

ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ-ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ, 01/09/2025

Άσκηση 1. (0.5+1+1=2.5 μον) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$.

(α) (0.5 μον) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της f έως και δεύτερης τάξης.

(β) (1 μον) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .

(γ) (1 μον) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f .

Λύση. (α) Έχουμε $f_x(x, y) = 4x^3 - 4y$, $f_y(x, y) = 4y^3 - 4x$. $f_{xx}(x, y) = 12x^2$, $f_{xy}(x, y) = -4$ και $f_{yy}(x, y) = 12y^2$.

(β) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{Επειδή}$$
 $f_x(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^3 = y \text{ και } f_y(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^3 = x \text{ έχουμε}$

$$(x^3)^3 = x \Leftrightarrow x^9 = x \Leftrightarrow x^9 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Συνεπώς αφού $y = x^3$ έχουμε τα εξής τρία κρίσιμα σημεία

$$(0, 0), (1, 1) \text{ και } (-1, -1)$$

(γ) Έχουμε $\Delta(x, y) = (12x^2)(12y^2) - (-4)^2 = 144x^2y^2 - 16$.

Αφού $\Delta(0, 0) = -16 < 0$ το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.

Επίσης, $\Delta(1, 1) = \Delta(-1, -1) > 0$ και $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 12 > 0$. Άρα η f έχει τοπικά ελάχιστα στα σημεία $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.

Άσκηση 2. (1+0.5+1=2.5 μον) Έστω $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) (1 μον) Υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ για κάθε $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

(Υπενθυμίζεται ότι $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t}$)

(β) (0.5 μον) Υπολογίστε την κλίση $\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0))$ της f στο $(0, 0)$.

(γ) (1 μον) Είναι η f παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$?

Λύση. (α) Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\vec{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\vec{u}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3.$$

αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\vec{u}$ μοναδιαίο).

(β) Από το (α) για $\vec{u} = \vec{e}_1 = (1, 0)$, παίρνουμε

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_1}(0, 0) = 1^3 = 1,$$

και αντίστοιχα για $\vec{u} = \vec{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_2}(0, 0) = 0^3 = 0.$$

Άρα $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

(γ) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε από γνωστό θεώρημα θα είχαμε

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u} = f_x(0, 0)u_1 + f_y(0, 0)u_2 = u_1 \quad (1)$$

για κάθε μοναδιαία κατευθύνση $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως από το (α) έχουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = u_1^3$$

Άρα θα έπρεπε

$$u_1^3 = u_1$$

για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που όμως δεν ισχύει (πχ. για $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 3. (1+1=2 μον) (α) (1 μον) Αναπτύξτε την παράσταση $\frac{4}{u^3 + 4u}$ σε απλά κλάσματα.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 4 \cos x} dx$.

Λύση. (α) Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{4}{u^3 + 4u} &= \frac{4}{u(u^2 + 4)} = \frac{A}{u} + \frac{Bu + C}{u^2 + 4} \\ \Leftrightarrow A(u^2 + 4) + (Bu + C)u &= 4 \\ \Leftrightarrow Au^2 + 4A + Bu^2 + Cu &= 4 \\ \Leftrightarrow (A + B)u^2 + Cu + 4A &= 4 \end{aligned}$$

Άρα $A + B = 0$, $C = 0$, και $4A = 4$. Οπότε $A = 1$, $B = -1$, και $C = 0$. Άρα,

$$\frac{4}{u^3 + 4u} = \frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 4}$$

(β) Θέτουμε $u = \cos x$. Τότε $du = -\sin x \, dx$ και άρα το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 4 \cos x} \, dx = - \int \frac{1}{u^3 + 4u} \, du$$

Από το (α) παίρνουμε

$$- \int \frac{1}{u(u^2 + 4)} \, du = -\frac{1}{4} \left(\int \frac{1}{u} \, du - \int \frac{u}{u^2 + 4} \, du \right) = \frac{1}{4} \left(\ln(\sqrt{u^2 + 4}) - \ln |u| \right)$$

αφού $\int \frac{1}{u} \, du = \ln |u|$ και θέτοντας $w = u^2 + 4 \Rightarrow dw = 2u \, du$ έχουμε $\int \frac{u}{u^2 + 4} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln |w| = \frac{1}{2} \ln(u^2 + 4) = \ln(\sqrt{u^2 + 4})$.

Τελικά

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 4 \cos x} \, dx = \frac{1}{4} \left(\ln(\sqrt{\cos^2 x + 4}) - \ln |\cos x| \right) = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sqrt{\cos^2 x + 4}}{|\cos x|} \right)$$

Άσκηση 4. (2 μον.) Υπολογίστε το μήκος L της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \cos^3 t, \, y(t) = \sin^3 t, \, t \in [0, \pi/2]$$

(Υπενθυμίζεται ότι $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt$)

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(3 \cos^2 t (-\sin t))^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 3 |\cos t \cdot \sin t| \, dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, dt \end{aligned}$$

(αφού $\sin t, \cos t \geq 0$ όταν $0 \leq t \leq \pi/2$). Επειδή

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, dt = \int_0^{\pi/2} (\sin t)' \cdot \sin t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t)' \, dt = \frac{1}{2} (\sin^2(\pi/2) - \sin^2(0)) = 1/2$$

παίρνουμε τελικά $L = 3/2$.

Άσκηση 5. (1,5+ 1,5=3 μον.)

(α) Έστω $f(x) = \arccos x + \arcsin x$, για κάθε $x \in [-1, 1]$. (i) (1 μον.) Βρείτε την $f'(x)$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. (ii) (0,5 μον.) Δείξτε ότι $f(1/2025) = \pi/2$.

(β) (i) (1 μον.) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_3(x)$ τάξης $n = 3$ της συνάρτησης $\sinh x$ με κέντρο το $a = 0$. (ii) (0,5 μον.) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3}$.

Λύση. (α) (i) Για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = (\arccos x + \arcsin x)' = (\arccos x)' + (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

(ii) Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής η f είναι σταθερή. Επειδή

$$f(0) = \arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

έπεται ότι $f(x) = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Οπότε και $f(1/2025) = \pi/2$.

(β) (i) Έχουμε

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad f''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad f^{(3)}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Άρα $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ και $f^{(3)}(0) = 1$. Το πολυώνυμο Taylor τάξης $n = 3$ της συνάρτησης $f(x) = \sinh x$ με κέντρο το $a = 0$ δίνεται από τον τύπο

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{6}$$

(ii) Με επαναληπτική χρήση του κανόνα Hospital έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{6} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$