

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΜΑΘ. ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΑΤΜ, 01/09/2025

**Άσκηση 1.** (0.5+1+1=2.5 μον) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 5$ .

(α) (0.5 μον) Βρείτε τις μερικές παραγώγους της  $f$  έως και δεύτερης τάξης.

(β) (1 μον) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$ .

(γ) (1 μον) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της  $f$ .

**Άσκηση 2.** (1+0.5+1=2.5 μον) Έστω  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$  αν  $(x, y) \neq (0, 0)$  και  $f(0, 0) = 0$ .

(α) (1 μον) Υπολογίστε την  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$  για κάθε  $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$  με  $u_1^2 + u_2^2 = 1$ .

(Υπενθυμίζεται ότι  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t}$ )

(β) (0.5 μον) Υπολογίστε την κλίση  $\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0))$  της  $f$  στο  $(0, 0)$ .

(γ) (1 μον) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $(0, 0)$  ?

**Άσκηση 3.** (1+1=2 μον) (α) (1 μον) Αναπτύξτε την παράσταση  $\frac{4}{u^3 + 4u}$  σε απλά κλάσματα.

(β) (1 μον) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x + 4 \cos x} dx$ .

**Άσκηση 4.** (2 μον.) Υπολογίστε το μήκος  $L$  της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0, \pi/2]$$

(Υπενθυμίζεται ότι  $L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ )

**Άσκηση 5.** (1,5+ 1,5=3 μον.)

(α) Έστω  $f(x) = \arccos x + \arcsin x$ , για κάθε  $x \in [-1, 1]$ . (i) (1 μον.) Βρείτε την  $f'(x)$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ . (ii) (0,5 μον.) Δείξτε ότι  $f(1/2025) = \pi/2$ .

(β) (i) (1 μον.) Βρείτε το πολώνυμο Taylor  $T_3(x)$  τάξης  $n = 3$  της συνάρτησης  $\sinh x$  με κέντρο το  $a = 0$ . (ii) (0,5 μον.) Υπολογίστε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3}$ .