

Εξέταση: Περιγραφική Θεωρία Συνόλων
(Μεταπτυχιακό Μάθημα)

Ιούλιος 2024

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων
Μαθηματικών και Φυσικών
Επιστημών



Διάρκεια εξέτασης:
2 ώρες

Διδάσκων:
Β. Γρηγοριάδης

Σημειώσεις.

- Υπάρχουν συνολικά **12 ερωτήματα** και παίρνει **1 μονάδα** το κάθε ένα. Η βαθμολογία του γραπτού σας είναι το $\min\{x, 10\}$, όπου x ο βαθμός που γράψατε. Μπορείτε να απαντήσετε σε **όσα ερωτήματα επιθυμείτε** χωρίς κανέναν περιορισμό.
- Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις και αιτιολογημένες.
- Οι φυσικοί αριθμοί είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών φυσικών αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Η κενή ακολουθία συμβολίζεται με Λ .
- Αν $k, i \in \mathbb{N}$ με τον συμβολισμό $(k)^{(i)}$ εννοούμε την πεπερασμένη ακολουθία $(k, k, \dots, k)$ με μήκος i .
- Υπειθυμίζεται ότι η μετρική $d_{\mathcal{N}}$ του χώρου του Baire $\mathcal{N}$ ικανοποιεί για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha \neq \beta$ ότι $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta) = 2^{-n}$, όπου n είναι ο ελάχιστος $k \in \mathbb{N}$ με $\alpha(k) \neq \beta(k)$.

Ερώτημα 1. Εξετάστε ποια από τα ακόλουθα σύνολα με τη σχετική τοπολογία του $\mathbb{R}$ είναι Πολωνικοί χώροι:

$$A = (-1, 1] \quad \text{και} \quad B = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{3}\}.$$

Ερώτημα 2. Δίνονται $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ με $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $\alpha(n) = 4n$ και $\beta(n) = n^2 + 3$ για κάθε $n \geq 1$. Βρείτε την απόσταση $d_{\mathcal{N}}(\alpha, \beta)$.

Ερώτημα 3. Εξετάστε τις πιο κάτω ακολουθίες $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ του $\mathcal{N}$ ως προς τη σύγκλιση,

$$\alpha_i = (1)^{(i)} * (0, 0, 0, 0, \dots), \quad \beta_i = (0, 1, 2) * (i + 3) * (0, 0, \dots, 0, \dots), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε σύγκλιση να δώσετε το όριο της ακολουθίας.

Ερώτημα 4. Θεωρούμε το σύνολο $F = \{\alpha \in \mathcal{N} \mid \text{ισχύει } \alpha(k) = 0 \text{ για κάθε άρτιο αριθμό } k\}$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{N}$.

Ερώτημα 5. Βρείτε (με αιτιολόγηση) τον τέλει πυρήνα και το διάσπαρτο μέρος του κλειστού συνόλου $[-1, 1] \cup \{-1 - 3^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Ερώτημα 6. Βρείτε δένδρα T και S στο $\mathbb{N}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.

- Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $u \in T$ με $|u| = n$ και $[T] = \emptyset$.
- Το S είναι άπειρο σύνολο και για κάθε $u \in S$ έχουμε $|u| \leq 1$.

Αρκεί να δώσετε την απάντησή σας με διαγράμματα που περιγράφουν τα δένδρα.

Ερώτημα 7. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$, μια συμβατή μετρική d στον $\mathcal{X}$ και μια οικογένεια $(B_u)_{u \in 2^{<\mathbb{N}}}$ από μη κενές ανοικτές d -μπάλες στον $\mathcal{X}$ με τις ιδιότητες:

$$d\text{-διάμετρος}(B_u) \leq 2^{-|u|} \quad \text{και} \quad \overline{B_{u*(i)}} \subseteq B_u$$

για κάθε $u \in 2^{<\mathbb{N}}$ και $i = 0, 1$. (Με $2^{<\mathbb{N}}$ εννοούμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από στοιχεία του $\{0, 1\}$.) Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tau : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{X} : \tau(\alpha) = \text{το μοναδικό στοιχείο της τομής } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{(\alpha(0), \dots, \alpha(n))}.$$

Αποδείξτε ότι η τ είναι συνεχής συνάρτηση.

Ερώτημα 8. Δείξτε ότι αν μια κλάση συνόλων Γ είναι κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση τότε και η $\forall^{\mathcal{N}}\Gamma$ είναι επίσης κλειστή ως προς συνεχή αντικατάσταση.

Ερώτημα 9. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Δείξτε ότι το σύνολο $P \subseteq \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του $\mathcal{X}$ ανήκει στην κλάση Π_3^0 .

Ερώτημα 10. Θεωρούμε έναν Πολωνικό χώρο $\mathcal{X}$. Βρείτε μια κλάση στην ιεραρχία των προβολικών συνόλων στην οποία ανήκει το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$, το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in Q \iff \eta (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.}$$

Μπορείτε να πάρετε δεδομένο ότι το σύνολο όλων των συγκλινουσών ακολουθιών του $\mathcal{X}$ ανήκει στην κλάση Π_3^0 .

Ερώτημα 11. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ όλων των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ καθώς και την οικογένεια $\underline{\Delta}_1^1(\mathbb{R})$. Εξηγήστε γιατί ισχύει $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \underline{\Delta}_1^1(\mathbb{R})$. Ισχύει η ισότητα ανάμεσα στις δύο οικογένειες; Απαντήστε στην τελευταία ερώτηση με ένα ναι ή όχι χωρίς να δώσετε εξήγηση.

Ερώτημα 12. Θεωρούμε ένα Π_1^1 σύνολο $G \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ το οποίο έχει την ιδιότητα για κάθε $P \in \Pi_1^1(\mathcal{N})$ να υπάρχει $\alpha \in \mathcal{N}$ έτσι ώστε $P = G_\alpha$, όπου $G_\alpha = \{\beta \in \mathcal{N} \mid (\alpha, \beta) \in G\}$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$Q = \{\beta \in \mathcal{N} \mid (\beta, \beta) \notin G\}$$

ανήκει στη $\Sigma_1^1(\mathcal{N})$ αλλά δεν ανήκει στην $\Pi_1^1(\mathcal{N})$.