

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 22/09/2025

1. (1 μον) Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}$.

Απάντηση: Αν $y = x^4$ τότε $f(x, y) = \frac{x^4 x^4}{x^8 + x^8} = \frac{x^8}{2x^8} = \frac{1}{2}$ και άρα κατά μήκος της καμπύλης $y = x^4$, το όριο ισούται με $\frac{1}{2}$. Όμως αν $y = 0$ ή $x = 0$ τότε $f(x, y) = 0$ και άρα κατά μήκος του x -άξονα ή του y -άξονα, το όριο είναι το 0. Συνεπώς το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^8 + y^2}$ δεν υπάρχει.

2. (1+1+1=3μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Υπολογίστε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(γ) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Απάντηση: (α) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\left| \frac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3 \sin x|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3 \sin y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{|y^3|}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|$$

Αφού $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|x| + |y|) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y| = 0$, έπεται ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ και άρα η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 \sin(tu_1) + t^3 u_2^3 \sin(tu_2)}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^3 \sin(tu_1) + u_2^3 \sin(tu_2)}{u_1^2 + u_2^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (u_1^3 \sin(tu_1) + u_2^3 \sin(tu_2)) \\ &= u_1^3 \lim_{t \rightarrow 0} \sin(tu_1) + u_2^3 \lim_{t \rightarrow 0} \sin(tu_2) = u_1^3 \sin 0 + u_2^3 \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = 0$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

(γ) Απο το (β) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$ και $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$ παίρνουμε ότι,

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

Εξ ορισμού η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ όταν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Πράγματι αυτό ισχύει αφού

$$\left| \frac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \leq \left| \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| + \left| \frac{y^3 \sin y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right| \leq |\sin x| + |\sin y| \leq |x| + |y|$$

Άρα η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

3. (1+1.5=2.5 μον.) (α) Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_x(x, y) = f_y(x, y) = xy$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση με $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 1$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: (α) Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε $f_{xx}(x, y) = (f_x)_x(x, y) = y$, $f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) = x$, $f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = x$ και $f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) = y$. Άρα η f είναι κλάσης C^2 . Αλλά τότε από το Θεώρημα Schwarz για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ θα έπρεπε $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \Leftrightarrow x = y$, άτοπο. Άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

(β) Από το θεώρημα Taylor έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

όπου

$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] = \frac{1}{2}(x + y)^2$$

είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $(0, 0)$. Άρα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - \frac{1}{2}(x + y)^2}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$$

Όμως το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει αφού για $x = 0$ έχουμε $f(0, x) = 1$ ενώ για $y = -x$ έχουμε $f(x, y) = 0$.

Συνεπώς το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

4. (2 μον.) Εξετάστε την συνάρτηση $f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Απάντηση: Η f ως πολυωνυμική συνάρτηση είναι κλάσης C^2 . Άρα για να βρούμε τα τοπικά ακρότατά της μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου Έχουμε

$$f_x(x, y) = 6x^2 - 6x, \quad f_y(x, y) = 6y^2 + 6y$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6y^2 + 6y = 0$$

Απο την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $x = 0, 1$ και απο την δεύτερη $y = 0, -1$. Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι τα εξής:

$$(0, 0), \quad (0, -1), \quad (1, 0) \quad \text{και} \quad (1, -1)$$

Υπολογίζουμε τώρα τις παραγώγους δεύτερης τάξης της f :

$$f_{xx}(x, y) = 12x - 6, \quad f_{yy}(x, y) = 12y + 6, \quad f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 0$$

Άρα

$$\Delta(x, y) = (12x - 6)(12y + 6)$$

Οπότε

1. Για το $(0, 0)$ είναι $\Delta = -36 < 0$ και συνεπώς το $(0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο.
 2. Για το $(0, -1)$ είναι $\Delta = 36 > 0$, $f_{xx}(0, -1) = -6 < 0$ και συνεπώς στο $(0, -1)$ η f έχει τοπικό μέγιστο.
 3. Για το $(1, 0)$ είναι $\Delta = 36 > 0$, $f_{xx}(1, 0) = 6 > 0$ και συνεπώς στο $(1, 0)$ η f έχει τοπικό ελάχιστο.
 4. Για το $(1, -1)$ είναι $\Delta = -36 < 0$ και συνεπώς το $(1, -1)$ είναι σαγματικό σημείο.
5. (2+0.5=2.5 μον.) (α) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$.

(β) Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του παραπάνω προβλήματος;

Απάντηση: (α) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των πολ/στων Lagrange. Θέτουμε $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1$ και επειδή $\nabla g(x, y, z) = (4x, 2y, 6z) \neq \mathbf{0}$ για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ με $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$. Τα πιθανά σημεία τοπικών ακροτάτων θα ικανοποιούν το σύστημα

$$\nabla h(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ και } g(x, y, z) = 0.$$

Συνεπώς πρέπει

$$2x = 4\lambda x, \quad 2y = 2\lambda y, \quad 2z = 6\lambda z \text{ και } 2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$$

Με αυτά τα δεδομένα βρίσκουμε ότι είτε (α) $\lambda = 1/2$ και $(x, y, z) = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$, είτε (β) $\lambda = 1$ και $(x, y, z) = (0, \pm 1, 0)$ είτε (γ) $\lambda = 1/3$ και $(x, y, z) = (0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$. Με σύγκριση των τιμών της f στα σημεία αυτά βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή λαμβάνεται στα σημεία $(0, \pm 1, 0)$ και η ελάχιστη στα $(0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$.

Τα σημεία $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ αποτελούν σαγματικά σημεία της f υπό την συνθήκη $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ δηλαδή σε κάθε περιοχή τους υπάρχουν σημεία που ικανοποιούν την συνθήκη και όπου η f λαμβάνει και μεγαλύτερη αλλά και μικρότερη τιμή από $f(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0) = 1/2$. Πράγματι, έστω $0 < \delta < 1$. Κάνοντας λίγες πρά-

ξεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα σημεία $\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}}, \sqrt{2\delta-\delta^2}, 0\right)$ και $\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{2\delta-\delta^2}}{\sqrt{3}}\right)$, απέχουν

από το σημείο $(1/\sqrt{2}, 0, 0)$ λιγότερο από $\sqrt{2\delta}$, ικανοποιούν την συνθήκη $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ και επιπλέον $f\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{2\delta-\delta^2}}{\sqrt{3}}\right) < 1/2 < f\left(\frac{1-\delta}{\sqrt{2}}, \sqrt{2\delta-\delta^2}, 0\right)$. Αντίστοιχα, για το σημείο $(-1/\sqrt{2}, 0, 0)$ θεωρού-

με τα σημεία $\left(\frac{\delta-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2\delta-\delta^2}, 0\right)$ και $\left(\frac{\delta-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{2\delta-\delta^2}}{\sqrt{3}}\right)$.

(β) Η συνθήκη $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ αναπαριστά το σύνορο ∂K ενός ελλειψοειδούς K με κέντρο το $(0, 0, 0)$ και η $f(x, y, z)$ ισούται με το τετράγωνο της απόστασης του σημείου (x, y, z) από το $(0, 0, 0)$. Άρα τα σημεία $(0, 0, \pm 1/\sqrt{3})$ είναι τα σημεία του ∂K που είναι τα πιο κοντινά στο $(0, 0, 0)$ ενώ τα σημεία $(0, \pm 1, 0)$ είναι τα σημεία του ∂K που είναι τα πιο απομακρυσμένα από το $(0, 0, 0)$.

6. (1 μον.) Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0 με $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε

$$e^{xf(x)} - \cos(x^2 f(x)) + x - f(x) = 0$$

για κάθε $x \in I$.

Απάντηση: Ορίζουμε $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $F(x, y) = e^{xy} - \cos(x^2 y) + x - y$ Έχουμε

$$F_x(x, y) = ye^{xy} + 2xy \sin(x^2 y) + 1$$

$$F_y(x, y) = xe^{xy} + x^2 \sin(x^2 y) - 1$$

και άρα η F είναι C^1 συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $F(0, 0) = 0$ και $F_y(0, 0) = -1 \neq 0$. Άρα από το Θεώρημα της Πεπλεγμένης συνάρτησης υπάρχει ανοικτό διάστημα $I = (-\delta, \delta)$ με κέντρο το 0 και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $F(x, f(x)) = 0 \Leftrightarrow e^{xf(x)} - \cos(x^2 f(x)) + x - f(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Επιπλέον,

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

για κάθε $x \in I$. Ειδικότερα, για $x = 0$ παίρνουμε $f'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = -\frac{1}{-1} = 1$.