ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 22/09/2025

1. (1 μον.) Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 y}{x^8+y^2}$.

2. (1+1+1=3 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(x,y)=\dfrac{x^3\sin x + y^3 \sin y}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$ και $f(0,0)=0$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(β) Υπολογίστε την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u}=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$.

(γ) Εξετάστε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

3. (1+1.5=2.5 μον.) (α) Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f_x(x,y)=f_y(x,y)=xy$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια C^2 συνάρτηση με $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=f_{xy}(0,0)=1$. Εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$.

4. (2 μον.) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=2x^3-3x^2+2y^3+3y^2$.

5. (2+0.5=2.5 μον.) (α) Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ υπό την συνθήκη $2x^2+y^2+3z^2=1$.

(β) Ποιά είναι η γεωμετρική σημασία του παραπάνω προβλήματος;

6. (1 μον.) Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$, όπου I ανοικτό διάστημα με κέντρο το 0 με $f(0)=0$, $f'(0)=1$ και τέτοια ώστε

$$e^{xf(x)}-\cos(x^2 f(x))+x-f(x)=0$$

για κάθε $x\in I$.

Τυπολόγιο

- Παράγωγος κατά κατεύθυνση $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ στο $(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(tu_1,tu_2)-f(0,0)}{t}$
- Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

- Πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$:

$$T_1(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y,\qquad T_2(x,y)=T_1(x,y)+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right]$$