

ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΙΙ ΣΕΜΦΕ, 2/6/2025

1. (1+1+1=3 μον) Βρείτε την σωστή απάντηση (με την απαραίτητη δικαιολόγηση).

(α) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \\ 1, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } y \neq 0 \end{cases}$. Τότε

(1) Το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 . Αν $f_x = f_y$ τότε (1) $f_{xx} = f_{yy}$ (2) $f_{xx} = -f_{yy}$ (3) Κανένα από τα προηγούμενα.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 . Αν $f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = 0$ και $f_{xx}(x, y) \neq 0$ για όλα τα $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε (1) Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα (2) Η f έχει ένα μοναδικό τοπικό ακρότατο (3) Δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν η f έχει ή όχι τοπικά ακρότατα.

2. (1+1+1=3 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^4 + y^4}}$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Εξετάστε αν η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Με χρήση του ορισμού της κατά κατεύθυνση παραγώγου δείξτε ότι η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ του $\mathbb{R}^2$.

(γ) Υπολογίστε τις $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ και εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

3. (1+1=2 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = \sin(xy)$ (α) Βρείτε τις μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης της f . (β) Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$.

4. (2 μον.) Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

5. (1 μον) Βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x + y + z$ υπό την συνθήκη $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

6. (1 μον) Αποδείξτε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ορισμένη σε ανοικτό διάστημα I του $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = x^{f(x)}$, για όλα τα $x \in I$.

Τυπολόγιο

• Παράγωγος κατά κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ στο $(0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t}$

• Πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$:

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y, \quad T_2(x, y) = T_1(x, y) + \frac{1}{2} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2]$$