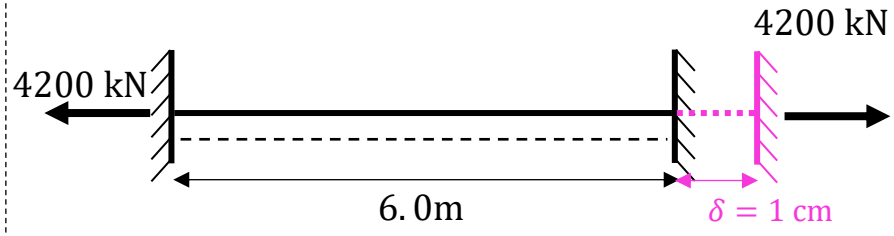


Καμπτική Καταπόνηση

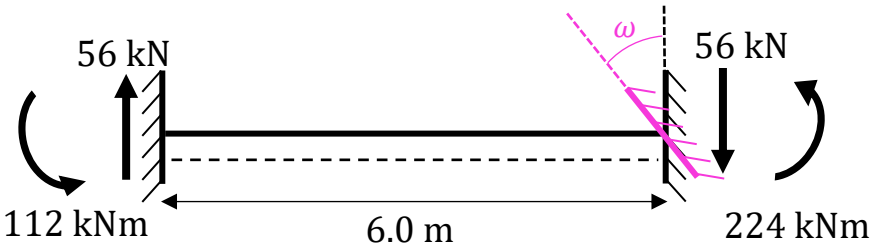


Υποχώρηση Στήριξης

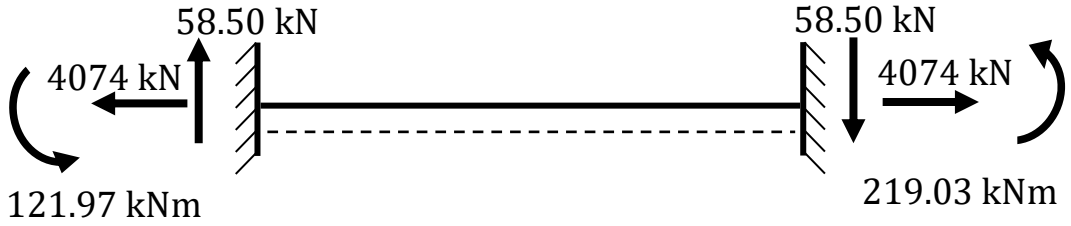
δ



ω



Άρα συνολικά:



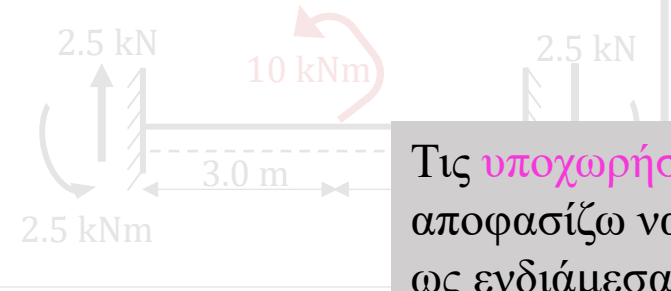
$$\{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^{3j}\} \\ \{A_r^{3k}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4074 \\ 58.50 \\ 121.97 \\ 4074 \\ -58.50 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ii) Υπολογισμός τοπικών ακραίων δράσεων παγιωμένου φορέα λόγω:
α) ενδιάμεσων φορτίων, β) θερμοκρασιακής μεταβολής, γ) υποχώρησης στήριξης

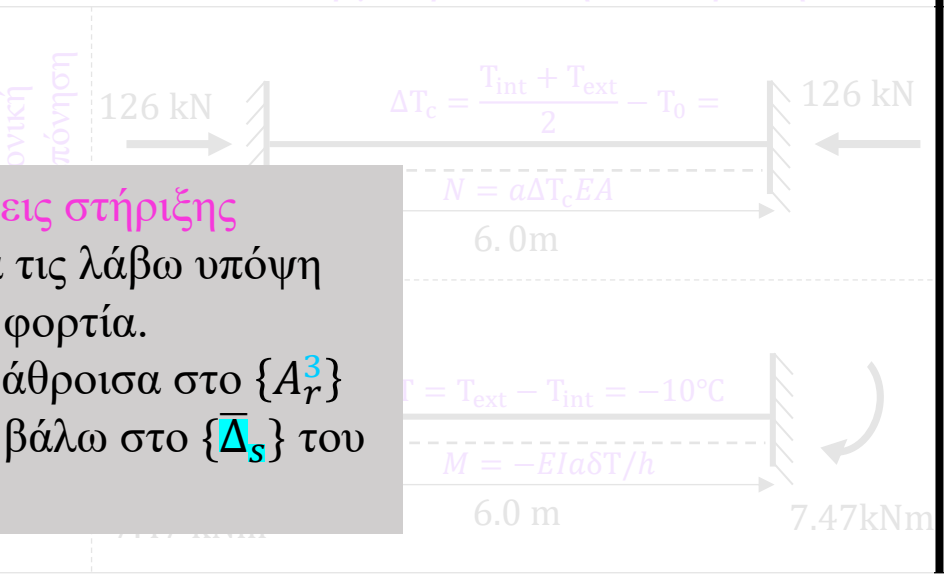
ΜΕΛΟΣ 3

Ενδιάμεσο Φορτίο



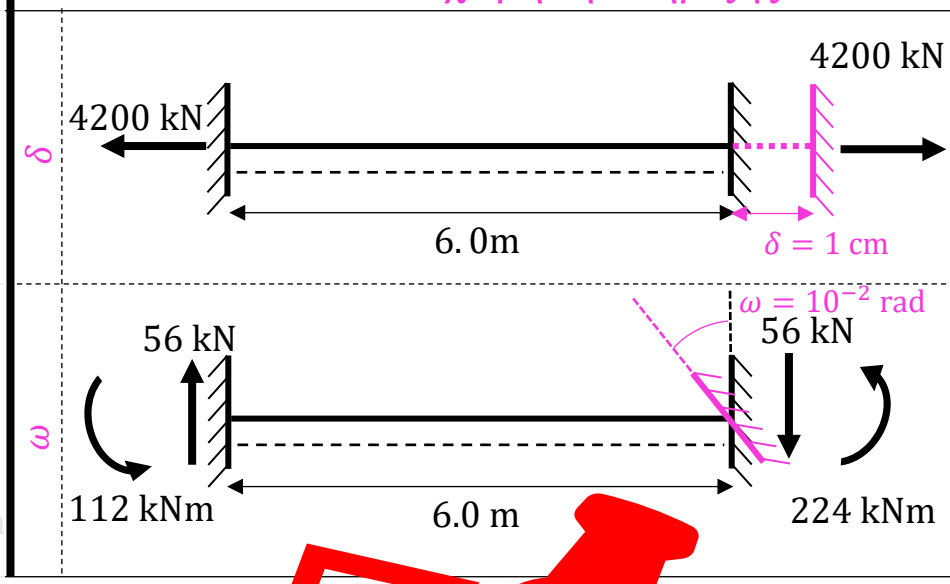
Τα κεκλιμένα μέλη τα
οριζόντια. Έτσι κι αλλιώς
σύστημα είμαι, αμφίπακτα
όπως θέλω μπορώ να τα «δω

Θερμοκρασιακή Μεταβολή



Τις υποχωρήσεις στήριξης αποφασίζω να τις λάβω υπόψη ως ενδιάμεσα φορτία.
Επομένως τις άθροισα στο $\{A_r^3\}$ και δεν θα τις βάλω στο $\{\bar{\Delta}_s\}$ του $\{\bar{\Delta}_{mm}\}$.

Υποχώρηση Στήριξης



Φόρτιση \ Μέλος			3
Ενδιάμεσο Φορτίο	✓	✓	✓
Θερμοκρασιακή Μεταβολή	✓	✓	✓
Υποχώρηση Στήριξης	✓	✓	✓

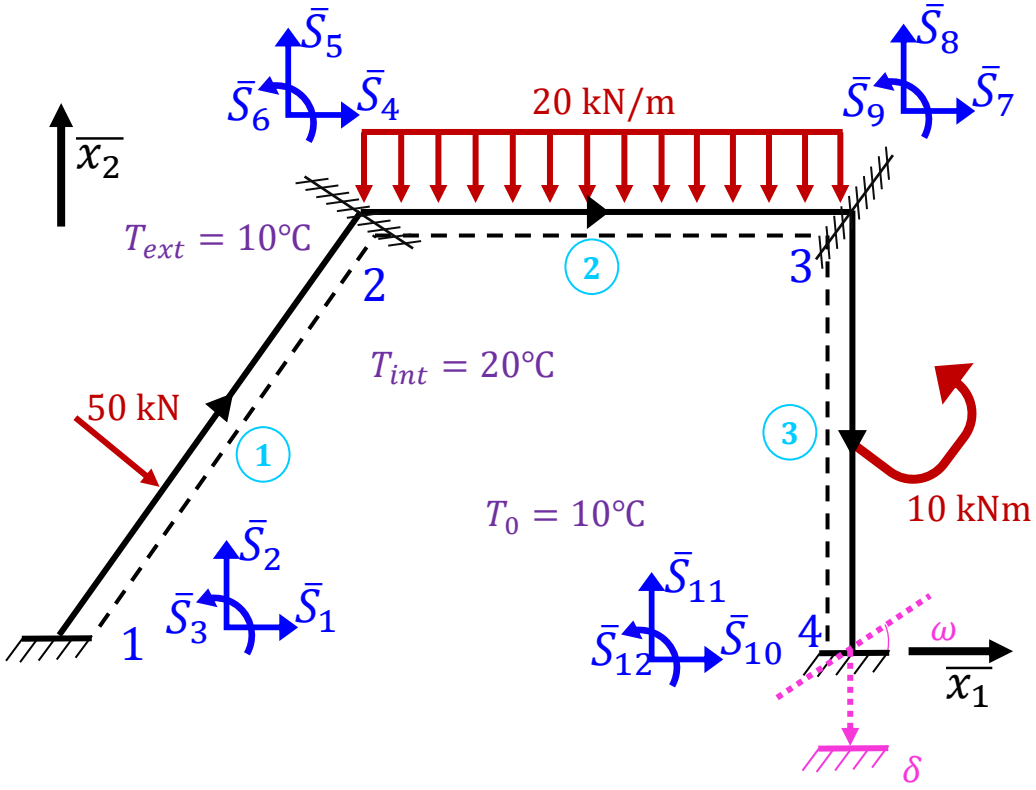
Άρα συνολικά:

$$\{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} \{A_r^3/2\} \\ \{A_r^3/2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4074 \\ 58.50 \\ 121.97 \\ 4074 \\ -58.50 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

Για τον υπολογισμό, χρησιμοποίησα τους δείκτες στιβαρότητας του μέλους !

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iii) Μετασχηματισμός των ακραίων δράσεων του παγιωμένου φορέα στο καθολικό σύστημα



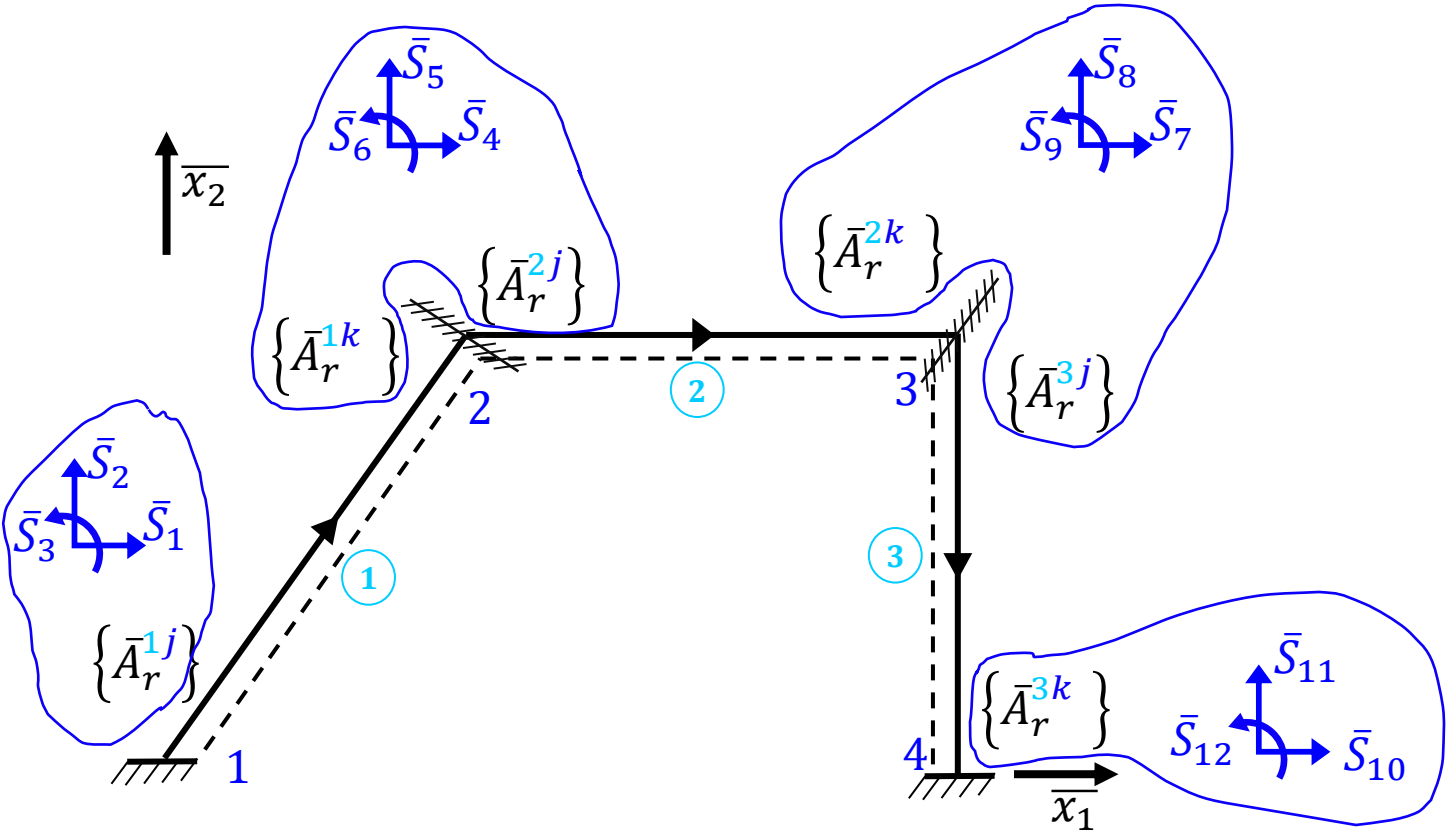
$$\{\bar{A}_r^1\} = [\Lambda_{\mathrm{PF}}^1]\{A_r^1\} = \begin{Bmatrix} 45.97 \\ 123.02 \\ 63.02 \\ -85.97 \\ -93.02 \\ -35.25 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^2\} = [\Lambda_{\mathrm{PF}}^2]\{A_r^2\} = \begin{Bmatrix} 126 \\ 80 \\ 114.14 \\ -126 \\ 80 \\ -114.14 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{A}_r^3\} = [\Lambda_{\mathrm{PF}}^3]\{A_r^3\} = \begin{Bmatrix} 58.50 \\ 4074 \\ 121.97 \\ -58.50 \\ -4074 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

iv) Υπολογισμός δράσεων παγίωσης στους κόμβους



$$\{\bar{S}^{(1)}\} = \{\bar{A}_r^{1j}\} = \begin{Bmatrix} 45.97 \\ 123.02 \\ 63.02 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^{(2)}\} = \{\bar{A}_r^{1k}\} + \{\bar{A}_r^{2j}\} = \begin{Bmatrix} 40.03 \\ -13.02 \\ 78.89 \end{Bmatrix}$$

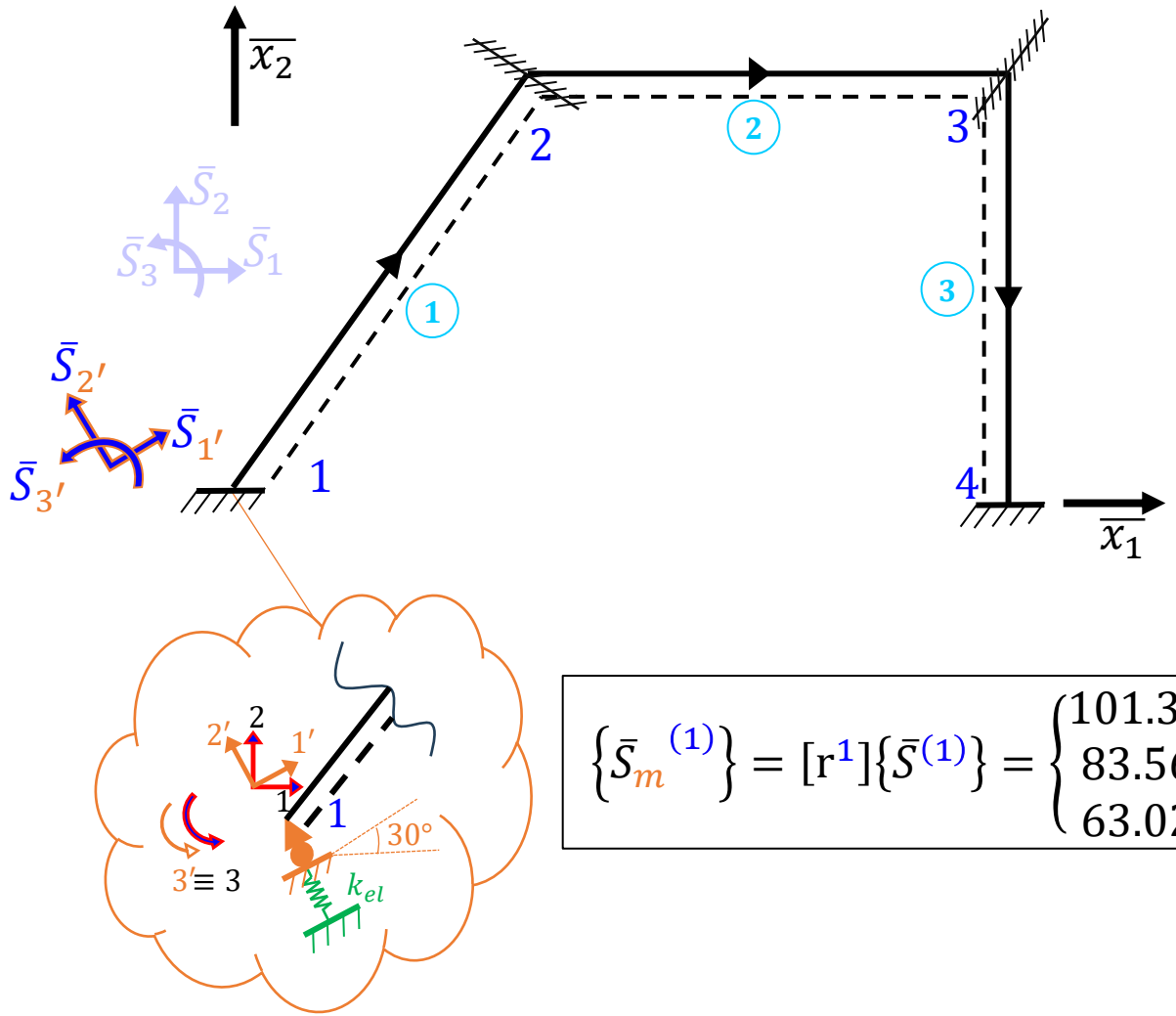
$$\{\bar{S}^{(3)}\} = \{\bar{A}_r^{2k}\} + \{\bar{A}_r^{3j}\} = \begin{Bmatrix} -67.50 \\ 4154 \\ 7.83 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{S}^{(4)}\} = \{\bar{A}_r^{3k}\} = \begin{Bmatrix} -58.50 \\ -4074 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

(Τα ενδιάμεσα φορτία του παγιωμένου φορέα παραλείπονται εδώ χάριν απλότητας του σχήματος.)

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

ν) Τροποποίηση δράσεων παγίωσης λόγω λοξής στήριξης



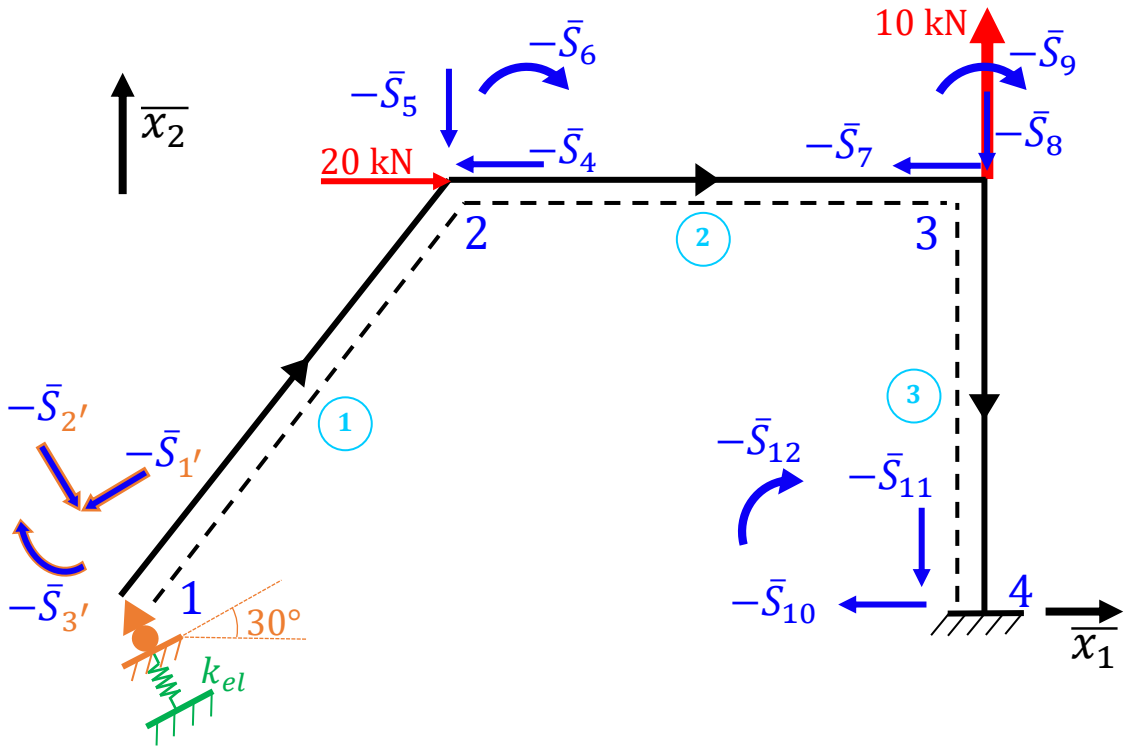
$$\left\{\bar{S}_m{}^{(1)}\right\} = [\mathrm{r}^1]\{\bar{S}^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 101.32 \\ 83.56 \\ 63.02 \end{Bmatrix}$$

Ομαδοποιόντας λοιπόν τα διανύσματα δράσεων παγίωσης των κόμβων σε ένα διάνυσμα με τις δράσεις παγίωσης όλου του φορέα έχουμε:

$$\{\bar{S}_m\} = \begin{Bmatrix} \left\{\bar{S}_m{}^{(1)}\right\} \\ \{\bar{S}^{(2)}\} \\ \{\bar{S}^{(3)}\} \\ \{\bar{S}^{(4)}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 101.32 \\ 83.56 \\ 63.02 \\ 40.03 \\ -13.02 \\ 78.89 \\ -67.50 \\ 4154 \\ 7.83 \\ -58.50 \\ -4074 \\ 219.03 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων ισοδύναμου φορέα (1/2)



Στον ισοδύναμο φορέα ασκούνται:

1. Οι επικόμβιες δράσεις του πραγματικού φορέα (με ότι τροποιήσεις έχουν υποστεί): $\{\bar{\boldsymbol{P}}^{nodal}{}_{mm}\}$
2. Οι ισοδύναμες δράσεις που είναι **ίσες και αντίθετες** από τις δράσεις παγίωσεις (με ότι τροποποιήσεις έχουν υποστεί): $-\{\bar{\boldsymbol{S}}_m\}$

Επομένως, το διάνυσμα επικόμβιων δράσεων του ισοδύναμου φορέα δίδεται ως:

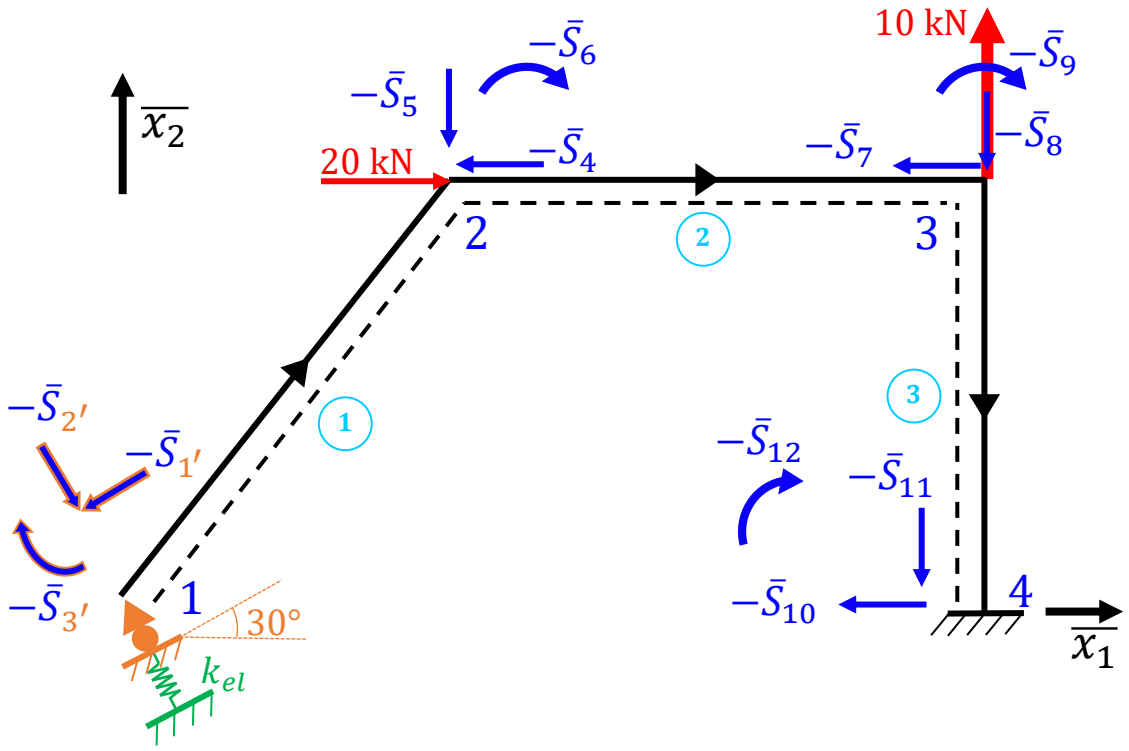
$$\{\bar{P}_m\} = \{\bar{P}^{nodal}{}_m\} - \{\bar{S}_m\}$$

και με την τροποποίηση λόγω αναδιάταξης:

$$\{\bar{P}_{mm}\} = \{\bar{P}^{nodal}{}_{mm}\} - \{\bar{S}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{\bar{P}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -101.32 \\ -83.56 \\ -63.02 \\ 20 - 40.03 \\ 13.02 \\ -78.89 \\ 67.50 \\ 10 - 4154 \\ -7.83 \\ \bar{R}_{10} + 58.50 \\ \bar{R}_{11} + 4074 \\ \bar{R}_{12} - 219.03 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vi) Διανύσματα επικόμβιων δράσεων και μετακινήσεων ισοδύναμου φορέα (2/2)



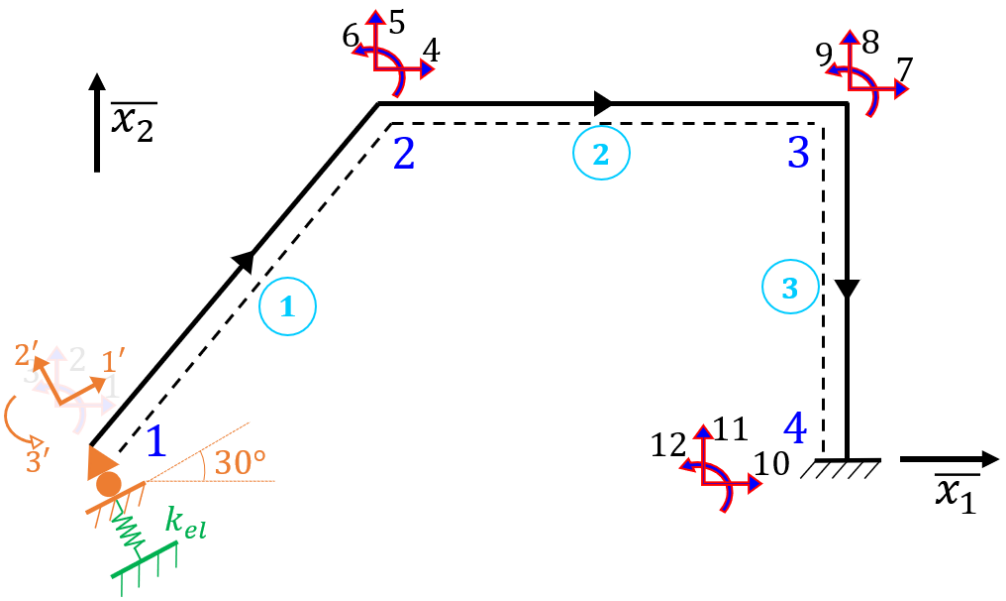
Το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του ισοδύναμου φορέα ταυτίζεται με αυτό του αρχικού φορέα:

$$\{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{\Delta}_f\} \\ \{\bar{\Delta}_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{\Delta}_{10} \\ \bar{\Delta}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Έχουν τεθεί μηδέν καθώς οι υποχωρήσεις στήριξης έχουν ληφθεί υπόψη ως ενδιάμεσες φορτίσεις στον παγιωμένο φορέα

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

vii) Υπολογισμός αγνώστων δράσεων και μετακινήσεων



Οι επικόμβιες μετακινήσεις κατά τους ελεύθερους β.ε. υπολογίζονται ως:

$$\{\bar{\Delta}_f\} = [\bar{K}_{ff}]^{-1}(\{\bar{P}_f\} - [\bar{K}_{fs}]\{\bar{\Delta}_s\}) = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_{1'} \\ \bar{\Delta}_{2'} \\ \bar{\Delta}_{3'} \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2563 \\ -0.0040 \\ -0.0320 \\ -0.1116 \\ -0.2125 \\ -0.0028 \\ -0.1113 \\ -0.0100 \\ -0.0314 \end{Bmatrix}$$

Οι επικόμβιες δράσεις κατά τους δεσμευμένους β.ε. υπολογίζονται ως:

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{K}_{sf}]\{\bar{\Delta}_f\} + [\bar{K}_{ss}]\{\bar{\Delta}_s\} = \begin{Bmatrix} 32.0816 \\ 4195.8349 \\ -271.9696 \end{Bmatrix}$$

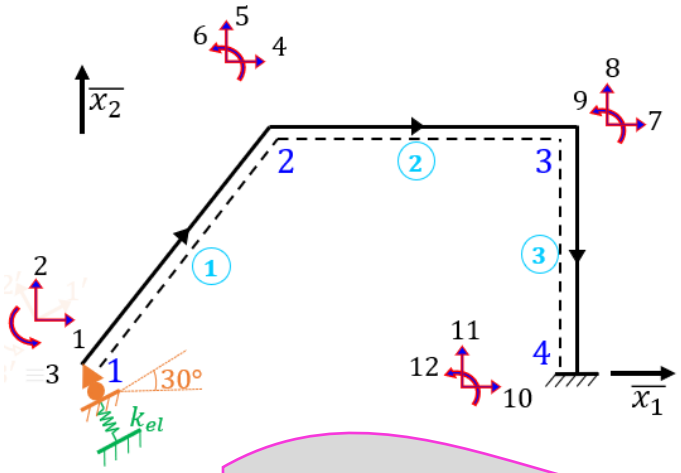
ΠΡΟΣΟΧΗ! Για να υπολογίσω τις αντιδράσεις στις στηρίξεις:

$$\{\bar{P}_s\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{10} + 58.50 \\ \bar{R}_{11} + 4074 \\ \bar{R}_{12} - 219.03 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{R}_{10} \\ \bar{R}_{11} \\ \bar{R}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26.4184 \\ 121.8349 \\ -52.9363 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 12: Επίλυση πλαισίου υποβαλλόμενου σε ενδιάμεση φόρτιση και υπολογισμός αγνώστων μεγεθών

viii) Μεταφορά των μετακινήσεων της λοξής στήριξης στο καθολικό σύστημα

Πρακτικά πρέπει να αρχίσουμε να αναιρούμε τις διάφορες τροποποιήσεις που κάναμε προκειμένου να διατυπώσουμε τα μεγέθη που αφορούν τον φορέα στο καθολικό σύστημα.



Με γνωστό πλέον το $\{\bar{\Delta}_f\}$, το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων προ-αναδιάταξης είναι:

$$\{\bar{\Delta}_m\} = [V]^{\mathrm{T}}\{\bar{\Delta}_{mm}\}, \text{ όπου } \{\bar{\Delta}_{mm}\} = \begin{Bmatrix}\{\bar{\Delta}_f\}\\ \{\bar{\Delta}_s\}\end{Bmatrix}.$$

Έπειτα αναιρώ τη στροφή των β.ε. του κόμβου 1:

$$\{\bar{\Delta}\} = [R^1]^{\mathrm{T}}\{\bar{\Delta}_m\}$$

Επιστρέψαμε λοιπόν στη μορφή που έχει το διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων στο ΒΗΜΑ 8.

$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix}\bar{\Delta}_1\\ \bar{\Delta}_2\\ \bar{\Delta}_3\\ \bar{\Delta}_4\\ \bar{\Delta}_5\\ \bar{\Delta}_6\\ \bar{\Delta}_7\\ \bar{\Delta}_8\\ \bar{\Delta}_9\\ \bar{P}_{10}\\ \bar{P}_{11}\\ \bar{\Delta}_{12}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-0.2200\\ -0.1316\\ -0.0320\\ -0.1116\\ -0.2125\\ -0.0028\\ -0.1113\\ -0.0100\\ 0.0314\\ 0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

Τώρα εδώ μπερδεύει λίγο το πράγμα...
Στο $\{\bar{\Delta}\}$ θέτω τις μετακινήσεις των β.ε. 11 και 12 μηδενικές. Αυτό γιατί έχω λάβει υπόψη τις υποχωρήσεις της στήριξης ως ενδιάμεσα φορτία. Αν τις έθετα ίσες με τις τιμές των υποχωρήσεων, μετά στο ΒΗΜΑ 13, στην επαλληλία παγιωμένου και ισοδύναμου φορέα, για τον υπολογισμό των τοπικών ακραίων των μελών θα είχα λάθος αποτελέσματα αφού θα είχα λάβει εις διπλούν υπόψη τις υποχωρήσεις.
ΩΣΤΟΣΟ! Εάν θέλω να σχεδιάσω τον παραμορφωμένο φορέα εννοείται ότι θα πρέπει να έχω στο διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων τις τιμές των υποχωρήσεων...

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

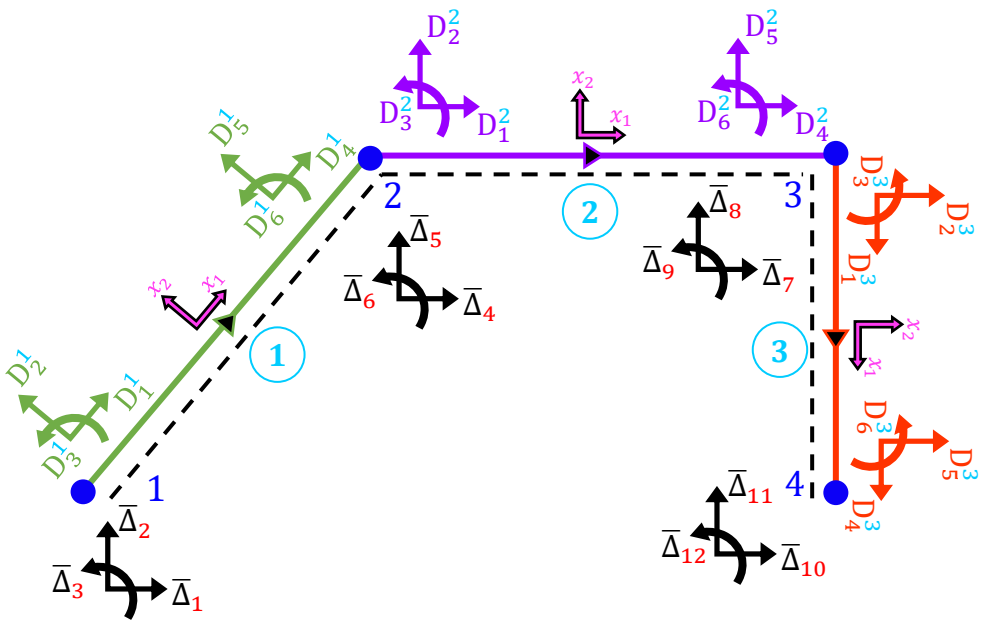
Πρώτα, για κάθε μέλος i θα πρέπει να βρω τις επικόμβιες μετακινήσεις στο εκάστοτε τοπικό σύστημα συντεταγμένων:

a. Από το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του φορέα $\{\bar{\Delta}\}$, επιλέγω τις μετακινήσεις που αντιστοιχούν στους κόμβους του μέλους i και μορφώνω το καθολικό διάνυσμα επικόμβιων μετακινήσεων του μέλους $\{\bar{D}^i\}$.

b. Μετασχηματίζω το $\{\bar{D}^i\}$ στο τοπικό σύστημα του μέλους i ως: $\{D^i\} = [\Lambda^i_{\mathrm{PF}}]\{\bar{D}^i\}$.

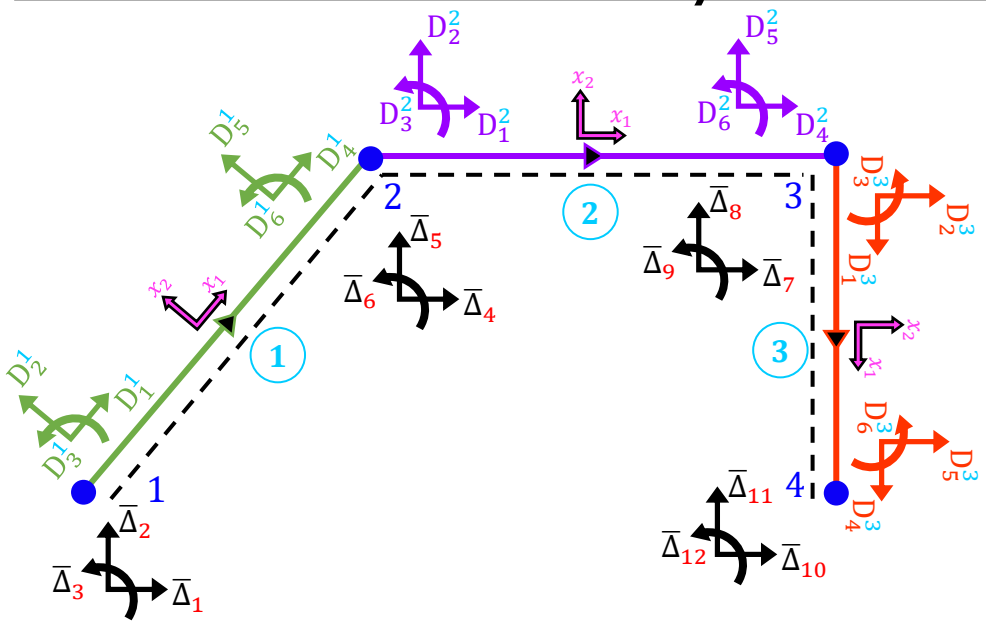
c. Υπολογίζω τις τοπικές ακραίες δράσεις του μέλους i με επαλλήλία του παγιωμένου και του ισοδύναμου φορέα:

$$\{A^i\} = \underbrace{\{A^i_r\}}_{\pi\alpha\gamma\iota\omega\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma} + \underbrace{[k^i]\{D^i\}}_{\iota\sigma o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\varsigma}$$



$$\{\bar{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_1 \\ \bar{\Delta}_2 \\ \bar{\Delta}_3 \\ \bar{\Delta}_4 \\ \bar{\Delta}_5 \\ \bar{\Delta}_6 \\ \bar{\Delta}_7 \\ \bar{\Delta}_8 \\ \bar{\Delta}_9 \\ \bar{P}_{10} \\ \bar{P}_{11} \\ \bar{\Delta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2200 \\ -0.1316 \\ -0.0320 \\ -0.1116 \\ -0.2125 \\ -0.0028 \\ -0.1113 \\ -0.0100 \\ 0.0314 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

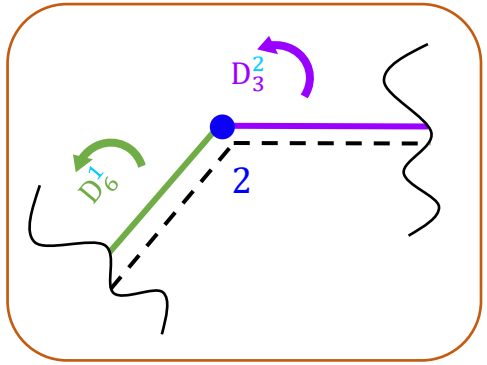


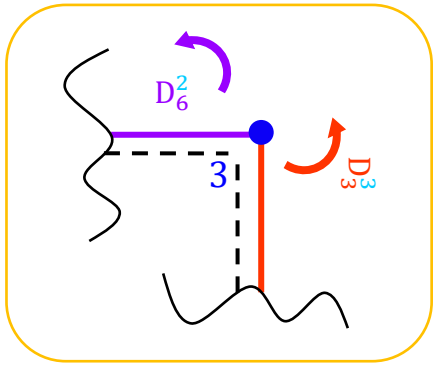
$$\{D^1\} = \begin{Bmatrix} -0.2373 \\ 0.0970 \\ -0.0320 \\ -0.2370 \\ -0.0382 \\ 0.0028 \end{Bmatrix} \qquad \{A^1\} = \begin{Bmatrix} 26.3831 \\ 61.7644 \\ 0 \\ -26.3831 \\ -11.7644 \\ \boxed{213.2327} \end{Bmatrix}$$

$$\{D^2\} = \begin{Bmatrix} -0.1116 \\ -0.2125 \\ 0.0028 \\ -0.1113 \\ -0.0100 \\ 0.0314 \end{Bmatrix} \qquad \{A^2\} = \begin{Bmatrix} 26.4184 \\ 28.1651 \\ \boxed{-213.2327} \\ -26.4184 \\ 131.8349 \\ \boxed{-201.4465} \end{Bmatrix}$$

$$\{D^3\} = \begin{Bmatrix} 0.0100 \\ -0.1113 \\ 0.0314 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{A^3\} = \begin{Bmatrix} 121.8349 \\ 26.4184 \\ \boxed{201.4465} \\ -121.8349 \\ -26.4184 \\ -52.9363 \end{Bmatrix}$$

Ας ελέγξω αν ισορροπούν οι κόμβοι 🤔 :



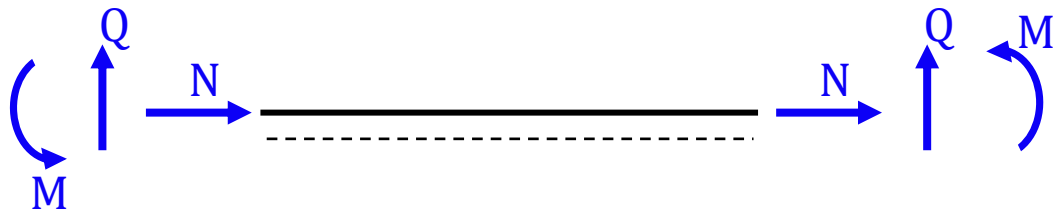


ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου

Τώρα μένει να χαράξω τα διαγράμματα εντατικών μεγεθών.
Πρώτα θα πρέπει να θυμηθώ τη κλασική σύμβαση της στατικής για τα εντατικά μεγέθη (η οποία διαφέρει από τη σύμβαση που θεωρούμε στη μητρωική στατική για τους βαθμούς ελευθερίας.

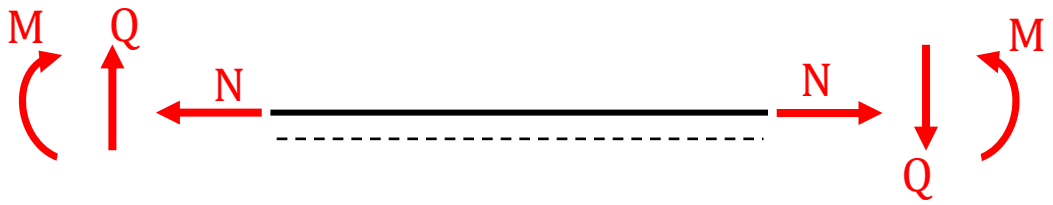
Σύμβαση Μητρωικής Στατικής

Θετικές φορές



Κλασική Σύμβαση Στατικής

Θετικές φορές



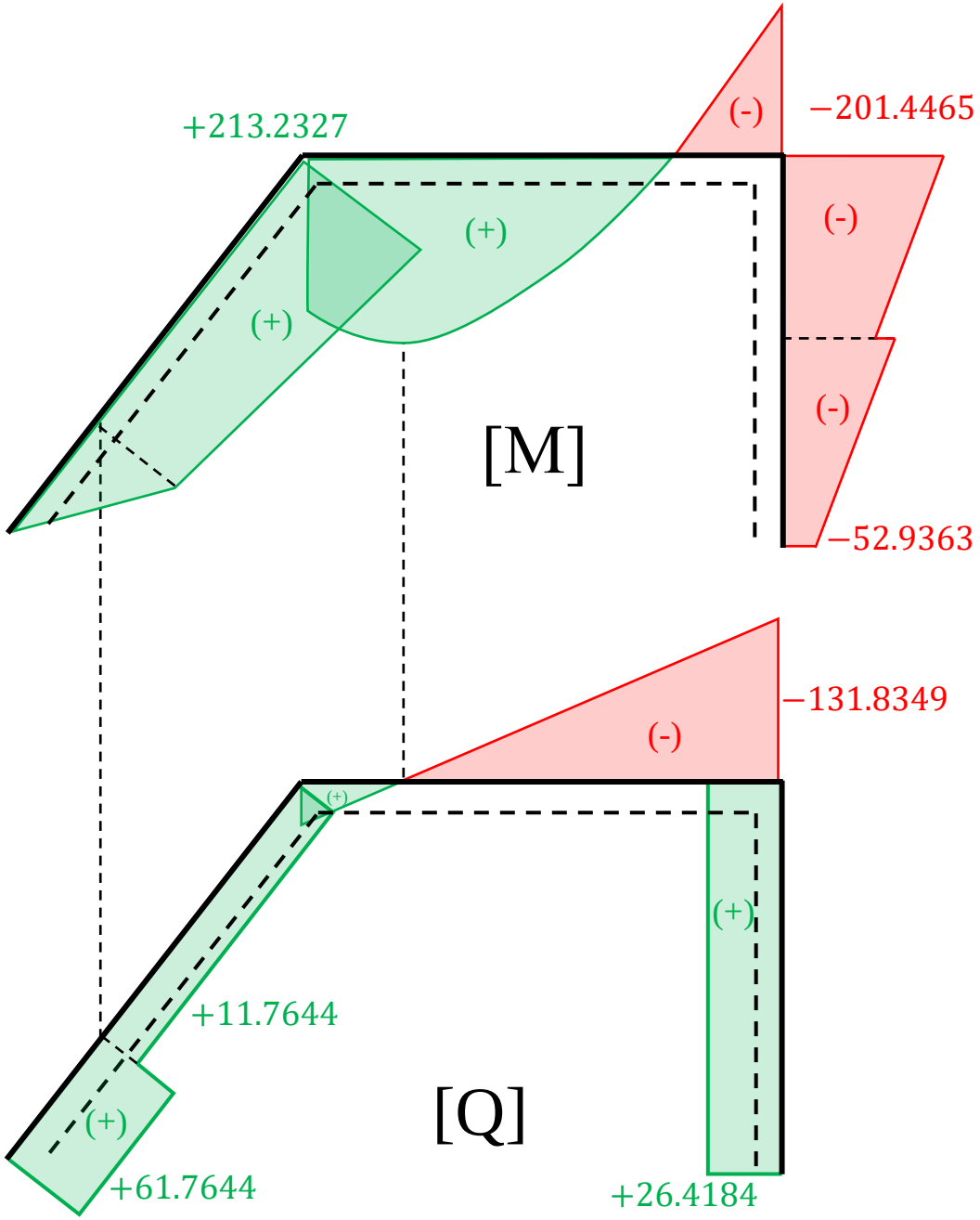
Επομένως ένα διάνυσμα τοπικών ακραίων δράσεων μέλους που έχει αυτή τη μορφή:

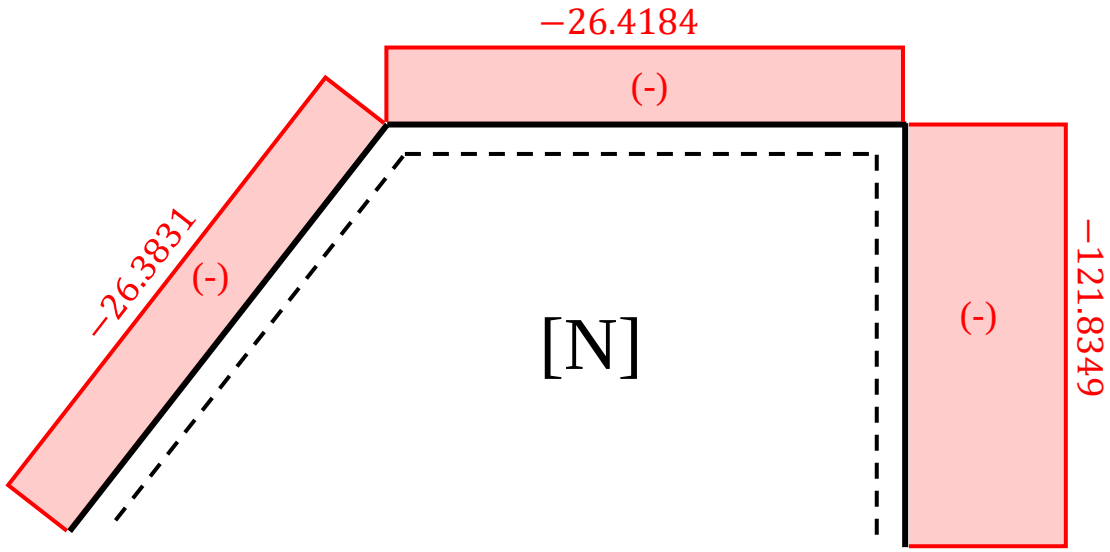
$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{Bmatrix}$$

Με τη κλασική σύμβαση της στατικής αποκτά αυτά τα πρόσημα:

$$\{A^i\} = \begin{Bmatrix} -a \\ b \\ -c \\ d \\ -e \\ f \end{Bmatrix}$$

ΒΗΜΑ 13: Εσωτερικά εντατικά μεγέθη μελών πλαισίου





$$\{A^1\} = \begin{Bmatrix} 26.3831 \\ 61.7644 \\ 0 \\ -26.3831 \\ -11.7644 \\ 213.2327 \end{Bmatrix} \quad \{A^2\} = \begin{Bmatrix} 26.4184 \\ 28.1651 \\ -213.2327 \\ -26.4184 \\ 131.8349 \\ -201.4465 \end{Bmatrix} \quad \{A^3\} = \begin{Bmatrix} 121.8349 \\ 26.4184 \\ 201.4465 \\ -121.8349 \\ -26.4184 \\ -52.9363 \end{Bmatrix}$$

Παράρτημα

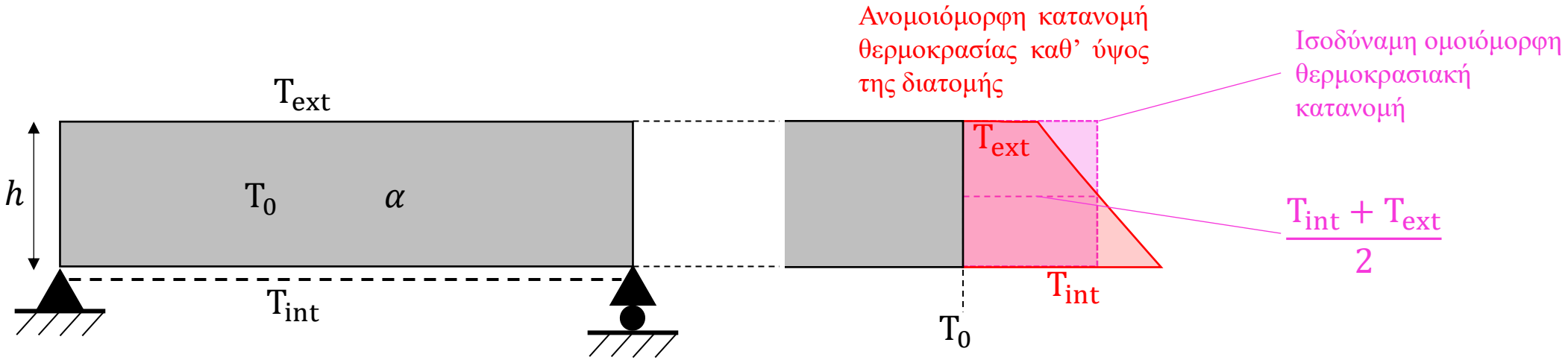
Για λόγους πληρότητας, στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται:

Α. Η απόδειξη για τις σχέσεις που χρησιμοποιήθηκαν για τις δράσεις παγίωσης λόγω θερμοκρασιακών μεταβολών

Β. Οι ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών, για τις περιπτώσεις ενδιάμεσων δράσεων που εξετάζονται στην άσκηση

Γ. Ο υπολογισμός των εντατικών μεγεθών κατά μήκος ενός στοιχείου (υπενθύμιση)

Α.1 Αξονική ένταση λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής



Δεδομένα:

- α: συντελεστής θερμικής διαστολής
- h: ύψος διατομής
- T_0: θερμοκρασία κατασκευής
- T_{int}: θερμοκρασία από τη μεριά της ίνας αναφοράς
- T_{ext}: θερμοκρασία από τη μεριά αντίθετα της ίνας αναφοράς

Χωρίς βλάβη της γενικότητας δουλεύουμε υπό την παραδοχή ότι $T_{int} > T_{ext}$.

Θεωρώντας λοιπόν αυτή την ισοδύναμη ομοιόμορφη θερμοκρασιακή κατανομή, η θερμοκρασιακή μεταβολή προκύπτει ως:

$$\Delta T = \frac{T_{int} + T_{ext}}{2} - T_0$$

Η τροπή (παραμόρφωση), στην προκειμένη περίπτωση δίνεται από τη σχέση:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T$$

Ενώ για την τάση ισχύει:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

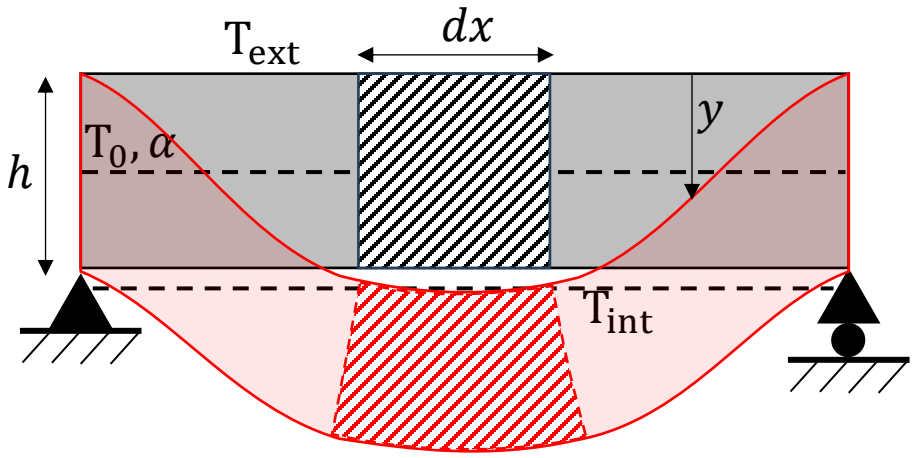
Όμως η αξονική δύναμη είναι:

$$N = \sigma \cdot A$$

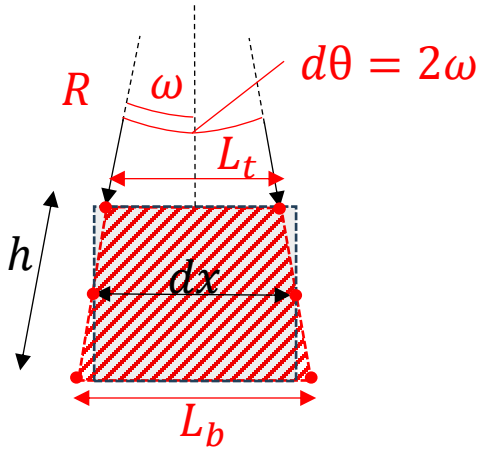
Επομένως, για την αξονική ένταση που προκύπτει από την ομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή προκύπτει:

$$\boxed{N = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta T}$$

Α.2 Καμπτική ένταση λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής



Λόγω της ανομοιόμορφης θερμοκρασιακής μεταβολής η δοκός κάμπτεται. Απομονώνουμε και μελετάμε ένα κομμάτι αυτής απειροστού μήκους dx.



- L_t: μήκος της πλέον άνω παραμορφωμένης ίνας
- L_b: μήκος της πλέον κάτω παραμορφωμένης ίνας]

Ισχύει:

- $\frac{L_t}{2} = \omega R$
- $\frac{L_b}{2} = \omega(R + h)$

Από αφαίρεση των άνω σχέσεων προκύπτει:

- $\frac{L_b - L_t}{2} = \omega h$

Άρα:

- $d\theta\, h = L_b - L_t \Rightarrow d\theta = \frac{L_b - L_t}{h}$

Για τα μήκη των άνω/κάτω ινών ισχύει:

- $L_t = dx - dl_t$, όπου $dl_t = a dx(T_{ext} - T_0)$
- $L_b = dx + dl_b$, όπου $dl_b = a dx(T_{int} - T_0)$

Άρα:

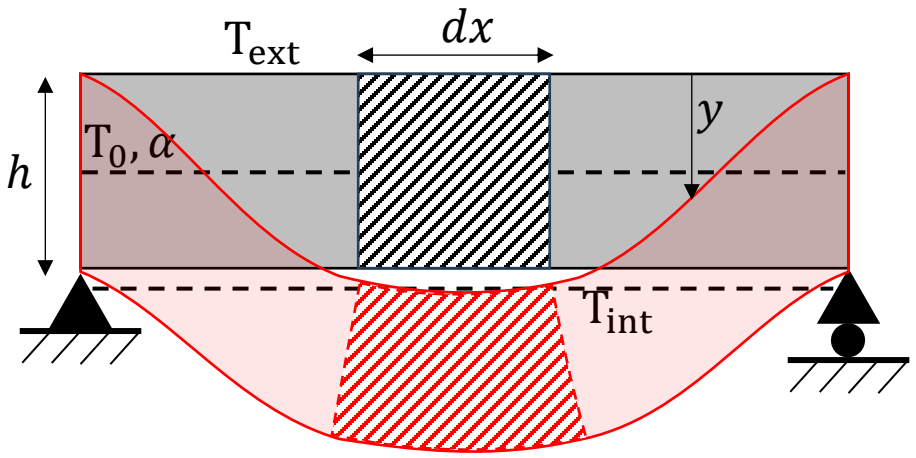
- $L_b - L_t = a dx \underbrace{(T_{int} - T_{ext})}_{\Delta T}$

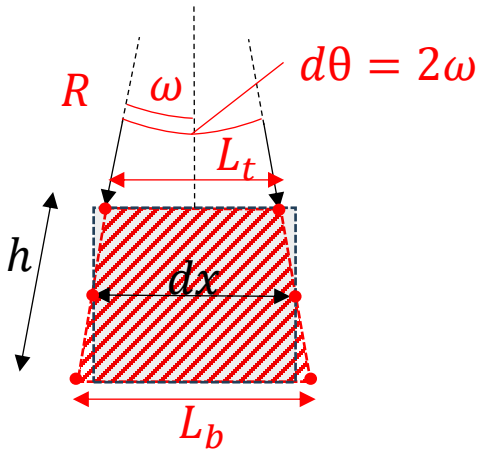
Δεδομένα:

- α: συντελεστής θερμικής διαστολής
- h: ύψος διατομής
- T_0: θερμοκρασία κατασκευής
- T_{int}: θερμοκρασία από τη μεριά της ίνας αναφοράς
- T_{ext}: θερμοκρασία από τη μεριά αντίθετα της ίνας αναφοράς

Χωρίς βλάβη της γενικότητας δουλεύουμε υπό την παραδοχή ότι $T_{int} > T_{ext}$.

A.2 Καμπτική ένταση λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής





Η εγκάρσια βύθιση της δοκού διέπεται από τη σχέση:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

και για την κλίση αυτής γνωρίζουμε ότι:

$$\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Αλλά, δείξαμε ότι:

$$d\theta = \frac{L_b - L_t}{h}$$

$$L_b - L_t = \alpha dx \Delta T$$

Άρα:

$$d\theta = \frac{\alpha dx \Delta T}{h} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

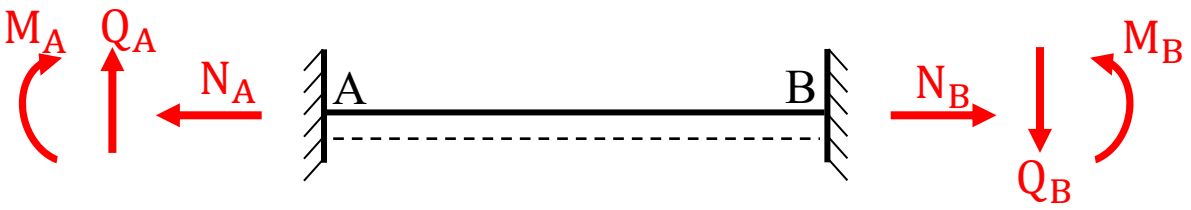
Επομένως, προκύπτει τελικά:

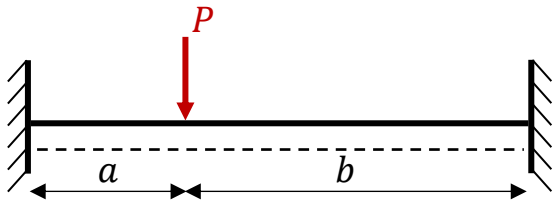
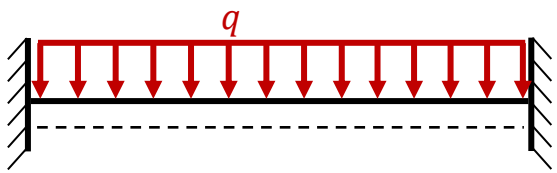
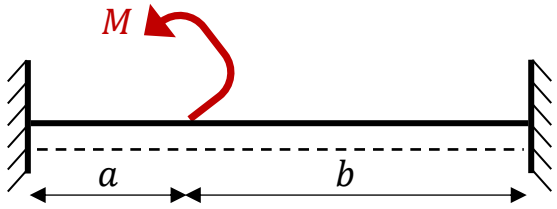
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{\alpha \Delta T}{h} \Rightarrow$$

$$\boxed{M = -\alpha EI \frac{\Delta T}{h}}$$

που είναι η ροπή κάμψης που προκαλείται από την ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή μεταβολή.

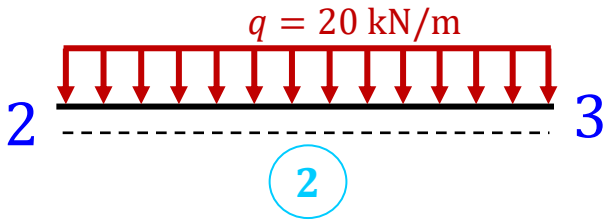
Β. Ακραίες δράσεις αμφίπακτων δοκών



	$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_B = -\frac{Pab^2}{L^2}$	$Q_A = \frac{Pb^2}{L^2}\left(3 - \frac{2b}{L}\right)$ $Q_B = -\frac{Pa^2}{L^2}\left(3 - \frac{2a}{L}\right)$
	$M_A = -\frac{qL^2}{12}$ $M_B = -\frac{qL^2}{12}$	$Q_A = \frac{qL}{2}$ $Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = -\frac{Mb}{L}\left(2 - \frac{3b}{L}\right)$ $M_B = \frac{Ma}{L}\left(2 - \frac{3a}{L}\right)$	$Q_A = \frac{6Mab}{L^3}$ $Q_B = \frac{6Mab}{L^3}$

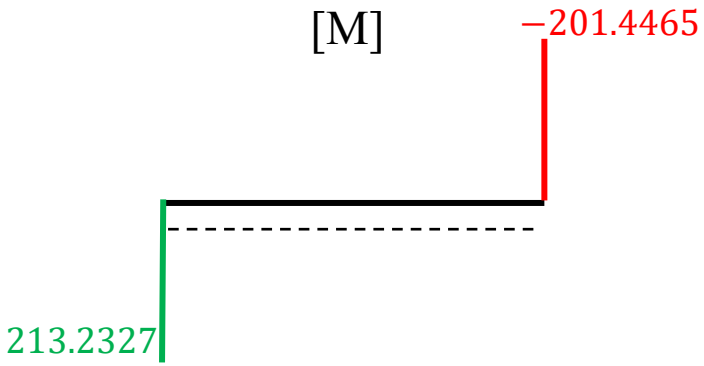
Γ. Εντατικά μεγέθη:

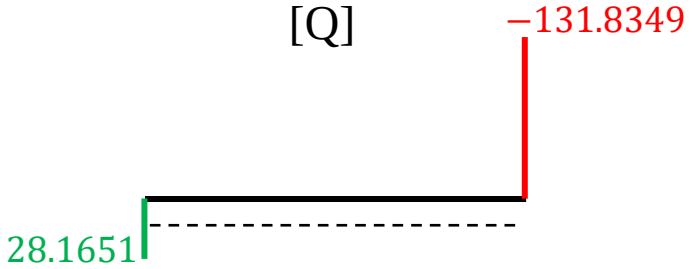
Για παράδειγμα ας μελετήσουμε το στοιχείου 2:

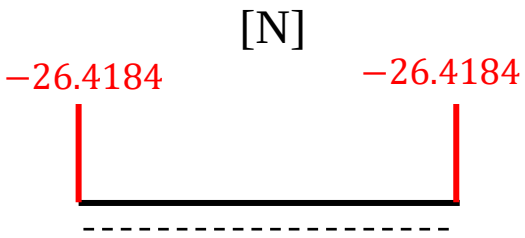


Με την επίλυση, έχω πλέον δεδομένα τα εντατικά μεγέθη στους κόμβους του μέλους 2.
Ας προσθέσω λοιπόν τις τιμές αυτές στα διαγράμματα:

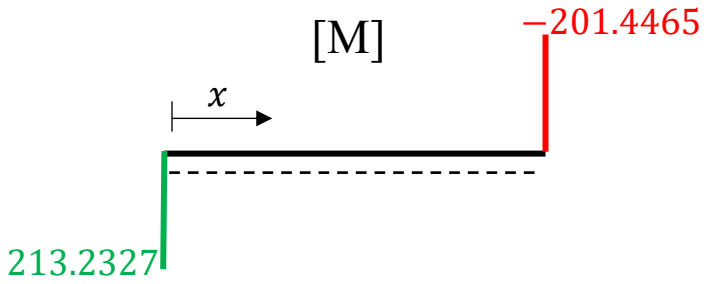
$$\{A^2\} = \begin{Bmatrix} 26.4184 \\ 28.1651 \\ -213.2327 \\ -26.4184 \\ 131.8349 \\ -201.4465 \end{Bmatrix}$$







Γ. Εντατικά μεγέθη: (α. με «μαθηματικά»)



Η διαφορική εξίσωση της δοκού διατυπώνεται ως:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{EI}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = q(x)$$

όπου y η εγκάρσια μετατόπιση της δοκού.

Στη συνέχεια θυμάμαι ότι η 2η παράγωγος της ροπής κάμψεως είναι το κατανεμημένο φορτίο:

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{M}(x) = -q(x)$$

Εδώ $q(x) = 20$.

Με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις η ροπή κάμψεως κατα μήκος της δοκού προκύπτει:

$$\mathrm{M}(x) = -20\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$

Γνωρίζω όμως από την επίλυση ότι:

$$\mathrm{M}(x=0) = 213.2327 \Rightarrow c_2 = 213.2327$$

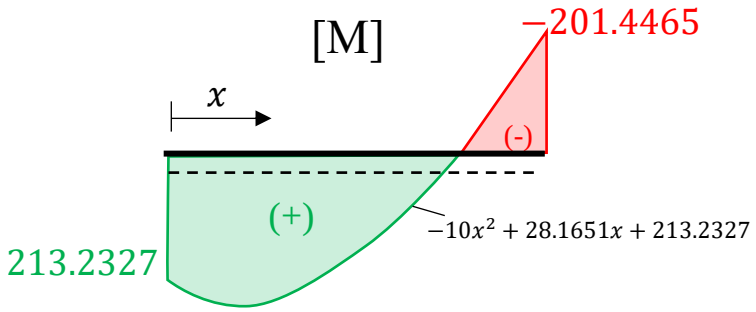
Επίσης:

$$\mathrm{M}(x=8) = -201.4465 \Rightarrow c_1 = 28.1651$$

ΑΡΑ:

$$\mathrm{M}(x) = -10x^2 + 28.1651x + 213.2327$$

Δεν έχω πια, παρά να σχεδιάσω αυτήν την καμπύλη 2ου βαθμού κατά μήκος του στοιχείου 2.

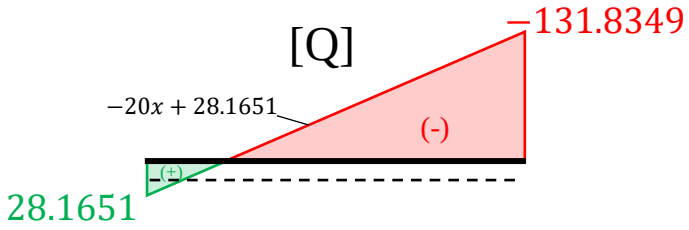


Συνεχίζω με την τέμνουσα.

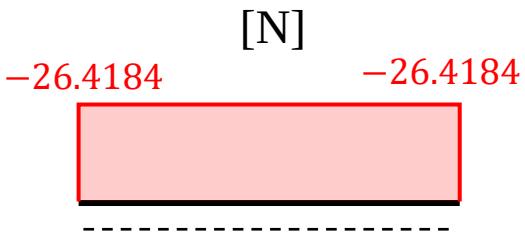
Θυμάμαι ότι η τέμνουσα δύναμη είναι η 1η παράγωγος της ροπής κάμψεως, άρα:

$$Q(x) = \frac{d\mathrm{M}(x)}{dx} = -20x + 28.1651$$

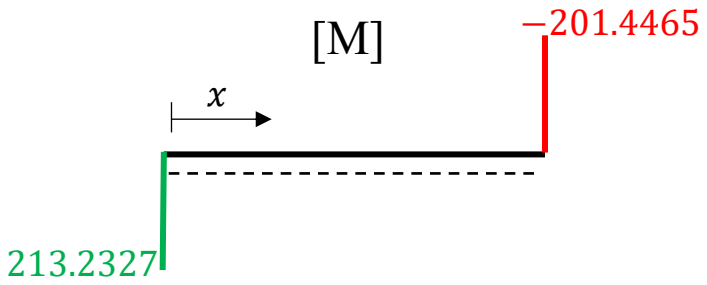
Επομένως δεν έχω πια παρά να σχεδιάσω αυτήν την καμπύλη 1ου βαθμού (ευθεία) κατα μήκος του στοιχείου 2.



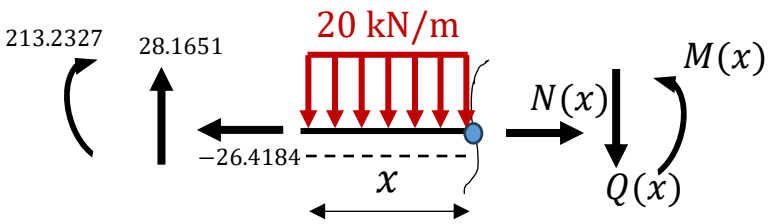
Για την αξονική δύναμη τα πράγματα είναι πιο απλά. Αφού δεν έχω κάποιο ενδιάμεσο αξονικό φορτίο στο μέλος, τότε η αξονική ένταση δεν έχει λόγο να αλλάξει από τον κόμβο αρχής μέχρι τον κόμβο πέρατος 😊



Γ. Εντατικά μεγέθη: (β. με τομές)



Κάνω μια τομή σε τυχαία απόσταση x από τον κόμβο αρχής του μέλους:

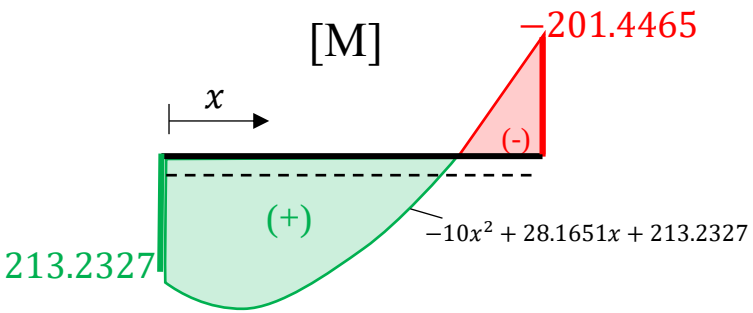
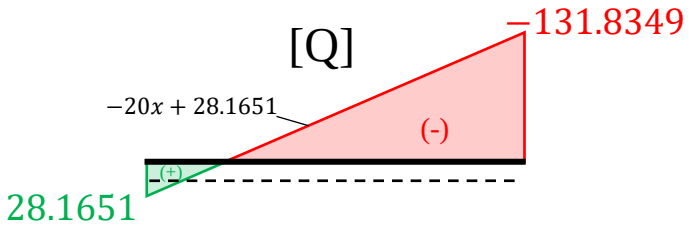
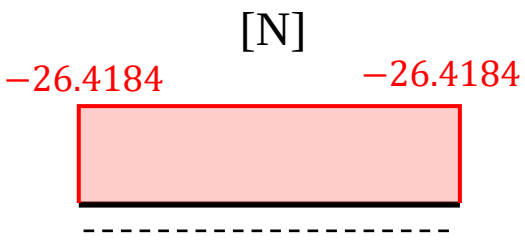


Πρώτα εξετάζω ισορροπία ροπών ως προς το σημείο ροπής:

$$\mathrm{M}(x) + 20\frac{\mathrm{x}^2}{2} = 28.1651x + 213.2327 \Rightarrow$$
$$\mathrm{M}(x) = -10x^2 + 28.1651x + 213.2327$$

Αντίστοιχα για την ισορροπία δυνάμεων κατά την κατακόρυφη διεύθυνση έχουμε:

$$28.1651 = Q(x) + 20x \Rightarrow$$
$$Q(x) = -20x + 28.1651$$

Τέλος, ισορροπία κατά τη αξονική διεύθυνση δίνει:

$$N(x) = -26.4184$$